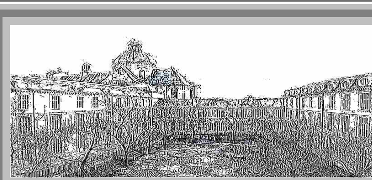
LYCEE CHARLEMAGNE
Black friday 24 novembre
M.P.S.I.2



2023 2024
DS03

Wallis sur $\mathbb{R}^+$.

I∼0) Pour tout réel x positif ou nul, on pose $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x.dt$. Calculez $f(0)$, $f(1)$. 2 pt.

I∼1) Montrez que f est une application décroissante (prétendre dériver f à ce stade serait pure folie). 2 pt.

I∼2) Montrez pour tout x : $(x+1).f(x) = (x+2).f(x+2)$. 2 pt.

I∼3) Justifiez $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n).f(n+1) = \dfrac{\pi}{2.(n+1)}$. 2 pt.

I∼4) x est un réel de $[1,\ +\infty[$, on pose $n = [x]$ (partie entière). Montrez : $f(n) \geqslant f(x) \geqslant f(n+2)$
et $f(n).f(n-1) \geqslant (f(x))^2 \geqslant f(n+1).f(n+2)$ 2 pt.

I∼5) Déduisez $f(x) \sim_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{2.x}}$. 2 pt.

II∼0) Calculez $f(2.n)$ pour tout entier naturel n. 2 pt.

Dérivation.

III∼0) On pose $D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)).dt$. Montrez $D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u)).du$ puis déduisez $2.D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2.t)).dt - \dfrac{\pi.\ln(2)}{2}$. 2 pt.

III∼1) Montrez aussi $D_1 = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\theta)).d\theta$ et aussi déduisez $D_1 = -\dfrac{\ln(2).\pi}{2}$. 2 pt.

III∼2) Histoire de ne pas travailler sur ce qui n'existe pas : justifiez l'existence de chacune de ces limites $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln\left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right).dt$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(t).dt$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(\sin(t)).dt$. 2 pt.

IV∼0) Montrez pour tout x strictement positif et pour tout a dans $]0,\ 1[$: $0 \leqslant \frac{a^x-1}{x} - \ln(a) \leqslant x.\dfrac{a^2}{2}$ (on pourra dériver deux fois $\varphi_a = (x \longmapsto a^x)$). 3 pt.

IV∼1) Montrez pour tout t de $]0,\ \pi/2]$ et tout x strictement positif $0 \leqslant \dfrac{(\sin(t))^x - 1}{x} - \ln(\sin(t)) \leqslant \dfrac{x.(\ln(\sin(t))^2}{2}$. 1 pt.

IV∼2) Déduisez $0 \leqslant \dfrac{f(x) - f(0)}{x} - D_0 \leqslant \dfrac{x.D_2}{2}$ avec $D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)).dt$. 1 pt.

IV∼3) Déduisez que f est dérivable à droite en 0 et calculer $f'(0)$. 1 pt.

Dérivée seconde.

V∼0) a et b sont deux réels strictement positifs.
On pose $\rho = \dfrac{b-a}{b+a}$ et on définit $\phi = x \longmapsto \ln(a^2.\cos^2(x) + b^2.\sin^2(x))$. Déterminez ϕ' . 1 pt.

V∼1) Montrez que pour tout x, $4.\sum\limits_{k=1}^{n} \rho^k.\sin(2.k.x)$ converge vers $\phi'(x)$ quand n tend vers l'infini. 2 pt.

V∼2) Déduisez pour tout x positif : $\phi(x) = 2.\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) - 2.\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(2.k.x)}{k}.\rho^k$. 2 pt.

V∼3) (ne pas traiter) Déduisez $\int_0^{\pi} (\phi(x))^2.dx = 4.\pi.\left(\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2.\pi.\sigma(\rho^2)$ avec $\sigma = \left(x \longmapsto \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k^2}\right)$. 0 pt.

V∼4) (ne pas traiter) On pose alors $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $b_n = \dfrac{n}{n+1}$ et $\phi_n = t \longmapsto \ln((a_n)^2.\cos^2(t) + (b_n)^2.\sin^2(t))$.
Déduisez $f''(0) = \dfrac{\pi.(\ln(2))^2}{2} + \dfrac{\pi^3}{24}$. 0 pt.

Application au problème des allumettes de Banach.

VI~0) Un fumeur[1] porte toujours sur lui deux boites d'allumettes A et B, chacune contenant initialement n allumettes (n désigne un entier strictement positif, donné). Chaque fois qu'il veut une allumette, il choisit une boite au hasard (le probabilité du choix de chaque boite vaut toujours $1/2$), et il y prend une allumette ; il jette ensuite l'allumette après l'avoir utilisée (et même si il constate que la boite est alors vide, il la remet dans sa poche). Inévitablement arrive un moment où, pour la première fois, il trouve une boite vide. On désigne alors par R_n la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes restant alors dans l'autre boite.

> *Exemple de situation avec n égal à 3 : « initialement chaque boite contient trois allumettes ; il prend dans la B, puis la A, puis la B à nouveau, et encore la B (à ce stade, la B est vide, la A contient encore deux allumettes), il prend dans la A, puis il veut prendre dans la boite B, et là il s'arrête car il vient de trouver une boite vide. L'autre boite (la A) contient une allumette : $R_3 = 1$ ».*

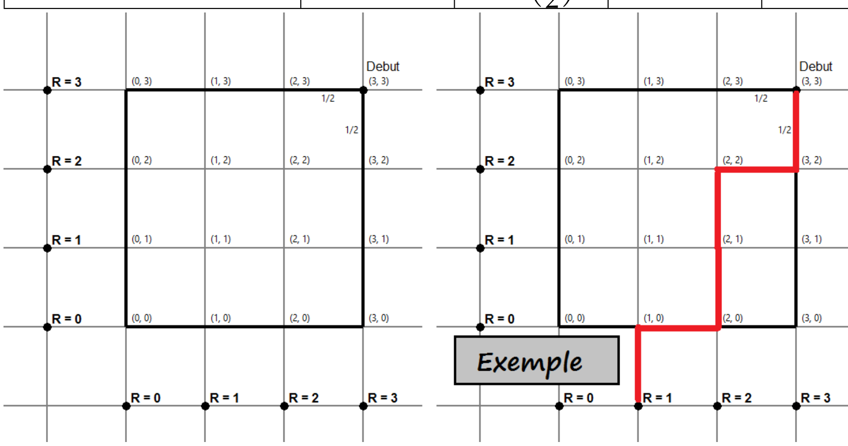
Montrez : $P(R_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$ et calculez $P(R_1 = 0)$. 1 pt.

VI~1) Calculez $P(R_n > n)$ et $P(R_n = n)$. 3 pt.

VI~2) Calculez $P(R_2 = k)$ pour chaque entier k de 0 à 2. 3 pt.

VI~3)

Complétez pour $n = 3$	$P(R_3 = 0)$	$P(R_3 = 1)$	$P(R_3 = 2)$	$P(R_3 = 3)$	
		$2.10.\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$			Total = ... 3 pt.



Le module `random` contient la fonction `randrange` qui tire des entiers au hasard (`randrange(2)` donne `0` ou `1`, avec probabilité $1/2$ pour chacun).
Écrivez un script `Python` qui prend en entrée un entier naturel n et simule le problème du fumeur et retourne le nombre d'allumettes R_n. 3 pt.

Écrivez une procédure qui prend en entrée n et N (N sera grand) et retourne la valeur moyenne de R_n sur N expériences. 1 pt.

Et pour un histogramme ? 2 pt.

VII~0) Exprimez $P(R_n = k)$ (qu'on notera $p_n(k)$) à l'aide de $\dbinom{2.n-k}{k}$. 3 pt.

VII~1) Montrez pour n dans $\mathbb{N}$ et k dans $[0,\ n-1] \cap \mathbb{N}$: $2.(n-k).p_n(k) = (2.n+1).p_n(k+1) - (k+1).p_n(k+1)$. 2 pt.

VII~2) On pose $E(R_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k.p_n(k)$ (la moyenne, dite aussi espérance). Déduisez l'existence de trois coefficients réels a, b et c à préciser tels que $E(R_n) = (a.n+b).P_n(0) + c$. 3 pt.

VII~3) Exprimez $p_n(0)$ à l'aide de $f(2.n)$. 2 pt.

VII~4) Déterminez $\lim_{n\to+\infty} p_n(0)$ et donnez un équivalent de la forme $a.n^\alpha$ de $p_n(0)$ quand n tend vers l'infini. 2 pt.

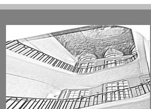
VII~5) Déterminez $\lim_{n\to+\infty} E_n$ et donnez un équivalent de la forme $a.n^\alpha$ de E_n quand n tend vers l'infini. 2 pt.

1. imaginé en fait par Hugo Steinhaus, mais attribué par lui à son ami Stefan Banach ; tous deux étaient des fumeurs de pipes et mathématiciens polonais du début du vingtième siècle dont vous croiserez le nom dan le cours de seconde année ou comme livre référence en analyse

LYCEE CHARLEMAGNE
Black friday 24 novembre
M.P.S.I.2

2023 2024
DS03
CORRECTION

La partie équivalent, dérivation, calcul de D_0 est issue de Mines-Ponts 2023 (filière MP).
Le sujet Mines-Ponts contenait pas mal de questions en plus.
La partie allumettes vient d'Agro 1982. Je venais d'entrer à l'ENS !



Premières valeurs, sens de variations... DS03

L'existence de chaque $f(x)$ pour x positif est garantie par un argument de continuité (le sujet de Mines-Ponts regarde aussi pour x dans $]-1,\ 0]$, mais ce sont des intégrales impropres).

$$f(0) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^0.dt = \int_0^{\pi/2} 1.dt = \frac{\pi}{2}$$

$$f(1) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^1.dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1$$

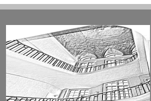
Pour la décroissance, on revient à la simple définition : $\forall(x,\ y) \in [0,\ +\infty[^2,\ (x \leqslant y) \Rightarrow (f(x) \leqslant f(y))$
On se donne donc x et y et on suppose $x \leqslant y$. On écrit alors pour tout t de $[0,\ \pi/2]$:

$$(\sin(t))^x \geqslant (\sin(t))^y$$

car $\sin(t)$ est entre 0 et 1 (rappel : $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ diminue quand x augmente). On intègre pour t de 0 à $\pi/2$

$$f(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} (\sin(t))^x \geqslant \int_{t=0}^{\pi/2} (\sin(t))^y.dt = f(y)$$

A retenir : pour les intégrales à paramètres et autre objets un peu compliqués, il est bien souvent plus simple de regarder la monotonie juste par soustraction, et sûrement pas avec des réflexes de Terminale « pour le sens de variation, je dérive ».
D'ailleurs, petit question : qui est la dérivée de $x \longmapsto \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x.dt$ *? On dérive par rapport à x, l'exposant !*



Equivalent à l'infini. DS03

La formule $(x+1).f(x) = (x+2).f(x+2)$ est notre intégration par parties classique. On n'oublie pas de préciser qui on dérive et qui on intègre, et on n'oublie pas les dt. Le fait que x ne soit pas entiers ne pose pas de problème.

$\sin(t)$	$\hookleftarrow$	$-\cos(t)$
$(\sin(t))^{x+1}$	$\hookrightarrow$	$(x+1).(\sin(t))^x.\cos(t)$

$$f(x+2) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{x+1}.(\sin(t))^x.dt = \Big[-\cos(t).(\sin(t))^{x+1}\Big]_0^{\pi/2} + (x+1).\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x.\cos^2(t).dt$$

Le crochet est nul, en $\pi/2$ grâce au cosinus, en 0 grâce au sinus qui a un exposant suffisant (même pour x dans $]0,\ 1[$).

$$f(x+2) = (x+1).\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x.(1-\sin^2(t)).dt = (x+1).(f(x) - f(x+2))$$

On fait passer de l'autre côté et la boucle est bouclée.

On pose $g(n) = (n+1).f(n).f(n+1)$. On repart de $(n+1).f(n) = (n+2).f(n+2)$ et on multiplie par $f(n+1)$

$$g(n) = (n+1).f(n).f(n+1) = (n+2).f(n+2).f(n+1) = g(n+1)$$

La suite g est constante. Elle est donc égale à son premier terme. Et il vaut $\frac{\pi}{2}$.

On se donne donc x et on pose $n = [x]$ (partie entière par défaut).
Par construction, on a donc $n \leqslant x < n+1 \leqslant n+2$. L'encadrement

$$f(n) \geqslant f(x) \geqslant f(n+2)$$

résulte de la décroissance de f. On se dit qu'on a intérêt à en écrire un autre : $n-1 \leqslant x \leqslant n+1$

$$f(n-1) \geqslant f(x) \geqslant f(n+1) \geqslant 0$$

J'ai ajouté l'information de positivité pour pouvoir multiplier membre à membre les inégalités et obtenir

$$f(n-1).f(n) \geqslant (f(x))^2 \geqslant f(n+1).f(n+2) \geqslant 0$$

Mais on peut alors remplacer par ce qu'on obtenu juste avant pour les entiers, et aussi passer à la racine carrée (application croissante)

$$\sqrt{\frac{\pi}{2.n}} = \sqrt{f(n-1).f(n)} \geqslant f(x) \geqslant \sqrt{f(n+1).f(n+2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2.(n+1)}}$$

On sent qu'on n'est plus très loin de l'équivalent demandé. Sauf qu'il y a des n et pas des x. Mais on approche.

On divise par $\sqrt{\dfrac{\pi}{2.x}}$ (positif, ce qui ne change pas le sens des inégalités [2])

$$\sqrt{\frac{x}{n}} \geqslant \frac{f(x)}{\sqrt{\pi/(2.x)}} \geqslant \sqrt{\frac{x}{2.(n+1)}}$$

On a envie de faire appel aux gendarmes en disant que « à l'infini, x et n c'est pareil, puisque n est la partie entière de x ».
C'est vrai, mais il faut le faire proprement. On repart de $n \leqslant x \leqslant n+1$ et on divise par n :

$$1 \leqslant \frac{x}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n} \ et\ \frac{n}{n+1} \leqslant \frac{x}{n+1} \leqslant 1 \text{ avec } n = [x]$$

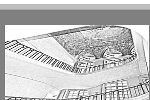
Quand x tend vers l'infini, n et $n+1$ le font aussi par minoration. Les quotients tendent vers 1.

Grand classique : $\dfrac{x}{[x]}$ tend vers 1 quand x tend vers l'infini. Autrement dit : $x \sim_{x\to+\infty} [x]$, ce que vous écrirez $x \simeq [x]$ qui ne veut rien dire, mais qui s'écrit aussi $x = [x] + O(1)$ donc $x = [x] + o(x)_{x\to+\infty}$ avec toute la rigueur des notations en petit o et grand O.

Ayant les encadrements et les limites des encadrants, on a bien $\boxed{f(x) \sim_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{2.x}}}$ et pas juste pour les entiers.

Remarque : le sujet de Mines-Ponts écrivait juste $\boxed{\begin{array}{l}\textit{Montrez pour tout entier naturel } n : f(n).f(n+1) = \dfrac{\pi}{2.(n+1)}. \\ \textit{puis que } f(x) \sim_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{2.x}}\end{array}}$

Il fallait savoir passer de n (entier) à x (réel), en utilisant justement la décroissance de f.
Une vidéo de notre Ayoub et les maths revient en détails sur les pièges et étapes de ce passage.



Calcul pour les entiers. DS03

C'est du cours. On met en boucle $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ et $f(2.n+2) = \dfrac{2.n+1}{2.n+2}.f(2.n)$.
On arrive à

$$f(2.n) = \frac{1.3.5\ldots(2.n-1)}{2.4.6\ldots(2.n)}.\frac{\pi}{2} = \frac{1.2.3.4.5.6\ldots(2.n-1).(2.n)}{(2.4.6\ldots(2.n))^2}.\frac{\pi}{2} = \frac{(2.n)!}{(2^n.n!)^2}.\frac{\pi}{2}$$

La formule définitive est $\dfrac{(2.n)!}{2^{2.n+1}.(n!)^2}.\pi$ ou même $\boxed{\dbinom{2.n}{n}.\dfrac{\pi}{2^{2.n+1}}}$ qu'on démontre alors par récurrence sur n en utilisant la formule $f(2.n+2) = \dfrac{2.n+1}{2.n+2}.f(2.n)$.

2. sur sa copie, le non scientifique ne cite même pas l'argument, c'est un moins que rien ; le physicien cite l'argument « je divise », et le matheux prend la peine de dire « et le sens ne change pas car... » (il surveille tout et sait où sont les pièges

Calcul de D_1. DS03

On a posé $D_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)).dt$. On veut des cosinus ? On rappelle que le cosinus fait la même chose que le sinus sur $[0,\ \pi/2]$ mais dans l'autre sens.
On va donc poser $u = \dfrac{\pi}{2} - t$, l'intégrale devient $D_1 = \displaystyle\int_{\pi/2}^{0} \ln(\cos(u)).(-du)$ puis naturellement $D_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u)).du$. On additionne :

$$D_1 + D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)).dt + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)).dt = \int_{t=0}^{t=\pi/2} \big(\ln(\sin(t)) + \ln(\cos(t))\big).dt$$

$$2.D_1 = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(\sin(\theta)).\frac{d\theta}{2} - \int_0^{\pi/2} \ln(2).dt = \frac{1}{2}.\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(\sin(\theta)).d\theta - \frac{\pi.\ln(2)}{2}$$

Dans l'intégrale $\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(\sin(\theta)).d\theta$ se cache D_1 par relation de Chasles

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \ln(\sin(\theta)).d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \ln(\sin(\theta)).d\theta + \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\theta)).d\theta = D_1 + \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\theta)).d\theta$$

Il reste le terme $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\theta)).d\theta$ qui fait justement l'objet d'une autre question. Peut on utiliser ce qui précède pour montrer qu'il est égal à D_1 ? Il faudrait faire partir les $\pi.\ln(2)$. Et surtout, on sent bien que le raisonnement sera plutôt

$$\left.\begin{array}{ll} 2.D_1 & = \dfrac{1}{2}.\Big(D_1 + \displaystyle\int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\theta)).d\theta\Big) \quad - \frac{\pi.\ln(2)}{2} \\ D_1 & = \displaystyle\int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\theta)).d\theta \end{array}\right\} \ donc\ D_1 = -\frac{\pi.\ln(2)}{2}$$

Comment passer alors de $D_1 = \displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi/2} \ln(\sin(t)).dt$ à $D_1 = \displaystyle\int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\theta)).d\theta$?
Mais par un changement de variable !

De $\dfrac{\pi}{2}$ à π, le sinus fait ce qu'il a fait de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$, mais en redescendant. On pose donc $\theta = \pi - t$.
Les bornes se renversent, mais dt donne $-d\theta$. Ensuite le sinus ne change pas (Bioche connaît). On a bien l'égalité voulue. On reporte, simplifie et on trouve la valeur de D_1.

> *Coup de génie de cette méthode.*
> *On a calculé l'intégrale sans utiliser de primitive. Juste en la transformant en elle même et en « presque elle même » par changements de variable et trigonométrie.*
> *Pour moi, calculer une intégrale sans revenir comme (presque) toujours à une primitive, c'est de la poésie pure !*

Existence de D_1. DS03

La première limite ne pose en fait aucun problème. On a même envie de dire

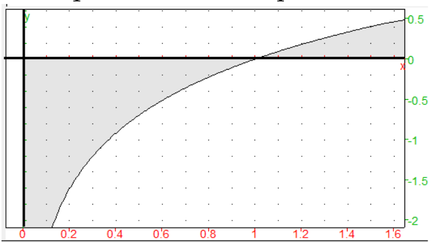
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln\Big(\frac{\sin(t)}{t}\Big).dt = \int_0^{\pi/2} \ln\Big(\frac{\sin(t)}{t}\Big).dt$$

avec l'argument « puisqu'il n'y a aucun problème en 0 ».
En effet, la forme indéterminée $\dfrac{\sin(t)}{t}$ tend vers 1 en 0. On peut donc dire qu'on a affaire à l'intégrale d'une application continue sur un segment.

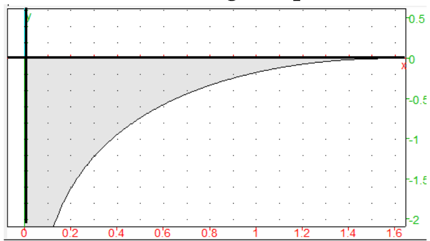
En toute rigueur, on définit : $\phi = t \longmapsto \left\{\begin{array}{lll} \ln(\sin(t))/t & si & t \in]0,\ \pi/2] \\ 0 & si & t = 0 \end{array}\right|$. On écrit alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln\Big(\frac{\sin(t)}{t}\Big).dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \psi(t).dt = \int_0^{\pi/2} \psi(t).dt$$

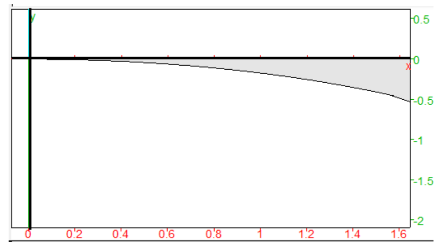
Pour qui ne voit même pas la difficulté : les trois aires algébriques sont finies



Intégrale de Ln(t)
primitive explicite



Intégrale de Ln(sin(t))
addition des deux autres



Intégrale de Ln(sin(t)/t)
application continue

La seconde limite existe car on a un classique. Pour tout ε strictement positif

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(t).dt = \Big[t.\ln(t) - t\Big]_{\varepsilon}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + \varepsilon - \varepsilon.\ln(\varepsilon)$$

Le terme $\varepsilon.\ln(\varepsilon)$ tend vers 0 en 0 (forme indéterminée de Sup se ramenant à $-\dfrac{\ln(X)}{X}$ quand X tend vers $+\infty$).

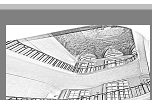
$$\int_{0}^{\pi/2} \ln(t).dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(t).dt = \frac{\pi}{2}.\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

Erreur de l'élève gentillet de Terminale sur ce type de question :
« pour prouver l'existence d'une limite, je me ramène à croissante majorée puis je conclus »
Mais si le calcul donne une limite, c'est bien la preuve qu'elle existe.
Converger = admettre une limite.
Trouver une limite = preuve que ça converge !
Dire que si il y a une limite alors elle vaut... = arnaque

Il ne reste plus qu'à additionner les deux limites qui existent pour conclure que la dernière existe.

Proprement : $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right).dt$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(t).dt$ existent, donc leur somme existe et peut être fusionnée en $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \left(\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right).dt + \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(t).dt\right)$ puis $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \left(\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \left(\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) + \ln(t)\right).dt\right)$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \left(\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \Big(\ln(\sin(t))\Big).dt\right)$.

Rappel :
le théorème c'est « si $\lim\limits_{a\to 0} f(a)$ et $\lim\limits_{a\to 0} g(a)$ existent, alors $\lim\limits_{a\to 0}(f(a)+g(a))$ existe (et c'est la somme des limites) ».
Ce n'est pas « $\lim\limits_{a\to 0}(f(a)+g(a)) = \lim\limits_{a\to 0} f(a) + \lim\limits_{a\to 0} g(a)$ ».
dans cette dernière affirmation l'élève prétend naïvement que toutes les limites existent déjà !



Dérivabilité en 0. DS03

On doit prouver un encadrement avec des a et des x en même temps. Taylor ?

$$0 \leqslant \frac{a^x - 1}{x} - \ln(a) \leqslant \frac{x.(\ln(a))^2}{2}$$

On fixe a et de définit $x \longmapsto a^x$ qu'on écrit $x \longmapsto e^{x.\ln(a)}$. On dérive deux fois (par rapport à x)

$$\left(x \longmapsto e^{x.\ln(a)}\right)' = \left(x \longmapsto \ln(a).e^{x.\ln(a)}\right)$$

$$\left(x \longmapsto e^{x.\ln(a)}\right)'' = \left(x \longmapsto (\ln(a))^2.e^{x.\ln(a)}\right)$$

On écrit la formule de Taylor à l'ordre 2 pour cette application (toujours a fixé, et x positif ou nul)

$$\varphi_a(0+x) = \varphi_a(0) + x.\varphi_a'(0) + x^2.\int_0^x (1-u).\varphi_a''(0+u.x).du$$

en prenant garde que t est déjà une variable, pour l'intégrale il faut donc en utiliser une autre, qui est ici u.

$$a^x = 1 + x.\ln(a) + x^2.\int_0^x (1-u).(\ln(a))^2.e^{u.x.\ln(a)}.du$$

On soustrait 1, on divise par x strictement positif

$$\frac{a^x - 1}{x} = \ln(a) + x.\int_0^x (1-u).(\ln(a))^2.e^{u.x.\ln(a)}.du$$

On soustrait encore $\ln(a)$ et on regarde cette intégrale

$$\frac{a^x - 1}{x} - \ln(a) = x.\int_0^x (1-u).(\ln(a))^2.e^{u.x.\ln(a)}.du$$

Dans l'intégrale, tout est positif (carré de réel, exponentielle...), et x est positif

$$\frac{a^x - 1}{x} - \ln(a) \geqslant 0$$

Mais ensuite, dans l'exponentielle, $u.x$ est positif et $\ln(a)$ est négatif. Donc l'exponentielle est plus petite que 1

$$\frac{a^x - 1}{x} - \ln(a) = x.\int_0^x (1-u).(\ln(a))^2.e^{u.x.\ln(a)}.du \leqslant x.\int_0^x (1-u).(\ln(a))^2.du = \frac{x.(\ln(a))^2}{2}$$

A quoi ceci va-t-il bien servir ?
On l'applique pour x strictement positif et $\sin(t)$ entre 0 et 1 (t entre 0 et $\pi/2$)

$$0 \leqslant \frac{(\sin(t))^x - 1}{x} - \ln(\sin(t)) \leqslant \frac{x.(\ln(\sin(t)))^2}{2}$$

On intègre pour t de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$

$$0 \leqslant \int_{t=0}^{\pi/2} \Big(\frac{(\sin(t))^x - 1}{x} - \ln(\sin(t))\Big).dt \leqslant \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{x.(\ln(\sin(t)))^2}{2}$$

On sépare par linéarité (on sort ce qui dépend de x et pas de t, la variable d'intégration c'est t), et on reconnaît différentes quantités déjà croisées

$$0 \leqslant \frac{f(x) - \dfrac{\pi}{2}}{x} - D_1 \leqslant \frac{x}{2}.\int_{t=0}^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^2.dt$$

Le réel $\dfrac{\pi}{2}$ est apparu ici en tant que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 1.dt$ c'est à dire en tant que $f(0)$.

Cette formule contient un taux d'accroissement de f.
Et c'est un bel encadrement.
Quand x tend vers 0, le majorant tend vers 0, le minorant reste égal à 0.
On déduit que $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} - D_1$ converge vers 0.
On reconnaît par addition que $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ converge vers D_1 quand x tend vers 0 (x positif).
Les taux d'accroissement ont une limite, l'application est dérivable à droite en 0. Et sa dérivée est D_1.

$$f'(0) = D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)).dt = -\frac{\pi.\ln(2)}{2}$$

On vient de dériver la fonction de Wallis quand elle est fonction d'une valeur réelle ($f(x)$) et non plus entière (W_n).
Que π soit là, d'accord. Mais que $\ln(2)$ soit là !

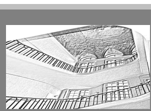
En Spé, vous aurez des théorèmes pour dériver sous le signe somme. En fait, ici

$$\Big(x \longmapsto \int_{t=0}^{\pi/2} (\sin(t))^x.dt\Big)' = \Big(x \longmapsto \int_{t=0}^{\pi/2} \Big(x \longmapsto (\sin(t))^x\Big)'.dt\Big)$$

Il faut bien dire par rapport à qui on intègre et par rapport à qui on dérive, et après c'est évident.

Petit détail : il faudrait justifier l'existence de D_2, comme on le fit pour D_1 en comparant avec $\int_0^{\pi/2}(\ln(t))^2.dt$.

Un travail similaire en 1 donnera $f'(1) = \ln(2) - 1$ (c'est dans le sujet Mines-Ponts).



Dérivée seconde. DS03

L'application ϕest définie partout, car sinus et cosinus n'arrivent pas à s'annuler en même temps.

On dérive sans efforts : $\boxed{\phi' = x \longmapsto \dfrac{-a^2.2.\sin(x).\cos(x) + b^2.2.\sin(x).\cos(x)}{a^2.\cos^2(x) + b^2.\sin^2(x)}}$

J'en ferai même $\phi' = x \longmapsto \sin(2.x).\dfrac{b^2 - a^2}{a^2.\cos^2(x) + b^2.\sin^2(x)}$

et pourquoi pas $\phi' = x \longmapsto \sin(2.x).\dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + (b^2 - a^2).\sin^2(x)}$ en remplaçant $\cos^2$ par $1 - \sin^2$.

La somme $4.\sum_{k=1}^{n}\rho^k.\sin(2.k.x)$ doit cacher une résrie géométrique, en passant en écriture complexe (Dirichlet et ses amis).

On considère $4.\sum_{k=0}^{n}\rho^k.e^{2.i.k.x}$ dont on prendra la partie imaginaire, on voit effectivement la série géométrique de raison $\rho.e^{2.i.x}$.

Le terme $k = 0$ donne un réel, on peut le prendre ou non.

On obtient $4.\dfrac{1 - \rho^{n+1}.e^{2.i.(n+1).x}}{1 - \rho.e^{2.i.k.x}}$.

Quand n tend vers l'infini comme demandé, $e^{2I;.(n+1).x}$ a pour module 1 , et ρ^{n+1} tend vers 0. En effet, $b - a$ est plus petit que $b + a$ et on a posé $\rho = \dfrac{b-a}{b+a}$.

Il nous reste

$$4.\sum_{k=1}^{n}\rho^k.\sin(2.k.x) = \Im m\Big(\frac{1}{1 - \rho.e^{2.i.x}}\Big) = \Im m\Big(\frac{1 - \rho.e^{-2.i.x}}{(1 - \rho.e^{2.i.x}).(1 - \rho.e^{-2.i.x})}\Big)$$

Le dénominateur est devenu réel. Seule nous intéressera la partie imaginaire du numérateur : $-\rho.\sin(2.x)$. Bonne piste. On a le $\sin(2.x)$ du numérateur de $\phi'(x)$.

Quant au dénominateur, il se développe

$$(1 - \rho.e^{2.i.x}).(1 - \rho.e^{-2.i.x}) = 1 - \rho.(e^{2.i.x} + e^{-2.i.x}) + \rho^2 = 1 - 2.\frac{b-a}{b+a}.\cos(2.x) + \frac{(b-a)^2}{(b+a)^2}$$

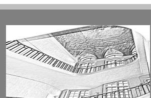
Est il besoin de rappeler : $\cos(2.x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. On développe, on regroupe

$$(1 - \rho.e^{2.i.x}).(1 - \rho.e^{-2.i.x}) = \frac{(b+a)^2}{(b+a)^2} - 2.\frac{(b^2 - a^2).(\cos^2(x) - \sin^2(x)}{(b+a)^2} + \frac{(b-a)^2}{(b+a)^2}$$

et et on finit par retrouver notre $a^2.\cos^2(x) + b^2.\sin^2(x)$.

Enfin, quand $(b + a)^2$ remonte au numérateur, il rencontre $\dfrac{b-a}{b+a}$ et donne le $b^2 - a^2$ qui nous manquait.

Une fois calculé ϕ'' on intègre deux fois.



Premiers calculs sur les allumettes de Banach. DS03

Passons au cas $n = 1$.
Trop facile.

Deux boites, une allumette dans chacune.
Le fumeur choisit une boite au hasard. Elle contient une allumette. Il l'allume, et maintenant la boite est vide. Il la remet dans sa poche.
Situation : une boite vide, une boite avec une allumette.
Il veut à nouveau fumer[3]. Il choisit une boite au hasard.
• Si c'est la boite vide (probabilité $1/2$), il s'arrête, il sait que l'autre boite contient une allumette.
• Si c'est la boite avec encore une allumette (probabilité $1/2$), il grille l'allumette, et il a maintenant deux boites vides. On sait que de manière sûre, au tirage suivant, il aura à coup sûr une boite vide (les deux le sont). Il s'arrêtera, et il saura que l'autre boite est vide.

Les deux événements $R_1 = 0$ et $R_1 = 1$ sont équiprobables : $\boxed{P(R_1 = 0) = P(R_1 = 1) = \frac{1}{2}}$

Et bien sûr, il n'est pas possible qu'à la fin, une fois qu'il tire une boite vide il y ait plus d'une allumette dans l'autre (sauf si on lui en a ajouté sans lui dire).

Sinon, on pouvait dire aussi $P(R_1 = 1) = \frac{1}{2}$ car c'est l'événement « j'ai tiré deux fois de suite la même boite ».

Reformulation utilisable pour la suite.
On note A et B les deux boites, et on écrit des mots ABBA et autres pour dire quelle boite il a tiré à chaque étape (exemple : ABB il a tiré la boite A (et grillé son allumette), puis la boite B (et grillé aussi son allumette), puis tiré la boite B et dit « oh, mais elle est vide ».

A			*B*		
AA	*AB*		*BA*		*BB*
fin	*ABA*	*ABB*	*BAA*	*BAB*	*fin*
$R_1 = 1$	*fin*	*fin*	*fin*	*fin*	$R_1 = 1$
	$R_1 = 0$	$R_1 = 0$	$R_1 = 0$	$R_1 = 0$	

Dans l'approche avec n allumettes dans chaque boite, est il possible qu'à la fin il y ait strictement plus d'allumettes dans la seconde boite qu'il n'y en avait au départ ?
La réponse est « non ». On a donc $\boxed{P(R_n > n) = 0}$

Même si l'énoncé ne dit rien en ce sens. Il se peut qu'un de ses collègues facétieux remette des allumettes dans ses poches dès qu'il a le dos tourné. C'est comme toutes les hypothèses implicites en physique.

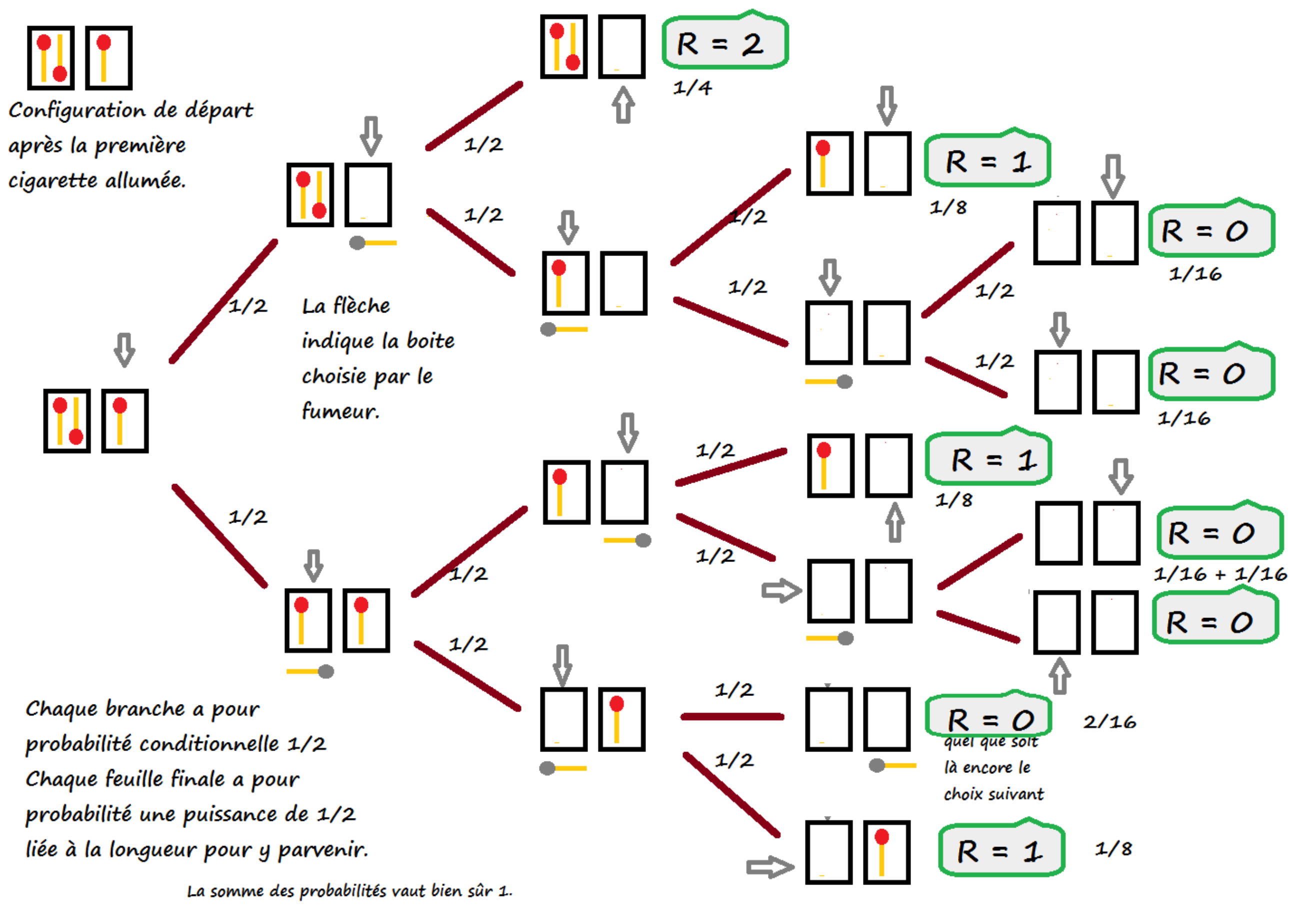
Et qu'en est il de $R_n = n$? Il faut qu'à la fin de l'expérience, il choisisse une boite vide, tandis que l'autre contient toujours ses n allumettes.
C'est donc qu'il a à chaque fois tiré la même boite qu'au premier tirage. Mais combien de fois de suite ? $n - 1$ fois pour épuiser les allumettes, et une fois de plus pour dire « mais j'ai vraiment pas de chance ». Comme les tirages sont indépendants et équiprobables, on a $\boxed{P(R_n = n) = \frac{1}{2^n}}$

Autre approche avec les mots en `ABBA` avec n égal à 4 pour comprendre.
L'événement $R_4 = 4$ correspond à deux événements incompatibles :
`AAAAA` et `BBBBB` (« je n'ai tiré que des A et au dernier coup j'ai trouvé boite vide » ou « je n'ai tiré que des B et pas de chance au dernier coup encore B ». Chacun a pour probabilité $\frac{1}{2^5}$(c'est $\frac{1}{2^{n+1}}$ car il faut épuiser les n allumettes puis jouer de malchance), mais on multiplie par 2 car il y a deux façons d'y arriver. On trouve $2 \times \frac{1}{2^{n+1}}$.
Vous pouvez faire un arbre avec deux branches qui nous concernent.

Passons à $n = 2$ (quatre allumettes equi-réparties dans deux boites, l'expérience ne durera pas plus de cinq pipes).
On peut faire un arbre façon Terminale.
Il prend une boite au hasard et en retire une allumette.
Nous voilà avec deux boites ayant respectivement deux et une allumette(s).

C'est à que commence l'arbre avec ses branches.
Stefan veut fumer. Laquelle des deux boites prend il ?

3. qui va me dire « l'expérience ne se termine jamais, car après une première pipe, le fumeur décide d'arrêter de fumer et ne sort plus jamais ses allumettes ; ce n'est pas incompatible avec l'énoncé « chaque fois qu'il veut une allumette », avec « faux implique tout »



L'arbre étant tracé, on regarde les valeurs de R_2 et on somme les probabilités des branches finissant par $R_2 = k$, pour chaque k.

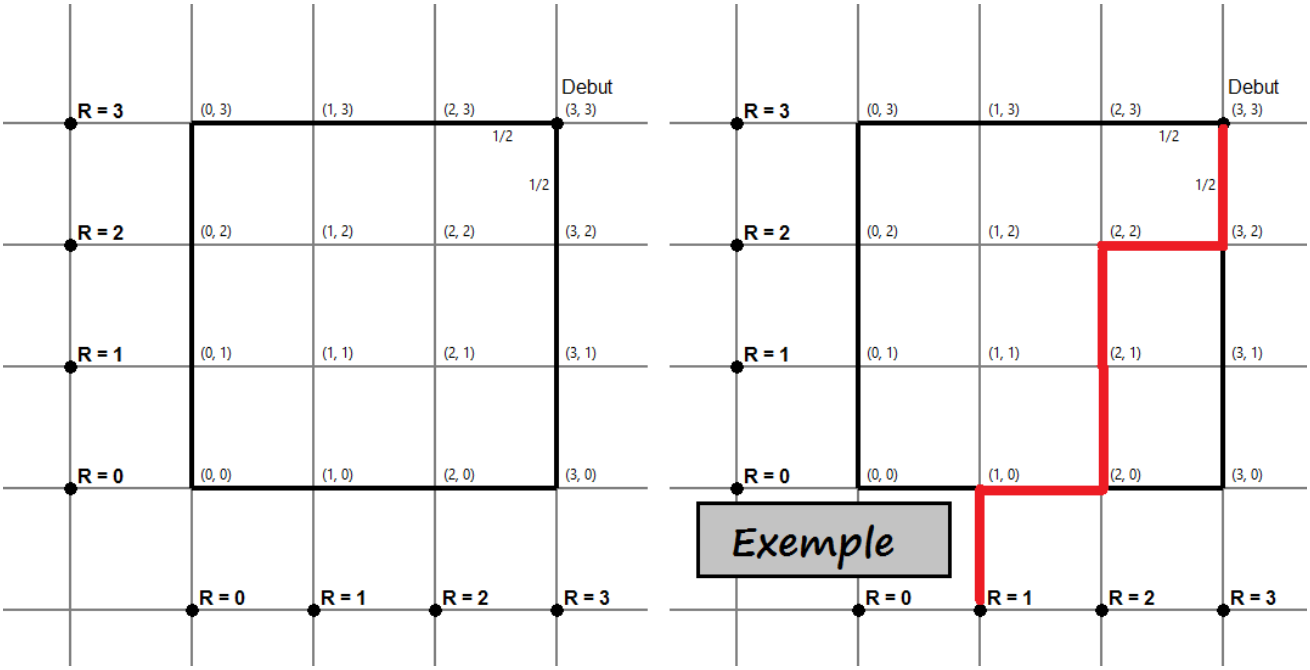
k	0	1	2
$P(R_2 = k)$	$6 \times \dfrac{1}{16}$	$3 \times \dfrac{1}{8}$	$1 \times \dfrac{1}{4}$

On retrouve $P(R_n = n) = 2^{-n}$. Et la somme des trois probabilités vaut bien 1 : $\dfrac{6}{16} + \dfrac{6}{16} + \dfrac{4}{16} = 1$.

Avec courage, on attaque les boites à trois allumettes.

Passons à $n = 3$. On a deux boites avec trois allumettes chacune.
On va donc partir sur le graphe du point $(3,\ 3)$.
Et à chaque fois, on va enlever une allumette dune des deux boites.
Bref, on passe de $(a,\ b)$ à $(a-1,\ b)$ ou $(a,\ b-1)$ suivant la boite puisée (-1 car on grille une allumette).
Sur le graphe « puiser dans A » nous fait régresser vers la gauche, « puiser dans B » nous fait descendre. Et il est interdit de remonter ou avancer à droite.
Ici, on a visualisé le trajet BABBAB qui se termine effectivement.

Si ce n'est pas visible ici, tournez la page.



Le long des axes, l'une des boites est vide. Mais si ce n'est pas dans elle que l'on puise, on ne s'arrête pas.

C'est ce qu'il est advenu en passant de $(2,\ 0)$ à $(1,\ 0)$.

En revanche, si par exemple on part de $(1,\ 0)$ et choisis la boite B, on s'empare d'une boite vide et on s'arrête.

On retrouve bien qu'on peut terminer en $(0,\ 0)$ après divers trajets possibles. Dès lors, qu'on prenne la boite A ou la boite B, on s'arrête et R_3 vaut 0.

Un trajet de longueur k sur le graphe a pour probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, puisqu'il est fait de k lettre A et B, et que chacune a pour probabilité $\frac{1}{2}$ d'être choisie.

On retrouve ce qu'on a dit : il n'y a que deux chemins conduisant à $R_3 = 3$: AAAA et BBBB.

Pour arriver à $R_3 = 2$, les chemins sont de longueur 5 comme sur l'exemple. Reste à trouver les mots.

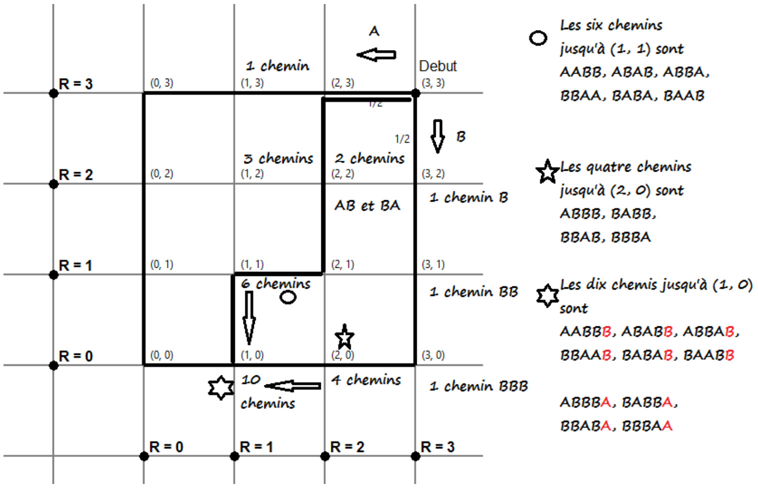
Pour arriver à $R_3 = 1$, les chemins sont de longueur 6. Reste à trouver les mots.

Enfin, avec des mots de longueur 7 on va arriver à $R_3 = 0$.

valeur finale de R_3	0		1		2		3
longueur du chemin	7		6		5		4
probabilité de chaque chemin	$\left(\frac{1}{2}\right)^7$		$\left(\frac{1}{2}\right)^6$		$\left(\frac{1}{2}\right)^5$		$\left(\frac{1}{2}\right)^4$
chemins	AAABBBA	ABAABBA	AAABBA	ABAABA	AAABA	BBBAB	AAAA
	AABABBA	...	AABBAA	BAAABA	AABAA	BBABB	BBBB
	ABAABBA	BBBAAAB	ABBAAA	AABBAA	ABAAA	BABBB	
	BAAABBA	...	BBAAAA	ABABAA	BAAAA	ABBBB	
	AABBABA	BBABAAB	AABABA	...			
nombre de chemins	2×20		2×10		2×4		2
probabilité finale	$2 \times 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7$		$2 \times 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6$		$2 \times 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$		$2 \times 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$

On vérifie que la somme des quatre probabilités vaut 1. C'est quand même la moindre des choses en probabilités.

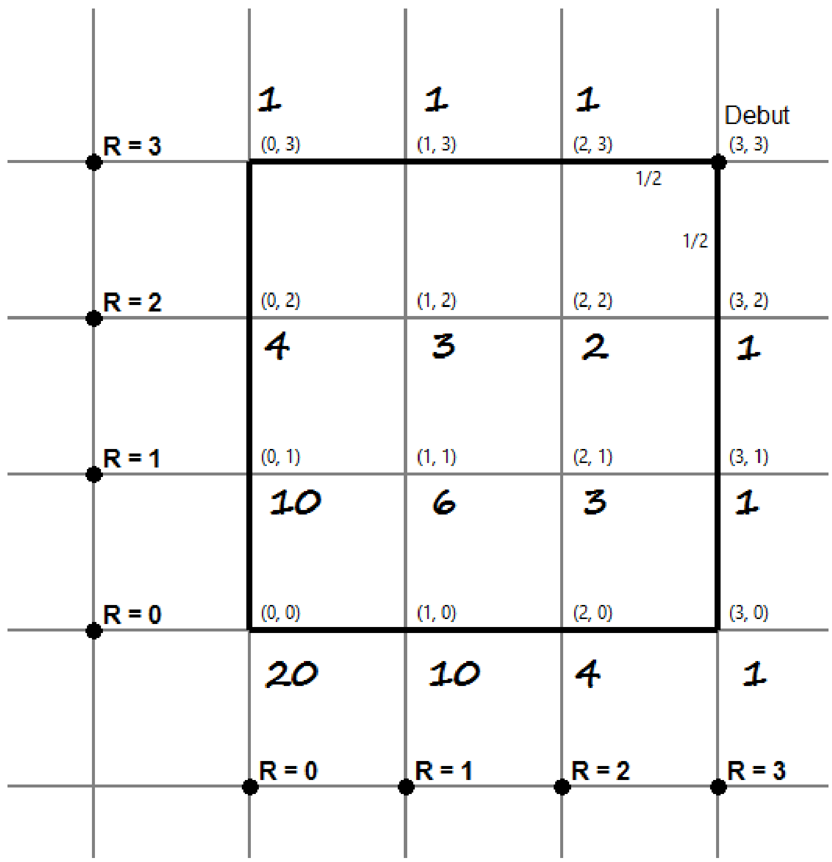
Mais comment a-t-on dénombré les chemins ?



On peut chercher sur un arbre qui se met à ressembler au triangle de Pascal[a].

On regarde déjà dans le quadrillage combien de chemins mènent de l'origine à ce point.
Et on voit que si on veut aller de $(3,\ 3)$ à $(1,\ 0)$, il faut passer par $(1,\ 1)$ (et poursuivre avec une lettre B) ou par $(2,\ 0)$ e(et finir par un A). Il y avait 6 chemins jusqu'à $(1,\ 0)$ et 4 chemins jusqu'à $(2,\ 0)$. Il y en a donc 10 jusqu'en $(1,\ 0)$.

a. il faut être en maths pour qu'un arbre ressemble à un triangle !



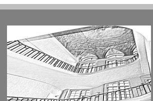
On remplit les différentes cases.

Mais finalement, les mots de $(3,\ 3)$ à $(0,\ 0)$ sont des mots de 6 lettres dont 3 A et 3 B.

Il suffit de choisir les places de A. Trois parmi 6.

On généralise.

Comment aller de $(n,\ n)$ à un point du bord $(k,\ 0)$?
De quelle longueur est le mot ?
Combien de A, combien de B ?



Algorithme Python. DS03

Pour simuler, on va créer deux variables `a` et `b` qu'on initialise à `n`.

```
a, b = n, n
```

On fait ensuite des tirages aléatoires : `randrange(2)`
Si ce tirage vaut 0, on dit qu'on pioche dans la boite A (ou du moins on essaye, elle est peut être vide).
Si ce tirage vaut 1, on dit qu'on pioche dans la boite B.

```
if randrange(2) == 0 :
....#compléter
else :
....#compléter
```

Regardons le cas où la boite dans laquelle on pioche n'est pas vide, on brûle une allumette donc on a un `a -= 1` classique.

```
if randrange(2) == 0 :
....if a != 0 :
........a -= 1
....else :
........#compléter
else :
....if a != 0 :
........a -= 1
....else :
........#compléter
```

Mais si on a pris une boite vide, on s'arrête et on regarde le contenu de l'autre :

```
if randrange(2) == 0 :
....if a != 0 :
........a -= 1
....else :
........return(b)
else :
....if a != 0 :
........a -= 1
....else :
........return(a)
```

Mais on fait ça combien de fois ?

On ne peut pas le savoir à l'avance.

On crée quel type de boucle ? `for` ? `while` ?

Il y a trois solutions, plus ou moins propres.

On pose a priori le maximum de tirages possibles : `2*n+1`.
.

Et on s'en moque, car de toutes façons, on sortira par un `return` avant d'avoir fini la boucle impérative. Pas grave. [4]

```
for k in range(2*n+1) :
....if randrange(2) == 0 :
........#voir plus haut
....else :
........#voir plus haut
```

On sait qu'on finira par sortir, donc on utilise un très risqué `while True :` qui pourrait nous placer en boucle folle.

```
while True :
....if randrange(2) == 0 :
........#voir plus haut
....else :
........#voir plus haut
```

On se dit qu'il est plus prudent de poser une condition (qui ne surviendra sans doutes pas, mais soyons prudent)

```
while a != -1 and b != -1 :
....if randrange(2) == 0 :
........#voir plus haut
....else :
........#voir plus haut
```

Je propose même de faire « comme si ». Si on a tiré une boite vide, on passe son contenu à -1. Pas grave ; ça permet de sortir de la boucle.
Une fois sorti, quel est le contenu de l'autre boite ?
Sans test ?
On calcule la somme des deux nombres. l'un vaut R_n et l'autre vaut -1. La somme utile est donc `a+b+1`.

```
def banach(n) :
....a, b = n, n
....while a != -1 and b != -1 :
........if randrange(2) == 0 :
............a -= 1
........else :
............b -=1
....return(a+b+1)
```

4. pas grave quand on programme en Python, moche en informatique propre

Et pour mettre l'expérience en boucle ?
Une boucle impérative for. C'est tout. Et un accumulateur qui grandit.

```
def babanach(n, N) :
....S = 0
....for k in range(N) :
........S += banach(n)
....return(S/N)
```

Et pour un histogramme

```
def histobanach(n, N) :
....histo = [0]*(n+1) #il y a n+1 valeurs possibles
....for k in range(N) : #on répète l'expérience N fois
........histo[banach(n)] += 1 #on incrémente une case de l'histogramme
....for p in range(n+1) : #on a fini, on reprend les cases une par une
........histo[p] /= N #on divise pour passer des cumuls statistiques aux probabilités
....return(histo)
```

Formule explicite pour $P(R_n = k)$. DS03

On nous laisse deviner une formule (si je vous l'avais donnée, vous l'auriez utilisée sans preuve pour les questions précédentes !).
On nous met quand même sur la piste avec un coefficient binomial : n parmi $2.n - k$.

Comment interpréter qu'il reste k allumettes dans la boite qui n'est pas vide (et 0 dans la boite qui est vide) ?
On avait $2.n$ allumettes, et on en en brulé $2.n - k$.
Mais pas n'importe comment puisqu'à la fin, l'une des boites est vide, et c'est elle qu'on choisit (et on s'arrête alors).

On est parti de (n, n) et on est arrivé à $(k, 0)$ (ou $(0, k)$. Et on a choisi la boite vide.
Les chemins de (n, n) à $(k, 0)$ sont des mots de $2.n - k$ lettres A et B qui alternent. Il il y a n lettres B.
Il faut placer les n lettres B dans n des 2.n-k cases. C'est un facteur $\binom{2.n-k}{n}$ qui intervient donc.

Mais chaque chemin est ensuite fait de $2.n - k$ segments qui ont chacun une probabilité de $\frac{1}{2}$.

Multiplions le nombre de segments par la probabilité de chacun : $\binom{2.n-k}{n}.\frac{1}{2^{2.n-k}}$.

Ensuite, une fois arrivé à $(k, 0)$ il faut choisir la boite B d'où $\binom{2.n-k}{n}.\frac{1}{2^{2.n-k}}.\frac{1}{2}$.

Mais il y a aussi les chemins jusqu'à $(0, k)$ (probabilité $\binom{2.n-k}{n}.\frac{1}{2^{2.n-k}}.\frac{1}{2}$), puis le choix de la boite A (probabilité $1/2$).

On arrive finalement à $\boxed{P(R_n = k) = \binom{2.n-k}{n}.\frac{1}{2^{2.n-k}}}$

> *D'autres preuves sont peut être aussi possibles*
> *Mais je doute que la phrase commençant par « prouvons par récurrence... ».*
> *Surtout qu'on ne sait pas si il va s'agir d'une récurrence sur n ou k.*

Calcul de valeur moyenne. DS03

La formule $2.(n-k).p_n(k) = (2.n+1).p_n(k+1) - (k+1).p_n(k+1)$ est une formule à prouver directement. On l'écrit même

$$2.(n-k).p_n(k) = (2.n-k).p_n(k+1)$$

Et éventuellement elle servira à des récurrences après. Mais su les nombres d'indices présents en même temps, on se dit que le mot « récurrence » serait encore une mauvaise idée.

On va calculer la différence, avec la formule obtenue auparavant

$$2.(n-k).p_n(k) - (2.n+k).p_n(k+1) = 2.(n-k).\binom{2.n-k}{n}.\frac{1}{2^{2.n-k}} - (2.n-k).\binom{2.n-k-1}{n}.\frac{1}{2^{2.n-k-1}}$$

On factorise les puissances de 2 :

$$2.(n-k).p_n(k) - (2.n+k).p_n(k+1) = \Big(2.(n-k).\binom{2.n-k}{n} - (2.n-k).\binom{2.n-k-1}{n}.2\Big).2^{k-2.n}$$

On revient à des factorielles si ça peut servir (et on sort encore un 2)

$$2.(n-k).p_n(k) - (2.n+k).p_n(k+1) = \Big((n-k).\frac{(2.n-k)!}{n!.(n-k)!} - (2.n-k).\frac{(2.n-k-1)!}{n!.(n-k-1)!}\Big).2^{k+1-2.n}$$

On simplifie les factorielles qui le veulent bien : $\dfrac{(n-k)}{(n-k)!} = \dfrac{1}{(n-k-1)!}$ et $(2.n-k).(2.n-k)! = (2.n-k)!$

$$2.(n-k).p_n(k) - (2.n+k).p_n(k+1) = \Big(\frac{(2.n-k)!}{n!.(n-k-1)!} - \frac{(2.n-k)!}{n!.(n-k-1)!}\Big).2^{k+1-2.n} = 0$$

La différence est nulle, c'est ce qu'on attendait.

> *On utilise $p\times(p!) = (p+1)!$ et ses variantes comme $\dfrac{p!}{p} = (p-1)!$. Si vous n'y arrivez pas, je ne sais pas ce que je vais faire de vous.*

On se demande pourquoi on a séparé dans le membre de droite. Pour rendre le calcul plus compliqué ?
Non, il doit y avoir une idée.

On part de la définition de $E(R_n)$ et de notre formule $2.(n-k).p_n(k) = (2.n+1).p_n(k+1) - (k+1).p_n(k+1)$ que l'on somme de $k=0$ à $n-1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2.(n-k).p_n(k) = \sum_{k=0}^{n-1}(2.n+1).p_n(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1).p_n(k+1)$$

On sépare en plusieurs sommes (formule $\sum_k(a_k+b_k) = \sum_k a_{lk} + \sum_k b_k$) et on sort les termes ne dépendant pas de la variable de sommation (formule $\sum_k n.a_k = n.\sum_k a_k$)

$$2.n.\sum_{k=0}^{n-1} p_n(k) - 2.\sum_{k=0}^{n-1} k.p_n(k) = (2.n+1).\sum_{k=0}^{k-1} p_n(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1).p_n(k+1)$$

On décale les indices dans la dernière somme

$$2.n.\sum_{k=0}^{n-1} p_n(k) - 2.\sum_{k=0}^{n-1} k.p_n(k) = (2.n+1).\sum_{k'=1}^{n} p_n(k') - \sum_{k'=1}^{n} k'.p_n(k')$$

Il est temps d'écrire $E(R_n) = \sum_{k=0}^{n} k.p_n(k)$ et de remplacer $\sum_{k=0}^{n-1} k.p_n(k) = E(R_n) - n.p_n(n)$ et aussi $\sum_{k=1}^{n} k.p_n(k) = E(R_n)$

$$2.n.\sum_{k=0}^{n-1} p_n(k) - 2.\Big(E(R_n) - n.p_n(n)\Big) = (2.n+1).\sum_{k=1}^{n} p_n(k') - E(R_n)$$

Mais il faut aussi réfléchir. Que vaut $\sum_{k=0}^{n} p_n(k)$? C'est la somme de toutes les probabilités. Elle vaut 1. On donc $\sum_{k=1}^{n} p_n(k) = 1 - p_n(0)$ et $\sum_{k=1}^{n-1} p_n(k) = 1 - p_n(n)$. On en est donc à

$$2.n.(1-p_n(n)) - 2.\Big(E(R_n) - n.p_n(n)\Big) = (2.n+1).(1-p_n(0)) - E(R_n)$$

On développe et simplifie un $2.n.p_n(n)$ dans le premier membre

$$2.n-2.E(R_n)=(2.n+1).(1-p_n(0))-E(R_n)$$

puis un $2.n$ de part et d'autre

$$-2.E(R_n)=-(2.n+1).p_n(0)+1-E(R_n)$$

On isole le terme qui nous intéresse (c'est $E(R_n)$)

$$E(R_n)=(2.n+1).p_n(0)-1$$

La formule attendue (espérée désespérément) est $\boxed{E(R_n)=(2.n+1).p_n(0)-1=\dfrac{2.n+1}{2^{2.n}}.\dbinom{2.n}{n}-1}$

Les premières valeurs sont 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{19}{16}$, $\frac{187}{128}$ et c'est de plus en plus laid.

Equivalents en $+\infty$. DS03

On a trouvé d'une part $f(n)=\dbinom{2.n}{n}.\dfrac{\pi}{2^{2.n+1}}$ et d'autre part $P(R_n=0)=\dbinom{2.n}{n}.\dfrac{1}{2^{2.n}}$.

On a donc $\boxed{P(R_n=0)=\dfrac{2}{\pi}.f(n)=\dfrac{2}{\pi}.W_{2.n}}$ pour reprendre nos notations habituelles.

Avec l'équivalent de la première partie $f(2.n)\sim_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{\pi}{4.n}}$ et comme les équivalents passent aux produits : $\boxed{P(R_n=0)\sim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n.\pi}}}$

Pour répondre à la question : $P(R_n=0)\sim a.n^{\alpha}$ avec $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ et $\alpha=-\dfrac{1}{2}$.

Et voilà comment πse met à intervenir avec des histoires de fumeur et d'allumettes.

On a prouvé : $E(R_n)=(2.n+1).P(R_n=0)-1$.
Les équivalents passent aux produits :

$$(2.n+1).P(R_n=0)\sim_{n\to+\infty}\frac{2.n+1}{\sqrt{n.\pi}}\sim_{n\to+\infty}\frac{2.n}{\sqrt{n.\pi}}=\frac{2.\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

Comme ce terme tend vers l'infini, le fait d'ajouter ou soustraire 1 ne change rien à l'équivalent

$$E(R_n)\sim_{n\to+\infty}\frac{2.\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

Cette fois, la constate réelle vaut $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}et$l'exposant vaut $\dfrac{1}{2}$.