

◦0◦

Montrez : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos^3(\theta) = \frac{\cos(3\theta) + 3 \cdot \cos(\theta)}{4}$.

Exprimez $\theta \mapsto \cos(8\theta)$ comme combinaison linéaire de $\theta \mapsto \cos^k(\theta)$ pour θ de 0 à 8 .

◦1◦

T_n est le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychev. Calculez $T_{20}(\sqrt{3}/2)$, $T_{13}(1/2)$ et $T'_{13}(1/2)$.
Résolvez $T_{16}(x) > 1$ d'inconnue réelle x .

Les polynômes de Tchebychev sont caractérisés par $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

On a donc très vite $T_{20}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = T_{20}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \cos\left(\frac{20\pi}{6}\right) = \cos\left(4\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$.

On a aussi $T_{13}\left(\frac{1}{2}\right) = T_{13}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Pour la dérivation, il faut être vraiment matheux et se préoccuper des variables. On part encore de $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et on dérive (avant de donner une valeur à θ) :

$-\sin(\theta) \cdot T'_n(\cos(\theta)) = -n \cdot \sin(n\theta)$, puis on donne une valeur à θ , en l'occurrence ici $\pi/3$:

$-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot T'_{13}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -13 \cdot \sin\left(\frac{13\pi}{3}\right)$ donc $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot T'_{13}\left(\frac{1}{2}\right) = 13 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$: $T'_{13}\left(\frac{1}{2}\right) = 13$

J'attends la réponse crétinissime des certains : puisque $T_{13}(1/2)$ est une constante, quand on dérive, on trouve 0. Je me demande ce que ceux là font en sciences. Et j'attends hélas aussi d'autres grosses bêtises des personnes pressées d'écrire des formules sans s'interroger d'abord sur qui sont les variables...

Quand la variable x est entre -1 et 1 , on peut l'écrire $x = \cos(\theta)$ et on a $T_n(x) = T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \leq 1$.

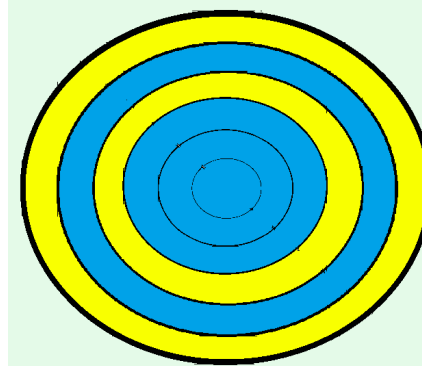
Quand la variable x a dépassé 1 , par croissance de T_n (dont la dérivée ne peut plus s'annuler et changer de signe, elle a eu toutes ses racines entre -1 et 1), on a alors $T_n(x) > 1$.

Par parité, pour x plus petit que -1 , on a $T_n(x) = T_n(-x) > 1$.

Comme on a étudié tous les cas, on a bien $T_{16}(x) > 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

L'argument est essentiellement visuel sur la forme des polynômes de Tchebychev. On préférera une réponse imparfaite certes avec un petit dessin à la personne qui se lancera dans un long calcul pour expliciter T_{16} et ne pas savoir qu'en faire...

♣ Il fallait découper le gâteau (ci contre vu du dessus) en deux parts égales. Au lieu d'effectuer une découpe "en argument", on a effectué une découpe "en module". Sur le schéma, on a des cercles concentriques de rayons entiers 1 à 6 . Montrez que les deux parts colorées sont égales.



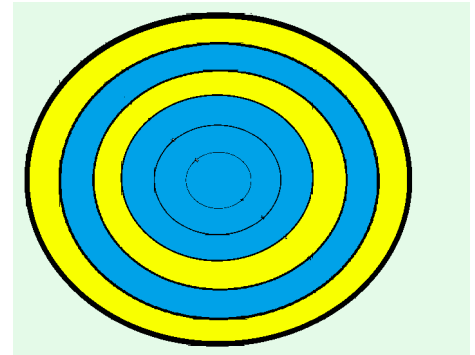
◦2◦

Re-répartissez ce découpage en deux parts égales.

On a un disque qu'on découpe en couronnes successives. Les rayons vont de r à $6r$.

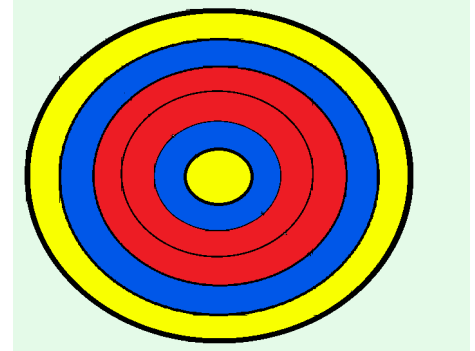
Le $r^{\text{ième}}$ disque a pour aire $\pi \cdot k^2 \cdot r^2$. La $r^{\text{ième}}$ couronne a donc pour aire $\pi \cdot k^2 \cdot r^2 - \pi \cdot (k-1)^2 \cdot r^2$ c'est à dire $(2k-1) \cdot \pi \cdot r^2$.

numéro de la couronne	1	2	3	4	5	6	
aire	$1.\pi.r^2$	$3.\pi.r^2$	$5.\pi.r^2$	$7.\pi.r^2$	$9.\pi.r^2$	$11.\pi.r^2$	
jaune				$7.\pi.r^2$		$11.\pi.r^2$	$(11+7)$
bleu	$1.\pi.r^2$	$3.\pi.r^2$	$5.\pi.r^2$		$9.\pi.r^2$		$(1+3+5+9)$



Les deux protagonistes ont droit à $18.\pi.r^2$.

numéro de la couronne	1	2	3	4	5	6	
aire	$1.\pi.r^2$	$3.\pi.r^2$	$5.\pi.r^2$	$7.\pi.r^2$	$9.\pi.r^2$	$11.\pi.r^2$	
jaune	$1.\pi.r^2$					$11.\pi.r^2$	12
bleu		$3.\pi.r^2$			$9.\pi.r^2$		12
rouge			$5.\pi.r^2$	$7.\pi.r^2$			12



Chacun a un tiers de la surface totale. la clef étant dans $1 + 11 = 3 + 9 = 5 + 7$.

La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout $n : F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Montrez pour tout $n : \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \leq F_n \leq 2^n$.

Pour n égal à 0 et même à 1 :

$n = 0$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$	≤ 1	$\leq 1 = 2^0$
$n = 1$	$\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$	≤ 1	$\leq 2 = 2^1$

On se donne n et on suppose

rang n	$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$	$\leq F_n$	$\leq 2^n$
rang $n + 1$	$\left(\frac{3}{2}\right)^n$	$\leq F_{n+1}$	$\leq 2^{n+1}$

On somme :

rang n	$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$	$\leq F_n$	$\leq 2^n$
rang $n + 1$	$\left(\frac{3}{2}\right)^n$	$\leq F_{n+1}$	$\leq 2^{n+1}$
	$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^n$	$\leq F_n + F_{n+1}$	$\leq 2^n + 2^{n+1} = 2^n \cdot (1 + 2) = 3 \cdot 2^n \leq 4 \cdot 2^n = 2^{n+2}$

A droite, c'est bon, à gauche, on écrit

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{5}{2}\right) \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+2-1}$$

La propriété est héréditaire.

Résolvez : F_n est pair d'inconnue entière n .

On regarde la parité de F_n pour les premiers n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
$F_n \text{ mod } 2$	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1

On devine très vite le motif

1	1	0
---	---	---

 ou si vous préférez

impair	impair	pair
--------	--------	------

Le mieux est d'énoncer un propriété par groupes de trois

$F_{3,p}$ impair	$F_{3,p+1}$ impair	$F_{3,p+2}$ pair
------------------	--------------------	------------------

La propriété est initialisée pour p égal à 0 (et même 1 et 2).

Supposons la propriété vraie au rang p (donc aux rangs $n = 3.p, n = 3.p + 1$ et $n = 3.p + 2$) et calculons au rang

$p + 1$ (donc aux rangs $n = 3.p$, $n = 3.p + 1$ et $n = 3.p + 2$).

$n = 3.p$	$n = 3.p + 1$	$n = 3.p + 2$	hypothèse au rang p		
impair	impair	pair			
	impair + pair \rightarrow		impair		
		pair + impair \rightarrow		impair	
			impair + impair \rightarrow		pair
			impair	impair	pair
conclusion au rang $p + 1$			$n = 3.(p + 1)$	$n = 3.(p + 1) + 1$	$n = 3.(p + 1) + 2$

Pas trop de mots, mais un tableau pour expliquer.

Normalement, on comprend au premier coup d'oeil (c'est des maths).

Mais il n'y a pas de symboles partout ni de long calcul (ce n'est pas de la chimie).

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tout $n : U_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$. Montrez que (U_n) est une suite géométrique de raison (à gauche) M (c'est à dire $U_{n+1} = M.U_n$ et déduisez $U_n = M^n.U_0$).

$$\text{On multiplie } M.U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n + F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

C'est une preuve directe.

Vous apprenez pour un crétin si vous avez titré « je fais une récurrence ».

C'est une formule directe qui SERT ensuite POUR DES RECURRENCES.

Maintenant, on peut faire une récurrence sur n pour prouver : $U_n = M^n.U_0$.

C'est vrai pour n égal à 0.

Supposons le résultat vrai pour n . On calcule alors

$$U_{n+1} = M.U_n = M.(M^n.U_0) = (M.M^n).U_0 = M^{n+1}.U_0$$

« Monsieur, on fait la récurrence à chaque fois, ou on dit que c'est évident. »

Pas de récurrence.

Vous l'avez faite il y a trois ans.

Et juste un résultat du cours de première : une suite géométrique caractérisée par $u_{n+1} = m.u_n$ vérifie automatiquement

$$u_n = m^n.u_0.$$

Simplement, ici, on a des éléments dans $M_2(\mathbb{R})$ et pas dans \mathbb{R} .

Il faut donc surveiller la non-commutativité.

Montrez : $M^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$ par récurrence sur n (est ce une convention de poser $M^0 = I_2$ ou bien est ce logique ?).

Les premières puissances de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donnent $M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $M^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

On a initialisé.

Supposons pour un n donné : $M^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$. On calcule alors

$$M^{n+1} = M^n.M = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_n & F_n + F_{n-1} \end{pmatrix}$$

Par propriété de la suite de Léonard : $M^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$.

C'est bien la formule au rang $n + 1$.

On rappelle : $\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = a.d - b.c$. Montrez pour tout couple de matrices : $\det(A.B) = \det(A).det(B)$.

On se donne deux matrices dont on calcule produit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.\alpha + b.\gamma & a.\beta + b.\delta \\ c.\alpha + d.\gamma & c.\beta + d.\delta \end{pmatrix}$$

On compare ensuite $(a.\alpha + b.\gamma).(c.\beta + d.\delta) - (c.\alpha + d.\gamma).(a.\beta + b.\delta)$
 et $(a.d - b.c).(a.\delta - \gamma.\beta)$

Il y a égalité.

Déduisez : $F_{n-1}.F_{n+1} - (F_n)^2 = (-1)^{n-1}$ pour tout n . Oui, il s'agit d'utiliser le déterminant !

En mettant en boucle cette propriété, on a $\det(A^n) = (\det(A))^n$ pour tout n (récurrence sur n en fait).

En particulier, pour la relation $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$ on obtient $(-1)^n = F_{n-2}.F_n - (F_{n-1})^2$.

Pas de grosse récurrence avec des F_n partout, juste un belle « astuce » matricielle !

Déduisez que le seul facteur commun à F_n et F_{n+1} est 1.

On se donne n . On suppose qu'un entier d divise F_n et F_{n+1} .

Alors d divise aussi $F_n.F_{n+2}$ et $F_{n+1}.F_{n+1}$ (si d divise a , il divise tout multiple de a).

Par addition, d divise $F_n.F_{n+2} - (F_{n+1})^2$ (directement, si d divise a et b il divise toute combinaison $a.u + b.v$).

Mais alors d divise $(-1)^{truc}$.

Il ne peut valoir que 1.

F_n et F_{n+1} sont toujours premiers entre eux.

Sinon, on voit que la formule $F_{n-1}.F_{n+1} - (F_n)^2 = (-1)^{n-1}$ est une identité de Bézout de la forme $a.F_{n+1} - b.F_n = \pm 1$ avec a et b entiers.

◦4◦

♥ Montrez que $(a, b) \mapsto (2.a + 3.b, 3.a + 4.b + 1)$ (notée g) est bijective de \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{Z}^2 par exemple en donnant sa réciproque g vérifiant $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = Id$.

(*au fait, qui a oublié de vérifier avant la bijectivité que l'on a bien une application de \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{Z}^2 ?*)

Montrez que pour $(a, b) \mapsto (2.a + 3.b, 2.a + 4.b + 1)$ (notée h), il existe une application h de \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{Z}^2 vérifiant $h^{-1} \circ h = Id_{\mathbb{Z}^2}$.

Ce qu'on oublie à tous les coups : cette application va-t-elle bien de \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{Z}^2 ?

Si a et b sont entiers (relatifs), alors $2.a + 3.b$ et $3.a + 4.b + 1$ sont aussi entiers.

Injectivité, parce que c' est le plus simple à faire, juste en calculant.

On se donne a, b, c et d .

On suppose $(2.a + 3.b, 3.a + 4.b + 1) = (2.c + 3.d, 3.c + 4.d + 1)$.

On égalise : $\begin{matrix} 2.a + 3.b & = & 2.c + 3.d \\ 3.a + 4.b & = & 3.c + 4.d \end{matrix}$

On effectue des combinaisons : $3.L1 - 2.L2$ et aussi $4.L1 - 3.L2$.

On aboutit à $a = c$ et $b = d$.

Surjectivité. On se donne un couple (x, y) , il faut lui trouver un antécédent.

On résout donc $\begin{matrix} 2.a + 3.b & = & a \\ 3.a + 4.b & = & b - 1 \end{matrix}$ d'inconnues a et b .

On trouve une unique solution (après calculs) : $a = 3.b - 4.a - 3$ et $b = 3.a - 2.b + 2$.

le fait d'avoir trouvé une solution DANS \mathbb{Z}^2 (pas de dénominateur) prouve la surjectivité vers \mathbb{Z}^2 .

Et le fait de n'avoir qu'une solution re-donne l'injectivité.

Pour la surjectivité seule, on peut proposer/vérifier.

Tiens, on a trouvé l'application réciproque : $(x, y) \mapsto (-4.a + 3.b - 3, 3.a - 2.b + 2)$.

Petite subtilité en passant.

L'application de l'anoncé peut aussi être regardée de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N}^2 .

Elle va bien de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N}^2 (que des signes plus).

Elle reste injective.

Mais elle n'est plus surjective. l'antécédent de $(1, 0)$ est dans \mathbb{Z}^2 mais pas dans \mathbb{N}^2 .

◦5◦

Guillaume Deslandes (ex MPSI2, livre chez Ellipses traduit aux presses du MIT) vous a donné des poids (*pardon des masses*) de 100, 300, 900 grammes ainsi que 2,7 et 8,1 kilogrammes. Montrez qu'avec une balance de type Roberval (*deux plateaux*), vous pouvez peser toute quantité de 0 à 10 kilos (*par tranches de 100 grammes*) et même plus.
Prouvez que c'est un système de poids optimal.

Indication :

Vous jouez contre Guillaume Deslandes^a. Sur la table, il y a neuf plaquettes, numérotées de 1 à 9. Chacun prend à tour de rôle une tablette à la fois. Le premier qui a dans ses tablettes trois tablettes dont la somme vaut 15 a gagné.

2	9	
	5	
6		8

◦6◦

a. ancien élève de MPSI2, ancien colleur de MPSI2, prof de Prépas, auteur avec son frère (aussi ancien MPSI2) d'un livre d'énigmes chez Ellipses préfacé par Cédric Villani

Vous voulez gagner à tout prix. Vous commencez ou vous laissez Guillaume entamer ?

Ce jeu est isomorphe (=a la même forme que) au jeu de morpion.

Vous devez vous débrouiller pour que les plaques que vous avez choisies correspondent à un alignement dans le tableau

2	9	4
7	5	3
6	1	8

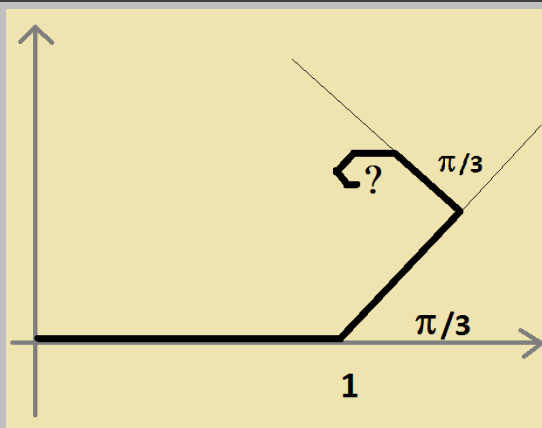
Comme au morpion, votre intérêt est donc de commencer par la case du milieu. Vous prenez le 5 et vous réagissez correctement ensuite.

Vous gagnerez.

On part de l'origine. On avance de une unité dans la direction du demi-axe réel positif. On tourne de $\pi/3$. On avance d'une demi unité. On tourne de $\pi/3$. On avance d'un quart d'unité. On tourne de $\pi/3$. On avance d'un huitième d'unité. On tourne de $\pi/3$. On avance d'un seizième d'unité. A chaque fois, on tourne du même angle $\pi/3$, et on divise la distance par 2. Vers quel point se dirige-t-on ?

En gardant le même angle $\pi/3$ mais en remplaçant le rapport $1/2$ par un autre rapport r , est-il possible de converger vers le point d'affixe i ?

C'est un exercice très simple sur la série géométrique.



◦7◦

Écrivez un script Python avec module `turtle`.

En regardant chaque déplacement comme un changement d'affixe par addition d'un terme contenant direction et norme, on peut suivre à la trace le point.

Partant de $z = 0$, on avance à chaque fois de 2^{-n} en ayant tourné de $\frac{n \cdot \pi}{3}$ au total.

On a donc $z_n = \sum_{k=0}^n 2^{-k} \cdot e^{i \cdot k \cdot \pi/3}$.

On a une série géométrique de raison autre que 1.

La somme vaut $\frac{1 - \frac{e^{i \cdot (n+1) \cdot \pi/3}}{2^{n+1}}}{1 - \frac{e^{i \cdot \pi/3}}{2}}$.

On converge vers le point d'affixe $\frac{2}{2 - e^{i \cdot \pi/3}}$. Tous calculs faits : $\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$ oui, au dessus du point I (même abscisse¹)

Avec un autre rapport, la somme devient $\frac{1 - r^{n+1} \cdot e^{i \cdot (n+1) \cdot \pi/3}}{1 - r \cdot e^{i \cdot \pi/3}}$ et elle converge vers $\frac{1}{1 - r \cdot e^{i \cdot \pi/3}}$.

Même en y mettant de la bonne volonté, on n'obtient pas i .

Mais en jouant sur la longueur du premier pas, le rapport et/ou l'angle, on peut tout viser...

1. pardon ! même partie réelle

```
angle, facteur = 30, 0.5
longueur = 200
```

```
from turtle import *
```

```
T = Turtle()
for k in range(20) :
...forward(longueur)
...left(angle)
...longueur *= facteur
```

Petit problème : mon correcteur orthographique ne connaît pas le mot turtle (normal, c'est de l'anglais). Mais de là à ce qu'il me propose en remplacement le mot « turlute »...

Rappel : la turlute est le cri de l'alouette, un équipement pour la pêche et également une façon de chanter (québécoise) par onomatopées, proche du beat-box finalement.

◦8◦

Voici les notes et totaux de trois élèves au concours de l'École Nationale Fédérale d'Ornithologie et Ingénierie Robotique ÉVOLUÉE :

élève	français	physique	mathématiques	total
Raiman-Phénomélaaaale	5	4	9	120
Décha-Pourléboufai	2	6	8	114
Endual-N'mi	0	10	11	157

Quelle note aurait du avoir l'élève Endual-N'mi en français pour avoir un total de 200 et être admissible ? Quel total aura un élève qui aura vingt en mathématiques et zéro partout ailleurs.

On donne un nom aux coefficients f , p et m .

On écrit un système $\begin{cases} 5.f + 4.p + 9.m = 120 \\ 2.f + 6.p + 8.m = 114 \\ 10.p + 11.m = 157 \end{cases}$ ou même $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 10 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ p \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 114 \\ 157 \end{pmatrix}$.

On résout le système par exemple en exprimant p en fonction de dans la dernière et en remontant

$$\text{en inversant la matrice } \begin{pmatrix} f \\ p \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 10 & 11 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 114 \\ 157 \end{pmatrix}$$

Français	Physique	Mathématiques
5	8	7

Remarque : *Il arrive qu'à cause d'une erreur, on me propose des coefficients négatifs, et qu'on ne se demande pas si c'est logique. Sinon, peut on « proposer/vérifier » ? Oui, si on a l'assurance qu'il ne peut y avoir qu'une solution.*

Sinon, il paraît qu'avec un élève fait de -2 fois le premier plus 5 fois le second moins 2 fois le troisième, on récupère clef en main un coefficient !

Il manque à l'élève 43 point coefficient 5. C'est à dire à peu près 9.

◦9◦

Vous calculez $(4 + 5)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} \binom{2018}{k} \cdot 4^k \cdot 5^{2018-k}$. Quel est le plus grand nombre dans le membre de droite ?

Le maximum de $k \mapsto \binom{2018}{k} \cdot 4^k \cdot 5^{2018-k}$ est atteint quand le quotient $\frac{\binom{2018}{k+1} \cdot 4^{k+1} \cdot 5^{2017-k}}{\binom{2018}{k} \cdot 4^k \cdot 5^{2018-k}}$ bascule autour de 1.

Ce quotient vaut $\frac{8072 - 4 * k}{5 + 5.k}$.

Tout se passe en 896.

◦10◦

Complétez : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & & \end{pmatrix}$ (on fait tomber les colonnes sur les lignes).

Dans $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ b & c & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ e & 1 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ g & 0 & h \\ 3 & i & 4 \end{pmatrix}$, on donne des noms aux coefficients, et on résout de petites équations comme $1 + e = 2$.

On trouve finalement $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

◦11◦

Trouvez deux ensembles A et B vérifiant $\text{Card}(P(A) \cup P(B)) = 11$.

Trouvez deux ensembles A et B vérifiant $\text{Card}(P(A) \cup P(B)) = 10$.

Rappel : $P(A)$ est l'ensemble de toutes les parties de A .

Par exemple $P(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

$P(\{u\}) = \{\emptyset, \{u\}\}$

Facile, du moment qu'on accepte l'idée que les objets mathématiques ne sont pas que des nombres, mais aussi des ensembles, des fonctions, des opérateurs. Bref, des trucs vivants.

Prenons justement $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b\}$.

Ici, $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ (huit éléments)

$P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ (quatre éléments)

$P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ (onze éléments)

On ne confondra pas $P(A) \cup P(B)$ avec $P(A \cup B)$ (bien plus gros, car contenant des choses comme $\{1, 2, a\}$, et un total de 32 éléments).

Est-il possible d'avoir $\text{Card}(P(A) \cup P(B)) = 10$?

On met dans $P(A) \cup P(B)$ • les 2^p parties de A (en posant $p = \text{Card}(A)$)

• les 2^q parties de B (en posant $q = \text{Card}(B)$)

et enlever les parties communes, comme \emptyset et d'autres si A et B ont des éléments communs.

Mais peut-on avoir $2^p + 2^q - \dots = 10$?

Prenons, $P(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ (huit éléments)

$P(\{3,4\}) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}\}$ (quatre éléments)

$P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{4\}, \{3,4\}\}$ (dix éléments)

◦12◦

La suite u est définie par $u_0 = 7, u_1 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2.u_n$. (u_n) est-elle croissante ? Est-elle croissante à partir d'un certain rang ?

On calcule les premiers termes.

7	-4	10	2	22	26	70
---	----	----	---	----	----	----

On peut affirmer : $u_1 < u_0$: la suite n'est pas croissante.

La négation de suite croissante n'est pas « suite décroissante », c'est « il existe n tel que... ».

En revanche, à partir du rang 2, tous les termes de la suite sont positifs.

Récurrence : C'est vrai pour u_2 et u_3 .

Si pour un n donné, u_n et u_{n+1} sont positifs, alors u_{n+2} est positif (combinaison).

A partir du rang 3, la suite est croissante.

Direct : $u_{n+1} = u_n + 2.u_{n-1} \geq u_n$ puisque u_{n-1} est positif.

Cette fois, pas de récurrence.

Ah, il faut savoir quand faire une récurrence, et quand faire une preuve directe.

Et ça, ce n'est pas un truc qui s'apprend par cœur comme une classification périodique ou une chanson de...

C'est une question d'intelligence.

On définit alors le vecteur d'observation $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Donnez la matrice M vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = M.U_n$.

Classique : $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_{n+1} \\ 2.u_n & +u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

On se doute même que c'est la seule. Mais ce n'est pas demandé.

Une question du type « donnez ... vérifiant... » appelle une réponse « on propose/on vérifie », et des raisonnements par explications et non par implication (balancez à la poubelle vos « forcément » et autres « on identifie »).

Donnez une matrice D vérifiant $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(D)$ et $\det(M) = \det(D)$.

$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ vérifie $a + b = 1$ et $a \times b = -2$. On trouve l'équation dite caractéristique : $x^2 - x - 2 = 0$.

On trouve deux solutions : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On en choisit une.

Prendre l'autre modifiera la matrice P mais pas le résultat final M^n .

Comment celui qui ignore le calcul matriciel trouvera l'équation caractéristique.

Bricolage : Il se dit : est il possible qu'une suite géométrique soit solution de notre problème ?

Il tente une suite de la forme $u_0 \cdot x^n$ avec x à déterminer.

Il reporte : $u_0 \cdot x^{n+2} = u_0 \cdot x^{n+1} + 2 \cdot u_0 \cdot x^n$.

Il simplifie : $x^{n+2} = x^{n+1} + 2 \cdot x^n$.

Il simplifie encore : $x^2 = x + 2$.

Trouvez une matrice P inversible de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ vérifiant $M \cdot P = P \cdot D$ (et inversez P).

On veut écrire $M \cdot P = P \cdot D$.

A priori, si P est avec quatre coefficients, on a quatre équations :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On se dit qu'avec quatre équations pour quatre inconnues, on va avoir un système et une unique solution.

Mais voilà, deux des quatre équations sont redondantes (si on y réfléchit, c'est à cause de l'égalité des déterminants et traces).

Alors on va pouvoir imposer $\alpha = \beta = 1$. En fait, ce ne sont pas les coefficients de P qui importent, mais les deux colonnes de P , à facteur multiplicatif près.

Bref, on y va $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Et je vais faire le con... Pardon, je vais faire l'élève.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 2+a & 2+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -a & 2b \end{pmatrix} \text{ (là ça va)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -1 \text{ et } b = 2 \text{ (et vlan !)}$$

L'élève a raisonné avec ses réflexes de Terminable. Il n'a gardé que deux équation au lieu de quatre.

Il a raisonné par implications.

Et on veut l'autre sens !

$$\text{Reprenons : } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = -1 & \text{et} & b = 2 \\ 2 + a = -a & \text{et} & 2 + b = 2b \end{matrix}$$

Et là, par équivalences, les quatre équations sont correctes.

Bon, de toutes façons, pour ne pas se perdre, on propose/vérifie $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculez D^n , M^n , U_n et u_n .

Par récurrence évidente : $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Par multiplication : $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

Par récurrence sur n ou concaténation : $M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$.

Concaténation, c'est « mise bout à bout » : $M^n = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \dots (P \cdot D \cdot P^{-1})$

Les $P^{-1} \cdot P$ se simplifient, et il reste $M^n = P \cdot D \cdot D \cdot D \dots D \cdot P^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{On a donc } M^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ M^n &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n \\ (-1)^{n+1} & 2^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ M^n &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n \\ (-1)^{n+1} & 2^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$M^n = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1)^n + 2^n & 2^n - (-1)^n \\ 2 \cdot (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 2^{n+1} - (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Enfin, ayant affaire à une suite géométrique de raison à gauche $M : U_n = M^n \cdot U_0$.
(ici, pas de récurrence, c'est une simple histoire de suite géométrique).

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1)^n + 2^n & 2^n - (-1)^n \\ 2 \cdot (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 2^{n+1} - (-1)^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

On notera qu'on a deux lignes. l'une donne u_n en fonction de n : $u_n = \frac{(2 \cdot (-1)^n + 2^n) \cdot 7 - (2^n - (-1)^n) \cdot 4}{3}$
et l'autre donne u_{n+1} . Et c'est la même au rang $n + 1$. Pas grand chose de nouveau...

On peut réarranger : $u_n = 6 \cdot (-1)^n + 2^n$

Résolvez $u_n \geq 2017$ d'inconnue entière n .

On veut $6 \cdot (-1)^n + 2^n \geq 2017$.

Quitte à oublier un instant $18 \cdot (-1)^n$, on résout $2^n \geq 2017$.

A la main, on trouve $n \geq 11$.

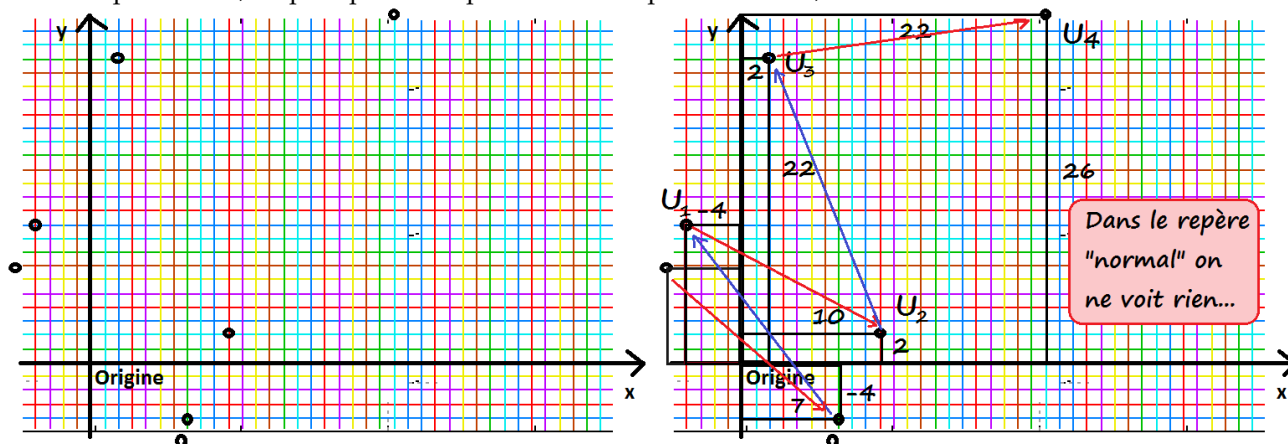
Et on peut vérifier : $6 + 2048 \geq 2017$ et $-6 + 1024 < 2017$.

Et au delà du rang 11, par croissance : $u_n \geq u_{11} > 2017$.

Si on n'avait pas eu des nombres si simples, on aurait dû faire intervenir des logarithmes pour résoudre $2^n \geq A$ d'inconnue n .

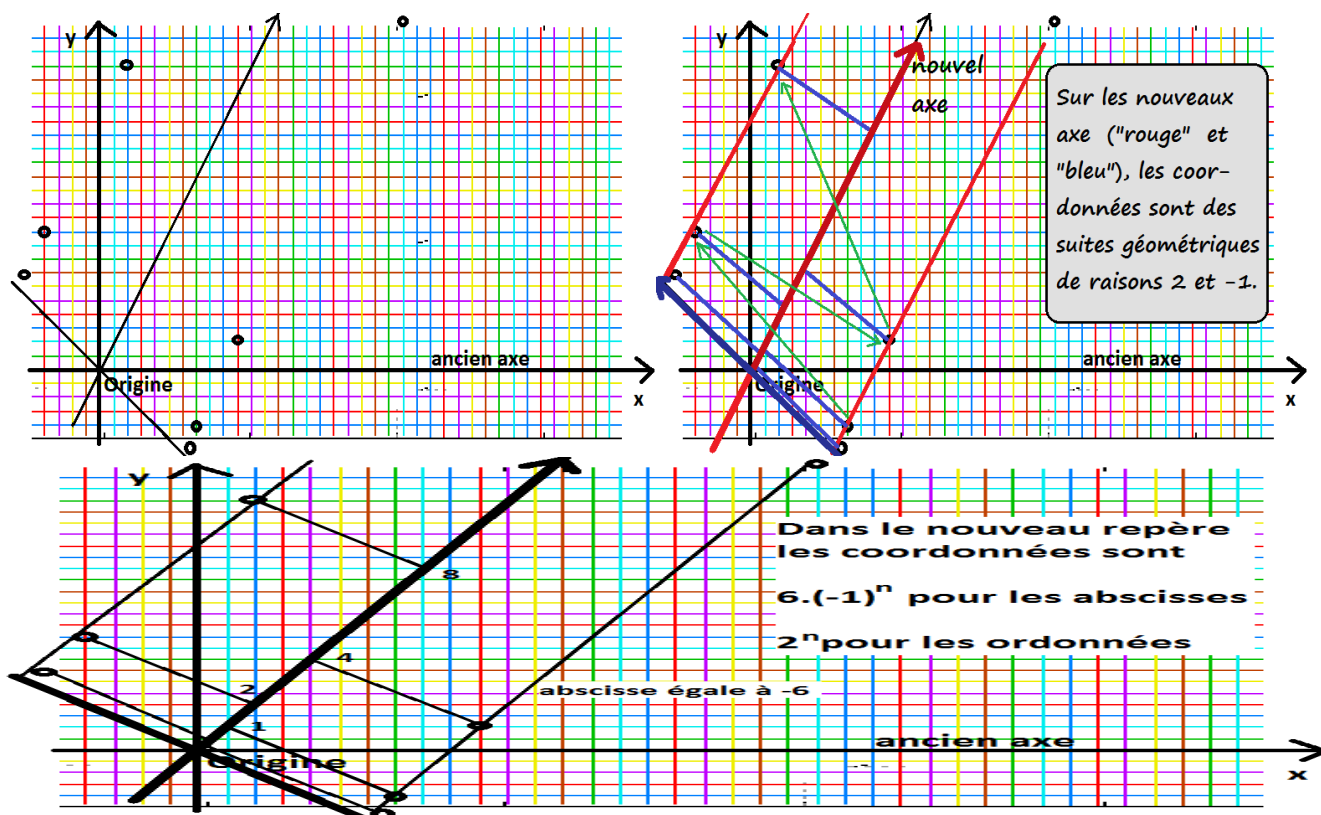
Placez dans le plan les points U_n pour n de -2 à 4 (repère orthonormé, échelle à choisir). Tracez le nouveau repère qui garde la même origine 0 mais prend pour axes $\text{Vect}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\text{Vect}(\vec{i} + 2\vec{j})$. Donnez les coordonnées des points U_n dans ce repère.

Dans le repère initial, on peut placer les points les uns après les autres, et mettre en valeur leurs coordonnées.



On trace le nouveau repère. Les points ne bougent pas, mais leur coordonnées changent.

On note que le nouveau repère correspond « comme par hasard » à la matrice de passage P .



On pose $A = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$. Calculez A^2 , B^2 , $A.B$, $B.A$, ainsi que $A + B$.

Calculez A^n et B^n . Pourquoi peut-on utiliser la formule du binôme pour $(A + B)^n$ et pourquoi donne-t-elle $A^n + B^n$? Retrouvez la matrice M^n .

On va calculer M^n par une autre méthode, qu'on appelle décomposition en combinaisons de projecteurs commutant deux à deux.

Ne cherchez pas pour l'instant à comprendre pourquoi, qui sont ces projecteurs...

Ce sont ces deux matrices A et B (de somme M , comme par hasard).

On effectue les calculs et surtout, on ne s'arrête pas à A^2 = quatre coefficients.

On prend du recul :

A^2	B^2	$A.B$	$B.A$
$-A$	$2.B$	$0_{2,2}$	$0_{2,2}$

Et si déjà on doit résoudre un exercice élémentaire, niveau Terminale (je dis bien Terminale et pas Terminable, c'est que c'est un exercice destiné à cultiver votre intelligence...).

$$(A + B)^2 = A^2 + A.B + B.A + B^2$$

(pas de binôme trop rapide, on est dans un anneau non commutatif).

$$(A + B)^2 = -A + 2.B$$

et cette forme est plus agréable que celle avec des coefficients partout.

On pousse plus loin, avec M^3 : $(A + B)^3 = (-A + 2.B).(A + B)$
 $(A + B)^3 = -A^2 + 2.B.A - A.B + 2.B^2$ (pas de commutativité)
 $(A + B)^3 = A + 4.B$ ça commence à prendre forme

On pouvait y accéder aussi avec la formule du binôme sans commutativité :

$$(A + B)^3 = A^3 + (A^2.B + A.B.A + B.A^2) + (A.B^2 + B.A.B + B^2.A) + B^3$$

dans laquelle on élimine tout ce qui contient $A.B$ ou $B.A$: $(A + B)^3 = A^3 + B^3 = -A + 4.B$.

On généralise : $(A + B)^n = (-1)^n.A + 2^n.B$ pour tout n .

C'est initialisé.

Supposons $(A + B)^n = (-1)^n.A + 2^n.B$ vrai pour un entier naturel n quelconque.

$$\begin{aligned} \text{On calcule } (A + B)^{n+1} &= (A + B)^n.(A + B) \\ (A + B)^{n+1} &= (-1)^n.A + 2^n.B.(A + B) \\ (A + B)^{n+1} &= (-1)^n.A^2 + 2^n.B^2 + (-1)^n.A.B + 2^n.B.A \\ (A + B)^{n+1} &= (-1)^n.A^2 + 2^n.B^2 \\ (A + B)^{n+1} &= (-1)^{n+1}.A + 2^{n+1}.B \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } M^n = (-1)^n \cdot \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} + 2^n \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Avec un peu de recul, on pouvait quand même utiliser la formule du binôme.

L'anneau des matrices 2 sur 2 n'est pas commutatif.

Mais ici, les deux matrices A et B sont permutables ($A.B = B.A$, et mal dit : elles commutent).

$$\text{On a donc quand même } (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.A^{n-k}.B^k.$$

Mais dès que k vaut autre chose que 0 ou n , on a un $A.B$ ou un $B.A$ dans $A^{n-k}.B^k$. Ce terme est nul !

Dans la somme issue du binôme, il ne reste que deux termes : $(A + B)^n = A^n + B^n$.

Surtout, ne faites pas lire cette formule à un élève de collège ou même de lycée, il croira que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ c'est plus cool que l'identité remarquable que lui apprend son prof. Mais ici, on a $a.b = b.a = 0$, ce qui n'a pas souvent lieu dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Ensuite, par récurrence évidente sur n $A^n = (-1)^n.A$ et $B^n = 2^n.B$.

Les deux valeurs $(-1)^n$ et 2^n viennent directement des deux valeurs propres de M .

◦13◦

♥ A est une matrice carrée de taille 2 de trace 7 et de déterminant 10. Montrez alors : $A^2 = 7.A - 10.I_2$.
On pose $B = A - 2.I_2$ et $C = A - 5.I_2$. Montrez : $B.C = C.B$ et exprimez B^2 comme multiple de B et C^2 comme multiple de C .
Exprimez A comme combinaison de B et C .

Une bonne fois pour toutes : $A^2 - \text{Tr}(A).A + \det(A).I_2 = 0_{2,2}$. C'est toujours vrai.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + d) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a.d - b.c) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est la formule de Hamilton et Cayley. Et elle admet une généralisation en taille n sur n , mais évidemment avec n termes, et c'est le polynôme caractéristique qui revient.

On développe

$$B.C = (A - 2.I_2).(A - 5.I_2) = A^2 - 2.A - 5.A + 10.I_2 = 0_{2,2}$$

et de même $C.B = 0_{2,2}$.

B et C sont permutables mais en plus, les produits seront nuls.

$B^2 = A^2 - 4.A + 4.I_2$ car A et I_2 commutent.

$$B^2 = (7.A - 10.I_2) - 4.A + 4.I_2$$

$$B^2 = 3.A - 6.I_2$$

$$B^2 = 3.B$$

De même $C^2 = A^2 - 10.A + 25.I_2$

$$C^2 = (7.A - 10.I_2) - 10.A + 25.I_2$$

$$C^2 = -3.A + 15.I_2$$

$$C^2 = (-3).C$$

	B	C
B	3.B	0 _{2,2}
C	0 _{2,2}	-3.C

On combine ensuite $B = A - 2.I_2$ avec $C = A - 5.I_2$ pour arriver à $A = \frac{5.B - 2.C}{3}$.

On peut appliquer la formule du binôme car B et C sont permutables (de même que $\frac{5}{3}.B$ et $\frac{-2}{3}.C$).

On obtient a priori $n + 1$ termes : $A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{5}{3}.B\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{-2}{3}.C\right)^k$.

Mais il n'en reste que deux car $B.C$ et $C.B$ donnent la matrice nulle : $A^n = \left(\frac{5}{3}.B\right)^n + \left(\frac{-2}{3}.C\right)^n$ ($k = 0$ et $k = n$).

De plus, en mettant en boucle $B^2 = 3.B$, on obtient $B^n = 3^{n-1}.B$. Et de même $C^n = (-3)^{n-1}.C$.

Il reste cette fois $A^n = \frac{5^n}{3}.B + \frac{2^n}{3}.C$.

Et de fait, c'est encore la diagonalisation de A présentée d'une autre façon...

◦14◦ a est une suite arithmétique vérifiant $\sum_{k=0}^{10} a_k = 374$. Pouvez vous retrouver la raison ? Et le premier terme ?

Et si j'ajoute $\sum_{k=0}^{20} a_k = 1344$?

Non. On peut prendre une suite de premier terme 34 et de raison 0.
de premier terme 33 et de raison 1

En notant a_0 le premier terme et r la raison, on a un système
$$\begin{aligned} 11.a_0 + \frac{10.11}{2}.r &= 374 \\ 21.a_0 + \frac{20.21}{2}.r &= 1344 \end{aligned}$$

Cette fois, on le résout : le premier terme vaut 4 et la raison 6

◦15◦ ♣ $\pm 1 \pm 1 \pm 1$ est il égal à ± 3 ?

De toutes les matrices de taille 2 à coefficients ± 1 , lesquelles ont le déterminant le plus grand ?

Pour ce qui est de $\pm 1 \pm 1 \pm 1$, si on en fait un produit, ce ne peut être que 3 ou -3 .

Mais si on le lit $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ avec chaque ε_i dans $\{-1, 1\}$, il peut valoir $-3, -1, 1$ ou 3.

Sinon, on regarde le déterminant de $\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix}$ en notation malpropre. C'est $\varepsilon_1.\varepsilon_2 - \varepsilon_3.\varepsilon_4$ avec des notations propres.

Il ne peut dépasser 2, atteint pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Il ne peut dépasser -2 , atteint pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Et il vaut 0 pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$.

Et en taille 3 ? Je vous la repose bientôt...

◦16◦ Montrez que toute matrice carrée de taille 2 ayant pour trace 1 et pour déterminant 1 a pour puissance sixième I_2 .

La formule de Cayley-Hamilton dit pour une matrice de taille 2 : $M^2 = \text{Tr}(M).M - \det(M).I_2$.

Sous nos hypothèses : $M^2 = M - I_2$ (Cayley)

$$M^3 = M^2 - M \text{ (on multiplie par } M)$$

$$M^3 = (M - I_2) - M = -I_2 \text{ (on remplace)}$$

$$M^3 = (-I_2)^2 = I_2 \text{ (sans redescendre jusqu'aux coefficients)}$$

◦17◦ ♡ On pose $a_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)^2.k^2}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{3.n^3}$ pour tout n . Montrez qu'elles forment un couple de suites adjacentes (limite non demandée).

On se donne n et on calcule

$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + \frac{1}{3.(n+1)^3} - \frac{1}{3.n^3}$	$\frac{1}{n^2.(n+1)^2} + \frac{1}{3.(n+1)^3} - \frac{1}{3.n^3} = \frac{-8.n^2 - 8.n - 3}{n^3.(n+1)^3} \leq 0$	suite décroissante
$b_n - a_n$	$\frac{1}{3.n^3} \geq 0$	majoration
$a_{n+1} - a_n$	$\frac{1}{n^2.(n+1)^2} \geq 0$	suite croissante
$b_n - a_n$		tend vers 0

Les deux suites vont donc converger, vers la même limite.

Mais qui est cette limite ? Ce n'est heureusement pas la question (c'est $\zeta(3)$ et on n'en sait guère plus).

◦18◦

♥ La matrice M vérifie $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$ et $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Trouvez la diagonalisez la.

On pose ses quatre coefficients et on résout des systèmes : $\begin{cases} a + 5.b = 3 \\ c + 5.d = 15 \end{cases}$ et $\begin{cases} a + 3.b = 2 \\ c + 3.d = 6 \end{cases}$

qu'on regroupe en $\begin{cases} a + 5.b = 3 \\ a + 3.b = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} c + 5.d = 15 \\ c + 3.d = 6 \end{cases}$.

Ça c'est si on est physicien, et c'est déjà bien.

Mais il y a mieux, si on est matheuse !

$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$ et $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ se ramène à $M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$.

Et il ne reste plus qu'à écrire en multipliant à droite par l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

Dans les deux cas on trouve $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -15/2 & 9/2 \end{pmatrix}$

Remarque : *C'est évidemment le même résultat. Ensuite, si vous trouvez que la première méthode est celle que vous utiliserez toujours, je n'y peux rien, c'est votre droit, on a besoin aussi de physiciens (en fait non, on a besoin d'ingénieurs et de techniciens de haut niveau, c'est tout).*

Si vous trouvez que la seconde est plus esthétique, vous avez le sens des mathématiques (et de l'économie de moyens).

Ensuite, pour diagonaliser, vous pouvez utiliser la méthode de base, c'est à dire chercher D diagonale et P inversible vérifiant $M.P = P.D$ (ou encore $M = P.D.P^{-1}$)

Vous vous dites que D sera facile à trouver : elle doit avoir la même trace et le même déterminant que M :

$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -15/2 & 9/2 \end{pmatrix}$	$Tr(M) = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$	$\det(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} - \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{2} = 6$
$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$	$Tr(m) = \alpha + \beta$	$\det(D) = \alpha \cdot \beta$
α et β sont les racines de $X^2 - 5.X + 6$		

On trouve que α et β valent 2 et 3. On peut choisir $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ tout comme $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (ce qui changera si on prend une ou l'autre, c'est la matrice P).

Il reste à trouver P vérifiant $M.P = P.D$ (et on ne part surtout pas sur $M = P.D.P^{-1}$ qui donne des équations moches).

On demande donc $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On se rend compte que les systèmes sont dégénérés (deux fois les mêmes équations).

Ce n'est pas qu'on se soit trompé, bien au contraire.

On peut choisir arbitrairement le premier coefficient de chaque vecteur de P (les deux réels a et b).

On se fixe par simplicité $a = b = 1$.

$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ donne $\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{c}{2} = 2 \\ -\frac{15}{2} + \frac{9c}{2} = 2c \end{cases}$ c'est juste $c = 3$

et $\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{d}{2} = 3 \\ -\frac{15}{2} + \frac{9d}{2} = 3d \end{cases}$ c'est juste $d = 5$

On résume : $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Mais en fait, il y a plus simple.

Diagonaliser c'est trouver les coefficients de D et les colonnes de P vérifiant $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Ou si vous préférez $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a & \beta \cdot b \\ \alpha \cdot c & \beta \cdot d \end{pmatrix}$.

Et cette fois, reprenons le point de vue « deux colonnes » : $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$
 et $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

On cherche donc des vecteurs très particuliers : sous l'effet de M ils ne tournent pas, ils sont juste transformés en un de leurs multiples.

Et justement, les données de l'énoncé sont $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$ c'est à dire $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$
 et $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

L'énoncé donne directement deux vecteurs propres avec leurs valeurs propres.

La matrice est déjà diagonalisée : $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ de valeur propre 3
 et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ de valeur propre 2

Les deux colonnes de P sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

les deux termes diagonaux de D sont 3 et 2 (dans le même ordre).

Si vous venez de comprendre tout à coup l'idée de la diagonalisation grâce à ça, vous avez gagné un temps fou en maths, mais aussi en physique.

◻19◻

♥ Calculez $\int_0^1 \frac{t \cdot dt}{\sqrt{t^4 + 8t^2 + 17}}$ (et l'élève s'écria « arg »).

On fait le changement de variable qui saute aux yeux (après avoir justifié l'existence par continuité, positivité) :

$$\int_{t=0}^1 \frac{t \cdot dt}{\sqrt{t^4 + 8t^2 + 17}} = \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 8x + 17}}$$

et on factorise canoniquement :

$$\int_{t=0}^1 \frac{t \cdot dt}{\sqrt{t^4 + 8t^2 + 17}} = \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+4)^2 + 1}}$$

Ici, il y a des élèves qui ont besoin d'un changement de plus

$$\int_{t=0}^1 \frac{t \cdot dt}{\sqrt{t^4 + 8t^2 + 17}} = \frac{1}{2} \cdot \int_{u=4}^5 \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

On intègre en *Argsh* ou même $\ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$ qui est la forme préconisée aux concours.

On trouve $\ln(\sqrt{26} + 5) - \ln(\sqrt{17} + 4)$ mais comme on est en maths, on s'en fout, du moment que c'est du bon ordre de grandeur.

◻20◻

La matrice $\begin{pmatrix} & 7 \\ -140 & \end{pmatrix}$ se diagonalise en $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Calculez la somme des termes de M^{2018} .

La matrice $\begin{pmatrix} & 7 \\ -140 & \end{pmatrix}$ se diagonalise en $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Elle doit donc avoir la même trace et le même déterminant. En notant a et b les deux termes absents sur la matrice, on a $a + b = -1$ et $a \cdot b + 980 = -12$. Les deux réels sont solutions de $x^2 + x - 992$. On résout : -32 et 31 .

La matrice est l'une des deux : $\left(\begin{pmatrix} 31 & 7 \\ -140 & -32 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -32 & 7 \\ -140 & 31 \end{pmatrix} \right)$ Choisissez à votre guise.

Pour chacune, je vous donne une matrice P possible :

$$\begin{pmatrix} 31 & 7 \\ -140 & -32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} -32 & 7 \\ -140 & 31 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

On élève à la puissance n :

$$\begin{pmatrix} 31 & 7 \\ -140 & -32 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3^n - 4^{n+1} & 3^n - (-4)^n \\ -20 \cdot 3^n - 5 \cdot (-4)^{n+1} & 5 \cdot (-4)^n - 4 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} -32 & 7 \\ -140 & 31 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-4)^n - 4 \cdot 3^n & 3^n - (-4)^n \\ -20 \cdot (-4)^n - 20 \cdot 3^n & 5 \cdot 3^n - (-4)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Dans les deux cas, quand on somme tous les éléments, on trouve $-18 \cdot 3^n + 20 \cdot (-4)^n$

Remarque : | On peut vérifier pour les petites valeurs de n et même pour n égal à -1 si on y tient.

◦21◦

♥ Démontrez : $Tr(A.B) = Tr(B.A)$ pour A de taille 3 sur 2 et B de taille 2 sur 3. (la trace est la somme des termes de la diagonale (principale), et elle ne se calcule que si la matrice est carrée...)

On écrit $A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix}$ (ou le contraire pour les formats, mais qu'importe, les rôles sont au final symétriques).

On constate déjà que les matrices produits existent.

Elles sont carrées (pas de même format il est vrai).

On calcule ce dont on a besoin.

C'est à dire pas tout.

Remarque : | Oh le bel exercice pour tester si vous êtes matheux ou juste terminable.

On peut certes calculer tous les termes des matrices produits.

Mais quels sont ceux dont on a besoin ? Juste ceux de la diagonale, pour la trace.

Qui donc a quand même tout calculé, juste parce que « calculer c'est rassurant », même si ça fait juste perdre du temps...

$$A.B = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.\alpha + a'.\beta + a''.\gamma & ? \\ ? & b.\alpha' + b'.\beta' + b''.\gamma'' \end{pmatrix}$$

$$\text{Et de l'autre côté } B.A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.\alpha + b.\alpha' & ? & ? \\ ? & a'.\beta + b'.\beta' & ? \\ ? & ? & a''.\gamma + b''.\gamma' \end{pmatrix}$$

Les deux matrices ont des formats différents.

Mais la somme des trois ou deux termes diagonaux donne une somme des six mêmes produits.

$$Tr(A.B) = Tr(B.A) = a.\alpha + a'.\beta + a''.\gamma + b.\alpha' + b'.\beta' + b''.\gamma''$$

◦22◦

♥ La suite u est du type $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n, u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$. On sait : $u_0 = 4, u_1 = 3, u_2 = -9$ et $u_3 = -63$. Trouvez a et b .

Trouvez α et β vérifiant $\forall n \leq 1, u_n = \alpha.2^n + \beta.3^n$. Montrez alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha.2^n + \beta.3^n$.

On commence par retrouver a et b par le système $\begin{matrix} 3.a + 4.b = -9 & (L1) \\ -9.a + 3.b = -63 & (L2) \end{matrix}$.

Par combinaisons telle que $3.(L1) - 4.(L2)$ ou $3.(L1) + (L2)$, on trouve $a = 5$ et $b = -6$.

La suite est de la forme $u_{n+2} = 5.u_{n+1} - 6.u_n$ (d'équation caractéristique $\lambda^2 = 5.\lambda - 6$, on le verra).

On veut ensuite
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4 & (n=0) \\ 2\alpha + 3\beta = 3 & (n=1) \end{cases}$$

On trouve que la formule $u_n = 9.2^n - 5.3^n$ est valable pour $n = 0$ et pour $n = 1$.

Pour la propager sur tout \mathbb{N} , on fait une récurrence « à double hérédité ».

On a initialisé à deux rangs. Passons à l'hérédité.

n donne, on suppose la formule vraie aux deux rangs n et $n + 1$. Qu'en est il au rang $n + 2$?

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & 9.2^n - 5.3^n \quad \text{hypothese} \\ u_{n+1} & = & 9.2^{n+1} - 5.3^{n+1} \quad \text{hypothese} \\ u_{n+2} & = & 5.u_{n+1} - 6.u_n = \dots.2^n + \dots.5^n \quad \text{combinaison} \end{array}$$

On trouve

$$u_{n+2} = (-6.9 + 5.9.2).2^n + (-6.(-5) + 5.(-5).3).3^n = 9.4.2^n - 5.(9).3^n = 9.2^{n+2} - 5.3^{n+2}$$

C'est ce que l'on attendait.

o23o

♡ Montrez $2. \int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)$ (par parties et remontez chercher $\ln(t + \sqrt{1+t^2})$).
Pardon ? Déjà posé ?

Tout ce qu'on a sous le signe existe, est continu et même dérivable à dérivée continue.

On intègre par parties :

1	↔	t
$\sqrt{1+t^2}$	↔	$\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

 (oui, on a dérivé $t \mapsto t^2 \mapsto (1+t^2)^{1/2}$ et deux facteurs se sont compensés).

On a un crochet égal à $\left[t.\sqrt{1+t^2} \right]_0^1$ ce qui fait $\sqrt{2}$.

Le terme de compensation vaut $\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}.dt$. On le sépare en $\int_0^1 \frac{t^2+1}{\sqrt{1+t^2}}.dt - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.dt$.

On a donc $\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.dt + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

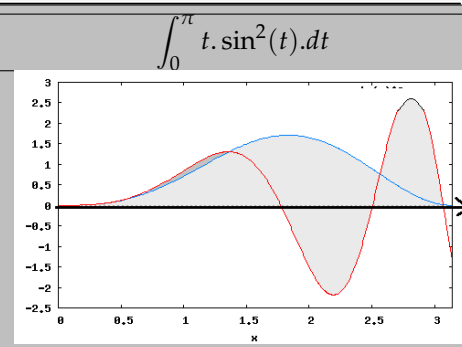
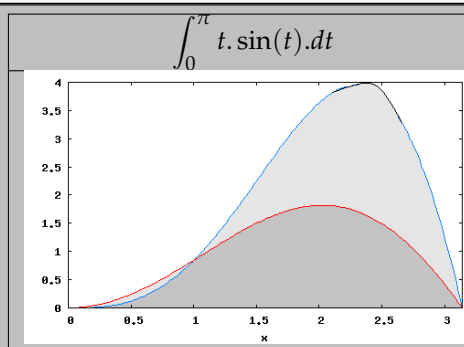
On fait passer de l'autre côté : $2. \int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \sqrt{2} + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$. Il reste à calculer $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

Et là, on regarde un autre exercice qui nous dit par chance : $\left(t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right)' = \left(t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right)$.

On peut achever $2. \int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \sqrt{2} + \left[\ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right]_0^1 = \sqrt{2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})$.

o24o

♡ Calculez



Par parties pour les deux premières. Ou en prenant une forme $(a.t + b). \sin(t) = (c.t + d). \cos(t)$ pour le premier, qu'on dérive et identifie...

La troisième nécessite une linéarisation : $t \cdot \sin^2(t) = t \cdot \frac{1 - \cos(2.t)}{2}$ puis une intégration par parties.

$\int_0^\pi t \cdot \sin(t).dt$	$\int_0^\pi t^2 \cdot \sin(t).dt$	$\int_0^\pi t \cdot \sin^2(t).dt$	$\int_0^\pi t \cdot \sin(t^2).dt$
$\sin(t) - t \cdot \cos(t)$	$(2 - t^2) \cdot \cos(t) + 2.t \cdot \sin(t)$	$\frac{t^2}{4} - \frac{\cos(2.t)}{8} - \frac{t \cdot \sin(2.t)}{4}$	$-\frac{\cos(t^2)}{2}$
π	$\pi^2 - 4$	$\frac{\pi^2}{4}$	$\frac{1 - \cos(\pi^2)}{2}$

Montrez que les matrices de la forme $\begin{pmatrix} ch(\theta) & sh(\theta) \\ sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix}$ en forment un sous-groupe, et montrez que ce sous-groupe est commutatif.

Appel : $ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $sh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

Un sous-groupe de qui ? Et pour quelle loi ? Quelle question mal posée !

Pour l'addition, ce serait étrange. On n'a même pas la matrice nulle.

Ce serait donc plutôt pour la loi de multiplication.

Et le groupe serait celui des matrices carrées 2 sur 2 inversibles.

Interne. On prend deux matrices de cet ensemble $\begin{pmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) \\ sh(\alpha) & ch(\alpha) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} ch(\beta) & sh(\beta) \\ sh(\beta) & ch(\beta) \end{pmatrix}$.

On effectue leur produit :

$$\begin{pmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) \\ sh(\alpha) & ch(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ch(\beta) & sh(\beta) \\ sh(\beta) & ch(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\alpha).ch(\beta) + sh(\alpha).sh(\beta) & sh(\alpha).ch(\beta) + ch(\alpha).sh(\beta) \\ sh(\alpha).ch(\beta) + ch(\alpha).sh(\beta) & ch(\alpha).ch(\beta) + sh(\alpha).sh(\beta) \end{pmatrix}$$

C'est $\begin{pmatrix} ch(\alpha + \beta) & sh(\alpha + \beta) \\ sh(\alpha + \beta) & ch(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$. On retrouve le schéma $\begin{pmatrix} ch(\theta) & sh(\theta) \\ sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix}$ avec θ gal à $\alpha + \beta$. On a bien un élément de l'ensemble.

Obtenir une matrice 2 sur 2 est la moindre des choses, mais ne prouvait rien.

Il fallait bien s'assurer d'avoir une forme avec des sh et des ch au bon endroit.

Associativité. La multiplication matricielle est associative.

Sinon, on prend trois matrices qu'on note M_α , M_β et M_γ .

On a montré plus haut : $M_\alpha.M_\beta = M_{\alpha+\beta}$.

On calcule alors : $(M_\alpha.M_\beta).M_\gamma = M_{\alpha+\beta}.M_\gamma = M_{(\alpha+\beta)+\gamma}$ et $M_\alpha.(M_\beta.M_\gamma) = M_\alpha.M_{\beta+\gamma} = M_{\alpha+(\beta+\gamma)}$.

Il y a égalité.

Neutre. Certes, on sait que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est le neutre de la multiplication matricielle.

Mais il faut s'assurer qu'il est dans l'ensemble. On l'écrit juste $\begin{pmatrix} ch(0) & sh(0) \\ sh(0) & ch(0) \end{pmatrix}$. C'est la bonne forme...

Symétrique. Le symétrique de $\begin{pmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) \\ sh(\alpha) & ch(\alpha) \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} ch(-\alpha) & sh(-\alpha) \\ sh(-\alpha) & ch(-\alpha) \end{pmatrix}$, et il est dans l'ensemble.

Il suffit d'écrire $M_\alpha.M_{-\alpha} = M_{-\alpha}.M_\alpha = M_{\alpha-\beta} = M_0$ (le neutre).

Sur ce type d'exercice, bien souvent les élèves perdent du temps sur des questions idiotes et passent à côté des vraies questions.

Pourquoi ? parce qu'ils croient que faire des maths, c'est calculer (rappelez moi le nom de la matière où on passe son temps à calculer...).

Par exemple, ils remplissent douze lignes de calcul avec des $\left(\begin{pmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) \\ sh(\alpha) & ch(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ch(\beta) & sh(\beta) \\ sh(\beta) & ch(\beta) \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} ch(\gamma) & sh(\gamma) \\ sh(\gamma) & ch(\gamma) \end{pmatrix}$.

C'est hyper gentil, mais hyper con.

En effet, on a $A.(B.C) = (A.B).C$ dès que A , B et C sont des matrices !

En revanche, ils disent « la matrice $\begin{pmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) \\ sh(\alpha) & ch(\alpha) \end{pmatrix}$ est inversible car son déterminant vaut 1 (oh, juste du calcul, c'est rassurant...).

Mais ils ne regardent pas si l'inverse est dans l'ensemble, c'est à dire de la forme $\begin{pmatrix} ch(a) & sh(a) \\ sh(a) & ch(a) \end{pmatrix}$.

L'essentiel de la question est là : les variables.

La multiplication matricielle n'est pas commutative. Mais n'allez pas dire que les sous-groupes de matrices carrées de taille 2 sont forcément non commutatifs.

On peut justement forcer la restriction à ne nous faire travailler que sur des matrices qui « commutent entre elles ».

Du côté de chez Roger Mansuy Vrai ou Faux :

A	$\sum_{k=-n-1}^{n+1} (-1)^k = 0$	I	$\sum_{k=1}^n a^{\ln(k)} = \sum_{j=1}^{[\ln(n)]} a^j$
B	$\sum_{k=1}^n k = \sum_{j=0}^n j$	J	$\sum_{k=1}^n a^{2k} = \sum_{j=1}^{2n} a^j$
C	$\sum_{k=1}^n k = \sum_{j=0}^n (n-j)$	K	$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right)$
E	$\sum_{k=1}^n k = \sum_{j=1}^n (n+1-j)$	L	$\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n 1 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$
F	$\sum_{k=1}^n (u_k - 2 \cdot u_{k+1} + u_{k+2}) = u_1 + u_{n+2}$	M	$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$
G	$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} a_k = \sum_{p=0}^{[n/2]} a_{2p}$	N	$\sum_{k=0}^n 3^k = 3^{n+1} - 1$
H	$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} a_k = \sum_{p=0}^{[n/2]} a_{2p+1}$	O	$\sum_{k=0}^n 5^k = \frac{5^{k+1} - 1}{4}$

A	$\sum_{k=-n-1}^{n+1} (-1)^k = 0$	I	$\sum_{k=1}^n a^{\ln(k)} = \sum_{j=1}^{[\ln(n)]} a^j$
	Faux		Faux

Pour A il est tentant de dire que la moitié des termes a un signe plus et l'autre moitié un signe moins. Tout se compense ?

Mais il y a un nombre impair de termes... Regardez pour n égal à 2.

Pour I, dans $\sum_{k=1}^n a^{\ln(k)}$ les exposants ne sont même pas entiers.

dans $\sum a^j$ ils le deviennent.

B	$\sum_{k=1}^n k = \sum_{j=0}^n j$	J	$\sum_{k=1}^n a^{2k} = \sum_{j=1}^{2n} a^j$
	Vrai		Faux

La différence entre les deux membres de B : le nom de la variable muette. Et le fait que dans la seconde il y a $j = 0$ en plus, qui ne change rien.

Pour J, c'est une erreur classique, mais débile au possible si on regarde avec les points de suspension.

Dans $\sum_{k=1}^n a^{2k}$ il y a n termes et il n'y a que des exposants pairs : $a^2 + a^4 + a^6 + \dots + a^{2n}$.

Dans $\sum_{j=1}^{2n} a^j$, il y a $2n$ termes, y compris les exposants impair : $a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + \dots + a^{2n-1} + a^{2n}$.

Question subsidiaire : alors pourquoi tant d'élèves transforment $\sum_{k=1}^n a^{2k}$ en $\sum_{j=1}^{2n} a^j$? Juste parce que c'est des formules et qu'ils ne veulent pas y voir une somme.

C	$\sum_{k=1}^n k = \sum_{j=0}^n (n-j)$	K	$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right)$
	Vrai		Faux

Le C est un renversement de somme. On y pose $j = n - k$ (ou $k = n - j$).

Quand k va de 0 à n , l'indice j fait de même.

Et on pouvait se permettre d'écrire $\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k$.

Vérifiez : $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = n + (n-1) + \dots + (n-n+1) + (n-n)$.

Dans K , le terme $\sum_{j=i}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right)$ n'a même pas de sens.

Quel est le rôle de i dans $\sum_{j=i}^n (\dots)$ quand ensuite il est censé varier ?

E	$\sum_{k=1}^n k = \sum_{j=1}^n (n+1-j)$	L	$\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n 1 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$
	Vrai		Faux

Le E est encore un retournement de somme. Rappelons les formule de renversement

k va de 0 à n	k va de 0 à $n-1$	k va de 1 à n
$j = n-k$	$j = n-1-k$	$j = n+1-k$
j va de n à 0	j va de $n-1$ à 0	j va de n à 1

Le L est faux, mais de peu.

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=i}^n 1 \right) = \sum_{i=0}^n (n-i+1) \text{ compteur}$$

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=i}^n 1 \right) = \sum_{k=0}^n (k+1) \text{ renversement de somme } k = n-i$$

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=i}^n 1 \right) = \sum_{p=1}^{n+1} p \text{ ré-indexation}$$

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=i}^n 1 \right) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}.$$

Cela dit, il suffit de dire que pour n égal à 1, le second membre de $\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n 1 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ est nul, tandis que le premier se calcule

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{j=i}^1 1 = \left(\sum_{j=0}^1 1 \right) + \left(\sum_{j=1}^1 1 \right) = (1+1) + (1). \text{ Carrément 3.}$$

F	$\sum_{k=1}^n (u_k - 2 \cdot u_{k+1} + u_{k+2}) = u_1 + u_{n+2}$	M	$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$
	Faux		Vrai

F est fausse déjà pour n égal à 1.

$$\sum_{k=1}^n (u_k - 2 \cdot u_{k+1} + u_{k+2}) \text{ est une somme télescopique } \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{n+1}.$$

Et si on avait une faute de frappe ?

$$\sum_{k=1}^n (u_k - 2 \cdot u_{k+1} + u_{k+2}) \text{ était aussi télescopique.}$$

$$C'est \sum_{k=1}^n (d_k - d_{k+1}) \text{ avec } d_k = u_k - u_{k+1}.$$

Il reste $d_1 - d_{n+1}$ ce qui fait $u_0 - u_1 + u_{n+1} - u_n$.

M est la somme d'une série géométrique de raison 2, de premier terme 1 et de terme à venir 2^{n+1} .

G	$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} a_k = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2 \cdot p}$	N	$\sum_{k=0}^n 3^k = 3^{n+1} - 1$
	Vrai		Faux

Dans G , les deux membres représentent la somme $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{n-2} + a_n$ si n pair ($n = 2 \cdot q$, donc $\lfloor n/2 \rfloor = q$)
 $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{n-3} + a_{n-1}$ si n impair ($n = 2 \cdot q + 1$, donc $\lfloor n/2 \rfloor = q$)

On vérifie le premier terme de chaque somme est bien a_0 , et le dernier est $a_n = a_{2 \cdot \lfloor n/2 \rfloor}$ si n pair

$a_{n-1} = a_{2 \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1}$ si n impair (exemple $n = 7$: a_6 dans 1 deux cas)

N est encore une somme de série géométrique, de raison 3.

$$\sum_{k=0}^n 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} \text{ puisque la raison vaut 3.}$$

H	$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} a_k = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2p+1}$	O	$\sum_{k=0}^n 5^k = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$
	Faux		Faux

Dans H, le premier membre représente la somme $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{n-3} + a_{n-1}$ si n pair ($n = 2q$, donc $\lfloor n/2 \rfloor = q$)
 $a_1 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-2} + a_n$ si n impair ($n = 2q + 1$, donc $\lfloor n/2 \rfloor = q$)

Le second contient un terme de trop si n est pair. Prenons $n = 6$.

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq 6 \\ k \text{ impair}}} a_k = a_1 + a_3 + a_5 \text{ et } \sum_{p=0}^{\lfloor 6/2 \rfloor} a_{2p+1} = a_1 = a_3 + a_5 + a_7.$$

Dans O, il y a une erreur. k est muet. Il ne peut plus être présent dans la somme de droite :

$$\sum_{k=0}^n 5^k = \frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1}$$

◦27◦

L'entier 2017 est la somme de deux nombres palindromes ; trouvez les. Rappel : exemples de palindromes 134431, 54366345, 98589.

Faites de même pour 2018. Montrez que c'est impossible pour 2019.

Allez, trouvez moi les millésimes à venir qui seront des sommes de deux palindromes.

Si les deux ont quatre chiffres, $abba$ et $cddc$, alors le chiffre de tête sera égal au chiffre de queue, à peut être une retenue près. Et là, c'est étrange.

On prend donc un palindrome à quatre chiffres $abba$ et un palindrome à trois chiffres cdc .

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \hline = 2 \end{array}$$

On tente avec $a = 2$ et pas de retenue venant de $b+c$ de la colonne des centaines

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \hline = 2 \end{array}$$

$$c \text{ vaut 5 à cause des unités : } \begin{array}{r} \\ + \\ \hline = 2 \end{array} . \text{ Il y a un problème pour } b.$$

$$\text{On reprend avec une retenue venant de } b+c : \begin{array}{r} \\ + \\ \hline = 2 \end{array}$$

$$c \text{ vaut cette fois 6 et pour avoir une retenue } b \text{ vaut 4 : } \begin{array}{r} \\ + \\ \hline = 2 \end{array} \text{ ah non !}$$

$$c \text{ vaut cette fois 6 et pour avoir une retenue } b \text{ vaut 3 : } \begin{array}{r} \\ + \\ \hline = 2 \end{array} \text{ ah oui !}$$

$$\text{Pour 2018 : } \begin{array}{r} \\ + \\ \hline = 2 \end{array}$$

Pour 2019 on aboutit à des contradictions quel que soit le chemin suivi (tester aussi les palindromes plus courts $abba + cc$).

Programme brut de test « un nombre est il un palindrome » :

```
def Palin(n) :
...Direct = list(str(n)) #transformation de l'entier en liste
...Indirecte = Direct[::-1] #copie de la liste inversée
...return(Direct==Indirect) #comparaison des deux listes
```

```
def Decomp(n) :
....L = [ ]
....for k in range(n//2) :
.....if Palin(k) and Palin(n-k) :
.....L.append([k, n-k])
...return(L)
```

```
for n in range(200,2050) :
...print(n, Decomp(n))
```

```
2020 [[909, 1111]]
2022 [[141, 1881]]
2023 [[252, 1771]]
2024 [[22, 2002], [33, 1991], [363, 1661]]
2025 [[474, 1551]]
2026 [[585, 1441]]
2027 [[696, 1331]]
2029 [[808, 1221]]
2030 [[919, 1111]]
2032 [[151, 1881]]
2033 [[262, 1771]]
2034 [[373, 1661]]
2035 [[33, 2002], [44, 1991], [484, 1551]]
2036 [[595, 1441]]
2038 [[707, 1331]]
2039 [[818, 1221]]
2040 [[929, 1111]]
2042 [[161, 1881]]
2043 [[272, 1771]]
2044 [[383, 1661]]
2045 [[494, 1551]]
2046 [[44, 2002], [55, 1991]]
2047 [[606, 1441]]
2048 [[717, 1331]]
2049 [[828, 1221]]
```

Je n'ai gardé que ceux avec une (ou des) décompositions.

◦28◦

♥ Résolvez « $n - 14$ divise 2020 et $n + 3$ divise 2025 »
Et si vous utilisiez Python ?

$n - 14$ doit être dans une liste réduite : [1, 2, 4, 5, 10, ... 2020] (et les opposés).

$n + 3$ doit figurer dans une autre liste [1, 3, 5, 9, 15, ... 2025] (et leurs opposés).

On translate $n \in \{15, 16, \dots\}$ et $n \in \{-2, 0, \dots 2022\}$.

On intersecte. $S = \{-6, 12, 24\}$ (bourrin)

```
def Test(n) :
...if n ==14 or n==-3 : #cas particuliers
.....return(False)
...Div0 = ((2020 % (n-14)) == 0) #un booléen
...Div1 = ((2025 % (n+1)) == 0) #True ou False
...return(Div0 and Div1) #la conjonction des deux
```

```
for n in range(-2000, 2000) :
....if Test(n) :
```

.....print(n)

n	-6	12	24
$n - 14$	-20	-2	20
$\frac{2020}{n - 14}$	-101	-1010	101
$n + 3$	-3	15	27
$\frac{2025}{n + 3}$	-675	135	75

o29o

♣ Vérifiez que l'on définit une relation d'ordre sur \mathbb{N} par $a \triangleleft b$ si $\begin{matrix} a \text{ impair} & \text{et} & b \text{ pair} \\ \text{ou} & & \\ (b - a)/2 & \in & \mathbb{N} \end{matrix}$. Classez la liste $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$ par ordre croissant. Donnez la borne supérieure de l'ensemble des nombres premiers (en a-t-il encore une si on travaille sur $(\mathbb{Z}, \triangleleft)$?). Donnez la borne supérieure de l'ensemble des nombres impairs. Donnez la borne supérieure de l'ensemble des diviseurs de 2015. L'ensemble des multiples de 3 a-t-il une borne supérieure? Rappel : la borne supérieure d'un ensemble est son plus petit majorant. Pour l'ordre usuel sur \mathbb{R} , la borne supérieure de $[0, 1[$ est 1. Celle de $[0, 1]$ aussi.

Les entiers impairs sont classés avant les pairs.

Si on veut comparer ensuite deux nombres impairs a et b , le quotient $\frac{b - a}{2}$ est entier. Et il est « entier naturel » si et seulement si b est plus grand que a au sens usuel.

Si on veut comparer ensuite deux nombres pairs a et b , le quotient $\frac{b - a}{2}$ est entier. Et il est « entier naturel » si et seulement si b est plus grand que a au sens usuel.

On a donc en premier les entiers impairs, classés par ordre croissant pour l'ordre usuel, puis les entiers pairs par ordre croissant aussi pour l'ordre usuel :

$$1 \triangleleft 3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 9 \triangleleft \dots \triangleleft 2019 \triangleleft 2021 \triangleleft \dots \triangleleft 0 \triangleleft 2 \triangleleft 4 \triangleleft 6 \triangleleft 8 \triangleleft 10 \triangleleft \dots \triangleleft 2018 \triangleleft 2020 \triangleleft 2022 \triangleleft \dots$$

R On vérifie qu'un entier n (pair ou impair) vérifie toujours $n \triangleleft n$ pour la raison $2 : \frac{n - n}{2} \in \mathbb{N}$.

T On se donne trois entiers a, b et c et on suppose $a \triangleleft b$ et $b \triangleleft c$. On veut arriver à $a \triangleleft c$.

On commence par traduire les hypothèses : $\begin{matrix} a \text{ impair} & \text{et} & b \text{ pair} & & b \text{ impair} & \text{et} & c \text{ pair} \\ \text{ou} & & & \text{et} & & \text{ou} & \\ (b - a)/2 & \in & \mathbb{N} & & (c - b)/2 & \in & \mathbb{N} \end{matrix}$.

Par distributivité de *et* sur *ou* ($(\alpha \text{ ou } \beta) \text{ et } (\gamma \text{ ou } \delta)$ c'est $(\alpha \text{ et } \gamma) \text{ ou } (\alpha \text{ et } \delta) \text{ ou } (\beta \text{ et } \gamma) \text{ ou } (\beta \text{ et } \delta)$), on a quatre cas, qu'il faut étudier/éliminer. Et il faut conclure dans chacun des cas.

Mais attention, c'est seulement une fois qu'on aura étudié tous les cas qu'on pourra conclure (pour certains élèves, c'est l'évidence même, puisque c'est un raisonnement ; pour d'autres qui se disent « c'est des maths, donc ça obéit à une logique propre », ça donne des délires idiots. Mais la logique des maths est la logique que vous utilisez tous les jours. Du moins j'espère).

$\alpha \text{ et } \gamma$	$(a \text{ impair et } b \text{ pair}) \text{ et } (b \text{ impair et } c \text{ pair})$	impossible
$\alpha \text{ et } \delta$	$(a \text{ impair et } b \text{ pair}) \text{ et } (\frac{c - b}{2} \in \mathbb{N})$	$(a \text{ impair et } c \text{ pair})$
$\beta \text{ et } \gamma$	$(\frac{b - a}{2} \in \mathbb{N}) \text{ et } (b \text{ impair et } c \text{ pair})$	$(a \text{ impair et } c \text{ pair})$
$\beta \text{ et } \delta$	$(\frac{b - a}{2} \in \mathbb{N}) \text{ et } (\frac{c - b}{2} \in \mathbb{N})$	$(\frac{c - a}{2} = \frac{c - b}{2} + \frac{b - a}{2} \in \mathbb{N})$

On a utilisé que si $\frac{c - b}{2}$ est entier, alors b et c sont de même parité.

A On prend cette fois seulement a et b et on fait deux hypothèses qu'on distribue :

$$\begin{matrix} a \text{ impair} & \text{et} & b \text{ pair} & & b \text{ impair} & \text{et} & a \text{ pair} \\ & \text{ou} & & \text{et} & & \text{ou} & \\ (b - a)/2 & \in & \mathbb{N} & & (a - b)/2 & \in & \mathbb{N} \end{matrix}$$

On veut arriver à $a = b$ par disjonction de cas (et en éliminant les trois cas absurdes) :

α et γ	$(a$ impair et b pair) et $(b$ impair et a pair)	impossible
α et δ	$(a$ impair et b pair) et $(\frac{a-b}{2} \in \mathbb{N})$	impossible
β et γ	$(\frac{b-a}{2} \in \mathbb{N})$ et $(b$ impair et a pair)	impossible
β et δ	$(\frac{b-a}{2} \in \mathbb{N})$ et $(\frac{a-b}{2} \in \mathbb{N})$	$b - a$ est à la fois positif et négatif... $a = b$

On a bien une relation d'ordre

Et c'est un ordre total, même si ce n'est pas demandé.

Attention : Pour rédiger des passages tels que « la relation \triangleleft est antisymétrique », on fait des maths, c'est à dire qu'on ne se précipite pas sur des calculs ou des formules.

On y va pas à pas, en introduisant des variables, en faisant des hypothèses et en arrivant à une conclusion.

Schéma : • on se donne a, b et c

• on suppose $a \triangleleft b$ et $b \triangleleft c$

• on traduit en ...

• maintenant enfin, on a des formules, des disjonctions de cas, que sais je encore

• on arrive à ...

• on reconnaît $a \triangleleft c$

Un « raisonnement » qui n'aura pas cette mise en forme sera souvent une bouillie infâme, un polynère de formules, une truc qui prétend avoir l'odeur des maths et ne fait que puer le moins que rien.

Moins grave, la conclusion est « la relation \triangleleft est transitive »

et non pas « a relation $a \triangleleft b$ est transitive »

Que font ici a et b ?

Comme les nombres premiers sont tous impairs, sauf 2, on les trie ainsi :

$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 11 \triangleleft 13 \triangleleft 17 \triangleleft \dots \triangleleft 2333 \triangleleft 2339 \triangleleft \dots \triangleleft 2$

Le plus petit est 3 et le plus grand (au sens de cet ordre) est 2.

Les nombres impairs sont plus problématiques. Il n'y a pas de plus grand élément.

Mais tous les nombres pairs en sont des majorants. Et 0 est le plus petit d'entre eux.

Les entiers impairs ont une borne supérieure (non atteinte) : 0

$1 \triangleleft 3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 11 \triangleleft 13 \triangleleft \dots \triangleleft 2019 \triangleleft 2021 \triangleleft \dots \triangleleft 0$ et on ne fera pas mieux que 0.

La liste des diviseurs de 2015 : $1 \triangleleft 5 \triangleleft 13 \triangleleft 31 \triangleleft 65 \triangleleft 155 \triangleleft 403 \triangleleft 2015$ par ordre croissant. La borne supérieure est 2015.

L'ensemble des multiples de 3 peut se décrire ainsi :

$3 \triangleleft 9 \triangleleft 15 \triangleleft 21 \triangleleft 27 \triangleleft \dots \triangleleft 2013 \triangleleft 2019 \triangleleft \dots \triangleleft 0 \triangleleft 6 \triangleleft 12 \triangleleft \dots \triangleleft 2016 \triangleleft \dots$

Il n'a pas de borne supérieure.

o30o

Il paraît que le critère de divisibilité par 7 est de la forme

si on part de $\overline{abc\ def\ ghi}$ par exemple, on calcule $\overline{abc} - \overline{def} + \overline{ghi}$

si on part de $\overline{ab\ cde\ fgh\ ijk}$ par exemple, on calcule $\overline{ab} - \overline{cde} + \overline{fgh} - \overline{ijk}$

et on regarde si le nombre est multiple de 7.

Cette démonstration est elle aussi valable pour la divisibilité par 13 ?

Par exemple, prenons 345 234 764. Ce nombre est un multiple de 7 (c'est 7×49319252).

On calcule alors $345 - 234 + 764$, c'est 875.

Et là, il est facile de poser la division : $875 = 125 \cdot 7$.

On confirme.

Mais un exemple favorable ne prouve rien.

Il s'agit de voir si $\overline{abc\ def\ ghi}$ est congru à 0 modulo 7 ou pas.

Mais qui est ce nombre ? C'est $\overline{abc} \cdot 10^6 + \overline{def} \cdot 10^3 + \overline{ghi}$.

Or, $10^3 = 142 \times 7 + 6 \equiv -1 [7]$

$10^6 = (10^3)^2 \equiv (-1)^2 [7]$

et ainsi de suite si on veut...

On a donc $\overline{abc\ def\ ghi} = \overline{abc} \cdot 10^6 + \overline{def} \cdot 10^3 + \overline{ghi} \equiv \overline{abc} - \overline{def} + \overline{ghi} [7]$.

L'entier $\overline{abc\ def\ ghi}$ est congru à 0 modulo 7 si et seulement si $\overline{abc} - \overline{def} + \overline{ghi}$ est congru à 0 modulo 7.

La propriété est donc prouvée.

On a aussi $10^3 = 76 \times 13 + 12 \equiv -1 [13]$

Le critère est donc le même.

Rappelons le critère de divisibilité par 9 :

un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

La clef : modulo 9, un entier est congru à la somme de ses chiffres.

En effet, si un entier s'écrit avec des chiffres de a_0 à a_p , c'est qu'il vaut $\sum_k 10^k \cdot a_k$.

Mais comme 10 est congru à 1 modulo 9, il en est de même de tous les 10^k .

$$N = \sum_k 10^k \cdot a_k \equiv \sum_k 1 \cdot a_k [9]$$

De même, le critère de divisibilité par 11 fait intervenir la somme alternée de ses chiffres

$$N = \sum_k 10^k \cdot a_k \equiv \sum_k (-1)^k \cdot a_k [11]$$

Et pour savoir si un entier est multiple de 17, il suffit de calculer la somme de ses chiffres en base 18. Non, je plaisante.

◦31◦

♡ a - Sans calculatrice : prouvez $(1,01)^{100} > 2$.

b - Sans calculatrice, prouvez : $\frac{100\,001}{1\,000\,001} > \frac{1\,000\,001}{10\,000\,001}$.

c - Sans calculatrice, prouvez : $4^{53} > 5^{45}$ (idée : 125 et 128).

d - Sans calculatrice, donnez les vingt premiers chiffres de l'écriture décimale de $(\sqrt{1\,001} - \sqrt{1\,000})^{12}$.

a - On développe $(1 + 0,01)^{100}$ par la formule du binôme. Les deux premiers termes valent $1 + \binom{100}{1} \times 0,01$ ce qui fait déjà 2, et les suivants sont positifs.

b - $\frac{10^{n-1} + 1}{10^n + 1} > \frac{10^n + 1}{10^{n+1} + 1}$ est la formule générale qu'on prouve par produit en croix :
 $(10^{n-1} + 1) \cdot (10^{n+1} + 1) > (10^n + 1)^2$ et c'est vrai par $10^{n+1} + 10^{n-1} > 2 \cdot 10^n$.

c - $4^{53} = 2^{106} = 2 \cdot 2^{105} = 2 \cdot (2^7)^{15} = 2 \cdot (128)^{15}$

$5^{45} = (5^3)^{15} = (125)^{15}$

Déjà 128^{15} dépasse 125^{15} . C'est pire ensuite.

Variante : D'un côté 2^{106} . De l'autre 5^{45} .

Mieux : $(2^7)^{15} \cdot 2$ face à $(5^3)^{15}$.

Or, $2^7 = 128 > 125 = 5^3$.

Par exponentiation encore : $(2^7)^{15} > (5^3)^{15}$ et a fortiori : $4^{53} > 5^{45}$.

Et avec calculatrice	$4^{53} =$	81	129	638	414	606	681	695	789	005	144	064
	$5^{45} =$	28	421	709	430	404	007	434	844	970	703	125

$(\sqrt{1\,001} - \sqrt{1\,000})^{12}$ ne doit pas être loin de 0. C'est d'ailleurs $\left(\frac{1}{\sqrt{1001} + \sqrt{1000}}\right)^{12}$.

On majore $\left(\frac{1}{\sqrt{1001} + \sqrt{1000}}\right)^{12} \leq \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{1000}}\right)^{12} \leq \frac{1}{2^{12} \cdot 10^{3/2}} \leq \frac{1}{10^3 \cdot 10^{18}}$.

En fait la calculatrice donne 0.24340×10^{-21} soit un bon nombre de 0 pour commencer.

◦32◦

♡ Simplifiez $ch(\ln(x + \sqrt{1 + x^2}))$.

Résolvez $ch(2x) = (ch(x))^2$ d'inconnue réelle x .

On trouve évidemment $\sqrt{1 + x^2}$. S'il le faut :

$$\frac{x + \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}}{2} = \frac{(x + \sqrt{1+x^2})^2 + 1}{2 \cdot (x + \sqrt{1+x^2})} = \frac{x^2 + 1 + x^2 + 2x \cdot \sqrt{1+x^2} + 1}{2 \cdot (x + \sqrt{1+x^2})} = \frac{2 \cdot (x \cdot \sqrt{1+x^2} + (\sqrt{1+x^2})^2)}{2 \cdot (x + \sqrt{1+x^2})} = \sqrt{1+x^2}$$

On peut aussi dire que l'équation $sh(t) = x$ a pour solution $t = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

En effet, elle donne $2x = e^t - e^{-t}$ avec aussi $e^t \cdot (-e^{-t}) = -1$.

Somme et produit : e^t est la solution positive de $T^2 - .x.T - 1 = 0$

On trouve comme par hasard $x + \sqrt{1+x^2}$.

On calculait donc ici $ch(\text{Argsh}(x))$.

La seule solution de $ch(2x) = (ch(x))^2$ est $x = 0$.

En effet, cette équation se ramène à $2 \cdot ch^2(x) - 1 = ch^2(x)$ d'unique solution cohérent $ch(x) = 1$ (la solution $ch(x) = -1$ est incohérente).

◦33◦

Il paraît que $3 \cdot \text{Atan}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{Arccos}\left(\frac{44}{125}\right) = \pi$. Mais même si la calculatrice du physicien le valide avec treize décimales, seul le cerveau du mathématicien peut le justifier. Cadeau : $117^2 = 13\,689$.

Le nombre $3 \cdot \text{Atan}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{Arccos}\left(\frac{44}{125}\right)$ est un réel positif. On l'encadre rapidement : $0 < \text{Arctan}(3/4) \leq \pi/4$ et $0 \leq \text{Arccos}(44/125) \leq \pi/2$. Notre réel est dans $]0, 5\pi/4[$. Si on montre que sa tangente est nulle, il n'aura pas d'autre choix que d'être nul.

On pose $\alpha = \text{Atan}\left(\frac{3}{4}\right)$ et $\beta = \text{Arccos}\left(\frac{44}{125}\right)$. On a immédiatement : $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$, $\tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - (\frac{3}{4})^2} = \frac{24}{7}$.

On a aussi $\tan(\beta) = \sqrt{\frac{1}{(44/125)^2} - 1} = \frac{117}{44}$ car par chance $125^2 - 44^2$ est un carré parfait.

On termine : $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{117}{44}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{117}{44}} = -\frac{24}{7}$. Le calcul se termine avec $\tan(2\alpha) = -\tan(\alpha + \beta)$ qui donne bien $\tan(3\alpha + \beta) = 0$.

◦34◦

♥ N est tel que $N/2$ est un carré parfait, $N/3$ un cube parfait et $N/5$ une puissance cinquième d'entier. Et N est non nul, évidemment. Trouvez en un (pensez à décomposer N en produit de facteurs premiers).

On veut $\exists(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, $N = 2 \cdot a^2$, $N = 3 \cdot b^3$, $N = 5 \cdot c^5$.

Écrivons N comme produit de facteurs premiers : $N = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \dots$

Dire qu'un nombre est un carré revient à dire que les exposants sont tous pairs.

Dire qu'un nombre est un cube revient à dire que ses exposants sont tous multiples de 3.

Et ainsi de suite.

On demande donc pour $N/2$: $a - 1, b, c, d, e$ sont tous pairs.

On demande aussi pour $N/3$: $a, b - 1, c, d$ et autres sont tous multiples de 3.

Enfin, avec $N/5$, on en vient à exiger que $a, b, c - 1, d, e$ et ainsi de suite soient multiples de 5.

Déjà, d, e et les autres sont à la fois multiples de 2, 3 et 5, ce sont des multiples de 30.

L'exposant a vérifie est multiple de 3 et 5 (donc de 15), mais congru à 1 modulo 2 : a est de la forme $15 + 30 \cdot k$ avec k entier.

L'exposant b est multiple de 2 et 5 (donc de 10) et congru à 1 modulo 3 : $10 + 30 \cdot p$ avec p entier.

On fait de même pour c de la forme $6 + 30 \cdot q$.

N est de la forme $2^{15+30 \cdot k} \cdot 3^{10+30 \cdot p} \cdot 5^{6+30 \cdot q} \cdot 7^{30 \cdot r} \cdot 11^{30 \cdot s}$ et ainsi de suite.

La solution la plus petite est $(2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6)$ Et on vérifie : $\frac{N}{2} = (2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^3)^2$, $\frac{N}{3} = (2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^3)^3$ et $\frac{N}{5} = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1)^5$.

◦35◦

Diagonalisez $\begin{pmatrix} 1 + 5.i & -4 \\ -8 & 1 - 7.i \end{pmatrix}$ (notée M). Calculez la partie réelle de la trace de M^4 et le déterminant de M^5 .

Trace	Déterminant	CharPoly	Spectre	D	P
$2 - 2.i$	$4 - 2.i$	$X^2 - (2 - 2.i).X + 4 - 2.i$	$\{1 + i, 1 - 3.i\}$	$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-3.i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 2.i \end{pmatrix}$

La formule $M = P.D.P^{-1}$ donne $M^4 = P.D^4.P^{-1}$ puis $Tr(M^4) = Tr(D^4) = (1+i)^4 + (1-3.i)^4$.
On développe : $Tr(M^4) = 24 + 96.i$ et on garde juste 24.

Le déterminant est un cadeau : $\det(M^5) = (\det(M))^5 = 2^5 \cdot (2-i)^5 = 32 \cdot (-38 - 41.i)$.

◦36◦

Diagonalisez ces trois matrices $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

	Trace	Déterminant	CharPoly	Spectre	D	P
$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	8	15	$X^2 - 8.X + 15$	$\{3, 5\}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	6	8	$X^2 - 6.X + 8$	$\{4, 2\}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

On prend les relations $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

et on en fait une grande relation :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

de la forme $M.P = P.D$.

Remarque : | Oui, il suffisait d'avoir de l'initiative.
 Pardon : il fallait avoir de l'initiative.

◦37◦

♥ La suite u est donné par $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et pour tout n , $u_{n+2} = 5.u_{n+1} - 6.u_n$. Pour tout n , on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Complétez A pour avoir $U_{n+1} = A.U_n$ pour tout n . Calculez sa trace, son déterminant. Trouvez D diagonale et semblable à A . Levez A à la puissance n . Calculez u_n pour tout n .
 ♥ En Terminale, on vous aurait demandé de regarder la suite a définie par $a_n = u_{n+1} - 2.u_n$ pour tout n . Vérifiez qu'elle est géométrique de raison 3. Montrez que b définie par $b_n = u_{n+1} - 3.u_n$ pour tout n est aussi géométrique. Calculez a_n et b_n pour tout n .
 Comprenez le rapport avec la diagonalisation qui dit : $P^{-1}.U_{n+1} = D.(P^{-1}.U_n)$.

Évidemment $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ de trace 5 et de déterminant 6.

On peut choisir $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec les deux valeurs propres 2 et 3.

On trouve $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (pour ce choix de D ; pour l'autre choix $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$).

Par concaténation et récurrences évidentes : $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Par calcul : $M^n = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2.3^n & 3^n - 2^n \\ 3.2^{n+1} - 2.3^{n+1} & 3^{n+1} - 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

Et on prend la peine de vérifier $M^0 = \begin{pmatrix} 3.1 - 2.1 & 1 - 1 \\ 3.2 - 2.3 & 3 - 2 \end{pmatrix}$ et $M^1 = \begin{pmatrix} 3.2 - 2.3 & 3 - 2 \\ 12 - 18 & 9 - 4 \end{pmatrix}$.

Avec l'argument suite géométrique de raison M (à gauche) : $u_n = (3.2^n - 2.3^n).u_0 + (3^n - 2^n).u_1$.

Regardons comme proposé $a_n = u_{n+1} - 2.u_n$.

On constate : $a_{n+1} = u_{n+2} - 2.u_{n+1}$
 $a_{n+1} = (5.u_{n+1} - 6.u_n) - 2.u_{n+1}$
 $a_{n+1} = 3.u_{n+1} - 6.u_n$
 $a_{n+1} = 3.a_n$

La suite a est géométrique de raison 3.

On a immédiatement $a_n = 3^n . a_0$.

De même, $b_n = u_{n+1} - 3.u_n$ vérifie $b_{n+1} = 2.b_n$.

Par récurrence immédiate : $b_n = 2^n . b_0$.

On a le système $\begin{cases} u_{n+1} - 2.u_n = 3^n . a_0 \\ u_{n+1} - 3.u_n = 2^n . b_0 \end{cases}$, on combine pour retrouver u_n .

Et on retrouve la même formule.

Mais si on y regarde de plus près. Qui sont a_n et b_n ?

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} ! \text{ Oui : } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P^{-1} . U_n.$$

Et on aboutit à $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.a_n \\ 2.b_n \end{pmatrix} = D . \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Puis par récurrence terminalesque $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n . a_0 \\ 2^n . b_0 \end{pmatrix} = D^n . \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.

La résolution de $\begin{cases} u_{n+1} - 2.u_n = a_n \\ u_{n+1} - 3.u_n = b_n \end{cases}$ c'est celle de $P^{-1} . U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Elle donne $U_n = P . \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Ne croyez vous pas qu'en mettant tout bout à bout on n'a pas $U_n = P . D^n . P^{-1}$?

Simplement, en Terminale, on vous donne a_n et b_n c'est à dire en fait P^{-1}

vous constatez qu'elles sont géométriques, c'est à dire que vous regardez D au lieu de M

vous travaillez sur a_n et b_n c'est à dire avec D^n au lieu de M^n

vous revenez à u_n en repassant de « l'univers D » à « l'univers M »

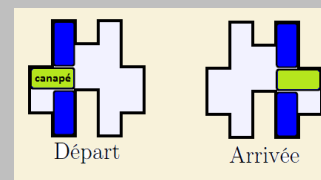
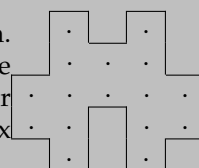
Comprendre ces liens, c'est s'épargner des trucs de toutes sorte à apprendre par cœur.

Ou en tout cas, en avoir quatre fois moins à apprendre par cœur.

◦38◦

La chambre de Bintou est un truc pas permis, conçu par un élève ayant fait de la S.I.I. complètement bourré, vous en avez ci contre le plan vu de haut. Et en plus, elle a un canapé et deux armoires qui ont une forme rectangulaire qui occupent les rectangles repérés sur le schéma.

Et elle doit les déplacer aux emplacements du troisième dessin. Elle a le droit de les faire glisser, mais pas de les soulever ou de les faire tourner. Combien de déplacements ? Et comment coder ces déplacements pour transmettre l'information sans faire dix ou douze dessins ?



◦39◦

♥ Diagonalisez $\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{pmatrix}$ (noté A). Montrez que l'équation $M^2 = A$ n'a aucune solution dans $M_2(\mathbb{R})$.

Combien pouvez vous en trouver dans $M_2(\mathbb{C})$?

Trace = 3	Déterminant = -4	Polynôme : $X^2 - 3.X - 4$	Spectre : $\{4, -1\}$
$\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	
$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$	$\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$		$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

Sans aller chercher plus loin qu'un raisonnement par l'absurde en profitant du déterminant et de ses propriétés. Si il y avait une solution à $M^2 = A$, on aurait $\det(M^2) = -4$ donc $(\det(M))^2 = -4$, ce qui dans \mathbb{R} est impossible.

Remarque : L'élève qui face à cette question pose quatre coefficients et écrit un système avec des $a^2 + b.c = -11$ et autres a certes compris comment calculer ;
 Mais n'a pas compris comment on raisonne.
 On n'attaque presque jamais un problème matriciel en écrivant des coefficients et des équations.
 On réfléchit avant de calculer somme un bourrin. Et souvent, ça évite même de calculer comme un bourrin.
 C'est en ça que c'est des maths. Donc pas des « maths de Terminale ».

En revanche, il faut comprendre que la diagonalisation permet de calculer les puissances de $M := P.D.P^{-1}$ donc

$$M^n = P.D^n.P^{-1}.$$

Mais ne peut on espérer utiliser cette idée pour d'autres exposants ?

La matrice D a-t-elle des « racines carrées », c'est à dire les matrices vérifiant $R^2 = D$?

Oui, et on en a quatre :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & i \end{array} \right)^2 = \left(\begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & i \end{array} \right)^2 = \left(\begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \\ \hline \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & -i \end{array} \right)^2 = \left(\begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & -i \end{array} \right)^2 = \left(\begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \\ \hline \end{array}$$

Et ensuite, $(P.R.P^{-1})^2 = P.R.P^{-1}.P.R.P^{-1} = P.R^2.P^{-1} = P.D.P^{-1} = M$ (quand une idée est bonne pour les exposants entiers, on la garde).

Tous calculs faits (mais faire les calculs, c'est ici perdre tout l'intérêt de ce qu'on a deviné) :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \left(\begin{array}{cc} -4+3.i & 2-i \\ -12+6.i & 6-2.i \end{array} \right)^2 = \left(\begin{array}{cc} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 4+3.i & -2-i \\ 12+6.i & -6-2.i \end{array} \right)^2 = \left(\begin{array}{cc} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{array} \right) \\ \hline \left(\begin{array}{cc} -4-3.i & 2+i \\ -12-6.i & 6+2.i \end{array} \right)^2 = \left(\begin{array}{cc} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 4-3.i & -2+i \\ 12-6.i & -6+2.i \end{array} \right)^2 = \left(\begin{array}{cc} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{array} \right) \\ \hline \end{array}$$

La question qu'on est en droit de se poser : sont ce les seules solutions ?

Et la réponse est oui, mais ce n'est pas trivial.

Et une fois de plus, ce n'est pas par le calcul bourrin.

Supposons qu'une matrice M vérifie $M^2 = A$.

On va se ramener à l'univers de D en quelque sorte.

$M^2 = A$ signifie $M = P.D.P^{-1}$ puis $P^{-1}.M.P = D$.

On pose alors $R = P^{-1}.M.P$ et l'équation devient avec cette nouvelle inconnue : $R^2 = D$.

Bon, me direz vous, c'est la même idée que tout à l'heure, mais tout à l'heure, on a proposé nos $\begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix}$.

Ceci prouvait (par explication) que c'étaient des solutions. Mais pas forcément toutes les solutions.

Alors quoi, on pose quatre coefficients et on raisonne par implications ? Comme un Terminable ?

Non. On raisonne.

On part de $R^2 = D$. On calcule alors $D.R - R.D$.

Astucieux comme vous allez le voir : $D.R - R.D = (R^2).R - R.(R^2) = R^3 - R^3 = 0_{2,2}$.

Bref, R commute avec D .

Et là, pour une fois, on redescend jusqu'aux coefficients :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve $4.a = 4.a$ donc a quelconque

$$4.b = -b \text{ donc } b = 0$$

$$-c = 4.b \text{ donc } c = 0$$

$$-d = -d \text{ donc } d \text{ est quelconque}$$

Donc, R est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. mais c'est juste nécessaire.

Mais on revient à $R^2 = D$, et on a cette fois $a^2 = 4$ et $d^2 = -1$. D'où les quatre solutions.

◻40◻

♥ Montrez que toute matrice réelle symétrique de taille 2 a deux valeurs propres distinctes, sauf si elle est déjà diagonale.

On prend M de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et on calcule sa trace, son déterminant, son polynôme caractéristique et même le discriminant de celui ci.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a+c & a.c-b^2 & X^2 - (a+c).X + (a.c-b^2) \\ \hline \Delta = (a+c)^2 - 4.(a.c-b^2) = (a-c)^2 + 4.b^2 \\ \hline \end{array}$$

Le discriminant est toujours positif, on a deux valeurs propres réelles (éventuellement double).

Si a est différent de c ou b non nul, alors Δ est strictement positif. On a alors deux valeurs propres distinctes :

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= \frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{(a-c)^2 + 4.b^2}}{2} \\ \lambda_- &= \frac{a+c}{2} - \frac{\sqrt{(a-c)^2 + 4.b^2}}{2} \end{aligned}$$

Chaque système $M.X = \lambda_{\pm}.X$ est dégénéré et admet des solutions non nulles.

On peut donc créer une matrice de taille 2 sur 2 formée des deux colonnes.

La matrice de passage ainsi construite est inversible, et on la note P .

Si a est égal à c et b nul, on a deux fois la même valeur propre. La matrice risque de ne pas être diagonalisable. Mais en fait elle est déjà diagonale. Donc diagonalisable, via $P = I_2$.

◦41◦

Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto e^{3t}$.

Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \mapsto e^t \cdot \cos(t)$ et $t \mapsto e^t \cdot \cos(t+1)$.

Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 3 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \mapsto e^t \cdot \cos(2t)$ et $t \mapsto e^{3t}$.

Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 4 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \mapsto e^t \cdot \cos(3t)$ et $t \mapsto e^{3t} \cdot \cos(t)$.

Si on nous donne deux solutions (dont aucune n'est multiple de l'autre), on a deux valeurs propres : $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$. On a l'équation caractéristique : $(\lambda - 1) \cdot (\lambda - 3) = 0$ puis l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 0$.

$t \mapsto e^t \cdot \cos(t)$ et $t \mapsto e^t \cdot \cos(t+1)$ sont des combinaisons de $t \mapsto e^t \cdot \cos(t)$ et $t \mapsto e^t \cdot \sin(t)$.

Puis de $t \mapsto e^t \cdot e^{it}$ et $t \mapsto e^t \cdot e^{-it}$.

Le spectre est $\{1 + i, 1 - i\}$ et l'équation est $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Dans $t \mapsto e^t \cdot \cos(2t)$ et $t \mapsto e^{3t}$, on a deux valeurs propres $1 + 2i$ et 3 .

On complète avec une troisième valeur propre : $1 - 2i$.

On a donc l'équation caractéristique $(\lambda^2 - 2\lambda + 5) \cdot (\lambda - 3)$.

Et l'équation différentielle $y^{(3)} - 5y'' + 11y' - 15y = 0$.

Enfin on complète le spectre $\{1 + 3i, 3 + i\}$ en $\{1 + 3i, 1 - 3i, 3 + i, 3 - i\}$.

Équation $y^{(4)} - 8y^{(3)} + 32y'' - 80y' + 100y = 0$.

◦42◦

Résolvez $(1 + t^2) \cdot y'_t + (1 + t) \cdot y_t = 0$ d'inconnue y fonction de t .

L'équation $(1 + t^2) \cdot y'_t + (1 + t) \cdot y_t = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus, avec second membre identiquement nul. Elle n'est pas sous la forme de Cauchy-Lipschitz, mais ça ne posera pas de problème, puisque sur tout \mathbb{R} , on peut diviser : $y'_t + \frac{1+t}{1+t^2} \cdot y_t = 0$

Avec les notations habituelles : $a_t = \frac{1+t}{1+t^2}$. On intègre ? $A_t = \text{Arctan}(t) + \frac{\ln(1+t^2)}{2}$.

On met un signe moins, on passe à l'exponentielle ($e^{-\ln(1+t^2)/2} = e^{-\ln(\sqrt{1+t^2})}$) : $h_t = h_0 \cdot \frac{e^{-\text{Arctan}(t)}}{\sqrt{1+t^2}}$

◦43◦

♥ Sachant $y_0 = 2$ et $2^t \cdot y'_t + 3^t \cdot y_t = 0$, calculez y_1 . Sachant $y_0 = 2$ et $2^t \cdot y'_t + 2^t \cdot y_t = 1$, calculez y_1 .

L'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients continus $2^t \cdot y'_t + 3^t \cdot y_t = 1$ avec condition initiale se met sous forme de Cauchy Lipschitz sur \mathbb{R} sans problème : $y'_t + (3/2)^t \cdot y_t = 0$. Avec les notations habituelles :

$a_t = (3/2)^t = e^{t \cdot \ln(3/2)}$. On intègre en $A_t = \frac{e^{t \cdot \ln(3/2)} - 1}{\ln(3/2)}$ histoire d'avoir la primitive nulle en 0. On trouve donc

$y_t = y_0 \cdot e^{-(e^{t \cdot \ln(3/2)} - 1) / \ln(3/2)} = 2 \cdot e^{-(e^{t \cdot \ln(3/2)} - 1) / \ln(3/2)}$. On veut la valeur en 1 : $2 \cdot e^{-(e^{\ln(3/2)} - 1) / \ln(3/2)}$.

On simplifie en $2 \cdot e^{-(\frac{3}{2} - 1) / \ln(3/2)} = 2 \cdot e^{-\frac{3}{2 \cdot \ln(3/2)}}$ et on n'a guère mieux.

Pour $y_0 = 2$ et $2^t \cdot y'_t + 2^t \cdot y_t = 1$, les solutions homogènes sont simples : $h'_t + h_t = 0$: $h_t = h_0 \cdot e^{-t}$.

On cherche une solution particulière de $y'_t + y_t = e^{-t \ln(2)}$ sous forme justement exponentielle : $\lambda \cdot e^{-t \ln(2)}$. On ajuste : $\lambda = \frac{1}{1 - \ln(2)}$.

On a la forme générale des solutions : $y_t = \lambda \cdot e^{-t} + \frac{2^{-t}}{1 - \ln(2)}$ valables sur \mathbb{R} .

La condition initiale livre la valeur de λ : $\frac{2 \cdot \ln(2) - 1}{\ln(2) - 1}$.

La valeur en 1 est $\frac{2 \cdot \ln(2) - 1}{\ln(2) - 1} \cdot \frac{1}{e} + \frac{1}{2 - 2 \cdot \ln(2)}$

◦44◦

♥♣ On donne $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$. On doit diagonaliser A . C'est moche, les valeurs propres sont des irrationnels.

Sauf que le corps sur lequel on travaille est $\text{range}(11)$ pour l'addition et la multiplication modulo 11. Et là, tout doit aller vite.

Résolvez alors l'équation $A^n = A$ d'inconnue entière n .

Dans \mathbb{R} comme ailleurs, les valeurs propres sont solutions de $\lambda^2 - 10\lambda - 9 = 0$.

Le discriminant vaut $100 + 36$ ce qui fait 4 car on travaille modulo 11.

Les racines sont alors $\frac{10+2}{2}$ et $\frac{10-2}{2}$.

La somme $6 + 4$ vaut bien 10 et le produit 24 (et c'est bien -9 puisque $24 + 9 = 33 = 0$).

On choisit $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et on résout

$$\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Condition nécessaire colonne 1 : $9 + 2.a = 6$	Condition nécessaire colonne 2 : $9 + 2.b = 4$
Valeur trouvée : $a = 4$	Valeur trouvée : $b = 3$
Condition suffisante colonne 1 : $9 + a = 6.a$	Condition suffisante colonne 1 : $9 + b = 4.a$

On a donc $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

et si on y tient $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.

Peut on avoir $A^n = A$?

Il faut et il suffit d'avoir $D^n = D$ c'est à dire $6^n = 6$ et $4^n = 4$.

Fermat, vous connaissez ? $6^{11} = 6$ et $4^{11} = 4$.

Et $6^{10} = 6$ et $4^{10} = 4$

Les solutions sont donc de la forme $n = 11 + 10.p$ avec p dans \mathbb{N} .

Et aussi $n = 1$ quand même !

Et le cycle des puissances de 6 modulo 11 nous dit qu'il n'y a pas d'autre solution.

◦45◦

On a diagonalisé : $\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (formule $M = P.D.P^{-1}$). Donnez des diagonalisations de M avec une autre matrice diagonale D' .

Donnez des diagonalisations de M avec d'autres matrices de passage P' .

Diagonalisez M^2 et M^{-1} et ${}^t M$ (${}^t M$ c'est $\begin{pmatrix} -18 & -30 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$, on rappelle ${}^t(A.B) = {}^t B \cdot {}^t A$).

Évidemment, si on change D il faut changer P .

Et on n'a guère le choix sur la matrice D puisque les valeurs propres sont imposées.

On prend donc l'autre matrice diagonale $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Comme les vecteurs propres ne changent pas, tout ce qui va changer, c'est l'ordre dans lequel on va les citer (dans P donc dans P^{-1}).

$$\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Gardons la même matrice D . Les colonnes de toute matrice de passage seront faites de vecteurs propres. On peut prendre les mêmes, ou leurs opposés :

$$\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou leurs doubles } \begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

On a même la forme générale : $\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.\alpha & 1.\beta \\ 3.\alpha & 2.\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/\alpha & -1/\alpha \\ -3/\beta & 2/\beta \end{pmatrix}$ avec α et β non nuls.

Pour M^2 , on a juste $M^2 = P.D^2.P^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

et il en est de même de toutes les puissances de M :

$$\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Y compris $\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque : c'est la même matrice P , car si U est vecteur propre de M ($M.U = -3.U$), alors il est aussi vecteur propre de M^{-1} ($M^{-1}.U = \frac{U}{-3}$).

Sinon, on écrit $M = P.D.P^{-1}$ puis $M^{-1} = (P^{-1})^{-1}.D^{-1}.P^{-1}$ en vertu de $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ qui figure dans le cours.

Enfin, en repartant de $M = P.D.P^{-1}$ et en transposant : ${}^tM = {}^t(P^{-1}).{}^tD.{}^tP$ (cette fois, c'est ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$). La matrice D reste à même, mais il faut remplacer P par ${}^t(P^{-1})$ (d'inverse tP).

$$\begin{pmatrix} -18 & -30 \\ 10 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

il suffit de vérifier là encore.

Un exercice dont je regrette qu'on ne le trouve pas dans les livres...

◦46◦ Montrez que $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables sur \mathbb{R} mais pas leur somme ni leurs produits.

	Trace	Déterminant	CharPoly	Spectre	D	P
$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	0	-1	$X^2 - 1$	$\{-1, 1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	0	-1	$X^2 - 1$	$\{-1, 1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	0	0	X^2	$\{0, 0\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	*
$A.B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	-2	1	$X^2 + 2.X + 1$	$\{-1, -1\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	*
$B.A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	-2	1	$X^2 + 2.X + 1$	$\{-1, -1\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	*

Pourquoi $A + B$ n'est pas diagonalisable ? la seule matrice possible serait $D = 0_{2,2}$.

Mais alors on aurait $A + B = P.0_{4,4}.P^{-1} = 0_{4,4}$, et ça, c'est faux.

De même, pour $A.B$ la seule matrice possible est $-I_2$. Et on aurait $A.B = P.(-I_2).P^{-1} = -I_2$ et c'est faux.

Idée | Quand il y a une valeur propre en double, il y a comme un problème.

La seule façon pour la matrice d'être alors diagonalisable (avec donc $D = \alpha.I_2$) est d'être déjà égale à I_2 .

◦47◦ Se souvenant de la relation $Tr(A.B) = Tr(B.A)$ l'élève Hirai du Bahu prétend : $Tr(A.B.C) = Tr(A.C.B)$ pour tout triplet (A, B, C) de matrices de formats compatibles. Montrez qu'il a tort.

Un contre-exemple suffira.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On va au plus simple $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A.B.C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Tr(A.B.C) = 1$

$$A.C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A.C.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Tr(A.C.B) = 0$$

Remarque : En fait, on a $Tr(A.B.C) = Tr((A.B).C) = Tr(C.(A.B)) = Tr(C.A.B)$. Mais on ne peut pas « faire passer C entre A et B ».

On peut écrire les six permutations et les regrouper en deux familles

$Tr(A.B.C)$	$Tr(C.A.B)$	$Tr(B.C.A)$
$Tr(A.C.B)$	$Tr(C.B.A)$	$Tr(B.A.C)$

◦48◦

♥ ε est un réel strictement positif. La suite (a_n) vérifie $a_{n+2} = 4.a_{n+1} - (4 - \varepsilon^2).a_n$ pour tout n avec $a_0 = \alpha$ et $a_1 = 2.\alpha + 2.\beta$.

Calculez a_n pour tout n .

Donnez la limite de a_n lorsque ε tend vers 0 (il faudra lever une forme indéterminée).

L'équation caractéristique $\lambda^2 = 4.\lambda + (4 - \varepsilon^2)$ a pour discriminant $4.\varepsilon^2$.

Ses deux racines sont $2 + \varepsilon$ et $2 - \varepsilon$.

On trouve que la suite est de la forme $n \mapsto A.(2 + \varepsilon)^n + B.(2 - \varepsilon)^n$ avec A et B dépendant des conditions initiales.

En l'occurrence :
$$\begin{aligned} A + B &= \alpha \\ (2 + \varepsilon).A + (2 - \varepsilon).B &= 2.\alpha + 2.\beta \end{aligned}$$

On trouve $A = \frac{\alpha.\varepsilon + 2.\beta}{2.\varepsilon}$ et $B = \frac{\alpha.\varepsilon - 2.\beta}{2.\varepsilon}$.

et donc $a_n = \frac{\alpha.\varepsilon + 2.\beta}{2.\varepsilon}.(2 + \varepsilon)^n + \frac{\alpha.\varepsilon - 2.\beta}{2.\varepsilon}.(2 - \varepsilon)^n$ pour tout n .

On fait tendre ε vers 0 ? Pas facile, sauf à regrouper :

$$a_n = \frac{\alpha}{2}.(2 + \varepsilon)^n + \frac{\alpha}{2}.(2 - \varepsilon)^n + \frac{\beta}{\varepsilon} \left((2 + \varepsilon)^n - (2 - \varepsilon)^n \right).$$

Déjà, $\frac{\alpha}{2}.(2 + \varepsilon)^n + \frac{\alpha}{2}.(2 - \varepsilon)^n$ converge vers $\alpha.2^n$.

Et $\beta \cdot \frac{(2 + \varepsilon)^n - (2 - \varepsilon)^n}{2}$ est une forme indéterminée qui tend vers $\beta.n.2^{n-1}$.

Pourquoi ? Par la formule du binôme

◦49◦

Montrez pour toute matrice carrée de taille 2 sur 2 : $M^2 - \text{Tr}(M).M + \det(M).I_2 = 0_{2,2}$.

Exprimez $\det(M)$ à l'aide de $(\text{Tr}(M))^2$ et $\text{Tr}(M^2)$.

Montrez qu'on n'a pas forcément pour M carrée de taille 3 sur 3 : $M^2 - \text{Tr}(M).M + \det(M).I_3 = 0_{3,3}$.

Montrez, pour M carrée de taille 3 que $M^3 - \text{Tr}(M).M^2 + \frac{\text{Tr}(M)^2 - \text{Tr}(M^2)}{2}.M$ est un multiple de I_3 (quel coefficient reconnaissez vous ?).

◦50◦

♥ Pouvez vous ajuster a et b pour que le maximum de $a.\cos + b.\sin$ soit égal à 4, atteint en $\frac{2.\pi}{3}$?

♥ Pouvez vous ajuster a , b et c pour que le maximum de $a.\cos + b.\sin + c$ soit égal à 4, atteint en $\frac{2.\pi}{3}$ et le minimum égal à -1 atteint en $-\frac{\pi}{3}$?

♥ Pouvez vous ajuster a , b et c pour que le maximum de $a.\cos + b.\sin + c$ soit égal à 4, atteint en $\frac{2.\pi}{3}$ et le minimum égal à -1 atteint en $\frac{\pi}{6}$?

On exige : $a.\cos\left(\frac{2.\pi}{3}\right) + b.\sin\left(\frac{2.\pi}{3}\right) = 4$ (valeur atteinte)

$$-a.\sin\left(\frac{2.\pi}{3}\right) + b.\cos\left(\frac{2.\pi}{3}\right) = 0 \text{ (c'est un extremum)}$$

On trouve $t \mapsto -2.\cos(t) + 2.\sqrt{3}.\sin(t)$

Autre idée : on sait que $a.\cos(t) + b.\sin$ se met sous la forme $t \mapsto A.\cos(t - \varphi)$.

Le maximum est alors A , atteint en φ . Logique, non ? C'est quand le cosinus vaut 1.

On demande donc que ce soit $4.\cos\left(t - \frac{2.\pi}{3}\right)$.

Il ne reste qu'à développer et identifier qui seront a et b .

Si $a.\cos + b.\sin$ a pour maximum 4, alors son minimum est -4 !

Le c est jouable avec une fonction du type $t \mapsto \frac{3}{2} + \frac{5}{2}.\cos(t - \varphi)$.

Montrez que pour tout a de $] -1, 1[$ les intégrales I_a et J_a existent

$$I_a = \int_0^\pi \ln(1 + a \cdot \cos(\theta)) \cdot d\theta \quad J_a = \int_0^\pi \frac{\cos(\theta)}{1 + a \cdot \cos(\theta)} \cdot d\theta$$

Calculez J_a par le changement de variable habituel.

β est un réel de $]0, 1[$ fixé. On se donne a et $a + h$ dans $[-\beta, \beta]$, montrez $\left| \ln(1 + (a + h) \cdot \cos(\theta)) - \ln(1 + a \cdot \cos(\theta)) - \frac{h \cdot \cos(\theta)}{1 + a \cdot \cos(\theta)} \right| \leq \frac{h^2 \cdot \cos^2(\theta)}{2 \cdot (1 - \beta)^2}$ (c'est Taylor Lagrange sur $a \mapsto \ln(1 + a \cdot \cos(\theta))$).

Déduisez : $\left| \frac{I_{a+h} - I_a}{h} - J_a \right| \leq |h| \cdot \int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta)}{(1 - \beta)^2} \cdot d\theta$.

Déduisez $(a \mapsto I_a)' = (a \mapsto J_a)$.

Calculez I_0 puis I_a pour tout a .

Les intégrales I_a et J_a sont des intégrales dont la valeur dépend de a .

θ est la variable d'intégration. En revanche, a est fixé pour le calcul de chaque intégrale.

On les appelle intégrales à paramètres et le paramètre c'est a .

L'élève qui poserait simplement $I = \int_0^\pi \ln(1 + a \cdot \cos(\theta)) \cdot d\theta$ sans marquer la dépendance en a aurait tort.

L'élève qui écrirait $I_\theta = \int_0^\pi \ln(1 + a \cdot \cos(\theta)) \cdot d\theta$ n'aurait vraiment rien compris aux variables.

L'élève qui écrit $I_a = \int_0^\pi \ln(1 + a \cdot \cos(\theta)) \cdot d\theta$ prépare le terrain pour rendre ses raisonnements rigoureux.

Quand a est en valeur absolue plus petit que 1, $a \cdot \cos(\theta)$ reste entre -1 et 1 pour tout θ , et $1 + a \cdot \cos(\theta)$ reste strictement positif.

Les applications $\theta \mapsto \frac{1}{1 + a \cdot \cos(\theta)}$ et $\theta \mapsto \ln(1 + a \cdot \cos(\theta))$ sont définies et continues. les intégrales existent.

On pourrait essayer de trouver leurs signes, et leur sens de variation en fonction de θ , mais ce n'est pas demandé.

On va calculer $J_a = \int_0^\pi \frac{\cos(\theta)}{1 + a \cdot \cos(\theta)} \cdot d\theta$ par le changement de variable universel $t = \tan(\theta/2)$ ou $\theta = 2 \cdot \text{Arctan}(t)$.

Certes ce n'est un C^1 difféomorphisme que sur l'intervalle semi ouvert $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ mais on va s'autoriser ces approximations et intégrer jusqu'à $+\infty$ sans crainte.

$$J_a = \int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+a \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2 \cdot dt}{1+t^2} = 2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1-t^2}{(1+t^2) \cdot (1+a+(1-a) \cdot t^2)} \cdot dt$$

On décompose en éléments simples $\frac{1-t^2}{(1+t^2) \cdot (1+a+(1-a) \cdot t^2)}$.

Le numérateur est de degré plus faible que le dénominateur, il n'y a pas de « partie entière polynomiale devant » (celle qui correspond au comportement en $+\infty$).

Le dénominateur est de degré 4, on attend quatre coefficients $\frac{1-t^2}{(1+t^2) \cdot (1+a+(1-a) \cdot t^2)} = \frac{\alpha \cdot t + \beta}{1+t^2} + \frac{\gamma \cdot t + \delta}{(1+a) + (1-a) \cdot t^2}$ (avec des termes qui s'intégreront en logarithme et d'autres en arctangente).

Mais en fait, c'est une fraction en la variable $t^2 = X$:

$\frac{1-X}{(1+X) \cdot (1+a+(1-a) \cdot X)} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{1}{1+X} - \frac{1}{(1+a) + (1-a) \cdot X} \right)$ qu'on obtient par la méthode des pôles ou par réduction au dénominateur commun.

On intègre donc en gardant dans une seule intégrale pour ne pas créer deux termes qui explosent ensemble) :

$$J_a = \frac{1}{a} \cdot \int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+a) \cdot \left(1 + \left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \cdot t\right)^2\right)} \right) \cdot dt = \frac{1}{a} \cdot \left[\text{Arctan}(t) - \frac{1}{1+a} \cdot \frac{\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \cdot t\right)}{\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty}$$

Les termes sont simples en 0, et à l'infini, les arctangentes tendent vers $\frac{\pi}{2}$.

Tous calculs faits : $J_a = \frac{\pi}{2.a} - \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ (voyez les $\sqrt{1-a}$ et $\sqrt{1+a}$ et $1+a$ se simplifier).

Cette partie du problème est elle estimée par vous comme « d'une technicité excessive » ?

Aurait on pu être plus futé ? Oui, avec

$$a.J_a = \int_0^\pi \frac{a \cdot \cos(\theta)}{1+a \cdot \cos(\theta)} \cdot d\theta = \int_0^\pi \frac{1+a \cdot \cos(\theta)}{1+a \cdot \cos(\theta)} \cdot d\theta - \int_0^\pi \frac{1}{1+a \cdot \cos(\theta)} \cdot d\theta$$

Le changement de variable sur $\int_0^\pi \frac{1}{1+a \cdot \cos(\theta)} \cdot d\theta$ donnait $\int_0^\pi \frac{1}{1+a \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2 \cdot dt}{1+t^2}$ avec moins d'éléments simples, et plus simples...

A quoi sert il d'avoir calculé J_a ? Parce que ce sera la dérivée de I_a . Mais ça ne va pas se faire tout seul. Même si vous avez envie de dire

$$\left(a \mapsto \ln(1+a \cdot \cos(\theta)) \right)' = \left(a \mapsto \frac{\cos(\theta)}{1+a \cdot \cos(\theta)} \right) \text{ donc } \left(a \mapsto \int_{\theta=0}^\pi \ln(1+a \cdot \cos(\theta)) \right)' = \left(a \mapsto \int_{\theta=0}^\pi \frac{\cos(\theta)}{1+a \cdot \cos(\theta)} \cdot d\theta \right)$$

Pour θ fixé, considérons l'application $a \mapsto \ln(1+a \cdot \cos(\theta))$. Elle est continue, dérivable, et même plutôt deux fois qu'une (et même trois et plus).

	$f_\theta(a)$	$f'_\theta(a)$	$f''_\theta(a)$
On la dérive deux fois	$\ln(1+a \cdot \cos(\theta))$	$\frac{\cos(\theta)}{1+a \cdot \cos(\theta)}$	$-\frac{\cos^2(\theta)}{(1+a \cdot \cos(\theta))^2}$

On va utiliser la formule de Taylor Lagrange entre a et $a+h$

$$f_\theta(a+h) = f_\theta(a) + h \cdot f'_\theta(a) + \frac{h^2}{2} \cdot f''_\theta(a + \lambda \cdot h)$$

pour un λ de $]0, 1[$ et même

$$f_\theta(a+h) - f_\theta(a) - h \cdot f'_\theta(a) = \frac{h^2}{2} \cdot f''_\theta(a + \lambda \cdot h)$$

puis $|f_\theta(a+h) - f_\theta(a) - h \cdot f'_\theta(a)| \leq \frac{h^2}{2} \cdot M_2$ où M_2 est un majorant de f''_θ sur le domaine d'étude.

On ne touche pas au cosinus, même si on peut le majorer par 1.

On regarde quand le dénominateur s'approche le plus près de 0 : quand $(a + \lambda \cdot h) \cdot \cos(\theta)$ est le plus proche de -1 .

On dit que $|a + \lambda \cdot h|$ reste dans $[-\beta, \beta]$ puisque a et $a+h$ y sont. Et le cosinus n'ira pas plus loin que 1 et -1 .

Bref, le plus petit dénominateur envisageable est $1 - \beta$ (strictement positif).

On peut donc prendre $M_2 = \frac{\cos^2(\theta)}{(1-\beta)^2}$ et obtenir la formule proposée.

Démarche classique pour estimer l'erreur entre un graphe et sa tangente.

On a cet encadrement pour tout θ :

$$-\frac{h^2}{2} \cdot M_2 \leq f_\theta(a+h) - f_\theta(a) - h \cdot f'_\theta(a) \leq \frac{h^2}{2} \cdot M_2$$

On intègre pour θ de 0 à π :

$$-\frac{h^2}{2} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta)}{(1-\beta)^2} \cdot d\theta \leq \int_0^\pi f_\theta(a+h) \cdot d\theta - \int_0^\pi f_\theta(a) \cdot d\theta - h \cdot \int_0^\pi f'_\theta(a) \cdot d\theta \leq \frac{h^2}{2} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta)}{(1-\beta)^2} \cdot d\theta$$

(attention, trois variables : a fixé, h destiné à tendre vers 0 et θ qui vient de jouer son rôle de 0 à π).

Et par définition des f_θ et autres :

$$-\frac{h^2}{2} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta)}{(1-\beta)^2} \cdot d\theta \leq I_{a+h} - I_a - h \cdot J_a \leq \frac{h^2}{2} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta)}{(1-\beta)^2} \cdot d\theta$$

On revient à une forme « majoration en valeur absolue » (qu'on aurait pu garder tout le temps) :

$$\left| I_{a+h} - I_a - h \cdot J_a \right| \leq \frac{h^2}{2} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta)}{(1-\beta)^2} \cdot d\theta$$

On divise par h non nul, un taux d'accroissement commence à venir : $\left| \frac{I_{a+h} - I_a}{h} - J_a \right| \leq \frac{|h|}{2} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta)}{(1-\beta)^2} d\theta$.

Quand h tend vers 0, le majorant qui dépend linéairement de h tend vers 0.

Par encadrement², $\left| \frac{I_{a+h} - I_a}{h} - J_a \right|$ tend vers 0.

Par définition, $\frac{I_{a+h} - I_a}{h}$ tend vers J_a

(pas de boulette, on tend vers quelquechose qui ne dépend pas de h , juste de a (et θ est variable d'intégration qui a fait le job)).

Mais ceci est juste la définition de « les taux d'accroissement de I autour de a ont une limite.

$$a \longmapsto I_a \text{ est dérivable de dérivée } a \longmapsto J_a$$

C'est ce dont on s'était douté en « dérivant sous le signe intégrale ». mais il fallait le prouver, ici avec les moyens du bord. En Spé vous aurez des outils plus puissants, mais avec des hypothèses précises

3

On connaît I' et sa valeur en 0 est rapide à trouver : $I_0 = \int_0^\pi \ln(1) \cdot d\theta = 0$.

Il suffit donc d'intégrer I' pour retrouver I .

Ah oui, $J_a = \frac{\pi}{a} - \frac{\pi}{a \cdot \sqrt{1-a^2}}$, ça s'intègre ça ?

Le premier terme en logarithme. Et l'autre ? $\int \frac{da}{a \cdot \sqrt{1-a^2}}$?

Pas facile. On aurait préféré $\int \frac{da}{\sqrt{1-a^2}}$ qui donne Arcsin .

$$\text{ou } \int \frac{a \cdot da}{\sqrt{1-a^2}} \text{ qui donne } -\sqrt{1-a^2}$$

Que dit le cours ? $a = \sin(\alpha)$. L'intégrale devient

$$\int \frac{\cos(\alpha) \cdot d\alpha}{\sin(\alpha) \cdot \sqrt{1-\sin^2(\alpha)}} = \int \frac{d\alpha}{\sin(\alpha)} = \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) \right]$$

On assemble les morceaux : $\pi \cdot \left(\ln(a) - \ln \left(\tan \left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2} \right) \right) \right)$ Ce serait donc ça I_a !

De bons exemples de calculs d'intégrales !

2. et pas « par passage à la limite » puisque on ne sait pas encore que la limite existe !

3. rappelons que vous ne serez pas juste jugés sur votre capacité à calculer, mais surtout sur votre capacité à citer les bons théorèmes, avec les bonnes hypothèses à vérifier et valider, bref à raisonner juste, avec argumentation solide.