LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 21 novembre
M.P.S.I.2

2023 2024

IS09

♡ 0 ♡ On se donne quatre réels $(a,\ \alpha,\ b,\ \beta)$ non nuls et on définit les points A et B d'affixes $z_A = a + i.\alpha$ et $z_B = b + i.\beta$ et les deux vecteurs $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}\begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix}$. Associez deux à deux (avec preuve)

$\Re e(\overline{z_A}.z_B)$	$Arg\left(\frac{\lvert z_A\rvert.z_B}{z_A.\lvert z_B\rvert}\right)$	$\Im m(\overline{z_A}.z_B)$	$\Im m(z_A.\overline{z_A})$	$\Re e(z_A.\overline{z_A})$	$\lvert\Im m(z_A.\overline{z_B})\rvert$
$\lvert OA\rvert^2$	$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$	$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$	0	$2.Aire(O,A,B)$	$mesure(\widehat{AOB})$

4 pt.

◇ 0 ◇ Résolvez $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3.dt}{(t+1).(t+a)} = \ln(4)$ d'inconnue a dans $\mathbb{R}$. 4 pt.

♡ 1 ♡ Prouvez $sh(2.x) = 2.sh(x).ch(x)$ et $th\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{sh(x)}{1+ch(x)}$. 3 pt.

♡ 2 ♡ Montrez que $ch(\ln(3+2.\sqrt{2}))$ ou $sh(\ln(3+2.\sqrt{2}))$ est rationnel. 1 pt.

◇ 1 ◇ Résolvez : « $ch(\ln(n+4.\sqrt{3})) \in \mathbb{Q}$ » d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$. 2 pt.

♡ 3 ♡ Montrez $Tr(A.B) = Tr(B.A)$ si A et B sont deux matrices de taille 3 sur 3.
Déduisez $Tr(P^{-1}.M.P) = Tr(M)$ pour M et P carrée de taille 3 avec P inversible. 3 pt.

♡ 4 ♡ Résolvez $\log_3((\log_2(x))^5) = 5$ d'inconnue réelle x. 1 pt.

♡ 5 ♡ Résolvez $\dfrac{(n-1)!+(n+1)!}{n^3-1} = 24$ d'inconnue entière n. 2 pt.

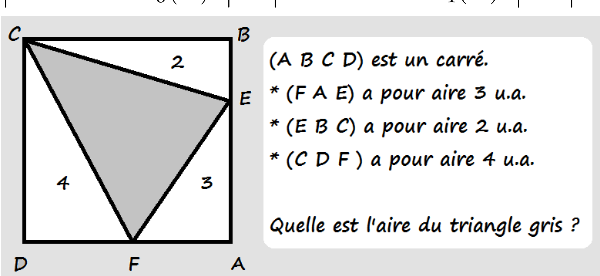
◇ 2 ◇ n est un entier naturel donné. Pour tout k de 0 à n, on définit $I_{n,k} = \displaystyle\int_{x=0}^{1} \frac{x^k}{k!}.\frac{(1-x)^{n-k}}{(n-k)!}.dx$. Montrez pour tout k de 0 à $n-1$: $I_{n,k+1} = I_{n,k} = \dfrac{1}{(n+1)!}$. 3 pt.

◇ 3 ◇ On note T_n le n^{ieme} polynôme de Tchebychev. Calculez $T'_{13}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. 2 pt.

◇ 4 ◇ Il parait que pour calculer $T'_n(1)$ sans utiliser d'équivalent, il suffit de dériver deux fois la relation fondamentale. Faites le. 2 pt.

◇ 5 ◇ Montrez : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n\left(\dfrac{5}{4}\right) = 2^{n-1} + 2^{-n-1}$. 3 pt.

◇ 6 ◇ Montrez qu'une et une seule de ces deux égalités est vraie :
$\begin{vmatrix} 2.T_6(X) & 1 \\ 1 & T_6(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.T_4(X) & T_4(X) \\ 3 & 2.T_4(X) \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} 2.T_6(X) & 1 \\ 1 & T_6(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.T_4(X) & T_4(X) \\ 3 & 2.(T_4(X))^2 \end{vmatrix}$. 3 pt.



3pt

♯0 Rappel : si **n** est un entier, `str(n)` est la chaine de caractères représentant **n** (exemple : `str(2023)` donne `'2023'` avec guillemets.
Le test `a in mot` vérifie si le caractère `a` est dans la chaine de caractères `mot` (exemple `'n' in 'bonjour'` donne `True` et `'n' in 'au revoir'` donne `False`).
La factrielle de l'entier n (notée ici $n?$) est le produit des entiers de 1 à n ne contenant pas de chiffre 0.
Par exemple 22? vaut $1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times11\times12\times13\times14\times15\times16\times17\times18\times19\times21\times22$.
Justifiez : $2023? = 1999?$. Ecrivez un script `python` qui prend en entrée `n` et calcule sa factrielle. 3 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 21 novembre
M.P.S.I.2

2023 2024
IS09
CORRECTION

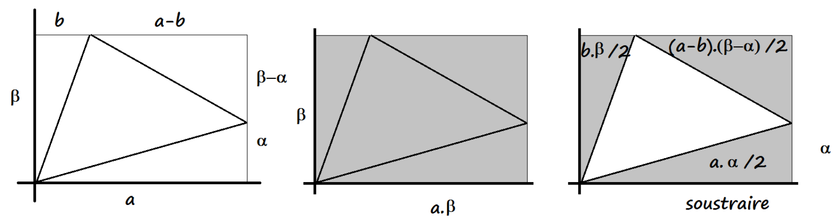
Calcul dans $\mathbb{C}$. IS09

Puisqu'on nous a donné des coordonnées, on effectue les calculs explicites

$\Re e(\overline{z_A}.z_B)$	$Arg\left(\frac{\lvert z_A\rvert.z_B}{z_A.\lvert z_B\rvert}\right)$	$\Im m(\overline{z_A}.z_B)$	$\Im m(z_A.\overline{z_A})$	$\Re e(z_A.\overline{z_A})$	$\lvert\Im m(z_A.\overline{z_B})\rvert$
$\Re e((a-i.\alpha).(b+i.\beta))$	$Arg\left(\frac{r_A..r_B.e^{i.\beta}}{r_A.e^{i.\alpha}.r_B}\right)$	$\Im m((a-i.\alpha).(b+i.\beta))$	$\Im m((a+i.\alpha).(a-i.\alpha))$	$\Re e((a+i.\alpha).(a-i.\alpha))$	$\lvert\Im m((a+i.\alpha).(b-i.\beta))\rvert$
$\Re e((a.b+\alpha.\beta)+i.(\ldots))$	$Arg\left(\frac{e^{i.\beta}}{e^{i.\alpha}}\right)$	$\Im m((\ldots)+i.(a.\beta-\alpha.b))$	$\Im m(a^2+\alpha^2)$	$\Re e(a^2+\alpha^2)$	$\lvert\Im m((\ldots)+i.(b.\alpha-a.\beta))\rvert$
$a.b+\alpha.\beta$	$Arg(e^{i.(\beta-\alpha)})$	$a.\beta-\alpha.b$	0	$a^2+\alpha^2$	$\lvert a.\beta-\alpha.b\rvert$
$\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix}.$	$\beta-\alpha$				

$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$	$\widehat{AOB}$	$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$	0	$\lvert OA\rvert^2$	$2.\lvert Aire(OAB)\rvert$

La formule $|a.\beta-\alpha.b|$ doit donner l'aire du triangle (multipliée par 2), par élimination.
Et aussi par un découpage judicieux.



Trace de matrices. IS09

Comme indiqué en cours, vous prenez deux matrices avec dix huit coefficients, mais vous ne calculez que les six termes utiles.
On testera votre capacité « scientifique » dans le calcul
On testera votre capacité mathématique dans le choix des noms de variables (utiliser des primes et secondes ou même des a_1^1, a_1^2 et autres plutôt que l'alphabet de a à r, ne pas calculer les termes inutiles)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.\alpha+b.\alpha'+c.\alpha'' & & \\ & a'.\beta+b'.\beta'+c'.\beta'' & \\ & & a''.\gamma+b''.\gamma'+b''.\gamma'' \end{pmatrix}$$

On calcule la trace et on trouve $(a.\alpha+a'.\beta+a''.\gamma)+(b.\alpha'+b'.\beta'+b''.\gamma'')+(c.\alpha''+c'.\beta''+c''.\gamma'')$ qu'on aurait trouvée avec l'autre produit.

Ensuite, il suffit d'utiliser cette formule avec $A=(P^{-1}.M)$ et $B=P$

$$Tr(P^{-1}.M.P)=Tr\big((P^{-1}.M).(P)\big)=Tr\big((P).(P^{-1}.M)\big)=Tr(P.(P^{-1}.M)=Tr(I_3.M)=Tr(M)$$

Une intégrale avec un paramètre. IS09

On présupposera que a est strictement négatif pour que l'intégrale existe. On décompose en éléments simples et on intègre à horizon fini

$$\int_0^x \frac{3.dt}{(t+1).(t+a)}=\int_0^x\left(\frac{3}{1-a}.\frac{1}{t+a}+\frac{3}{-a+1}.\frac{1}{t+1}\right).dt=\left[\frac{3}{1-a}.\Big(\ln(t+a)-\ln(t+1)\Big)\right]_0^x$$

$$\int_0^x \frac{3.dt}{(t+1).(t+a)}=\frac{3}{1-a}.\ln\left(\frac{x+a}{x+1}\right)-\frac{3}{1-a}.\ln(a)$$

Si on fait tendre (seulement maintenant) x vers $+\infty$, l'intégrale a une limite (le quotient tend vers 1, son logarithme tend vers 0), et il reste

$$\int_0^{+\infty} \frac{3.dt}{(t+1).(t+a)} = \frac{3}{a-1}.\ln(a)$$

Fin du calcul, on passe à l'équation (c'est donc seulement maintenant qu'on ajoute des « $=\ln(2)$ » dans nos formules.

Rappelons que tout ce qui est au dessus est juste, quel que soit a.
En revanche, l'égalité $\int_0^{+\infty} \frac{3.dt}{(t+1).(t+a)} = \ln(4)$ *ne sera vraie que pour quelques valeurs de a, que l'on cherche.*
Et le jeu d'égalité $\int_0^{+\infty} \frac{3.dt}{(t+1).(t+a)} = \frac{3}{a-1}.\ln(a) = \ln(4)$ *n'a pas de sens car il est fait d'une vraie égalité et d'une question.*

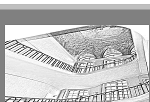
On résout donc $3.\ln(a) = (a-1).\ln(4)$ d'inconnue a.
Une solution (presque évidente si on est le concepteur du sujet) est $\boxed{a=4}$

Et une autre solution est $a=1$, mais elle soulève un autre problème, le voyez vous ?

Mais une question (évidente si on est élève) est « mais est ce la seule ? ».

On doit donc étudier la différence et ses variations $a \longmapsto 3.\ln(a) + (1-a).\ln(4)$ sur $]0,\ +\infty[$.
La dérivée $a \longmapsto \frac{3}{a} - \ln(4)$ s'annule et change de signe en un point.
L'application est croissante sur $]0,\ 3/\ln(4)]$ puis décroissante sur $[3/\ln(4),\ +\infty[$. L'équation n'aura donc pas plus de deux racines.
On les a toutes.

Remarque liée à ce que j'ai écrit plus haut : j'aurais pu poser un exercice plus perfide : $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1).(t+a)} = 1$. *Il fallait alors se poser la question « et si a vaut 1, notre décomposition en éléments simples de première espèce n'est plus valable et la solution est* $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1).(t+1)} = \left[-\frac{1}{t+1}\right]_{t0}^{+\infty} = 1$.



Cosinus (et sinus) hyperbolique(s). IS09

On va calculer $ch(\ln(3+2.\sqrt{2})$ et $sh(\ln(3+2.\sqrt{2})$ et voir si l'un des deux est rationnel.

$ch(\ln(3+2.\sqrt{2}))$	$= \frac{e^{\ln(3+2.\sqrt{2})} + e^{-\ln(3+2.\sqrt{2})}}{2}$	$ch(\ln(3+2.\sqrt{2}))$	$= \frac{e^{\ln(3+2.\sqrt{2})} - e^{-\ln(3+2.\sqrt{2})}}{2}$
	$= \frac{3+2.\sqrt{2} + \frac{1}{3+2.\sqrt{2}}}{2}$		$= \frac{3+2.\sqrt{2} - \frac{1}{3+2.\sqrt{2}}}{2}$
	$= \frac{3+2.\sqrt{2} + \frac{3-2.\sqrt{2}}{3^2-(2.\sqrt{2})^2}}{2}$		$= \frac{3+2.\sqrt{2} - \frac{3-2.\sqrt{2}}{3^2-(2.\sqrt{2})^2}}{2}$
	$= \frac{3+2.\sqrt{2}+3-2.\sqrt{2}}{2} = 3$		$= \frac{3+2.\sqrt{2}-3+2.\sqrt{2}}{2} = 2.\sqrt{2}$

Un des deux est rationnel (le cosinus hyperbolique). L'affirmation est donc vraie.

De la même façon,

$$ch(\ln(n+4.\sqrt{3})) = \frac{n+4.\sqrt{3} + \frac{1}{4+n.\sqrt{3}}}{2} = \frac{n+4.\sqrt{3} + \frac{n-4.\sqrt{3}}{n^2-3.16}}{2} = \frac{(n^2-48).(n+4.\sqrt{3}) + n - 4.\sqrt{3}}{2.(n^2-48)}$$

Mais avant de commencer à résoudre l'équation, considérons son domaine :
l'application ch n'a aucune exigence (oui, « application »)

le logarithme exige : $n \geqslant -4.\sqrt{3}$.
Le domaine sur lequel on va travailler est $]-4.\sqrt{3},\ +\infty[$

Dans la quantité écrite plus haut, le dénominateur est rationnel (et même entier). Par équivalence (dans un sens « multiplication par $2.(n^2-48)$ » et dans l'autre par « division par $2.(n^2-48)$ ») :

$$(ch(\ln(n+4.\sqrt{3})) \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow \big((n^2-48).(n+4.\sqrt{3})+n-4.\sqrt{3} \in \mathbb{Q}\big)$$

De même, par addition ou soustraction du rationnel $(n^2-48.).n+n$

$$(ch(\ln(n+4.\sqrt{3})) \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow \big((n^2-48).4.\sqrt{3}-4.\sqrt{3} \in \mathbb{Q}\big)$$

Comme $\sqrt{3}$ est irrationnel, la seule solution est $(n^2-48-1).4=0$.
On trouve deux solutions : $n=7$ et $n=-7$.
Mais -7 n'est pas dans notre domaine (de peu, mais $-7=-\sqrt{49}<-\sqrt{48}=-4.\sqrt{3}$). On peut conclure : $\boxed{S=\{7\}}$

Une équation factorielle. IS09

Pour résoudre $\dfrac{(n-1)!+(n+1)!}{n^3-1}=24$, on simplifie le premier membre en factorisant le numérateur par $(n-1)!$ et le dénominateur par $n-1$ (classiques : $n^2-1=(n-1).(n+1)$ et $n^3-1=(X-1).(X^2+X+1)$)
$\frac{(n-1)!+(n+1)!}{} = \frac{(n-1)!.\big(n.(n+1)+1\big)}{(n-1).(n^2+n+1)} = \frac{(n-1)!.(n^2+n.1)}{(n-1).(n^2+n+1)} = \frac{(n-1)!}{n-1} = (n-2)!$
L'équation devient juste $(n-2)!=4!$. L'unique solution est $\boxed{n=6}$

On pouvait la deviner, mais qui pouvait garantir qu'il n'y avait qu'elle ?

Logarithme de logarithme. IS09

Pour que $\log_3((\log_2(x))^5)=5$ ait un sens il faut que x soit strictement positif, de même que $\log_2(x)$ (ce qui impose $x>1$).
L'équation devient $5.\log_3((\log(x)))=5$ ce qui donne $\dfrac{\ln(\log_2(x))}{\ln(3)}=1$ puis $\ln(\log_2(x))=\ln(3)$. Par passage à l'exponentielle (injective) : $\log_2(x)=3$ et enfin $x=2^3$. L'unique solution est donc $\boxed{x=8}$

Intégrales et factorielles. IS09

Chaque intégrale $I_{n,k}$ et $I_{n,k+1}$ existe par continuité des fonctions sous le signe somme.
Les puissances de k nous donnent envie d'intégrer $I_{n,k+1}$ par parties

$\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{(k+1).x^{k+1-1}}{(k+1)!}$	$=$	$\dfrac{x^k}{k!}$
$\dfrac{(1-x)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}$	$\hookleftarrow$	$\dfrac{(1-x)^{n-k}}{(n-k).(n-k-1)!}$	$=$	$\dfrac{(1-x)^{n-k}}{(n-k)!}$

$$I_{n,k}=\int_{x=0}^{1}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.\frac{(1-x)^{n-k}}{(n-k)!}.dx=\Big[\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.\frac{-(1-x)^{n-k}}{(n-k)!}\Big]_{x=0}^{1}+\int_0^1\frac{x^k}{k!}.\frac{(1-x)^{n-k}}{(n-k)!}.dx$$

Les deux termes du « terme crochet » sont nuls (à cause de $\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ en 0 et à cause de $\dfrac{-(1-x)^{n-k}}{(n-k)!}$ en 1 , car il n'y a même pas de 0^0).
Il reste $I_{n,k+1}=I_{n,k}$.
Mais alors, la suite $(I_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ est donc constante. Mais alors que vaut elle ? Calculons la pour une valeur de k bien choisie, comme $k=n$. On a alors

$$I_{n,k}=I_{n,n}=\int_0^1\frac{x^n}{n!}.\frac{(1-x)^0}{0!}.dx=\int_0^1\frac{x^n}{n!}.dx=\Big[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Big]_0^1=\frac{1}{(n+1)!}$$

On a une relation qui caractérise les polynômes de Tchebychev : $\forall(n,\ \theta)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta))=\cos(n.\theta)$.

On la dérive une fois, puis on choisit n et θ

$$\forall(n,\ \theta)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R},\ -\sin(\theta).T'_n(\cos(\theta))=-n.\sin(n.\theta)$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).T'_{13}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=-13.\sin\left(13.\frac{\pi}{3}\right)$$

Il suffit ensuite de se placer sur le cercle trigonométrique de de voir les $sin(\pi/3)$ se simplifier $\boxed{T'_{13}\left(\frac{1}{2}\right)=13}$

On peut ensuite dériver derechef [1]

$$\forall(n,\ \theta)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R},\quad \begin{array}{ccc} \cos(\theta) & = & T_n(\cos(\theta) \\ -n.\sin(\theta) & = & -\sin(\theta).T'_n(\cos(\theta)) \\ -n^2.\cos(n.\theta) & = & -\cos(\theta).T'_n(\cos(\theta))+\quad(\sin(\theta))^2.T'_n(\cos(\theta)) \end{array}$$

Appliquons la dernière en $\theta=0$ et on a $-1.T'_n(1)+0=-n^2.1$ et c'est gagné, sans équivalent des sinus.

Pour $T_n\left(\dfrac{5}{4}\right)$ on sort de notre zone de confort. Ou alors on fait appel au cosinus hyperbolique $T_n(ch(t))=ch(n.t)$.
Mais on peut se contenter d'une récurrence à double hérédité pour établir la formule demandée :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ P_n=\left(T_n\left(\frac{5}{4}\right)=2^{n-1}+2^{-n-1}\right)$$

Au rang 0 : $\left(T_0\left(\dfrac{5}{4}\right)=1\ et\ 2^{0-1}+2^{-0-1}=1\right)$ c'est bon.
Au rang 1 : $\left(T_0\left(\dfrac{5}{4}\right)=1\ et\ 2^{1-1}+2^{-1-1}=2+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}\right)$ c'est bon aussi.

Oui, il faut initialiser à deux rangs, car on va travailler avec hérédité double.

On se donne n et on suppose P_{n-1} et P_n vraies : $\left(T_{n-1}\left(\dfrac{5}{4}\right)=2^{n-1-1}+2^{-n}\right)$ et $\left(T_n\left(\dfrac{5}{4}\right)=2^{n-1}+2^{-n-1}\right)$.

On calcule alors $T_{n+1}\left(\dfrac{5}{4}\right)$ avec l'espoir de voir surgir 2^n+2^{-n-2}. Pour ce faire, on utilise la relation de construction par récurrence

$$T_{n+1}\left(\frac{5}{4}\right)=2.\frac{5}{4}.T_n\left(\frac{5}{4}\right)-T_{n-1}\left(\frac{5}{4}\right)=2.\frac{5}{4}.\left(2^{n-1}+2^{-n-1}\right)-\left(2^{n-2}+2^{-n}\right)$$

On regroupe les termes de même puissance

$$T_{n+1}\left(\frac{5}{4}\right)=2^n.\left(2.\frac{5}{4}.2^{-1}-2^{-2}\right)+2^{-n}\left(2.\frac{5}{4}.2^{-1}-1\right)=2^n.\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)+2^{-n}\left(\frac{5}{4}-1\right)$$

Il reste bien $T_{n+1}\left(\dfrac{5}{4}\right)=2^n.1+2^{-n}.2^{-2}=2^{(n+1)-1}+2^{-(n+1)-1}$.

L'égalité $\begin{vmatrix} 2.T_6(X) & 1 \\ 1 & T_6(X) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2.T_4(X) & T_4(X) \\ 3 & 2.(T_4(X))^2 \end{vmatrix}$ affirme juste $2.(T_6(X))^2-1=4.(T_4(X))^3-3.T_4(X)$.
On regarde la fonction polynôme différence : $x\longmapsto(2.(T_6(x))^2-1)-(4.(T_4(x))^3-3.T_4(x))$.
On la regarde sur $[-1,\ 1]$ en changeant de variable $(2.(T_6(\cos(\theta)))^2-1)-(4.(T_4(\cos(\theta)))^3-3.T_4(\cos(\theta)))$
On reconnaît $(2.(\cos^2(6.x)-1)-(4.\cos^3(4.x)-3.\cos(x))$ c'est à dire $\cos(12.x)-\cos(12.x)$.
La fonction polynôme est nulle sur tout $[-1,\ 1]$.
Le polynôme a une infinité de racines.
Il est nul.

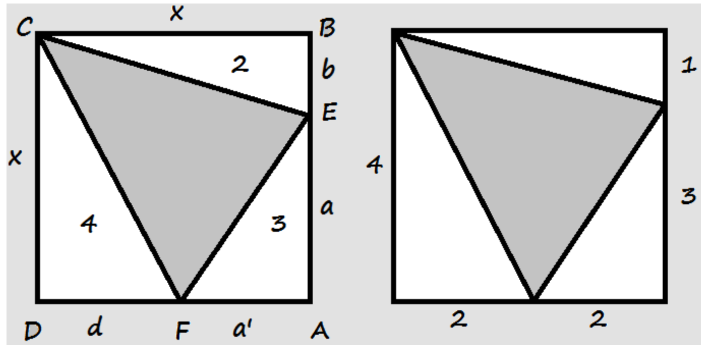
On avait en fait pour les observateurs $T_2(T_6(X))$ d'un côté et $T_3(T_4(X))$ de l'autre.

1. derechef est l'adverbe (de langage « soutenu ») signifiant « à nouveau »

L'égalité $\begin{vmatrix} 2.T_6(X) & 1 \\ 1 & T_6(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.T_4(X) & T_4(X) \\ 3 & 2.T_4(X) \end{vmatrix}$ ne peut pas être vraie, car du côté gauche on a un polynôme de degré 12 et à droite on a un polynôme de degré 8.

Un carrée et des triangles. IS09

On note x le côté (inconnu) du carré, et on introduit quelques longueurs : $a = AE$, $b = BE$, $d = DF$.
On sait par exemple $\dfrac{x.b}{2} = 2$ et $\dfrac{x.d}{2} = 4$ (aires EBC et aire CDF).
On déduit tout de suite $d = 2.b$. Par soustraction : $a = x - b$ et $a' = x - d = x - 2.b$.
On calcule l'aire de FAE : $(x - b).(x - 2.b) = 6$.
Mais en remplaçant b par $\dfrac{4}{x}$ (on l'a dit avec EBC), on trouve finalement $x^2 + \dfrac{32}{x^2} = 18$.



C'est une équation du second degré en x^2 dont les racines sont 16 et 2.
x étant positif, il peut valoir 4 ou $\sqrt{2}$.
La solution $x = \sqrt{2}$ conduit à $b = 2.\sqrt{2}$ et $a < 0$ ce qui est absurde.
Il ne reste que $x = 4$. On reporte dans les autres mesures.
L'aire qu'il reste est donc $16 - 4 - 3 - 2$ ce qui fait 7.

Factrielle. IS09

Pour passer de 1999? à 2023? il faut multiplier par 2000, 2001, 2002 et ainsi de suite jusqu'à 2023. mais tous ces nombres contiennent un chiffre 0. On ne les garde pas.

```
def factrelle(n) :
....p = 1
....for k in range(1, n+1) :
.......if not('0' in str(k)) :
...........p *= k
....return(p)
```

Et ça n'a strictement aucun intérêt.