Polynômes de Tchebychev

1 Les formules

n	Formule	$T_n(X)$
0	$\cos(0.\theta) = 1$	1
1	$\cos(1.\theta) = \cos(\theta)$	X
2	$\cos(2.\theta) = 2.\cos^2(\theta) - 1$	$2.X^2 - 1$
3	$\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$	$4.X^3 - 3.X$
4	$\cos(4.\theta) = 8.\cos^4(\theta) - 8.\cos^2(\theta) + 1$	$8.X^4 - 8.X^2 + 1$
5	$\cos(5.\theta) = 16.\cos^5(\theta) - 20.\cos^3(\theta) + 5.\cos(\theta)$	$16.X^5 - 20.X^3 + 5.X$
6	$\cos(6.\theta) = 32.\cos^6(\theta) - 48.\cos^4(\theta) + 18.\cos^2(\theta) - 1$	$32.X^6 - 48.X^4 + 18.X^2 - 1$

Attention, $T_n(X)$ est un polynôme, X est une variable formelle, ce n'est pas un nombre, ni même un cosinus.
On peut ensuite substituer la variable et créer la fonction polynôme $x \longmapsto T_n(x)$ sur $\mathbb{R}$ et même sur $\mathbb{C}$ (et sur $M_p(\mathbb{R})$).
La formule est donc $\cos(n.\theta) = T_n(\cos(\theta))$ et pas $\cos(n.\theta) = T_n(X)$ et encore moins $\cos(n.\theta) = T_n(\theta)$.

Les formules sont à connaître jusqu'à $n = 4$.

2 Comment accéder rapidement aux premières formules

1. La formule $\cos(2.\theta) = 2.\cos^2(\theta) - 1$ est du cours et vient de $\cos(2.\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$.

2. La formule $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta))$ est aussi du cours et vient par exemple de

$$\cos(3.\theta) = \cos(\theta).\cos(2.\theta) - \sin(\theta).\sin(2.\theta)$$

dans laquelle on remplace $\cos(2.\theta)$ par $2.c^2 - 1$ et $\sin(\theta).\sin(2.\theta)$ par $c.2.s.c = 2.s^2.c = 2.(1 - c^2).c$. D'autres méthodes existent (voir $n = 5$).

3. Pour n égal à 4, on peut écrire $\cos(4.\theta) = 2.\cos^2(2.\theta) - 1 = 2.(2.\cos^2(\theta) - 1)^2 - 1$.
On fera de même pour $n = 8$ avec $2.\cos^2(4.\theta) - 1$ et pour $n = 6$ avec
$\cos(6.\theta) = 2.\cos^2(3.\theta) - 1 = 2.(4.c^3 - 3.c)^2 - 1$.

4. Pour n égal à 5, on peut passer par les formules de Moivre et Euler :

$$\cos(5.\theta) = \Re e(e^{5.i.\theta}) = \Re e\big((c + i.s)^5\big) = \Re e(c^5 + 5.i.c^4.s - 10.c^3.s^2 - 10.i.c^2.s^3 + 5.c.s^4 + i.s^5)$$
$$\cos(5.\theta) = c^5 - 10.c^3.s^2 + 5.c.s^4 = c^5 - 10.c^3.(1 - c^2) + 5.c.(1 - c^2)^2$$

5. On peut d'ailleurs généraliser cette idée

$$\cos(n.\theta) = \Re e(e^{i.n.\theta}) = \Re e((c+i.s)^n) = \Re e\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.c^{n-k}.(i.s)^k\Big)$$

$$\cos(n.\theta) = \sum_{p=0}^{[n/2]}\binom{n}{2.p}.c^{n-2.p}.(i.s)^{2.p} = \sum_{p=0}^{[n/2]}\binom{n}{2.p}.c^{n-2.p}.\big((i.s)^2\big)^{2.p} = \sum_{p=0}^{[n/2]}\binom{n}{2.p}.c^{n-2.p}.\big(c^2-1\big)^p$$

$$\cos(n.\theta) = \sum_{p=0}^{[n/2]}\Big(\binom{n}{2.p}.c^{n-2.p}.\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}.c^{2.j}.(-1)^{p-j}\Big)$$

C'est bien un polynôme en cosinus, de degré n.

3 Le résultat général

Il existe une suite $(T_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients entiers vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n.\theta) = T_n(\cos(\theta))$$

On pourra montrer qu'on a aussi $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ ch(n.\theta) = T_n(ch(\theta))$ pour la même famille de polynômes.

4 Comment la propriété se propage de proche en proche

On va propager l'existence de chaque T_n par récurrence sur n.
L'existence est initialisée ci dessus.
On se donne ensuite un entier naturel n et on suppose que T_n et T_{n-1} existent.
La clef est dans $\cos((n+1).\theta) + \cos((n-1).\theta) = 2.\cos(\theta).\cos(n.\theta)$
(issue de $\cos(a) + \cos(b) = 2.\cos\Big(\frac{a+b}{2}\Big).\cos\Big(\frac{a-b}{2}\Big)$)[1]. On a donc

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos((n+1).\theta) = 2.\cos(\theta).\cos(n.\theta) - \cos((n-1).\theta)$$

et en utilisant l'hypothèse (double) de récurrence

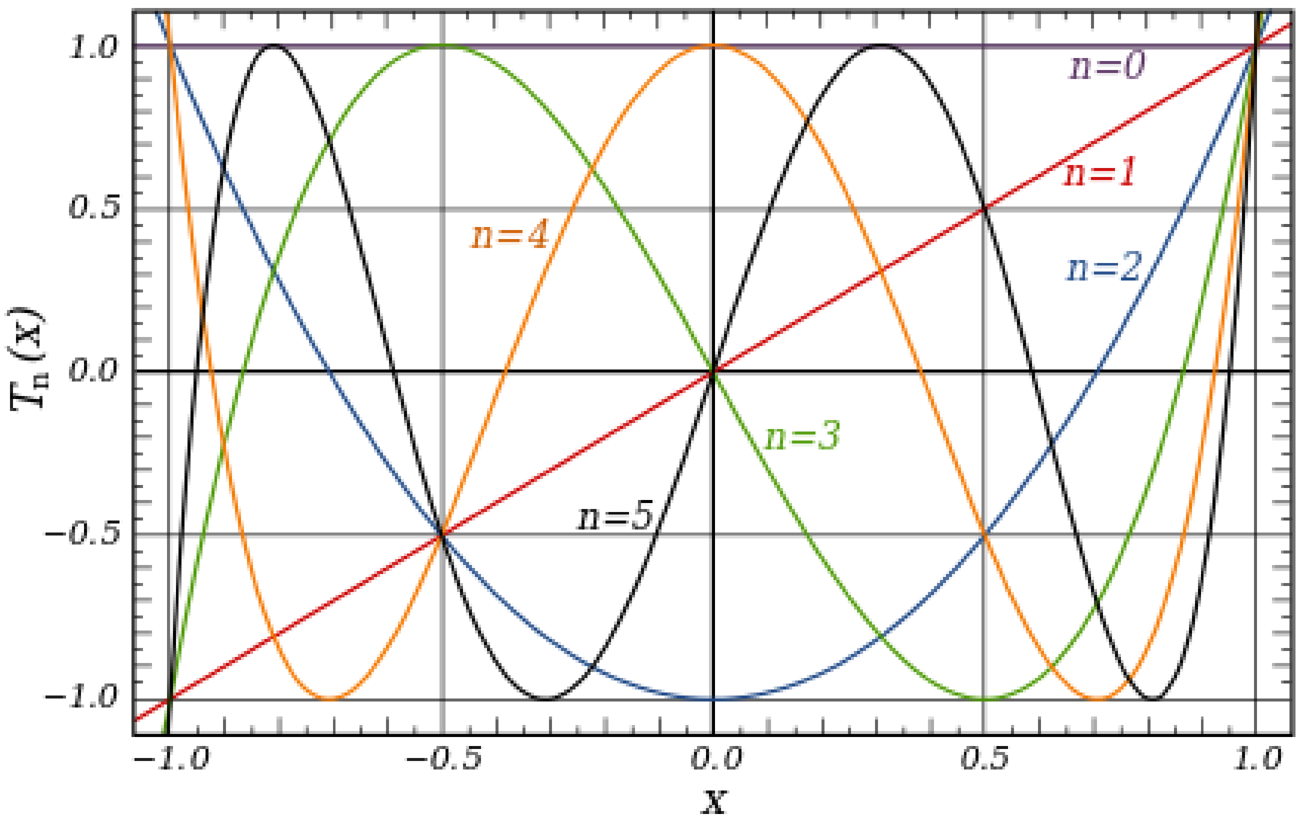
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos((n+1).\theta) = 2.\cos(\theta).T_n(\cos(\theta)) - T_{n-1}(\cos(\theta))$$

On pose donc $\boxed{T_{n+1}(X) = 2.X.T_n(X) - T_{n-1}(X)}$ et ceci définit bien un nouveau polynôme.

Erreur bête : prétendre prouver $T_{n+1}(X) = 2.X.T_n(X) - T_{n-1}(X)$ par récurrence sur n, alors que c'est une formule qui permet juste de définir le nouveau polynôme.
Cette formule issue de la trigonométrie permettra ensuite de démontrer des résultats par récurrence sur n.

1. on dispose d'une formule similaire pour les cosinus hyperboliques, avec les mêmes signes

5 Graphes des premiers polynômes



De par leur définition, les $T_n(x)$ restent entre -1 et 1 quand x reste entre -1 et 1, et ils y varient assez vite pour atteindre n fois -1 et 1. Au delà de 1, ils filent vers l'infini. Et en deçà de -1, c'est pareil, au signe près suivant la parité de n.

6 Quelques propriétés

Il existe deux familles de propriétés, elles se démontrent soit par récurrence, soit en utilisant $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ pour des θ bien choisis.

issues de $T_{n+1}(X) = 2.X.T_n(X) - T_{n-1}(X)$	issues de $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$
$T_n(X)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$	$\forall x \in [-1,\ 1],\ T_n(x) \in [-1,\ 1]$
$deg(T_n(X)) = n$	$T_n(1) = 1$
le terme dominant de $T_n(X)$ est $2^{n-1}.X^n (n \neq 0)$	$T_n(-1) = (-1)^n$
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ T_n(-x) = (-1)^n.T_n(x)$	
les signes des coefficients alternent dans T_n	$T_{2.n}(0) = (-1)^n$ et $T_{2.n+1}(0) = 0$
	$T'_n(1) = n^2$

6.1 Les valeurs aux bornes s'obtiennent par des cas particuliers

On a $T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n.0) = \cos(0) = 1$ et $T_n(-1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n.\pi) = (-1)^n$

Les formules de « demi-période » $\cos(\theta + n.\pi) = (-1)^n.\cos(\theta)$ *et* $\sin(\theta + n.\pi) = (-1)^n.\sin(\theta)$ *sont du cours.*

La propriété $T_n(1) = 1$ vous permet de vérifier le polynôme que vous proposez : la somme de ses coefficients doit valoir 1.

6.2 La propriété $T_n(-x) = (-1)^n.T_n(x)$ s'énonce de plusieurs façons

Disjonction de cas :
• si n est pair, l'application $x \longmapsto T_n(x)$ est paire (et son graphe admet Oy comme axe de symétrie) [2]
• si n est impair, l'application $x \longmapsto T_n(x)$ est impaire (et son graphe admet $O(0,0)$ comme centre de symétrie) [3]

Formulation générale : T_n a la même parité que n.

La démonstration peut se faire par récurrence à double hérédité avec disjonction de cas sur la parité.
Mais on peut aussi écrire directement pour n donné

$$\forall\theta,\ T_n(-\cos(\theta)) = T_n(\cos(\theta + \pi)) = \cos(n.\theta + n.\pi) = (-1)^n.\cos(n.\theta) = (-1)^n.T_n(\cos(\theta))$$

La relation $T_n(-x) = (-1)^n.T_n(x)$ est donc vraie pour tout x de $[-1,\ 1]$ et on l'étend à l'égalité des polynômes par rigidité.

Théorème de rigidité :
Si deux polynômes P et q coïncident sur un intervalle non réduit à un point, alors ils sont égaux.
En effet, le polynôme différence $Q - P$ a une infinité de racines.
Il est donc nul.

6.3 La démonstration de $T_n'(1)$ est classique

On part de $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ (vrai pour tout θ) et on dérive $-\sin(\theta).T_n'(\cos(\theta)) = -n.\sin(n.\theta)$.
On divise par $\sin(\theta)$ pour θ dans $]0,\ \pi[$: $T_n'(\cos(\theta)) = n.\frac{\sin(n.\theta)}{\sin(\theta)}$.
On fait tendre θ vers 0 en utilisant un équivalent dans le membre de droite.
On peut aussi redériver $-\sin(\theta).T_n'(\cos(\theta)) = -n.\sin(n.\theta)$ et appliquer en $\theta = 0$.

7 Racines des polynômes de Tchebychev

7.1 Factorisation

On peut donner la liste des racines du polynôme $T_n$et le factoriser ensuite (en n'oubliant pas son coefficient dominant) :

$$T_n(X) = 2^{n-1}.\prod_{k=0}^{n-1}\Big(X - \cos\Big(\frac{(2.k+1).\pi}{2.n}\Big)\Big)$$

2. un entier n est pair si il s'écrit $n = 2.p$ pour un autre entier p (ou même $(-1)^n = 1$) ; une application f est paire si $\forall x,\ f(-x) = f(x)$
3. un entier n est impair si il s'écrit $n = 2.p + 1$ pour un autre entier p (ou même $(-1)^n = -1$) ; une application f est impaire si $\forall x,\ f(-x) = -f(x)$

7.2 Résolution en deux temps

On commence par chercher les racines entre -1 et 1 en résolvant $T_n(x) = 0$ avec $x \in [-1, 1]$.

> *Attention, en toute rigueur, n'écrivez pas que vous résolvez $T_n(X) = 0$, puisque X est une variable formelle. Vous résolvez $T_n(x) = 0$ avec x dans $\mathbb{R}$ ou $T_n(z) = 0$ avec z dans $\mathbb{C}$.*

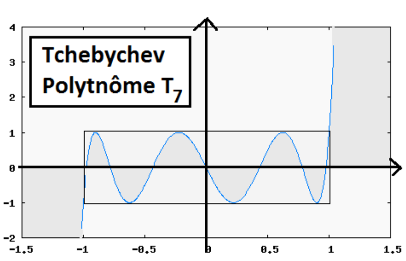
On pose $\theta = Arccos(x)$ (légitime sur le domaine) et on résout $T_n(\cos(\theta)) = 0 = \cos(\pi/2)$.
On trouve $\theta = \dfrac{\pi}{2.n} + \dfrac{k.\pi}{n}$ avec k dans $\mathbb{Z}$ (la congruence aussi doit être divisée).
Comme θ est entre 0 et π, il y a n valeurs de k admissibles.
Mais il faut revenir à la variable initiale $x = \cos(\theta)$.
On trouve n racines réelles distinctes (stricte monotonie du cosinus sur $[O, \pi]$) : $\cos\left(\dfrac{2.k+1}{2.n}\right)$ pour k de 0 à $n-1$.

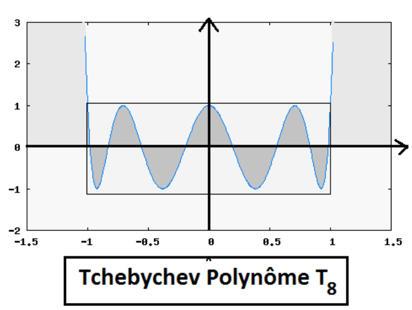
Or le polynôme est de degré n, il n'a donc pas d'autre racine. On les a toutes.

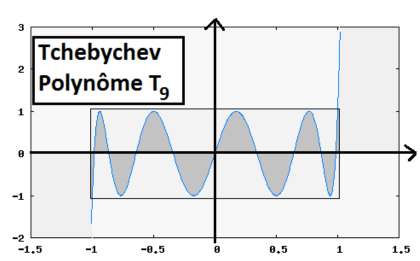
> *Il est inutile de chercher à résoudre $T_n(x) = 0$ avec $x > 1$ ou $x < 1$ ou même x dans $\mathbb{C} - \mathbb{R}$.*

7.3 Vérification sur les premiers polynômes

n	$T_n(X)$	racines	formule
1	X	0	$\cos\left(\dfrac{(2.k+1).\pi}{2}\right)$
2	$2.X^2 - 1$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\dfrac{(2.k+1).\pi}{4}\right)$
3	$4.X^3 - 3.X$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\dfrac{(2.k+1).\pi}{6}\right)$
4	$8..X^4 - 8.X^2 + 1$	$-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\cos\left(\dfrac{(2.k+1).\pi}{8}\right)$







7.4 Exercices

1. On peut ensuite chercher les racines de l'équation $T_n(x) = \dfrac{1}{2}$ en suivant la même démarche.

2. L'équation $T_n(x) = 1$ conduira à moins de solutions, car ce seront pour la plupart des racines doubles.

3. Les racines de $T_n(x) = 1$ et $T_n(x) = -1$ permettent de déterminer les racines de $(T_n)'$.

4. Déterminez $\cos(\pi/10)$.

8 Pour des cosinus et des sinus

n	$\cos(n.\theta)$	$\sin(n.\theta)$
0	1	0
1	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta).1$
2	$2.\cos^2(\theta) - 1$	$\sin(\theta).(2.\cos(\theta))$
3	$4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$	$\sin(\theta).(4.\cos^2(\theta) - 1)$
4	$8.\cos^4(\theta) - 8.\cos^2(\theta) + 1$	$\sin(\theta).(8.\cos^3(\theta) - 4.\cos(\theta))$
5	$16.\cos^5(\theta) - 20.\cos^3(\theta) + 5.\cos(\theta)$	$\sin(\theta).(16.\cos^4(\theta) - 12.\cos^2(\theta) + 1)$

On peut montrer l'existence de deux familles de polynômes : $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \begin{array}{rcll} \cos(n.\theta) & = & T_n(\cos(\theta)) & \\ \sin(n.\theta) & = & \sin(\theta)\times & S_n(\cos(\theta) \end{array}$$

On a un sinus en facteur dans $\sin(n.\theta) = \sin(\theta).S_n(\cos(\theta))$ pour que la fonction du premier membre soit bien impaire alors que $\theta \longmapsto S_n(\cos(\theta))$ hérite de la parité de la fonction cosinus.

On prouve leur existence par récurrence simple sur n déjà initialisée.
Pour passer d'un rang au suivant, on écrit

$$\begin{array}{rclcll} \cos((n+1).\theta) & = & \cos(\theta) & \times\cos(n.\theta) & - & \sin(\theta)\times & \sin(n.\theta) \\ & = & \cos(\theta) & \times T_n(\cos(\theta)) & - & \sin^2(\theta)\times & S_n(\cos(n.\theta)) \\ \sin((n+1).\theta) & = & \sin(\theta) & \times\cos(n.\theta) & + & \cos(\theta)\times & \sin(n.\theta) \\ & = & \sin(\theta) & \times S_n(\cos(\theta)) & + & \sin(\theta)\times & \cos(\theta).S_n(\cos(n.\theta)) \end{array}$$

On posera donc $\begin{array}{rcccc} T_{n+1} & = & X.T_n & + & (X^2-1).S_n \\ S_{n+1} & = & T_n & + & X.S_n \end{array}$ et même $\begin{pmatrix} T_{n+1} \\ S_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & X^2-1 \\ 1 & X \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} T_n \\ S_n \end{pmatrix}$

On pourra être tenté d'écrire $\begin{pmatrix} T_n(\cos(\theta)) \\ S_n(\cos(\theta)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \cos^2(\theta)-1 \\ 1 & \cos(\theta) \end{pmatrix}^n . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et de diagonaliser la matrice.*
Mais on n'obtiendra que $\cos(n.\theta) = \dfrac{(e^{i.\theta})^n + (e^{-i.\theta})^n}{2}$ *ce qui n'est pas original.*

9 Pour les sinus tout seuls

On aura intérêt à utiliser plus simplement les deux idées qui suivent.
Dérivation de la formule des cosinus
On part de $\forall\theta,\ \cos(n.\theta) = T_n(\cos(\theta))$ et on dérive $\forall\theta,\ -n.\sin(n.\theta) = -\sin(\theta).T_n(\cos(\theta))$. On divise par n

$$\sin(n.\theta) = \sin(\theta).\frac{T_n'(\cos(\theta))}{n}$$

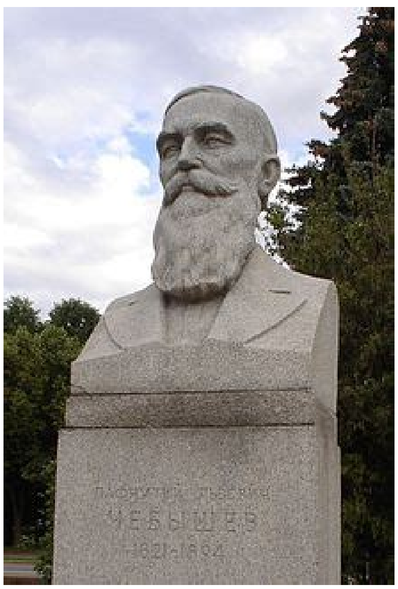
Il est fondamental de ne pas confondre $T'_n(\cos(\theta))$ (je dérive $T_n(X)$ et j'applique en $\cos(\theta)$)
et $(\theta \longmapsto T_n(\cos(\theta)))'$ que vous écririez $(T_n(\cos(\theta))'$ parce que vous maitrisez mal les maths, ou $\dfrac{d(T_n(\cos(\theta)))}{d\theta}$ parce que vous maitrisez les notations de la physique (on dérive la fonction de θ, fonction composée).

Grâce à cette formule, on peut identifier $S_n(X) = \dfrac{T'_n(X)}{n}$ et constater que les coefficients de T'_n seront tous divisibles par n (et donc tous les coefficients de $T_p(X)$ pour p premier sont des multiples de p (sauf le coefficient constant).

On peut aussi écrire pour des entiers impairs par exemple

$$\sin(5.\theta) = \cos\left(5.\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(5.\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) = T_5(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) = T_5(\sin(\theta))$$

10 Biographie de Tchebychev



Пафнутий Львович Чебышёв

Pafnouti Lvovitch Tchebychev était un mathématicien russe (1821-1894)

Il a travaillé sur les probabilités, la théorie des nombres et les approximations de fonctions.

On doit à Tchebychev un mouvement mécanique dit « plantigrade » qui transforme un mouvement circulaire en mouvement des pattes d'un animal.
Votre cours de Prépas contiendra aussi l'inégalité de Bienaymé et Tchebychev :

Si X est une variable aléatoire d'espérance m et de variance σ alors $P(|X - m| \geqslant r) \leqslant \dfrac{Var(X)}{r^2}$ (probabilité de s'éloigner de la moyenne).

Le théorème de Tchebychev énonce « pour tout entier naturel n il y a au moins un nombre premier p entre n et $2.n$ ».
Ce résultat a été énoncé par Joseph Bertrand en 1845 (mais non démontré).
Tchebychev l'a prouvé en 1850 et en quarante pages.
Pavel Erdös l'a démontrée en en deux page, en 1932 à 19ans, en étudiant la décomposition en facteurs premiers de $\dbinom{2.n}{n}$ (problème posable en Spé).

11 Exercices et problèmes de Prépas

1. Si le résultat $T_n(T_p(X)) = T_p(T_n(X)) = T_{n\times p}(X)$ est classique et à connaître (ne serait ce que pour les calculer « de proche en proche »), on peut montrer qu'il n'existe que deux familles de polynômes (P_n) vérifiant « pour tout n, P_n est de degré n et pour tout couple $(n,\ p)$, on a $P_n \circ P_p = P_p \circ P_n$ (ce sont les polynômes de Tchebychev et évidemment ceux de la base canonique $P_n = X^n$).

2. Si un polynôme de degré n vérifie $\forall x \in [-1,\ 1]$, $|P(x)| \leqslant 1$ et $P(1) = 1$ alors c'est le n^{ieme} polynôme de Tchebychev.

3. Si on sait exprimer les $\cos(n.\theta)$ à l'aide des $\cos^k(\theta)$ alors on sait exprimer les $\cos^k(\theta)$ à l'aide des $\cos(n.\theta)$. Ce sera un problème de changement de base sur des espaces de fonctions.

4. L'application $(P,\ Q) \longmapsto dsp \int_{-1}^{1} \frac{P(t).Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}.dt$ est un produit scalaire sur l'espace des applications continues de $[-1,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$, et les polynômes de Tchebychev en forment une famille orthonormée totale.

5. Si vous choisissez d'échantillonner le segment $[-1,\ 1]$ avec n points $(a_1, \ldots a_n)$ et d'approximer les fonction f de $[-1,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ par leurs polynômes d'interpolation de Lagrange ($L_n(f)$ est le polynôme de degré inférieur ou égale à n qui coïncide avec f en chacun des a_k), alors le « meilleur choix » des $a_k$est de prendre les racines du n^{iemme} polynôme de Tchebychev (et non pas des points équi-répartis sur $[-1,\ 1]$ comme on peut le penser naïvement).
   C'est d'ailleurs pour ces problèmes d'approximations de fonctions que Tchebychev a été amené à étudier ces polynômes dont on connaissait l'existence avant lui, comme vous vous en doutez.
6. En dérivant deux fois la relation $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ on montre $(X^2 - 1).T_n'' + X.T_n' = n^2.T_n$. Cette propriété permet ensuite de calculer les coefficients de T_n sans calculer les polynômes précédents.

12 Algorithme Python

```
def Tcheby(n) : # n -> list of list of int
....T = [[0]*(k+1) for k in range(n+1)]
....T[0] = [1] # T0 = 1
....T[1] = [1, 0] # T1 = X
....for k in range(2, n+1) : # il reste n-1 polynômes à construire
........T[k][0] = 2*T[k-1][0] # coefficient dominant de Tk
........for i in range(2, k) : # les autres coefficients de Tk
............T[k][i] = 2*T[k-1][i] - T[k-2][i-2] # formule T(k) = 2.X.T(k-1)-T(k-2)
........T[k][-1] = - T[k-2][-1] # coefficient constant
....return(T[-1]) # seul le dernier polynôme nous intéresse
```

Table des matières