LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 14+3 novembre
M.P.S.I.2

2023 2024

IS08

♡ 0 ♡ Calculez $\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{N.(N+1).(N+2)}$, $\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{N.(n+1).(n+2)}$ et $\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n.(n+1).(n+2)}$ (N donné dans $\mathbb{N}^*$). 4 pt.

♡ 1 ♡ Simplifiez $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{5}\right)^k$ pour n dans $\mathbb{N}$. 1 pt.

♢ 0 ♢ Montrez : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(n \geqslant \frac{\ln(500)}{\ln(5/4)}\right) \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{5}\right)^k \geqslant 4,99\right)$. 3 pt.

♢ 1 ♢ Montrez $\sum_{n=0}^{100} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = 200 - 2^{-100}$. 3 pt.

♡ 2 ♡ Les points d'affixes $(-4-2.i)$, $(9+6.i)$ et $(30+19.i)$ sont ils alignés dans le plan complexe ? 1 pt.

♢ 2 ♢ Montrez : $\int_0^{\pi/4} \frac{8.\tan(\theta)}{1+\tan(\theta)}.d\theta = \pi - \ln(4)$.

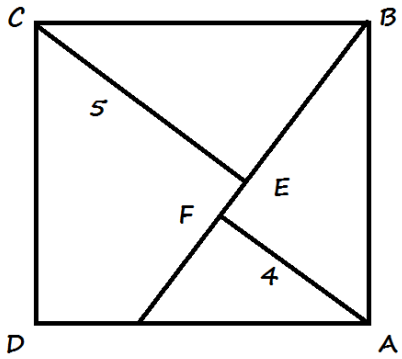
♢ 3 ♢ Calculez 2. $\int_0^{\pi} e^t.(1+t).\cos(t).dt$. 2 pt. Mais déjà, ajustez a, b, c et d pour avoir $(t \longmapsto e^t.(a.t+b).\cos(t) + e^t.(c.t+d).\sin(t))' = (t \longmapsto e^t.(1+t).\cos(t))$. 2 pt.

♢ 4 ♢ Je veux une primitive de $t \longmapsto \frac{\ln(\ln(t)).\ln(t)}{t}$, vous avez ça (et déjà, le domaine de définition) ? 3 pt.

♢ 5 ♢ f et g sont deux applications continues de $[0,\ \pi/2]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose $A = \int_0^{\pi/2} (f(t))^2.dt$, $B = \int_0^{\pi/2} f(t).g(t).dt$ et $C = \int_0^{\pi/2} (g(t))^2.dt$. Expliquez (en en faisant une seule intégrale) pourquoi $\lambda^2.A + 2.\lambda.B + C$ est toujours positif.
Déduisez $B^2 \leqslant A.C$. Montrez pour tout couple d'entiers naturels $(p,\ q)$: $(W_{p+q})^2 \leqslant W_{2.p}.W_{2.q}$. 4 pt.

♯ L'hyperfactorielle est défnie par $H(n) = \prod_{k=1}^{n} (k^k)$. Ecrivez un script `Python` qui prend en entrée `n` et retourne son hyperfactorielle. 2 pt.
Sinon, j'ai défini `Scooby`.
Que donnera `Scooby(H(10))` ? 2 pt.

```
def Scooby(N) :
....c = 0
....while N % 2 == 0 :
........N = N//2
........c += 1
....return(c)
```



Montrez pour tout n : $\ln(H(n)) \geqslant \int_1^n t.\ln(t).dt$ et calculez l'intégrale de droite. 3 pt.

La figure (A, B, C, D) est un carré ; en E et F on a des angles droits, on sait $CE = 5$ et $AF = 4$. Calculez l'aire du carré. 3 pt.

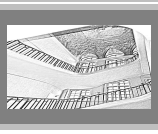
Avec adj/opp/hyp ça doit se faire.

J'ai un triangle rectangle à côtés entiers dont un des côtés vaut 53×67.
Pouvez vous retrouver l'autre côté et l'hypoténuse ?
Y a-t-il plusieurs solutions ? 4 pt.

Rappel : avec $\tan(\theta/2) = p/d$ on trouve $\cos(\theta) = \cdots$ et $\sin(\theta) = \cdots$

LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 14+3 novembre
M.P.S.I.2

2023 2024
IS08
CORRECTION



Trois sommes. IS08

La somme $\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{N.(N+1).(N+2)}$ est idiote. Tous ses termes sont égaux. Ils valent tous $\frac{2}{N.(N+1).(N+2)}$. ET il y en a N.

La somme vaut $N.\frac{2}{N.(N+1).(N+2)}$ ce qui fait $\boxed{\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{N.(N+1).(N+2)} = \frac{2}{(N+1).(N+2)}}$

Pour N égal 5, cette somme est bien $\frac{2}{5.6.7}+\frac{2}{5.6.7}+\frac{2}{5.6.7}+\frac{2}{5.6.7}+\frac{2}{5.6.7}+\frac{2}{5.6.7}$ *et pas* $\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+\frac{2}{3.4.5}+\frac{2}{4.5.6}+\frac{2}{5.6.7}$.

Dans $\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{N.(n+1).(n+2)}$, on peut sortir déjà le $\frac{2}{N}$ présent partout. Ensuite, on décompose en éléments simples

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{N.(n+1).(n+2)} = \frac{2}{N}.\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1).(n+2)} = \frac{2}{N}.\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)} = \frac{2}{N}.\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}\Big)$$

On a cette fois par exemple pour N égal à 5 la somme $\frac{2}{5.2.3}+\frac{2}{5.3.4}+\frac{2}{5.4.5}+\frac{2}{5.5.6}+\frac{2}{5.6.7}$
ce qui fait $\frac{2}{5}.\Big(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}\Big)$ *puis* $\frac{2}{5}.\Big((\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})\Big)$.

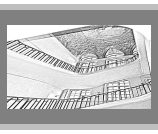
On décompose le terme général de $\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n.(n+1).(n+2)}$ en éléments simples

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n.(n+1).(n+2)} = \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{1}{(n)} - \frac{2}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)}\Big) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n)} - \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{(n+1)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+2)}$$

On sépare en trois sommes qu'on réindexe et on efface la partie commune de 2 à N

$1\times$	$\Big(1$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{4}$	$\dots$	$+\frac{1}{N}\Big)$			$\Big(1$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{4}$	$\dots$	$+\frac{1}{N}\Big)$		
$-2\times$	$\Big(\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{5}$	$\dots$	$+\frac{1}{N+1}\Big)$				$\Big(-2.\frac{1}{2}$	$-2.\frac{1}{3}$	$-2.\frac{1}{4}$	$\dots$	$-2.\frac{1}{N}$	$-2.\frac{1}{N+1}\Big)$	
$+1\times$	$\Big(\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{5}$	$+\frac{1}{6}$	$\dots$	$+\frac{1}{N+2}\Big)$					$\Big(\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{4}$	$\dots$	$+\frac{1}{N}$	$+\frac{1}{N+1}$	$+\frac{1}{N+2}\Big)$

Il ne reste que $1+\frac{1}{2}-2.\frac{1}{2}-2.\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}$ ce qui fait $\boxed{\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n.(n+1).(n+2)} = \frac{N^2+3.N}{2.(N+1).(N+2)}}$



Série géométrique. IS08

Le cours donne $\sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{4}{5}\Big)^k = \frac{1-\Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}} = 5-5.\Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1}$.

Sinon, on le prouve car $\Big(1-\frac{4}{5}\Big).\sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{4}{5}\Big)^k = \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{4}{5}\Big)^k - \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{4}{5}\Big)^{k+1} = 1-\Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1}$.

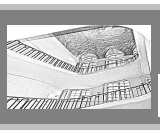
On veut montrer : $\Big(n \geqslant \frac{\ln(500)}{\ln(5/4)}\Big) \Rightarrow \Big(5-5.\Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1} \geqslant 4,99\Big)$.

On va donc supposer $\Big(n \geqslant \frac{\ln(500)}{\ln(5/4)}\Big)$ sans trop savoir quoi en faire. Et on va montrer $\Big(5-5.\Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1} \geqslant 4,99\Big)$ en trouvant le signe de la différence :

$$\Big(5-5.\Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1} - 4,99 = 0,01 - 5.\Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1} = 5.\Big(\frac{1}{500} - \Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1}\Big)$$

Ca prend forme, non ? On peut enchainer des implications par produit en croix (positif) et passage à l'exponentielle (croissante)

$$\begin{array}{lll}
\left(n \geqslant \frac{\ln(500)}{\ln(5/4)}\right) & \Rightarrow & \left(n.\ln(5/4) \geqslant \ln(500)\right) \\
\left(n \geqslant \frac{\ln(500)}{\ln(5/4)}\right) & \Rightarrow & \left(e^{n.\ln(5/4)} \geqslant e^{\ln(500)} = 500\right) \\
\left(n \geqslant \frac{\ln(500)}{\ln(5/4)}\right) & \Rightarrow & \left(\left(\frac{5}{4}\right)^n \geqslant 500\right) \\
\left(n \geqslant \frac{\ln(500)}{\ln(5/4)}\right) & \Rightarrow & \left(\left(\frac{4}{5}\right)^n \leqslant \frac{1}{500}\right) \\
\left(n \geqslant \frac{\ln(500)}{\ln(5/4)}\right) & \Rightarrow & \left(-5.\left(\frac{4}{5}\right)^n \geqslant -\frac{1}{100}\right) \\
\left(n \geqslant \frac{\ln(500)}{\ln(5/4)}\right) & \Rightarrow & \left(5-5.\left(\frac{4}{5}\right)^n \geqslant 5-\frac{1}{100} = 4,99\right)
\end{array}$$



Série géométrique de série géométrique. IS08

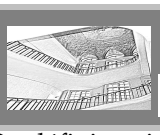
Il ne faut as avoir peur de $\sum_{n=0}^{100}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$. C'est une somme faite de 101 termes (indexés par n), et chaque terme est lui même une somme (indexée par k). On se donne donc un n et on calcule

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 2-2.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On somme 101 termes valant 2, on a un total de 202.

Ensuite, on soustrait $\sum_{n=0}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ qui vaut $\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{101}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}$ c'est à dire $2-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$.

Le total vaut bien $200-2^{-100}$.



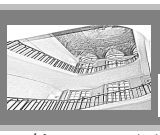
Alignement de trois points. IS08

On définit trois affixes de points et deux affixes de vecteurs

points			vecteurs	
$z_A = -4-2.i$	$z_B = 9+6.i$	$z_C = 30+19.i$	$z_{AB} = 13+8.i$	$z_{AC} = 34+21.i$

z_{AC} n'est pas multiple réel de z_{AB}, les trois points ne sont pas alignés.

Néanmoins, c'est de peu : $Arctan(21/34) \simeq 0,553$ radians et $Arctan(8/13) \simeq 0,552$ radians.
Avec un simple dessin sur papier quadrillé, on affirme « alignés ».



Intégrale trigonométrique. IS08

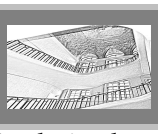
$\int_0^{\pi/4}\frac{8.\tan(\theta)}{1+\tan(\theta)}.d\theta$ existe par continuité. Monsieur Bioche nous incite à poser $t = \tan(\theta)$ (et donc ici $\theta = Arctan(t)$). On change tout ce qu'on doit changer et on décompose

$$\int_{\theta=0}^{\pi/4}\frac{8.\tan(\theta)}{1+\tan(\theta)}.d\theta = \int_{t=0}^{1}\frac{8.t}{1+t}.\frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1\left(\frac{-4}{1+t}+\frac{4.t+4}{1+t^2}\right).dt$$

On n'a plus qu'à intégrer

$$\int_{\theta=0}^{\pi/4}\frac{8.\tan(\theta)}{1+\tan(\theta)}.d\theta = \Big[-4.\ln(1+t)+2.\ln(1+t^2)+4.Arctan(t)\Big]_0^1$$

et on a la valeur demandée.



Une intégrale avec exponentielles. IS08

On dérive la somme de produits de trois termes

fonction	$e^t.(a.t+b).\cos(t)$	$+e^t.(c.t+d).\sin(t)$		on regroupe dans la dérivée	
dérivée	$e^t.(a.t+b).\cos(t)$	$+e^t.(c.t+d).\sin(t)$		$(a+c).e^t.\cos(t).t$	$(-a+c).e^t.\sin(t).t$
	$+e^t.(a).\cos(t)$	$+e^t.(c).\sin(t)$		$(a+b+d).e^t.\cos(t)$	$(-b+d+c).e^t.\sin(t)$
	$-e^t.(a.t+b).\cos(t)$	$+e^t.(c.t+d).\cos(t)$			

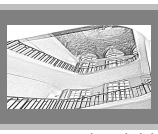
On va donc demander (en priant pour que ça marche) :
(on commence par $L1+L3$ et $L1-L3$).

$$\begin{array}{rrrrl} a & & +c & & = 1 \\ a & +b & & +d & = 1 \\ -a & & +c & & = 0 \\ & -b & +c & +d & = 0 \end{array}$$

C'est parfaitement jouable : $(a,\ b,\ c,\ d) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$.

On tient donc une primitive de notre fonction sous le signe somme :

$$\int_0^\pi 2.e^t.(1+t).\cos(t).dt = \Big[e^t.(1+t).\cos(t) + e^t.\sin(t)\Big]_0^\pi = -(\pi+1).e^\pi - 1$$



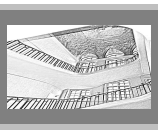
Intégrale avec logarithme. IS08

$t \longmapsto \dfrac{\ln(\ln(t)).\ln(t)}{t}$ a besoin de $t \neq 0$, mais aussi $t > 0$ et même $\ln(t) > 0$. Son domaine est $]1,\ +\infty[$.

On calcule en commençant par un changement de variable $u = \ln(t)$: $\int \frac{\ln(\ln(t)).\ln(t)}{t}.dt = \int \ln(u).u.du$

Il ne reste plus qu'à intégrer par parties $\begin{array}{|c|c|c|}\hline u & \hookleftarrow & u^2/2 \\ \hline \ln(u) & \hookrightarrow & 1/u \\ \hline \end{array}$ $\int \frac{\ln(\ln(t)).\ln(t)}{t}.dt = \int \ln(u).u.du = \left[\frac{u^2.\ln(u)}{2}\right] - \int \frac{u}{2}.du = \left[\frac{u^2.\ln(u)}{2} - \frac{u^2}{4}\right]$

Il reste à revenir à la variable initiale et à donner une fonction : $\boxed{t \longmapsto \dfrac{2.(\ln(t))^2.\ln(\ln(t)) - (\ln(t))^2}{4}}$



Une inégalité avec les intégrales de Wallis. IS08

La quantité $\lambda^2.A + 2.\lambda.B + C$ s'écrit $\lambda^2.\int_0^{\pi/2}(f(t))^2.dt + 2.\lambda.\int_0^{\pi/2} f(t).g(t).dt + \int_0^{\pi/2}(f(t))^2.dt$ et on en fait une unique intégrale

$$\lambda^2.A + 2.\lambda.B + C = \int_0^{\pi/2}\Big(\lambda^2.(f(t))^2.dt + 2.\lambda.f(t).g(t) + (g(t))^2\Big).dt$$

et même (remarquablement) : $\lambda^2.A + 2.\lambda.B + C = \int_0^{\pi/2}\Big(\lambda.f(t) + g(t)\Big)^2.dt$. La fonction qu'on intègre est positive (carré de réel). Donc, l'intégrale l'est aussi.

Si on regarde $\lambda^2.A + 2.\lambda.B + C$ comme un trinôme du second degré, on vient de dire que ce trinôme restait toujours positif, quoi que fasse λ.
C'est donc que ce trinôme ne change pas de signe quand λ décrit $\mathbb{R}$. Son discriminant est donc négatif ou nul (contraposée de « discriminant positif implique change de signe entre les racines).
On a donc $(2.B)^2 - 4.A.C \leqslant 0$ et ceci se résume en $B^2 \leqslant A.C$. On résume :

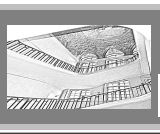
$$\Big(\int_0^{\pi/2} f(t).g(t).dt\Big)^2 \leqslant \Big(\int_0^{\pi/2}(f(t))^2.dt\Big).\Big(\int_0^{\pi/2}(g(t))^2.dt\Big)$$

On l'appelle inégalité de Cauchy-Schwarz sur les intégrales.

On en a une sur les sommes qui se prouve de la même façon : $\Big(\sum_{k=1}^n a_k.b_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n (a_k)^2\Big).\Big(\sum_{k=1}^n (b_k)^2\Big)$.

Quel rapport avec les intégrales de Wallis ? On se donne p et q et on définit $f = \sin^p$ et $g = \sin^q$. On a directement

$$(W_{p+q})^2 \leqslant W_{2.p}.W_{2.q}$$



Hyperfactorielle. IS08

boucle impérative	appel récursif

`def hyper(n) :`
`....p = 1`
`....for k in range(1, n+1) :`
`........p *= k**k`
`....return p`
	`def hyper(n) :`
	`....if n == 1 :`
	`........return 1`
	`....return (n**n)*hyper(n-1))`

Ensuite, que fait `Scooby` ? Il prend un entier `N` et tant qu'il est divisible par `2`, il le divise par `2`. Et à chaque étape, il incrément de `1` un compteu `c`.
Bref, il compte le nombre de fois où on peut diviser `N` par `2`.

Par exemple, partant de `N = 2024`, il exécute

`N = 2024`	`c = 0`
`N = 1012`	`c = 1`
`N = 506`	`c = 2`
`N = 253`	`c = 3`
`N non pair`	`return 3`

La question devient : quelle est la puissance de 2 dans `H(10)` (on parle de $2-$valuation [1]).
Or, $H(10) = 1^1.2^2.3^3.4^4.5^5.6^6.7^7.8^8.9^9.10^{10}$.
On va mettre de côté les termes impairs (sans utilité pour l'exposant de 2) et mettre en avant les faceturs 2 dans les autres :

$$H(10) = \left(2^2.(2^2)^4.(2.3)^6.(2^3)^8.(2.5)^{10}\right).\left(1^1.3^3.5^5.7^7.9^9\right)$$

$$H(10) = \left(2^{2+2.4+6+3.8+10}\right).\left((3)^6.(5)^{10}\right).\left(1^1.3^3.5^5.7^7.9^9\right)$$

L'exposant qui intéresse `Scooby` est alors $2+8+6+24+10$ ce qui fait $\boxed{50}$

On termine avec un logarithme et une intégrale. On sent venir la somme puis la comparaison série intégrale.
On a en effet $\ln(H(n)) = \sum_{k=1}^{n} k.\ln(k) = \sum_{k=2}^{n} k.\ln(k)$.
On se donne un entier naturel n.
Pour chaque k de 2 à n, on a pour tout t de $[k-1,\ k]$: $t.\ln(t) \leqslant k.\ln(k)$ (l'application $t \longmapsto t.\ln(t)$ est croissante sur $[1,\ +\infty[$). On intègre de $k-1$ à k :

$$\int_{k-1}^{k} t.\ln(t).dt \leqslant \int_{t=k-1}^{k} k.\ln(k).dt = k.\ln(k)$$

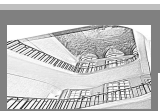
On somme de 2 à n. Le premier membre met bout à bou des intégrales par relation de Chasles, de $\int_{2-1}^{2} t.\ln(t).dt$ à $\int_{n-1}^{n} t.\ln(t).dt$

$$\int_{1}^{n} t.\ln(t).dt = \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} t.\ln(t).dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} k.\ln(k) = \ln(H(n))$$

Le premier membre se calcule par parties :

$$\int_1^n t.\ln(t).dt = \left[\frac{t^2}{2}.\ln(t)\right]_1^n - \int_1^n \frac{t^2}{2}.\frac{dt}{t} = \left[\frac{t^2}{2}.\ln(t)\right]_1^n - \int_1^n \frac{t}{2}.dt = \left[\frac{t^2}{2}.\ln(t) - \frac{t^2}{4}\right]_1^n$$

On trouve la primitive $t \longmapsto \dfrac{t^2.\ln(t)}{2} - \dfrac{t^2}{4}$ et l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_1^n t.\ln(t).dt = \frac{2.n^2.\ln(n) - n^2 + 1}{4}}$



Un triangle pythagoricien. IS08

On fait appel à notre mémoire : les côtés d'un triangle pythagoricien c'est $2.p.q$, q^2-p^2 (et hypoténuse p^2+q^2).
Ici, on n'a pas le choix : q^2-p^2 vaut 53.67. Et comme 53 et 67 sont premiers entre eux, on déduit $p+q=67$ et

1. la $p-$valuation est l'exposant de p dans la décomposition de n en produit de facteurs premiers

$q - p = 53$ (pour que le produit vaille 5367).

On résout le système de rien : $q = \dfrac{53+67}{2} = 60$ et $p = \dfrac{67-53}{2} = 7$.

Les trois côtés du triangle sont donc

$2 \times 7 \times 60 = 840$	$(60+7).(60-7) = 53 \times 67 = 3551$
$q^2 + p^2 = 60^2 + 7^2 = 3649$	

Mais peut on avoir une autre solution ? Oui, avec $(q+p).(q-p) = (3551).1$ qui donne $p = 1775$ et $q = 1776$

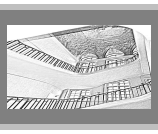
$2 \times 1775 \times 1776 = 6\,304\,800$	$(1776+1775).(1776-1775-7) = 3\,551$
$q^2 + p^2 = 60^2 + 7^2 = 6\,304\,801$	

Mais j'en ai encore d'autres. Je peux construire un triangle dont un côté vaut 53 (ce sera $(q+p).(q-p)$ avec $q - p = 1$) puis lui appliuer une homothétie de rapport 67.

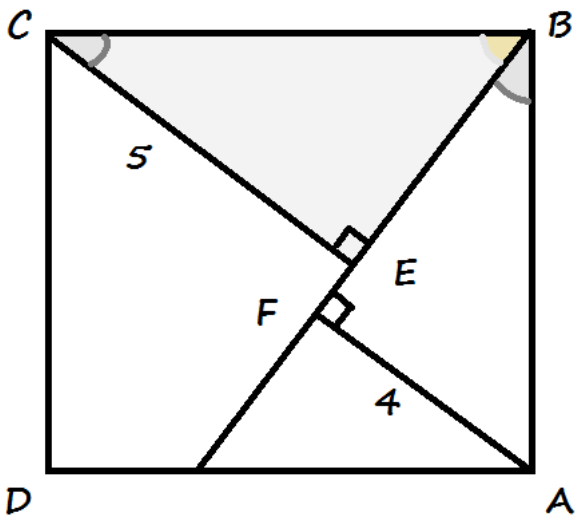
$2 \times 26 \times 27$	53	homothétie de rapport 67	$2 \times 26 \times 27 \times 67 = 94\,068$	$53 \times 67 = 3\,551$
$26^2 + 27^2 = 1\,405$			$(26^2 + 27^2) \times 67 = 94\,135$	

Et il y a une autre solution

$2 \times 33 \times 34$	67	homothétie de rapport 53	$2 \times 33 \times 34 \times 53 = 118\,932$	$53 \times 67 = 3\,551$
$33^2 + 34^2 = 2\,245$			$(33^2 + 34^2) \times 53 = 118\,985$	



Un carré et quelques mesures. IS08



Les deux angles marqués en B et en C sont égaux (car complémentaires de l'angle CBE).

En notant α cet angle, on a

$\sin(\alpha) = 4 / x$ (dans BFA)

$\cos(\alpha) = 5 / x$ (dans CEB)

Avec $\cos^2 + \sin^2 = 1$ on obtient

$x^2 = 5^2 + 4^2 = 41$.

L'aire du carré vaut 41.