

◦0◦

♥ On veut résoudre l'équation différentielle d'inconnue y fonction de t suivante : $y_t^{(3)} = y_t'' + 14.y_t' - 24.y_t$ avec condition initiale $y_0 = y_0' = y_0'' = 1$, sans utiliser le cours. Résolvez l'équation caractéristique (racines a, b et c). Calculez $(X - a).(X - b)$, $(X - a).(X - c)$ et $(X - b).(X - c)$.
On pose alors $u = y'' - 5.y' + 6.y$, $v = y'' + 2.y' - 8.y$ et $w = y'' + y' - 12.y$.
Montrez que u, v et w sont solutions d'une équation différentielle d'ordre 1.
Trouvez u, v, w et y .

L'équation différentielle $y_t^{(3)} = y_t'' + 14.y_t' - 24.y_t$ est linéaire à coefficients constants d'ordre 3, ses solutions forment un espace vectoriel de dimension 3.

avec condition initiale $y_0 = y_0' = y_0'' = 1$.

L'équation caractéristique est $\lambda^3 - \lambda^2 - 14.\lambda + 24 = 0$. On trouve une racine dans les valeurs classiques entre -2 et 2 : $8 - 4 - 14.2 + 24 = 0$.

On factorise $\lambda^3 - \lambda^2 - 14.\lambda + 24 = (\lambda - 2).(\lambda^2 + \lambda - 12) = (\lambda - 2).(\lambda - 3).(\lambda + 4)$.

On pose alors $u = y'' - 5.y' + 6.y$, $v = y'' + 2.y' - 8.y$ et $w = y'' + y' - 12.y$ et on dérive puis on remplace :

$u = y'' - 5.y' + 6.y$	$u' = y^{(3)} - 5.y'' + 6.y'$	$u' = y'' + 14.y' - 24.y - 5.y'' + 6.y'$	$u' = -4.u$
$v = y'' + 2.y' - 8.y$	$v' = y^{(3)} + 2.y'' - 8.y'$	$v' = y'' + 14.y' - 24.y + 2.y'' - 8.y'$	$v' = 3.v$
$w = y'' + y' - 12.y$	$w' = y^{(3)} + y'' - 12.y'$	$w' = y'' + 14.y' - 24.y + y'' - 12.y'$	$w' = 2.w$

On résout ces équations linéaires d'ordre 1 :

$u_t = u_0.e^{-4.t} = 2.e^{-4.t}$	$v_t = v_0.e^{3.t} = -5.e^{3.t}$	$w_t = w_0.e^{2.t} = -10.e^{2.t}$
-----------------------------------	----------------------------------	-----------------------------------

Ceci nous livre un système :

u_t	$y_t'' - 5.y_t' + 6.y_t = 2.e^{-4.t}$
v_t	$y_t'' + 2.y_t' - 8.y_t = -5.e^{3.t}$
w_t	$y_t'' + y_t' - 12.y_t = -10.e^{2.t}$

que l'on résout par combinaison.

On veut une combinaison $a.u_t + b.v_t + c.w_t$ qui élimine y_t'' et y_t' . On veut donc $a + b + c = 0$, $-5.a + 2.b + c = 0$ et si possible tout de suite $6.a - 8.b - 12.c = 1$.

On trouve finalement $y_t = \frac{2.e^{-4.t} - 30.e^{3.t} + 70.e^{2.t}}{42}$

et on vérifie

$\frac{2.e^{-4.0} - 30.e^{3.0} + 70.e^{2.0}}{42} = 1$
$\frac{2.(-4).e^{-4.0} - 30.3.e^{3.0} + 70.2.e^{2.0}}{42} = 1$
$\frac{2.16e^{-4.0} - 30.9.e^{3.0} + 70.4.e^{2.0}}{42} = 1$

◦1◦

♥ On cherche toutes les applications f dérivables vérifiant $\forall t, f'(t) = f(\pi - t) + e^t$.
Montrez que f est solution de l'équation différentielle $y_t'' + y_t = e^t - e^{1-t}$ d'inconnue y fonction de t (notée (E)).
Résolvez (E). Trouvez toutes les applications f vérifiant $\forall t, f'(t) = f(1 - t) + e^t$.

Comme on a $\forall t, f'(t) = f(\pi - t) + e^t$, on déduit que f' est à son tour dérivable (dans le second membre, l'exponentielle l'est, de même que $t \mapsto f(\pi - t)$).

On dérive donc : $\forall t, f''(t) = -f'(\pi - t) + e^t$ en rappelant qu'il y a un signe moins, car on dérive une composée $t \mapsto \pi - t \mapsto f(\pi - t)$.

Mais l'hypothèse de départ $\forall t, f'(t) = f(\pi - t) + e^t$ s'applique autant à t qu'à $\pi - t$:

$$f'(\pi - t) = f(\pi - (\pi - t)) + e^{\pi - t} = f(t) + e^{\pi - t}.$$

On reporte : $\forall t, f''(t) = -f(t) - e^{\pi - t} + e^t$, c'est l'équation différentielle de l'énoncé.

On résout l'équation homogène associée : $h''(t) = -h(t)$: Vect(cos, sin).

On résout l'équation avec second membre continu simple, par principes de superposition et d'analogie :

$p_1''(t) + p_1(t) = e^t$	$p_1(t) = \frac{e^t}{2}$
$p_2''(t) + p_2(t) = -e^{\pi - t}$	$p_2(t) = -\frac{e^{\pi - t}}{2}$

$$S_E = \left\{ t \mapsto A.\cos(t) + B.\sin(t) + \frac{e^t - e^{\pi - t}}{2} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Mais attention, on a raisonné par condition nécessaires, pas forcément suffisante. Il se peut qu'il reste des relations

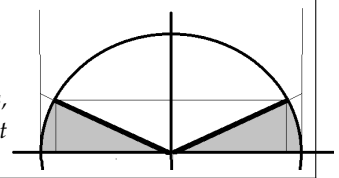
entre A et B pour que f soit solution de l'équation initiale (en dérivant, on a perdu des informations).

On pose donc $f = t \mapsto A \cdot \cos(t) + B \cdot \sin(t) + \frac{e^t - e^{\pi-t}}{2}$ et on dérive :

$$f'(t) = -A \cdot \sin(t) + B \cdot \cos(t) + \frac{e^t + e^{\pi-t}}{2}$$

On remplace aussi : $f(\pi - t) = A \cdot \cos(\pi - t) + B \cdot \sin(\pi - t) + \frac{e^{\pi-t} - e^{\pi-(\pi-t)}}{2} = -A \cdot \cos(t) + B \cdot \sin(t) + \frac{e^{\pi-t} - e^t}{2}$.

Les formules de trigonométrie $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$ sont dans le cours, s'obtiennent visuellement, et si possible pas par $\sin(\pi - t) = \sin(\pi) \cdot \cos(t) - \cos(\pi) \cdot \sin(t)$ qui sont le summum de la lourdeur.

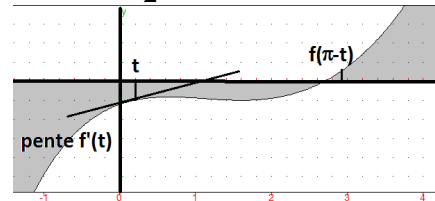


On veut avoir $\forall t, -A \cdot \sin(t) + B \cdot \cos(t) + \frac{e^t + e^{\pi-t}}{2} = B \cdot \sin(t) - A \cdot \cos(t) + \frac{e^{\pi-t} - e^t}{2} + e^t$.

Il faut et il suffit d'avoir $A = -B$.

On a cette fois raisonné par conditions nécessaires et suffisantes :

$$S_E = \left\{ t \mapsto A \cdot (\cos(t) - \sin(t)) + \frac{e^t - e^{\pi-t}}{2} \mid A \in \mathbb{R} \right\}$$



o2o

♥ Donnez une matrice qui se diagonalise en $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ avec matrice de passage $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

C'est écrit sur le ventre du Teletubbies : $M \cdot P = P \cdot D$.

Et donc $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}$$

o3o

♥ On sait : $a_n = 2^n + 3^n$ et $b_n = 3 \cdot 2^n - 3^n$. Complétez la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \blacktriangle & \star \\ \blacklozenge & \blacktriangledown \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\text{P.S.I. : } \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 3^{n+1} \\ 3 \cdot 2^{n+1} - 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n + 3^n \\ 3 \cdot 2^n - 3^n \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n = (a + 3 \cdot b) \cdot 2^n + (a - b) \cdot 3^n$$

On demande donc

$$6 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n = (c + 3 \cdot d) \cdot 2^n + (c - d) \cdot 3^n$$

Il suffit d'avoir $\begin{matrix} a + 3 \cdot b = 2 & c + 3 \cdot d = 6 \\ a - b = 3 & \text{et } c - d = -3 \end{matrix}$.

Il ne reste qu'à résoudre.

M.P. : On souhaite avoir en particulier $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{et } \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On demande donc $\begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

On extrait la matrice en multipliant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4}$.

On l'a, il ne reste qu'à vérifier.

M.P.* : On écrit $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n \\ 3^n \end{pmatrix}$

Mais aussi $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n \\ 3^n \end{pmatrix}$.

Et donc $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Si nécessaire, on calcule la matrice du milieu.

Et si on vous demande de la diagonaliser, gardez la sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1},$$

comprenez vous pourquoi ?

40

♥♠ On se donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Exprimez A^2 comme combinaison linéaire de A et I_2 . Donnez les coefficients a_n et b_n vérifiant $A^n = a_n \cdot A + b_n \cdot I_2$ (combinaisons de suites géométriques spectrales (3^n) et $((-2)^n)$).

On pose alors $E_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$. Exprimez E_n comme combinaison linéaire $E_n = \alpha_n \cdot A + \beta_n \cdot I_2$.

Écrivez la formule de Taylor avec reste intégrale pour l'exponentielle entre 0 et 3 puis entre 0 et -2 à l'ordre n . Montrez que le reste intégrale tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Déduisez les limites de α_n et β_n quand n tend vers l'infini.

Exprimez $\exp(A)$ (la limite des E_n) comme combinaison linéaire de A et I_2 .

Si on a montré une fois pour toutes $A^2 - \text{Tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = 0_{2,2}$ pour toute matrice carrée de taille 2, c'est vite réglé.

Sinon, on calcule : $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = A + 6 \cdot I_2$.

On diagonalise A :	trace : 1	déterminant : -6
	polynôme caractéristique	$X^2 - X - 6$
	valeur propre 3	valeur propre -2
	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

Mais ceci ne répond pas à la formule demandée.

On peut aussi montrer l'existence de deux suites (a_n) et (b_n) vérifiant $A^n = a_n \cdot A + b_n \cdot I_2$.

On initialise (récurrence, oui), avec $A^0 = 0 \cdot A + 1 \cdot I_2$, $A^1 = 1 \cdot A + 0 \cdot I_2$ et $A^2 = 1 \cdot A - 6 \cdot I_2$.

On suppose pour un n donné que a_n et b_n existent.

On calcule alors $A^{n+1} = A \cdot A^n = A \cdot (a_n \cdot A + b_n \cdot I_2) = a_n \cdot A^2 + b_n \cdot A = a_n \cdot (A - 6 \cdot I_2) + b_n \cdot A = (a_n + b_n) \cdot A - 6 \cdot a_n \cdot I_2$.

Ceci prouve l'existence de a_{n+1} et b_{n+1} en posant $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -6 \cdot a_n$.

Cela dit, ça ne va pas nous arranger. On va devoir étudier les suites (a_n) et (b_n) .

On peut par exemple déduire $a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} - 6 \cdot a_n$.

Si on connaît par cœur son cours de Terminale (même sans le comprendre), on dit que (a_n) est une combinaison de deux suites géométriques dont les raisons sont les racines de l'équation caractéristique $\lambda^2 = \lambda - 6$. Comme par hasard, les racines sont 3 et -2 . On a donc $a_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot (-2)^n$.

Et par là même $b_n = -6 \cdot (\alpha \cdot 3^{n-1} + \beta \cdot (-2)^{n-1})$.

Les conditions initiales donnent $a_n = \frac{3^n - (-2)^n}{5}$ et $b_n = \frac{2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n}{5}$.

On a donc $A^n = \frac{3^n - (-2)^n}{5} \cdot A + \frac{2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n}{5} \cdot I_2$

On pouvait l'obtenir aussi en écrivant $A = B + C$ avec $B \cdot C = C \cdot B = 0$ et $B^2 = 3 \cdot B$ et $C^2 = (-2) \cdot C$.

On somme de 0 à n , après division par $n!$:

$$E_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^k - (-2)^k}{5 \cdot k!} \cdot A + \frac{2 \cdot 3^k + 3 \cdot (-2)^k}{5 \cdot k!} \cdot I_2 \text{ ou aussi } E_n = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

Bref, on est confronté à des suites de la forme $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

La formule de Taylor avec reste intégrale ($f = \exp, a = 0, h = x$) donne pour tout réel x :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot x^k + \frac{x^{n+1}}{n!} \cdot \int_0^1 (1-t)^n \cdot e^{t \cdot x} \cdot dt$$

On va montrer que pour -2 et 3 le reste intégrale tend vers 0 .

Pour 2 , on majore $e^{-2 \cdot t}$ par 1 (et on minore par 0) : $0 \leq \int_0^1 (1-t)^n \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot dt \leq 1$.

Dans le même temps, $\frac{(-2)^n}{n!}$ tend vers 0 (croissances comparées).

Par produit, $\frac{x^{n+1}}{n!} \cdot \int_0^1 (1-t)^n \cdot e^{t \cdot x} \cdot dt$ tend vers 0 .

Par soustraction, $\sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!}$ converge vers e^{-2} .

Pour 3 , on encadre presque de la même façon $(1-t)^n$ par 0 et 1
 $e^{3 \cdot t}$ par 1 et e^3

$$\int_0^1 (1-t)^n \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot dt \text{ par } 0 \text{ et } e^3$$

$$\frac{3^n}{n!} \cdot \int_0^1 (1-t)^n \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot dt \text{ par } 0 \text{ et } \frac{3^n}{n!} \cdot e^3$$

Par croissances comparées et encadrement, le reste intégrale tend vers 0 .

Par soustraction, $\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!}$ converge vers e^3 .

Si vous ne voyez plus pourquoi la forme indéterminée $\frac{3^n}{n!}$ converge vers 0 , retenez que la factorielle l'emporte même sur les puissances.

Et regardez, pour n plus grand que 6 :

$$\frac{3^n}{n!} = \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{8} \cdots \frac{3}{(n-1)} \cdot \frac{3}{n}$$

La plupart des termes (en fait à partir de $\frac{3}{6}$) sont plus petits que $\frac{1}{2}$. On a donc

$$0 \leq \frac{3^n}{n!} \leq \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{81}{40} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$$

Par encadrement, $\frac{3^n}{n!}$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

En exploitant ce qui précède :

$$\exp(A) = \frac{e^3 - e^{-2}}{5} \cdot A + \frac{2 \cdot e^3 + 3 \cdot e^{-2}}{5} \cdot I_2 \text{ et } \exp(A) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

o5o

Pour toute matrice carrée M de taille 2 sur 2 , on définit $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$.

Calculez les exponentielles des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On va utiliser à plusieurs reprises que la série de terme général $\left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n \geq 0}$ converge et a pour somme e^a .

Il suffit en effet d'écrire la formule de Taylor avec reste intégrale (ou de Lagrange, tiens) pour l'exponentielle entre 0 et a :

$$e^{0+a} = \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} \cdot a^k + \frac{a^{n+1}}{n!} \cdot \int_0^1 (1-t)^n \cdot e^{t \cdot a} \cdot dt$$

On distingue, pour a positif : $0 \leq \frac{a^{n+1}}{n!} \cdot \int_0^1 (1-t)^n \cdot e^{t \cdot a} \cdot dt \leq \frac{a^{n+1}}{n!} \cdot \int_0^1 (1-t)^n \cdot e^a \cdot dt = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^a$ et on utilise les croissances comparées et le théorème d'encadrement
 pour a positif : $0 \leq \left| \frac{a^{n+1}}{n!} \cdot \int_0^1 (1-t)^n \cdot e^{t \cdot a} \cdot dt \right| \leq \frac{|a|^{n+1}}{n!} \cdot \int_0^1 (1-t)^n \cdot dt = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}$ et on utilise encore les croissances comparées et le théorème d'encadrement

On a alors $\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

Puis $\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & ? \\ 0 & e \end{pmatrix}$ avec $? = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty-1} \frac{1}{n!} = e$ aussi.

et la formule $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vient d'une brave récurrence.

De plus $\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ le terme $k=0$ devant être traité à part.

De même $\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ le terme $k=0$ devant être également traité à part, dans la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ il manque 1.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ne pose pas de problème et donne $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$.

Montrez que si A est semblable à B , alors $\exp(A)$ est semblable à $\exp(B)$.

On suppose A diagonalisable, même si c'est inutile en fait montrez $\exp(-A) = \left(\exp(A)\right)^{-1}$
 exprimez $\det(\exp(A))$ à l'aide de $\det(A)$ et $\text{Tr}(A)$.

On suppose que B s'écrit $P \cdot A \cdot P^{-1}$.

On sait alors sans se poser de question que B^k s'écrit $P \cdot A^k \cdot P^{-1}$ et on factorise :

$$\sum_{n=0}^N \frac{B^n}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{P \cdot A^n \cdot P^{-1}}{n!} = P \cdot \left(\sum_{n=0}^N \frac{A^n}{n!} \right) \cdot P^{-1}$$

On expédie N à l'infini : $\exp(B) = P \cdot \exp(A) \cdot P^{-1}$ On reconnaît que les deux matrices sont semblables, via la même matrice P que pour A et B .

Type de question qu'un MPSI2 traite sans crainte en moins d'une minute (et encore, c'est parce qu'il se sert un café entre temps).

On écrit alors $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ mais aussi $-A = P \cdot (-D) \cdot P^{-1}$.

On calcule rapidement $\exp(D) = \exp\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}$

et $\exp(-D) = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\beta} \end{pmatrix} = \left(\exp(D)\right)^{-1}$.

Il reste à écrire $A = P \cdot \exp(D) \cdot P^{-1}$ par la question précédente,

$$\text{puis } A^{-1} = (P^{-1})^{-1} \cdot \left(\exp(D)\right)^{-1} \cdot P^{-1} = P \cdot \left(\exp(D)\right)^{-1} \cdot P^{-1} =$$

$$P \cdot \exp(-D) \cdot P^{-1} = \exp(-A).$$

On calcule aussi $\det(\exp(A)) = \det(\exp(D))$ (matrices semblables)

$$\det(\exp(A)) = \det\left(\begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}\right) = e^\alpha \cdot e^\beta$$

$$\boxed{\det(\exp(A)) = e^{\text{Tr}(A)}}$$

Et il reste des élèves pour s'inquiéter « on a dit à l'aide de $\text{Tr}(A)$ et $\det(A)$. Il manque $\det(A)$ ». Si ils y tiennent $\det(\exp(A)) = e^{\text{Tr}(A)} + 0 \cdot \det(A)$ et c'est bon.

Le résultat restera vrai même pour A non diagonalisable.

Un élève dit on doit bien avoir $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$. Montrez qu'il a tort.

J'ai encore un souvenir de quand j'avais quatre ans de plus que vous.

Je voyageais dans un train pour découvrir un peu la France, j'étais du côté de Lyon, et voilà que montent dans mon compartiment un groupe de sept jeunes de votre âge, dont je comprends très vite qu'ils étaient en Prépas au lycée du Parc à Lyon.

Ils se mettent à discuter entre eux d'un peu tout. Et d'un coup, l'un d'entre eux (surement un M¹) veut se faire mousser devant les autres² et indique qu'il a vu dans des exercices qu'on pouvait calculer des exponentielles de matrice (à l'époque, ce n'était pas au programme de Prépas). Et devant deux jeunes camarades plus ou moins émerveillées par son savoir il commence à expliquer la formule. Et un de ses amis renchérit « et je crois qu'on a $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$ ».

Et là, je n'ai pas pu m'empêcher de lever le nez du bouquin de S.F; que j'étais en train de lire et de les interrompre « si elles commutent ».

Et je me suis replongé dans ma lecture, sans même savoir si je lui avais cassé sa baraque auprès de ses camarades. En fait, si, du coin de l'œil j'ai cherché à savoir si j'avais attiré l'attention de la petite brune dans le coin... Et j'ai entendu « il me semblait bien qu'il nous écoutait en souriant depuis tout à l'heure, celui là.. »

Non mais quand même c'est vrai quoi ! On a besoin de $A.B = B.A$ pour démontrer $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$, il ne faut pas laisser les jeunes dire n'importe quoi.

Quoique, il y a juste une implication...

En tout cas, c'est tentant d'avoir $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$.

Mais ça pose problème avec la multiplication matricielle non commutative.

On devrait quand même avoir aussi $\exp(A).\exp(B) = \exp(A+B) = \exp(B+A) = \exp(B).\exp(A)$.

Et des matrices ne commutant pas forcément devraient avoir des exponentielles qui commutent...

Allons chercher dans ce qu'on a déjà fait :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\exp(A) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\exp(A+B) = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\exp(A).\exp(B) = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		

Pour le calcul de $\exp(B)$ non conduit plus haut, c'est rapide : $B^0 = I_2, B^1 = B, B^2 = 0_{2,2}, B^3 = 0_{2,2}$ et ainsi de suite, $\exp(B) = I_2 + B$.

A peu près n'importe quel exemple convenait, mais on n'a guère envie de se re-taper des $\exp\left(\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right)$.

♠ Un résultat dit $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$ si A et B sont permutables (c'est à dire $A.B = B.A$). Démontrez le sans vous poser de questions sur les interversions de sommes infinies.

Ça, vous le referez en Spé. Mais autant avoir déjà vu ce qu'il se passe.

Partons de $\exp(A).\exp(B)$.

$$\text{C'est } \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{B^j}{j!} = \sum_{\substack{0 \leq i \\ 0 \leq j}} \frac{A^i.B^j}{i!.j!}.$$

$$\text{Et regardons aussi } \exp(A+B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^n}{n!}.$$

Comme A et B sont permutables, on peut développer $(A+B)^n$ par la formule du binôme : $(A+B)^n = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!.j!} . A^i . B^j$ (tout à coup, vous comprenez pourquoi il n'était pas judicieux d'utiliser la formule pourtant plus

classique $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} . A^i . B^{n-i}$).

$$\text{On développe la somme de sommes, et on simplifie les factorielles : } \exp(A+B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+j=n} \frac{A^i.B^j}{i!.j!} \right).$$

Mais qu'importe cette condition « $i+j$ doit valoir n » dans la mesure où on parcourt tous les n possibles.

On a finalement les mêmes termes dans les deux sommes.

Visuellement (eh oui, label Choquet, il va y avoir un truc visuel et un tableau...)

1. ce qui est devenu la MP*

2. « autres » avec deux e et deux jolis yeux pour marquer le féminin

	I_2	$+A$	$+\frac{A^2}{2}$	$+\frac{A^3}{6}$	$+\frac{A^4}{24}$...
I_2	I_2	A	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{A^3}{6}$	$\frac{A^4}{24}$...
$+B$	B	$A.B$	$\frac{A^2.B}{2}$	$\frac{A^3.B}{6}$	$\frac{A^4.B}{24}$...
$+\frac{B^2}{2}$	$\frac{B^2}{2}$	$\frac{A.B^2}{2}$	$\frac{A^2.B^2}{4}$	$\frac{A^3.B^2}{12}$	$\frac{A^4.B^2}{48}$...
$+\frac{B^3}{6}$	$\frac{B^3}{6}$	$\frac{A.B^3}{6}$	$\frac{A^2.B^3}{12}$	$\frac{A^3.B^3}{36}$	$\frac{A^4.B^3}{144}$...
$+\frac{B^4}{24}$	$\frac{B^4}{24}$	$\frac{A.B^4}{24}$	$\frac{A^2.B^4}{48}$	$\frac{A^3.B^4}{144}$	$\frac{A^4.B^4}{576}$...
\vdots

saurez vous y retrouver (en diagonale) les termes de

I_2	I_2	B	$\frac{B^2}{2}$	$\frac{B^3}{6}$	$\frac{B^4}{24}$
$A+B$	A	B	$\frac{2.A.B}{2}$	$\frac{3.A.B^2}{6}$	$\frac{4.A.B^3}{24}$
$\frac{(A+B)^2}{2}$	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{2.A.B}{2}$	$\frac{B^2}{2}$		
$\frac{(A+B)^6}{6}$	$\frac{A^3}{6}$	$\frac{3.A^2.B}{6}$	$\frac{3.A.B^2}{6}$	$\frac{B^3}{6}$	
$\frac{(A+B)^4}{24}$	$\frac{A^4}{6}$	$\frac{4.A^3.B}{24}$	$\frac{6.A^2.B^2}{24}$	$\frac{4.A.B^3}{24}$	$\frac{B^4}{24}$

et ainsi de suite

♣²♥ On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2.i.\pi \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2.i.\pi & 0 \\ 0 & -2.i.\pi \end{pmatrix}$. Calculez $\exp(A)$, $\exp(B)$ et $\exp(A+B)$ (vous n'êtes pas obligé de diagonaliser A , vous pouvez calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k/k!$ en faisant très attention au terme d'indice 0 qui est à part). Vérifiez $e^{A+B} = e^A.e^B$. A-t-on $A.B = B.A$?

Et là, on en vient au truc qui n'est même pas dans les programmes de Spé. Le cas où A et B ne commutent pas. D'ailleurs, dans ce train Lyon-Genève, j'avais bien interrompu leur conversation par un « si A et B commutent ». Et pas par un « seulement si A et B commutent ». D'ailleurs, j'ai ensuite perdu le fil du livre de S.F. (Philip K.Dick, le meilleur !) que je lisais. Je réfléchissais à deux choses : la petite brune dans le coin allait elle continuer aussi jusqu'à Genève et avait elle été éblouie par mon savoir de normalien. Et existe-t-il des cas où on a $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$ sans pour autant avoir $A.B = B.A$. La réponse je ne l'ai eue que plusieurs années plus tard³, dans un livre de Pavel Halmös. Avec le contre-exemple donné ici, et des explications qui me permettent de faire un bon exercice de colles de seconde année (en ne donnant pas tout dès le début).

A notre niveau, on calcule (dans un tableau, mon vice serait-il communicatif ?)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$	$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$A^n = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$	$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}$
$\alpha = 2.i.\pi$		récurrence	
$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$		$B^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & (-\alpha)^n \end{pmatrix}$	$\exp(B) = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}$
$A+B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(A+B)^0 = I_2$	$(A+B)^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & \alpha^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\exp(A+B) = \begin{pmatrix} e^\alpha & \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
		récurrence	

On ne semble pas avoir $e^A.e^B = e^{A+B}$.

Sauf qu'on a choisi ici $\alpha = 2.i.\pi$ (ce que je ne donnais pas en colle en seconde année).

Il reste donc $e^\alpha = 1$ (trigonométrie complexe).

Et je vous le rejoue : $\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ $\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ $\exp(A+B) = I_2$

Si ça ce n'est pas « trop fort », à en faire hurler de joie un Maxou en 2020 ou un Juan ou un Théophile en 2021, un Antoine ou un Balthazar en 2022, un Alexandre ou un Sami en 2023. Un James ou un Hugo en 2024.

3. pas pour la jeune fille brune, elle est descendue à Bourg en Bresse, et maintenant, ce doit être une femme de cinquante cinq ans, un peu moins brune, sans doute toujours jolie

Bintou vient de faire une partie de puissance 4 ou morpion contre Aïssata qui s'est conclue par un nul. Il n'y a aucun alignement de quatre croix ni de quatre cercles, que ce soit en ligne, colonne ou diagonale. Version Bintou : Retrouvez le contenu des cases qui manquent. Combien de solutions ?
Version I.P.T. : une matrice de taille 5 sur 5 contient des 0 et des χ , il faut vérifier qu'il n'y a aucun alignement de quatre pions.

χ	\mathcal{O}	χ	\mathcal{O}	χ
χ	χ		\mathcal{O}	
	χ			
χ	\mathcal{O}			\mathcal{O}
\mathcal{O}				\mathcal{O}

Au moins une des case se déduit tout de suite pour qu'il n'y ait pas d'alignement de trois \mathcal{O}

χ	\mathcal{O}	χ	\mathcal{O}	χ
χ	χ		\mathcal{O}	
	χ	là		
χ	\mathcal{O}			\mathcal{O}
\mathcal{O}				\mathcal{O}

Mais alors, pour éviter un alignement de trois croix, une nouvelle case est forcée.

χ	\mathcal{O}	χ	\mathcal{O}	χ
χ	χ		\mathcal{O}	
	χ	χ	là	
χ	\mathcal{O}			\mathcal{O}
\mathcal{O}				\mathcal{O}

Et le jeu se poursuit avec le même argument à chaque fois, jusqu'à

χ	\mathcal{O}	χ	\mathcal{O}	χ
χ	χ	\mathcal{O}_3	\mathcal{O}	χ_7
\mathcal{O}_5	χ	χ_0	χ_4	\mathcal{O}_6
χ	\mathcal{O}	χ_2	\mathcal{O}_1	\mathcal{O}
\mathcal{O}	\mathcal{O}_8			\mathcal{O}

Les indices indiquent l'ordre de remplissage.

Il reste deux cases, qu'on remplit comme on veut du moment qu'il n'y a pas deux \mathcal{O} . Sauf qu'il n'y a pas non plus de χ dans la dernière à cause d'une diagonale. Finalement, il ne reste qu'un choix $\begin{bmatrix} \chi & \mathcal{O} \end{bmatrix}$.

On peut compter les χ et les \mathcal{O} afin de savoir qui a commencé et terminé.

La version ITC ne sera pas traitée ici.

◦7◦

♥ Une suite u est définie par $\exists(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \alpha \cdot (u_n)^\beta$.

Exprimez u_n à l'aide de u_0, α, β et n (c'est ♥ mais ça peut être long quand même).

On peut calculer les premiers.

Mais en fait, la suite $\ln(u_n)$ est celle qui nous intéresse. On la note a_n et elle vérifie $a_{n+1} = \beta \cdot a_n + \ln(\alpha)$.

Elle est presque géométrique de raison β .

On cherche le point fixe : $x = \beta \cdot x + \ln(\alpha) : x = \frac{\ln(\alpha)}{1 - \beta}$.

On pose alors $b_n = a_n - \frac{\ln(\alpha)}{1 - \beta}$.

On reporte : $b_{n+1} = a_{n+1} - \frac{\ln(\alpha)}{1 - \beta}$

$$b_{n+1} = \beta \cdot a_n + \ln(\alpha) - \frac{\ln(\alpha)}{1 - \beta}$$

$$b_{n+1} = \beta \cdot a_n + \beta \cdot \frac{\ln(\alpha)}{1 - \beta}$$

$$b_{n+1} = \beta \cdot b_n$$

Elle est géométrique de raison β : $b_n = \beta^n \cdot b_0 = \beta^n \cdot \left(a_0 - \frac{\ln(\alpha)}{1 - \beta} \right)$.

On reporte : $a_n = \beta^n \cdot \left(a_0 - \frac{\ln(\alpha)}{1 - \beta} \right) + \frac{\ln(\alpha)}{1 - \beta}$.

On revient à u_n : $u_n = (u_0)^{\beta^n} \cdot \alpha^{\frac{1 - \beta^n}{1 - \beta}}$

L'exposant β^n sur u_0 était facile à deviner. Celui sur α était plus long à mettre en place. Cala dit, on voyait venir la somme de termes en β^k .

◦8◦

♥ On donne $A(1, 1)$, $B(2, 4)$ et $C(5, 3)$. Placez D sur la droite (BC) pour que (ABD) ait pour aire 2.

Comme D est sur (BC) , on a $\det(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD}) = 0$. On résout $\begin{vmatrix} x - 2 & 3 \\ y - 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

On trouve $x + 3 \cdot y = 14$.

Et si on est en MPSI2, on propose $x + 3 \cdot y = 14$. C'est une équation de droite.

Elle passe par B et par C ($2 + 3 \cdot 4 = 14$ et $5 + 3 \cdot 3 = 14$). C'est donc elle.

On veut ensuite $\det(\vec{AB}, \vec{AD}) = 4$. On veut donc cette fois $\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ 3 & y-1 \end{vmatrix} = 4$.

On a l'intersection de deux droites. On résout et on trouve $(\frac{7}{5}, \frac{21}{5})$.

Mais il y a aussi $\det(\vec{AB}, \vec{AD}) = -4$ car les aires sont algébriques. La solution est cette fois $(\frac{13}{5}, \frac{19}{5})$.

◦9◦

♥ Complétez $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$ (notée M) pour qu'elle ait même trace et même déterminant que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (notée T).
Calculez T^n pour tout n (soit par récurrence, soit par $((\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}) + (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}))^n$). Calculez M^n .

$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$ devient $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ pour la trace puis $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ pour le déterminant.

On peut calculer T^n par récurrence, c'est loin d'être une faute de goût, et c'est même bien.

Mais on peut aussi utiliser la formule du binôme : $T^n = ((\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}) + (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}))^n$ et les deux matrices sont permutables.

$$T^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n-k} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k$$

(on met l'exposant simple sur la matrice « compliquée »).

Mais dès que k a atteint ou dépassé 2, il ne reste rien de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k$.

La somme se limite à deux termes : $T^n = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^0 + n \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^1$.

On trouve $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Et pour M^n ? On peut tenter de la diagonaliser. mais elle ne se diagonalise pas.

En effet, la seule matrice D possible serait $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. mais on ne peut pas avoir $M = P \cdot (2 \cdot I_2) \cdot P^{-1}$ sans avoir tout de suite $M = I_2$, ce qui n'est pas le cas.

On peut tenter de rendre M semblable à T . Avec une matrice de passage P bien choisie.

On peut aussi tenter $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les deux matrices commutent. Et $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est nilpotente. On a donc

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n-k} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^0 + n \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \cdot 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - n \cdot 2^{n-1} & -n \cdot 2^{n-1} \\ n \cdot 2^{n-1} & 2^n + n \cdot 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

◦10◦ Complétez : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (on fait tomber les colonnes sur les lignes).

Dans $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ b & c & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ e & 1 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ g & 0 & h \\ 3 & i & 4 \end{pmatrix}$, on donne des noms aux coefficients, et on résout de petites équations comme $1 + e = 2$.

On trouve finalement $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

◦11◦

Quelle est la valeur du plus grand terme de $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 48 & -11 \end{pmatrix}^{2018}$? (oui, on diagonalise)

On va calculer $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 48 & -11 \end{pmatrix}^{2018}$ en diagonalisant. Disons le tout de suite :

Trace	Déterminant	Valeurs propres	Diagonale	Passage
-2	-3	1 et -3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

Formule obtenue par récurrence : $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 48 & -11 \end{pmatrix}^{2018} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^{2018} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1/2 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

On a quatre coefficients $\begin{matrix} 3 - (-3)^{2018} & \frac{(-3)^{2018} - 1}{2} \\ 12 - 12 \cdot (-3)^{2018} & 3 \cdot (-3)^{2018} - 2 \end{matrix}$ et le plus grand est $\boxed{3 \cdot (-3)^{2018} - 2}$

20314834051542953369733134720530847092601651327810912741336005906468015460620657655970658550755755596459
27206954432480413186166405878164110031288954170986733309264050445838468504498778699177789361771869614187
64567428099641648129655516267538794843266057792747557014699384722378084893999764382542357746920375242228
82127638656486898488816429728430946129470383142585463903695777055034475630726142621422862969391620078417
41637816483019030536893460148101171782562064520251485785859119437328196648101903890701482615485865832441
86571624887389810665913720330601826117915258468713158018130586298825043202449812443297973121759340911166
27150013227589101964352621718272239775254098670244245774859485142350819180229456542171563960510568477937
28422425953481621244536777888697666022911601660615917213688613387319271603000479001551126897575642846623
70632565476898320900521968470367377925134185011112343144991048603310014468837285143057275436645893662918
6286950719322952375577741465

◦12◦

Les suites a, b et c vérifient $\begin{cases} a_{n+1} = 4.a_n - 3.b_n + c_n \\ b_{n+1} = 6.a_n - 5.b_n + c_n \\ c_{n+1} = -4.a_n + 2.b_n + 4.c_n \end{cases}$, avec a_0, b_0 et c_0 donnés. On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

Trouvez M vérifiant $M.U_n = U_{n+1}$ pour tout n . Calculez $Tr(M)$, $Tr(M^2)$ et $Tr(M^3)$.

Trouvez D diagonale vérifiant $Tr(M) = Tr(D)$, $Tr(M^2) = Tr(D^2)$ et $Tr(M^3) = Tr(D^3)$.

Trouvez P vérifiant $M.P = P.D$, avec une première ligne de 1.

Vérifiez que P^{-1} est formée des lignes suivantes $(4, -2, -1)$, $(-1, 1, 0)$ et $(-2, 1, 1)$.

Calculez M^n , puis calculez u_n pour tout entier naturel n .

$M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$M^2 = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 5 \\ -10 & 9 & 5 \\ -20 & 10 & 14 \end{pmatrix}$	$M^3 = \begin{pmatrix} -14 & & \\ & -5 & \\ & & 46 \end{pmatrix}$
$Tr(M) = 3$	$Tr(M^2) = 17$	$Tr(M^3) = 27$

Les trois coefficients de la diagonale de D vérifient $\begin{matrix} a + b + c = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 17 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 27 \end{matrix}$.

Les trois réels a, b et c sont les racines de $X^3 - 3.X^2 - 4.X - P$
puisque $a.b + a.c + b.c = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} = \frac{3^2 - 17}{2}$.

On somme ensuite $\begin{matrix} a^3 - 3.a^2 - 4.a - P = 0 \\ b^3 - 3.b^2 - 4.b - P = 0 \\ c^3 - 3.c^2 - 4.c - P = 0 \end{matrix}$ et on trouve P .

On pouvait trouver P en passant par le déterminant.

La polynôme $X^3 - 3.X^2 - 4.X + 12$ a pour racines 3, 2 et -2 : $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

...ou toute permutation de cette matrice.

On cherche P vérifiant $M.P = P.D$ avec une ligne de 1 en première ligne (chaque vecteur colonne peut être modifié et remplacé par un de ses multiples, on peut donc imposer un 1 comme première composante) :

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On résout et on trouve ici

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Mais on a aussi $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et des variantes suivant la permutation choisie.

C'est ainsi qu'il y a six matrices D possibles et les six matrices P qui vont avec en mélangeant les colonnes.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour inverse $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie en calculant le produit !

L'énoncé proposait les lignes de la matrice inverse.

L'élève mathématicien testera des produits

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jusqu'à trouver celui qui donne I_3 .

L'élève physicien ira lire tout ce qu'il trouve sur les méthodes pour inverser une matrice 3 sur 3, avec des formules qu'il appliquera, en tentant de les comprendre.

L'élève SII prendra un logiciel pour inverser les matrices.

On a $M = P.D.P^{-1}$ puis $M^n = P.D^n.P^{-1}$.

On trouve donc tous calculs faits $\left(\begin{array}{ccc} 4 \cdot 2^n - (-2)^n - 2 \cdot 3^n & -2 \cdot 2^n + (-2)^n + 3^n & -2^n + 3^n \\ 4 \cdot 2^n - 2 \cdot (-2)^n - 2 \cdot 3^n & -2 \cdot 2^n + 2 \cdot (-2)^n + 3^n & -2^n + 3^n \\ 4 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n & -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{array} \right)$

Le mot clef « suite géométrique de raison à gauche M donne

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^n - (-2)^n - 2 \cdot 3^n & -2 \cdot 2^n + (-2)^n + 3^n & -2^n + 3^n \\ 4 \cdot 2^n - 2 \cdot (-2)^n - 2 \cdot 3^n & -2 \cdot 2^n + 2 \cdot (-2)^n + 3^n & -2^n + 3^n \\ 4 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n & -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

13

♥ La suite u est définie par u_0 donné et $u_{n+1} = 3 \cdot u_n - 2^n$. On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ 2^n \end{pmatrix}$ pour tout n . trouvez la matrice A vérifiant $U_{n+1} = A \cdot U_n$ pour tout n . Diagonalisez la. Calculez u_n pour tout n en fonction de u_0 . Pour quels u_0 la suite reste-t-elle positive ?

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot u_n - 2^n \\ 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ 2^n \end{pmatrix} \text{ puis par récurrence évidente : } U_n = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On diagonalise } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sans efforts : } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 2^n - 3^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{On avait même sans effort : } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 27 & -19 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ et sincèrement, ce n'était pas dur de deviner, généraliser, prouver...}$$

On a donc $u_n = 3^n \cdot u_0 + (2^n - 3^n)$.

Ou si on préfère $u_n = 3^n \cdot (u_0 - 1) + 2^n$

Pour u_0 égal à 1, la suite est (2^n) . Elle est positive.

Pour u_0 plus grand que 1, tous les termes sont positifs.

Pour u_0 plus petit que 1, $3^n \cdot (u_0 - 1)$ l'emporte sur 2^n et la suite tend vers $-\infty$. Elle devient négative à partir d'un certain rang (en l'occurrence $-\frac{\ln(1-u_0)}{\ln(3/2)}$).

◦14◦

Une matrice M (carrée de format 2 sur 2) vérifie $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $M \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Diagonalisez la et calculez M^2 et M^{2019} .

On colle les deux informations : $M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Ceci permet de trouver $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}$.

On peut alors chercher ses valeurs propres par la méthode usuelle.

Mais on peut faire mieux.

On pousse plus loin la première ligne :

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est une information de la forme $M \cdot P = P \cdot D$.

On a diagonalise M : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Mais on a alors $D^2 = I_2$ et $D^{2019} = D$.

On a donc $M^2 = I_2$ et $M^{2019} = M$.

◦15◦

Pour tout l'exercice, le corps de base est $(\mathbb{F}_5, +, \cdot)$ (addition et multiplication modulo 5).

$(E, +, \cdot)$ est l'espace des matrices de taille 2 sur 2. Quel est le cardinal de E ?

Montrez que $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (notée A) est diagonalisable.

Quel est le cardinal de $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}\}$? Quel est le cardinal de $\{A^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$?

Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (notée B) n'est pas diagonalisable dans E (est elle inversible ?).

Quel est le cardinal de $\{B^n \mid n \in \mathbb{N}\}$? Quel est le cardinal de $\{B^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$?

Trouvez une matrice M telle que le cardinal de $\{M^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit le plus grand possible.

Il n'y a que 5 nombres disponibles

Pour remplir une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ il faut (et suffit) de choisir quatre nombres a, b, c et d .

Chaque choix est indépendant deux autres. Donc $5 \times 5 \times 5 \times 5$ matrices, de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ en passant par $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et autres.

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonale. Dommage que ce ne soit pas $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, qui est déjà diagonale.

Cela dit, elles ont même trace et même déterminant.

On va donc tenter de diagonaliser $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On résout donc $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. La seule condition est $b = 0$.

On choisit $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On résout ensuite $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. b fait ce qu'il veut. Prenons $b = 1$ (pas 0 en tout cas).

On trouve alors $3a + 1 = 2a$ d'où $a = -1 = 4$.

On choisit $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c'est bon : $13 = 8$ et $2 = 2$).

On a donc bien $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On effectue des produits parce que c'est rapide :

	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Mais on a trouvé $A^4 = I_2$.

Inutile de chercher plus loin : la suite (A^n) est périodique de période 4.

La famille des A^n se limite à quatre éléments : I_2, A, A^2 et A^3 .

On peut dire aussi que c'est $I_2, A, 4 \cdot I_2$ et $4 \cdot A$.

Et avec des exposants dans \mathbb{Z} , ça ne change rien ! Ayant $A^4 = I_2$, on a $A^{-1} = A^3$ déjà dans la liste.

Et on passe son temps à retrouver les mêmes.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ a pour déterminant 3 (d'inverse 2).

Elle est donc inversible d'inverse $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

soit $2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

puis $\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

et même $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

On vérifie : $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et de même de l'autre côté : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour ce qui est de la diagonaliser, on trouve sa trace et son déterminant : 0 et 3.

On cherche donc deux nombres de somme 0 et de produit 3.

On résout $X^2 + 3 = 0$ d'inconnue X en testant les cinq nombres un par un :

X	0	1	2	3	4
$X^2 + 3$	3	4	2	2	4

Impossible d'obtenir 0.

Faute de valeur propre, la matrice n'est pas diagonalisable.

Remarque : *Allez, c'est quand même bien pratique les corps ayant peu d'éléments.*

Pas besoin de grosse théorie pour les équations.

On teste les cinq nombres, c'est direct.

On ne peut pas calculer B^n en diagonalisant, mais on teste :

	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C'est B^8 qui donne I_2 . Et aucune puissance d'exposant moins élevé.

L'ensemble cherché (exposant dans \mathbb{N} comme exposant dans \mathbb{Z}) a pour cardinal 4.

Pour toute matrice M , l'ensemble $\{M^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sera forcément fini, puisque inclus dans E . Mais pourra-t-il avoir un « grand » cardinal ? Ou va-t-on très vite retomber sur M ?

Imaginons déjà M diagonale : $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec a et b valent 0, 1, 2, 3 ou 4. Mais alors $M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.

Et on retombe très vite sur les mêmes valeurs. ce n'est pas moi qui le dis, c'est Fermat. Ou le calcul direct.

a	a^2	a^3	a^4	a^5
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	4	3	1	2
3	4	2	1	3
4	1	4	1	4

Bref, on aura $M^5 = M$ et l'ensemble n'aura pas plus de cinq éléments. Par exemple $M = 2 \cdot I_2$.

Si M est diagonalisable, la situation est la même : $M^n = D^n \cdot P^{-1}$. Il y a une période sur les puissances de M si et

seulement si les puissances de D le sont.

Reste le cas « non diagonalisable », comme par exemple $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (si elle se diagonalisait, elle ne pourrait être semblable qu'à $2.I_2$ et serait donc déjà égale à $2.I_2$).

Et cette fois, la liste est plus longue :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

et on recommence

Et je vous garantis qu'on ne peut pas faire mieux... sauf si vous me trouvez mieux.

◦16◦

Montrez que la droite passant par $O(0, 0)$ et $E(42, 151)$ a pour équation cartésienne $\begin{vmatrix} x & 42 \\ y & 151 \end{vmatrix} = 0$.

Montrez que l'aire du triangle de sommets $O(0, 0)$, $A(a, c)$ et $B(b, d)$ est $\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Le point M a pour coordonnées (x, y) dans \mathbb{Z}^2 ; en calculant de deux façons l'aire du triangle (O, E, M) , montrez que la distance de M à la droite (OE) est le quotient $\frac{1}{\sqrt{42^2 + 151^2}} \cdot \begin{vmatrix} x & 42 \\ y & 151 \end{vmatrix}$.

Montrez que si le point M n'est pas sur la droite (OE) alors sa distance est un multiple de $\frac{1}{\sqrt{42^2 + 151^2}}$.

Montrez pour tout λ : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - \lambda.c & b - \lambda.d \\ c & d \end{vmatrix}$.

Complétez $\begin{vmatrix} x & 42 \\ y & 151 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 42 \\ ? & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ?? & 17 \\ ? & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ?? & 17 \\ ??? & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ???? & 1 \\ ??? & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ???? & 1 \\ ????? & 0 \end{vmatrix}$.

Trouvez les points de \mathbb{Z}^2 les plus proches de la droite d'équation $151.x - 42.y = 0$ sans être dessus.

M est sur la droite (OE) si et seulement si \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{OE} sont colinéaires
(OME) est un triangle plat.

On calcule l'aire de ce triangle par $\frac{1}{2} \cdot \det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OE})$. On obtient l'équation indiquée.

Plus mathématique m(ais si, justement, faire des maths ce n'est pas calculer, c'est être intelligent) :

- l'équation $\begin{vmatrix} x & 42 \\ y & 151 \end{vmatrix} = 0$ est une équation de droite (forme développée $a.x + b.y + c = 0$)
- elle est vérifiée par $O(0, 0)$
- elle est vérifiée par $E(42, 151)$
- cette droite passe par E et O , et il n'y a qu'une droite passant par E et O
- c'est donc LA droite passant par E et O

◦17◦

On prend l'ensemble des suites réelles jamais nulles. On définit la relation (a_n) est équivalente à (b_n) notation $a_n \sim b_n$ si le rapport $\frac{a_n}{b_n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Montrez que c'est une relation d'équivalence.

Réflexivité. On se donne une suite (a_n) , on constate que le rapport $\frac{a_n}{a_n}$ vaut toujours 1. Il tend donc vers 1 quand n tend vers l'infini.

Symétrie. On se donne (a_n) et (b_n) . On suppose $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

On traduit que $\frac{a_n}{b_n}$ converge vers 1.

Il s'ensuit que $\frac{b_n}{a_n}$ converge vers $\frac{1}{1}$.

On reconnaît $b_n \sim a_n$.

Transitivité. On se donne (a_n) , (b_n) et (c_n) . On suppose $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ et $b_n \sim_{n \rightarrow +\infty} c_n$.

On traduit que $\frac{a_n}{b_n}$ et $\frac{b_n}{c_n}$ convergent vers 1.

On multiplie : $\frac{a_n}{b_n} \times \frac{b_n}{c_n}$ converge vers 1×1 .

On reconnaît $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} c_n$.

◦18◦

Calculez la somme des coefficients de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -8 \\ 0 & 24 & -13 \end{pmatrix}^n$ pour tout entier naturel n .

On ne sait pas diagonaliser les matrices 3 sur 3 ? Mais on sait diagonaliser $\begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 24 & -13 \end{pmatrix}$.

$X^2 - 2X - 3$ a pour racines 3 et -1

$$\begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 24 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On écrit sans effort :

$$\begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 24 & -13 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3^n - 3 \cdot (-1)^n & 2 \cdot (-1)^n - 2 \cdot 3^n \\ 6 \cdot 3^n - 6 \cdot (-1)^n & 4 \cdot (-1)^n - 3 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

On montre alors si nécessaire par récurrence sur n :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -8 \\ 0 & 24 & -13 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4 \cdot 3^n - 3 \cdot (-1)^n & 2 \cdot (-1)^n - 2 \cdot 3^n \\ 0 & 6 \cdot 3^n - 6 \cdot (-1)^n & 4 \cdot (-1)^n - 3 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

Et la somme des coefficients vaut $5 \cdot 3^n - 3 \cdot (-1)^n + 2^n$

◦19◦

♥ Résolvez dans \mathbb{R}^{+*} : $x^{(x^x)} = (x^x)^x$ d'inconnue x .

1 est solution évidente, on va la voir venir « naturellement ».

Par injectivité du logarithme, l'équation est équivalente à $\ln(x^{(x^x)}) = \ln((x^x)^x)$.

Elle équivaut à $x^x \cdot \ln(x) = x^2 \cdot \ln(x)$.

On l'écrit judicieusement $(x^x - x^2) \cdot \ln(x) = 0$.

Ceci nous permet d'avoir d'une part la solution $\ln(x) = 0$ et d'autre part la solution $x^x = x^2$.

Cette seconde branche donne $x \cdot \ln(x) = 2 \cdot \ln(x)$.

Encore une fois, la solution $x = 0$ et en plus la solution $x = 2$.

Bilan : $S = \{1, 2\}$

Conseil : Face à $x^x \cdot \ln(x) = x^2 \cdot \ln(x)$, on n'a pas les mauvais réflexes.

Le très très très mauvais réflexe est de simplifier par $\ln(x)$ sans se poser de questions.

Dans ce cas, vous retournez au collège, et on reparle de votre passage en Sup dans trois ans.

Le réflexe moins mauvais mais pas génial est de dire « je simplifie par $\ln(x)$ si $\ln(x)$ est non nul, et donc j'étudie à part le cas $\ln(x) = 0$ ».

Le bon réflexe est de tout faire passer d'un même côté et de factoriser. Comme ça, la solution $\ln(x) = 0$ est une solution « comme les autres ».

En règle générale si vous voulez éviter la catastrophe, ne simplifiez pas par une quantité qui dépend de l'inconnue.

◦20◦

♥ Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto e^{3 \cdot t}$.

Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \mapsto e^t \cdot \cos(t)$ et $t \mapsto e^t \cdot \cos(t+1)$.

Si on nous donne deux solutions (dont aucune n'est multiple de l'autre), on a deux valeurs propres : $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$.

On a l'équation caractéristique : $(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$ puis l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 0$

$t \mapsto e^t \cdot \cos(t)$ et $t \mapsto e^t \cdot \cos(t+1)$ sont des combinaisons de $t \mapsto e^t \cdot \cos(t)$ et $t \mapsto e^t \cdot \sin(t)$.

Puis de $t \mapsto e^t \cdot e^{i \cdot t}$ et $t \mapsto e^t \cdot e^{-i \cdot t}$.

Le spectre est $\{1 + i, 1 - i\}$ et l'équation est $y'' - 2y' + 2y = 0$.

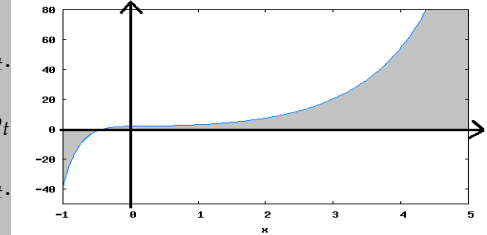
◦21◦

♥ On veut résoudre l'équation différentielle $y_t^{(3)} = 3y_t'' + 6y_t' - 8y_t$ d'inconnue y fonction de t avec conditions initiales $y_0 = 2, y_0' = 1$ et $y_0'' = -7$. Calculez $y_0^{(3)}$ et $y_0^{(4)}$.

On pose : $u_t = y_t'' - 2y_t' - 8y_t$. Calculez u_0 et démontrez : $u_t' = u_t$. Déterminez alors u_t pour tout t .

On pose ensuite $v_t = y_t'' - 5y_t' + 4y_t$. Dériver v . Déterminez v_t pour tout t .

On pose $w_t = y_t'' + a y_t' + b y_t$. Ajustez a et b pour avoir $w_t' = 4w_t$. Déterminez alors w_t pour tout t .



$y_t^{(3)} = 3y_t'' + 6y_t' - 8y_t$ donne en $t = 0$: $y_0^{(3)} = 3y_0'' + 6y_0' - 8y_0 = 3(-7) + 6(1) - 8(2) = -31$.

On re-dérive : $y_t^{(4)} = 3y_t^{(3)} + 6y_t'' - 8y_t'$ et en 0 : $y_0^{(4)} = 3(-31) + 6(-7) - 8(1)$. Et pourquoi pas : -143 !

On a $u_0 = y_0'' - 2y_0' - 8y_0 = -7 - 2(1) - 8(2) = -25$.

On dérive et remplace : $u_t' = y_t^{(3)} - 2y_t'' - 8y_t'$
 $u_t' = (3y_t'' + 6y_t' - 8y_t) - 2y_t'' - 8y_t'$
 $u_t' = y_t'' - 2y_t' - 8y_t$
 $u_t' = u_t$ Étonnant !

On résout cette équation linéaire d'ordre 1 : $u_t = u_0 \cdot e^t$
 $u_t = -25 \cdot e^t$

De même, $v_0 = y_0'' - 5y_0' + 4y_0 = -7 - 5(1) + 4(2) = -4$.

On dérive aussi $v_t' = y_t^{(3)} - 5y_t'' + 4y_t'$
 $v_t' = (3y_t'' + 6y_t' - 8y_t) - 5y_t'' + 4y_t'$
 $v_t' = -2y_t'' + 10y_t' - 8y_t$
 $v_t' = -2v_t$ (tiens cette fois la valeur propre c'est 2)

On résout : $v_t = -4 \cdot e^{-2t}$.

On parie qu'on va tomber sur $w_t' = 4w_t$ (la dernière valeur propre) ?

On dérive $w_t' = y_t^{(3)} + a y_t'' + b y_t'$
 $w_t' = (3y_t'' + 6y_t' - 8y_t) + a y_t'' + b y_t'$
 $w_t' = (3+a)y_t'' + (6+b)y_t' - 8y_t$
 $w_t' = 4y_t'' + (6+b)y_t' - 8y_t$ avec $a = 1$: $w_t = y_t'' + y_t' + b y_t$
 $w_t' = 4y_t'' + 4y_t' - 8y_t$ avec $b = -2$: $w_t = y_t'' + y_t' - 2y_t$

et ça tombe juste.

Pouvait on deviner cette formule en $w_t = y_t'' + y_t' - 2y_t$ après avoir vu $u_t = y_t'' - 2y_t' - 8y_t$ et $v_t = y_t'' - 5y_t' + 4y_t$?

Moi je dis oui.

L'idée générale :

On écrit le polynôme caractéristique $\lambda^3 = 3\lambda^2 + 6\lambda - 8$.

On en trouve les trois racines a, b et c . On écrit même $\lambda^3 = (a + b + c)\lambda^2 - (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)\lambda + a \cdot b \cdot c$.

On en choisit une, disons a . Il reste b et c , et le polynôme $X^2 - (b + c)X + b \cdot c$.

On crée alors $y'' - (b + c)y' + b \cdot c y$ qu'on appelle U .

On dérive : $U' = y^{(3)} - (b + c)y'' + b \cdot c y'$.

On remplace : $U' = ((a + b + c)y'' - (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)y' + a \cdot b \cdot c y) - (b + c)y'' + b \cdot c y'$.

On regroupe : $U' = a y'' - (a \cdot b + a \cdot c)y' + a \cdot b \cdot c y$.

On factorise : $U' = a(y'' - (b + c)y' + b \cdot c y)$.

On reconnaît : $U' = a \cdot U$.

On résout : $U_t = U_0 \cdot e^{a \cdot t}$.

C'est comme ça que vient le terme en $e^{a \cdot t}$.

C'est avec $y'' - (a+c).y' + a.c.y$ et $y'' - (a+b).y' + a.b.y$ qu'on aura $e^{b.t}$ et $e^{c.t}$.

A ce stade, qu'on a eu ? : $u_t = -25.e^t$, $v_t = -4.e^{-2.t}$ et $w_t = w_0.e^{4.t}$ avec w_0 calculable.

Rappelons que 1, -2 et ' sont les trois racines du polynôme caractéristique.

Mais si on l'écrit en revenant aux définition :
$$\begin{cases} y''_t - 2.y'_t - 8.y_t = u_0.e^t \\ y''_t - 5.y'_t + 4.y_t = v_0.e^{-2.t} \\ y''_t + y'_t - 2.y_t = w_0.e^{4.t} \end{cases}$$

On peut en profiter pour extraire y_t . En résolvant
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 1 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y''_t \\ y'_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0.e^t \\ v_0.e^{-2.t} \\ w_0.e^{4.t} \end{pmatrix}$$
.

On inverse :
$$\begin{pmatrix} y''_t \\ y'_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 1 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u_0.e^t \\ v_0.e^{-2.t} \\ w_0.e^{4.t} \end{pmatrix}$$
 et seule la dernière ligne nous intéressera.

En l'occurrence :
$$\begin{pmatrix} y''_t \\ y'_t \\ y_t \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ -2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0.e^t \\ v_0.e^{-2.t} \\ w_0.e^{4.t} \end{pmatrix}$$
.

Sinon, « à la main » :
$$\begin{cases} y''_t - 2.y'_t - 8.y_t = u_0.e^t \\ y''_t - 5.y'_t + 4.y_t = v_0.e^{-2.t} \\ y''_t + y'_t - 2.y_t = w_0.e^{4.t} \end{cases}$$

devient
$$\begin{cases} y''_t - 2.y'_t - 8.y_t = u_0.e^t \\ -3.y'_t + 12.y_t = -u_0.e^t + v_0.e^{-2.t} \\ 3.y'_t + 6.y_t = -u_0.e^t + w_0.e^{4.t} \end{cases}$$

puis
$$\begin{cases} y''_t - 2.y'_t - 8.y_t = u_0.e^t \\ -3.y'_t + 12.y_t = -u_0.e^t + v_0.e^{-2.t} \\ +18.y_t = -2.u_0.e^t + v_0.e^{-2.t} + w_0.e^{4.t} \end{cases}$$

On a fini, il suffit d'être propre et méthodique. En résolvant un système et non en balançant tout au hasard.

Par cette méthode « sans diagonalisation explicite », on comprend aussi la combinaison d'exponentielle.

A la fin :
$$\frac{25.e^t - 2.e^{-2.t} - 5.e^{4.t}}{9}$$
.

o22o

♥ Soit f solution de l'équation différentielle $y''_t + y_t = 0$ d'inconnue y fonction de t . Calculez $f(t) + f(t + \pi)$ pour tout t .

Soit f solution de l'inéquation $y''_t + y_t \geq 0$ d'inconnue y fonction de t . Comparez $f(0) + f(\pi)$ et $\int_0^\pi \sin(t).(f(t) + f''(t)).dt$.

Déduisez pour tout x : $f(x) + f(x + \pi) \geq 0$ (pensez à traduire).

Les solutions de $y'' + y = 0$ sont de la forme $A.\cos(t) + B.\sin(t)$ avec A et B à déterminer.

Quand on calcule en t et en $t + \pi$, on trouve 0 par $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$ et $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$.

Remarque : Vous passez par $\cos(\theta + \pi) = \cos(\theta).\cos(\pi) - \sin(\theta).\sin(\pi) = -\cos(\theta)$?

Vous savez calculer. C'est bien.

Mais vous n'irez pas loin. Vous n'avez pas les bonnes méthodes. Vous êtes bourrin...

Vous pourrez certes faire un sujet de bac en quatre heures

mais un sujet de concours en une semaine...

Il faut juste voir « point diamétralement opposé sur le cercle trigonométrique ».

Il ne suffit pas d'arriver à une réponse. Il faut être efficace. Vous devez accepter de casser vos (mauvaises) habitudes.

Elles vous ont permis de réussir jusqu'au bac, n'espérez pas progresser ensuite si vous ne changez pas.

Si on a juste $y'' + y \geq 0$ pour tout n , on ne sait pas comment conclure...

Pour comparer $f(0) + f(\pi)$ et $\int_0^\pi \sin(t).(f(t) + f''(t)).dt$, on part du plus compliqué : $\int_0^\pi \sin(t).(f(t) + f''(t)).dt$

On sépare en $\int_0^\pi \sin(t).f(t).dt + \int_0^\pi \sin(t).f''(t).dt$ on intègre par parties
$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline f(t) & \leftrightarrow & f'(t) \\ \hline \sin(t) & \leftrightarrow & -\cos(t) \\ \hline \end{array}$$
 pour l'un et

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline f''(t) & \leftrightarrow & f'(t) \\ \hline \sin(t) & \leftrightarrow & \cos(t) \\ \hline \end{array}$$

Les deux intégrales se compensent avec un signe moins. Restent les termes crochets qui valent justement $f(0)$ et $f(\pi)$.

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin(t).f(t).dt + \int_0^\pi \sin(t).f''(t).dt = \\ & \left[-\cos(t).f(t) \right]_0^\pi + \int_0^\pi f'(t). \cos(t).dt + \left[\sin(t).f'(t) \right]_0^\pi - \int_0^\pi f'(t). \cos(t).dt \\ & \int_0^\pi \sin(t).(f(t) + f''(t)).dt = f(0) + f(\pi) \end{aligned}$$

Regardons cette intégrale. Le sinus est positif, car on est entre 0 et π .

Et la somme $f''(t) + f(t)$ est positive, grâce à l'équation différentielle.

L'intégrale est positive : $f(0) + f(\pi) \geq 0$.

C'est un début. Évidemment, il ne faut pas dire « et je vais démontrer $f(t) + f(\pi + t) \geq 0$ par récurrence sur t . On est sur \mathbb{R} cette notion n'a pas de sens.

On tente d'écrire $f(x) + f(x + \pi)$ sous la forme similaire d'une intégrale.

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin(t).f(x+t).dt + \int_0^\pi \sin(t).f''(x+t).dt = \\ & \left[-\cos(t).f(x+t) \right]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x+t). \cos(t).dt + \left[\sin(t).f'(x+t) \right]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x+t). \cos(t).dt \\ & \int_0^\pi \sin(t).(f(x+t) + f''(x+t)).dt = f(x) + f(x + \pi) \end{aligned}$$

Dans l'intégrale, tout est positif (sinus sur le bon intervalle, et inéquation différentielle).

Le terme de droite est positif aussi.

o23o

Existe-t-il une équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y'_t + a_t.y_t = b_t$ qui admette pour solution ch et sh ?
Existe-t-il une équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y'_t + a_t.y_t = b_t$ qui admette pour solution $t \mapsto ch(t)$ et $t \mapsto ch(2.t)$?

$$ch(t) + a_t.sh(t) = b_t \quad \text{ou même} \quad a_t.sh(t) - b_t = -ch(t)$$

On veut à la fois

$$sh(t) + a_t.ch(t) = b_t \quad \text{et} \quad a_t.ch(t) - b_t = -sh(t)$$

On trouve $a_t = 1$ et $b_t = e^t$. On vérifie. C'était évident.

La seconde équation donne des choses plus laides. On peut retrouver l'équation homogène en disant que la différence de deux solutions générale est solution homogène.

Les solutions de $h'_t + a_t.h_t = 0$ sont donc les multiples de $t \mapsto ch(2.t) - ch(t)$.

C'est donc que l'on a $\exp(-A_t) = ch(2.t) - ch(t)$ sur un intervalle convenable.

On trouve A_t avec un logarithme et on dérive pour avoir a_t .

$$a_t = \frac{sh(t) - 2.sh(2.t)}{ch(2.t) - ch(t)} \quad (\text{sur un intervalle ne contenant pas } 0 \text{ !}).$$

o24o

♥ Résolvez le système $\begin{cases} a'_t = 4.a_t + b_t \\ b'_t = 2.a_t + 3.b_t \end{cases}$. Façon physicien bricoleur : ajustez k pour que $a_t + k.b_t$ vérifie une équation $y'_t = \mu.y_t$.

Façon physicien ayant lu des livres de maths : diagonalisez la matrice.

Façon matheux : bâclez ces calculs et cherchez à comprendre le lien entre les deux méthodes.

On pose $y_t = a_t + k.b_t$.

On dérive : $y'_t = a'_t + k.b'_t = (4.a_t + b_t) + k.(2.a_t + 3.b_t)$

On voudrait qu'elle soit de la forme $\mu.y_t$ c'est à dire $.a_t + k.\mu.b_t$.

On va donc pouvoir donner une valeur à k et à μ : $\begin{matrix} 4 & +2.k & = & \mu \\ 1 & +3.k & = & k.\mu \end{matrix}$.

On reporte la première dans la seconde : $\begin{matrix} k & = & \frac{\mu-4}{2} \\ 1 & +3.\frac{\mu-4}{2} & = & \frac{\mu-4}{2}.\mu \end{matrix}$.

μ est solution d'une équation du second degré : $\mu^2 - 7.\mu + 10 = 0$.

On a deux valeurs possibles : 2 et 5.

Et pour chacune, on a la valeur de k associée.

$$\begin{array}{|l|} \hline \text{On a donc} \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline y_t = a_t - b_t & z_t = a_t + \frac{1}{2}b_t \\ \hline y'_t = 2.y_t & z'_t = 5.y_t \\ \hline y_t = y_0.e^{2.t} & z_t = z_0.e^{5.t} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

$$\text{On a donc} \quad \begin{array}{l} a_t - b_t = (a_0 - b_0).e^{2.t} \\ 2.a_t + b_t = (2.a_0 + b_0).e^{5.t} \end{array}$$

$$\text{On peut combiner pour récupérer} \quad \begin{array}{l} a_t = \frac{a_0 - b_0}{3}.e^{2.t} + \frac{2.a_0 + b_0}{3}.e^{5.t} \\ b_t = -2.\frac{a_0 - b_0}{3}.e^{2.t} + \frac{2.a_0 + b_0}{3}.e^{5.t} \end{array}$$

Remarque : En Terminale on vous aurait donné « comme par hasard » $y_t = a_t - b_t$ et $z_t = a_t + \frac{b_t}{2}$ et on vous aurait demandé de vérifier qu'ils étaient « comme par hasard » solutions d'une équation différentielle.

$$\text{Et si on diagonalisait : } \begin{pmatrix} a'_t \\ b'_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}.$$

Trace	Déterminant	CharPoly	Spectre	D	P
7	10	$X^2 - 7.X + 10$	{2, 5}	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{On pose alors} \quad \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_t - b_t}{3} \\ \frac{2.a_t + b_t}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{On reporte : } \begin{array}{l} u'_t = 2.u_t \\ v'_t = 5.v_t \end{array}$$

$$\text{On résout : } u_t = u_0.e^{2.t} \text{ et } v_t = v_0.e^{5.t} \text{ avec } u_0 = \frac{a_0 - b_0}{3} \text{ et } v_0 = \frac{2.a_0 + b_0}{3}.$$

$$\text{On remonte : } \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (a_0 - b_0).e^{2.t} \\ (2.a_0 + b_0).e^{5.t} \end{pmatrix}$$

C'est la même chose.

Mais dans un cas on les appelle y_t et z_t et dans l'autre u_t et v_t (à un facteur 3 près qui est le déterminant de P).

◦25◦

Sachant $y_0 = 1$ et $y'_t + t.y_t = 0$ pour tout t , calculez y_1 .

$y'_t + t.y_t = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus, sous forme de Cauchy-Lipschitz, avec second membre nul, et avec une condition initiale. On aura unicité de la solution.

On résout l'équation homogène associée dont les solutions sont $\text{Vect}(t \mapsto e^{-t^2/2})$.

Avec condition initiale : $y_t = e^{-t^2/2}$. On trouve $y_1 = 1/\sqrt{e}$.

◦26◦

On veut résoudre l'équation différentielle $2.t^2.f''(t) - 7.t.f'(t) + 4.f(t) =_{\forall t > 0} 0$ d'inconnue f fonction de t sur $]0, +\infty[$ (notée (E)). On pose alors $g = x \mapsto f(e^x)$. Calculez g' et g'' . Montrez que g est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants que vous résoudrez. Explicitez la solution de (E) qui vaut 1 en 1 et aussi en 2.

On a affaire ici à une équation différentielle linéaire à coefficients non constants. Du type « Euler-homogène » (on les étudiait en Prépas à une époque).

La méthode « équation caractéristique » est vouée ici à l'échec. En effet, elle consisterait à écrire classiquement $Y'_t = M.Y_t$ mais avec M qui dépend du temps.

rappelons que la résolution de $Y'_t = M.Y_t$ avec M ne dépendant pas du temps passe par la diagonalisation (quand il n'y a pas de valeur propre double) : $M = P.D.P^{-1}$.

On écrit $Y'_t = P.D.P^{-1}.Y_t$ puis on pose $U_t = P^{-1}.Y_t$, on dérive $U'_t = P^{-1}.Y'_t$, on reporte $U'_t = D.U_t$ et on résout composante par composante : $u'_t = \lambda_1.u_t$ et $v'_t = \lambda_2.v_t$.

Jusqu'ici tout va bien.

Mais si M dépend de t , alors D et P dépendent de t .

Et quand on pose $U_t = P_t^{-1}.Y_t$ et qu'on dérive, on a $U'_t = P_t^{-1}.Y'_t + (P_t^{-1})'.Y_t$.

Oui, il y a un terme en plus, et plus rien ne va dans la suite.

Il faut donc se laisser guider dans la résolution de cette équation différentielle.

Au fait, son nom d'homogène vient de son écriture $2.t^2.\frac{d^2y}{dt^2} - 7.t.\frac{dy}{dt} + 4.y_t = 0$.

Le physicien qui sommeille dans le matheux⁵ voit une homogénéité aux dimensions-temps dans les opérateurs $t^2.\frac{d^2}{dt^2}$ et $t.\frac{d}{dt}$.

5. des fois, il faut quand même le réveiller, mais pas forcément le laisser parler, faut pas pousser

C'est parti pour le changement de variable.

On pose donc $g = x \mapsto f(e^x)$. On comprend que si on connaît g alors on connaît f , en composant à rebours par logarithme⁶.

On dérive : $g'(x) = e^x \cdot f'(e^x)$ et on redérive : $g''(x) = e^x \cdot f'(e^x) + e^{2x} \cdot f''(e^x)$.

Mais si on regarde dans l'équation initiale $2.t^2 \cdot f''(t) - 7.t \cdot f'(t) + 4.f(t) = 0$, en posant $t = e^x$, on a $2.e^{2x} \cdot f''(e^x) - 7.e^x \cdot f'(e^x) + 4.f(e^x) = 0$ pour tout x .

Remplaçons $e^{2x} \cdot f''(e^x)$ par $\frac{7.e^x \cdot f'(e^x) - 4.f(e^x)}{2}$ dans $g''(x) : g''(x) = e^x \cdot f'(e^x) + \frac{7.e^x \cdot f'(e^x) - 4.f(e^x)}{2}$.

On a donc déjà $2.g''(x) = 2.e^x \cdot f'(e^x) + 7.e^x \cdot f'(e^x) - 4.f(e^x)$ et même $2.g''(x) = 9.e^x \cdot f'(e^x) - 4.f(e^x)$.

Mais remplaçons même $e^x \cdot f'(e^x)$ par $g'(x)$.

On a alors $2.g''(x) = -5.g'(x) + 4.f(e^x)$.

Et en remplaçant ultimement : $2.g''(x) - 9.g'(x) + 4.g(x) = 0$

Oui, une équation différentielle en g , à coefficients constants...

On y accédait aussi « dans l'autre sens ». je vous le fais, pour que vous ayez les deux.

On a posé $g = x \mapsto f(e^x)$, on a donc $f = t \mapsto g(\ln(t))$.

On dérive donc une fois : $f'(t) = \frac{g'(\ln(t))}{t}$ (composée).

On redérive : $f''(t) = -\frac{g'(\ln(t))}{t^2} + \frac{g''(\ln(t))}{t^2}$.

On reporte dans $2.t^2 \cdot f''(t) - 7.t \cdot f'(t) + 4.f(t) = 0$ qui devient

$$2.t^2 \cdot \left(-\frac{g'(\ln(t))}{t^2} + \frac{g''(\ln(t))}{t^2} \right) - 7.t \cdot \left(\frac{g'(\ln(t))}{t} \right) + 4.g(\ln(t)) = 0.$$

On simplifie (ah oui, c'était pour ça le changement de variable) : $2.g''(\ln(t)) - 9.g'(\ln(t)) + 4.g(\ln(t)) = 0$.

Et en remplaçant la variable $\ln(t)$ qui a le droit de décrire tout \mathbb{R} : $2.g''(x) - 9.g'(x) + 4.g(x) = 0$.

Déjà, avec soulagement, on trouve la même équation différentielle.

Et on constate que si on n'a pas posé proprement le changement de variable, avec des dérivées de composées, on écrit des bêtises.

On est quand même passé de $2.t^2 \cdot y''_t - 7.t \cdot y'_t + 4.y_t = 0$ à $2.z''_x - 9.z'_x + 4.z_x = 0$.

A présent, on résout l'équation à coefficients constants $2.g''(x) - 9.g'(x) + 4.g(x) = 0$

Équation caractéristique : $2.\lambda^2 - 9.\lambda + 4 = 0$.

Spectre : 4 et $\frac{1}{2}$.

Solutions : $\text{Vect}(t \mapsto e^{4t}, t \mapsto e^{t/2})$.

Mais attention, on ne se contente pas de ça. On a trouvé $g = t \mapsto A.e^{4t} + B.e^{t/2}$ avec A et B à déterminer.

Mais l'inconnue était f . Avec $g(t) = f(e^x)$.

On obtient : $f = x \mapsto A.e^{4 \ln(x)} + B.e^{\ln(x)/2}$.

Ou même directement $g = t \mapsto A.(e^t)^4 + B.(e^t)^{1/2}$ donc $f = x \mapsto A.x^4 + B.x^{1/2}$

Avec un esprit odieusement M.P.S.I.2, on peut dire qu'on attend pour $2.t^2 \cdot f''(t) - 7.t \cdot f'(t) + 4.f(t) = 0$ un espace des solutions de dimension 2.

Il suffit donc de trouver deux solutions indépendantes pour les retrouver toutes par combinaisons linéaires.

On tente sa chance avec $t \mapsto t^4$ de dérivées $t \mapsto 4.t^3$ et $t \mapsto 12.t^2$.

Surprise : $2.t^2 \cdot 12.t^2 - 7.t \cdot 4.t^3 + 4.t^4 = 0$.

On tente sa chance aussi avec $t \mapsto \sqrt{t}$. Pareil !

Ou même $t \mapsto t^\lambda$ de dérivées $t \mapsto \lambda.t^{\lambda-1}$ et $t \mapsto \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot t^{\lambda-2}$.

On reporte : $2.t^2 \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot t^{\lambda-2} - 7.t \cdot \lambda \cdot t^{\lambda-1} + 4.t^\lambda = 0$. On aboutit comme par hasard à une équation en λ : $2.\lambda^2 - 9.\lambda + 4 = 0$.

Déjà traitée...

⁶. ce changement de variable consiste à tracer le graphe sur un papier millimétré à échelle logarithmique, que vous croisez peut être en labo de physique/chimie

◦27◦

Un élève un peu bas de plafond prétend : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$ (formule ☹). Évidemment, il a tort. Mais il indique que c'est vrai pour

$f = t \mapsto e^{4.t}$	et	$g = t \mapsto e^{2.t}$
$f = t \mapsto \sqrt{\frac{t}{1-2.t}}$	et	$g = t \mapsto \sqrt{t}$
$f = t \mapsto e^{t^2+t} \cdot \sqrt{1-2.t}$	et	$g = t \mapsto e^{t^2}$
$f = t \mapsto e^{a.t}$	et	$g = t \mapsto e^{b.t}$

pour la dernière ligne, c'est à vous de choisir convenablement b en fonction de a , et pour toutes les autres, c'est à vous de faire.

Le professeur le met alors au défi : on prend $g = \cos$ (sur $]0, \pi/2[$). Aidez le en trouvant f pour qu'il y ait égalité dans sa formule (☹). Vous serez amené à résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre. Vous montrerez que ce qu'on note classiquement a_t est une fonction de $\tan(t)$. Vous ferez un changement de variable $\tau = \tan(t)$, et vous devrez décomposer en éléments simples quelque chose de la forme $\frac{\alpha.t^2 + \beta.t + \gamma}{(\gamma.t + \delta).(t^2 + 1)} = \frac{\lambda}{\gamma.t + \beta} + \frac{\mu.t + \nu}{t^2 + 1}$. Ah oui, on ne triche pas, on ne prend pas f identiquement nulle !

On doit vérifier des couples (f, g) pour avoir $\frac{f'.g - f.g'}{g^2} = \frac{f'}{g'}$ ou même $\forall t, \frac{f'(t).g(t) - f(t).g'(t)}{g^2(t)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$.

$f(t) = e^{4.t}$	$\frac{f(t)}{g(t)} = e^{2.t}$	$f'(t) = 4.e^{4.t}$	
$g(t) = e^{2.t}$	$\left(\frac{f}{g}\right)'(t) = 2.e^{2.t}$	$g'(t) = 2.e^{2.t}$	$\frac{f'(t)}{g'(t)} = 2.e^{2.t}$

puis

$f(t) = \sqrt{\frac{t}{1-2.t}}$	$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{1}{\sqrt{1-2.t}}$	$f'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2.t}^2} = \frac{1}{2\sqrt{t} \cdot (1-2.t)^{3/2}}$	
$g(t) = \sqrt{t}$	$\left(\frac{f}{g}\right)'(t) = -\frac{2}{2 \cdot (1-2.t)^{3/2}}$	$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$	$\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{1}{(1-2.t)^{3/2}}$

$f(t) = e^{t^2+t} \cdot \sqrt{1-2.t}$	$\frac{f(t)}{g(t)} = e^t \cdot \sqrt{1-2.t}$	$f'(t) = e^{t^2+t} \cdot (2.t+1) \cdot \sqrt{1-2.t} + e^{t^2+t} \cdot \frac{-2}{2\sqrt{1-2.t}}$
$g(t) = e^{t^2}$	$\left(\frac{f}{g}\right)'(t) = e^t \cdot \sqrt{1-2.t} + e^t \cdot \frac{-2}{2\sqrt{1-2.t}}$	$g'(t) = 2.t.e^{t^2}$

Les deux quotients valent $e^t \cdot \frac{-2.t}{\sqrt{1-2.t}}$ car $f'(t) = e^{t^2+t} \cdot \frac{(2.t+1) \cdot (1-2.t) - 1}{\sqrt{1-2.t}} = e^{t^2+t} \cdot \frac{-4.t^2}{\sqrt{1-2.t}}$.

Pour conclure

$f(t) = e^{a.t}$	$\frac{f(t)}{g(t)} = e^{(a-b).t}$	$f'(t) = a.e^{a.t}$	
$g(t) = e^{b.t}$	$\left(\frac{f}{g}\right)'(t) = (a-b).e^{(a-b).t}$	$g'(t) = b.e^{b.t}$	$\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{a}{b} \cdot e^{(a-b).t}$

Relions a et b par la relation $a - b = \frac{a}{b}$:

Passons au cas du cosinus. On veut $\frac{f'.\cos + f.\sin}{\cos^2} = \frac{f'}{-\sin}$ (à l'étage des fonctions, allez !).

Sur un intervalle convenable tel que $]0, \frac{\pi}{2}[$, on fait le produit en croix : $f'.(\cos \cdot \sin + \cos^2) - \sin^2 \cdot f = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient continu, qu'on met sous forme de Cauchy Lipschitz entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

$$f' + a.f = 0 \text{ avec } a = \frac{\sin^2}{\cos^2 + \cos \cdot \sin} \text{ C'est la fonction qu'on va devoir intégrer.}$$

On divise haut et bas par \cos^2 : $a = \frac{\tan^2}{1 + \tan}$

On cherche donc $\int \frac{\tan}{1 + \tan(\theta)} \cdot d\theta$ (bornes non indiquées, pour une fois, on cherche une primitive).

On effectue un changement de variable comme indiqué : $t = \tan(\theta)$ donc $dt = (1 + \tan^2(\theta)) \cdot d\theta$ et $d\theta = \frac{dt}{1 + t^2}$.

$$\int \frac{\tan}{1 + \tan(\theta)} \cdot d\theta = \int \frac{t^2}{(1+t).(1+t^2)} \cdot dt$$

On est sur la bonne piste, l'énoncé propose de décomposer en éléments simples une fraction de ce type :

$$\frac{\alpha.t^2 + \beta.t + \gamma}{(\gamma.t + \delta).(t^2 + 1)} = \frac{\lambda}{\gamma.t + \beta} + \frac{\mu.t + \nu}{t^2 + 1}$$

avec $\alpha = 1, \beta = 0$ et $\gamma = 0$.

On veut donc

$$\frac{t^2}{(t+1).(t^2+1)} = \frac{\lambda}{t+1} + \frac{\mu.t + \nu}{t^2+1} = \frac{\lambda.(t^2+1) + (\mu.t + \nu).(t+1)}{(t+1).(t^2+1)} = \frac{(\lambda + \mu).t^2 + (\mu + \nu).t + (\nu + \lambda)}{(t+1).(t^2+1)}$$

On résout donc $\begin{cases} \lambda + \mu & = 1 \\ \mu + \nu & = 0 \\ \lambda + \nu & = 0 \end{cases}$ par formules de Cramer par exemple : $\lambda = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$ et ainsi de

suite.

Bref : $\frac{t^2}{(t+1).(t^2+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{t+1} + \frac{t-1}{t^2+1} \right)$

On reporte dans l'intégrale : $\int \frac{2.t^2}{(1+t).(1+t^2)}.dt = \int \frac{1}{t+1}.dt + \int \frac{t}{t^2+1}.dt - \int \frac{1}{t^2+1}.dt.$

On intègre : $\int \frac{t^2}{(1+t).(1+t^2)}.dt = \frac{\ln(1+t)}{2} + \frac{\ln(1+t^2)}{4} - \frac{\text{Arctan}(t)}{2}.$

On revient à la variable initiale : $a(\theta) = \int \frac{\tan}{1 + \tan(\theta)}.d\theta = \frac{\ln(1 + \tan(\theta))}{2} + \frac{\ln(1 + \tan^2(\theta))}{4} - \frac{\theta}{2}$

Il ne reste qu'à coller un signe moins, et passer à l'exponentielle : $f = \theta \mapsto \frac{e^{\theta/2}}{\sqrt{1 + \tan(\theta)} \cdot \sqrt[4]{1 + \tan^2(\theta)}}$

Sans doute vous contenterez vous de cette formule. Pourtant $1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$ et donc $\frac{1}{\sqrt[4]{1 + \tan^2(\theta)}} =$

$\sqrt{\cos(\theta)}$ puis $\frac{\sqrt{\cos(\theta)}}{\sqrt{1 + \tan(\theta)}} = \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\cos(\theta) + \sin(\theta)}}.$

Remarque : *Mais après on n'a pas beaucoup mieux...*

Questions issues d'un Q.C.M. de Roger Mansuy.

- a● Une fonction f dérivable vérifie $f' = 2.f$ si, et seulement si, pour tout x , il existe C tel que $f(x) = C.e^{2.x}$.
- b● Si une fonction f dérivable vérifie $f' = 2.f$, alors, pour tout x , il existe C tel que $f(x) = C.e^{3.x}$.
- c● Les solutions de $y'(x) + a.y(x) = 0$ sont de la forme $x \mapsto C.e^{a.x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
- d● Les solutions de $y'(x) = a(x).y(x)$ sont de la forme $x \mapsto C.e^{a(x).x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
- e● Les solutions de $y''(x) - 2.y'(x) + 2.y(x) = 0$ sont de la forme $x \mapsto e^{-x}.(A.\cos(x) + B.\sin(x))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- f● Soit $a > 0$. L'équation $y'(x) = a.y(x)$ admet une unique solution bornée sur \mathbb{R}^+ .
- g● L'équation $y'(x) = a.y(x)$ admet des solutions polynomiales non constantes si, et seulement si, $a \in \mathbb{N}$.
- h● Soit $a > 0$. L'équation $y'(x) = a.y(x) + \sin(3.x)$ admet au plus une solution périodique.
- i● Les solutions de $y' - y = \sin(x)$ sont deux à deux proportionnelles.
- j● Les solutions de $y' + a.y = 0$ sont deux à deux proportionnelles.
- k● Les solutions de $y'' + a.y' = 0$ sont deux à deux proportionnelles.
- l● Les solutions de $y'' + a.y = 0$ sont deux à deux proportionnelles.
- m● La fonction $x \mapsto e^{r.x}$ est solution de $a.y'' + b.y' + c.y = 0$ si, et seulement si, r est racine de l'équation caractéristique.
- n● Les solutions de $y'' + y' + y = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.
- o● La fonction $x \mapsto \arccos(x)$ est solution de $y' + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.
- p● Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \sin(2x)$ sont solutions d'une même équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants réels.
- q● La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est solution d'une équation linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients réels constants si, et seulement si, i est racine de l'équation caractéristique de cette équation.
- r● L'équation $y'' - 2.y' + 2.y = x.e^x$ admet une solution de la forme $x \mapsto P(x).e^x$ avec P un polynôme.
- s● L'équation $y'' - 3.y' + 2.y = (x+1).e^{-x}$ admet une solution de la forme $x \mapsto P(x).e^x$ avec P un polynôme de degré 2.
- t● L'équation $y'' - 3.y' + 2.y = \ln(x)$ admet une solution de la forme $x \mapsto P(x).e^{a.x}$ avec P un polynôme et $a \in \mathbb{R}$.
- u● Il y a une unique solution de $y'(x) = x.y(x)$ vérifiant $y(0) = 1$.

a : Faux. Il existe C tel que pour tout x ...

b : Vrai. Pour la même raison idiote qu'au dessus.

c : Faux. C est $e^{-a.x}$.

d : Faux. primitive A de a et pas $a(x).x$!

e : Faux. $e^x.(A.\cos(x) + B.\sin(x))$.

f : Vrai. la fonction nulle.

g : faux. Exponentielles !

h : Faux. la solution particulière que vous construisez d'après le cours. Et sinon, il y a une exponentielle.

i : Faux. ce sont les homogènes qui sont proportionnelles.

j : Vrai. Toutes multiples de la même exponentielle.

k : Faux. Forme « exponentielle+constante ».

l : Faux. Combinaisons linéaires de deux solutions non proportionnelles...

m : Vrai. C'est le cours.

n : Vrai. oscillateur amorti.

o : Faux. Testez !

p : Faux. sin va avec cos, pas avec sin du double.

q : Vrai. Et on la connaît l'équation !

r : Vrai. Méthode de recherche de solution particulière justement.

s : Faux. Le polynôme sera de degré 1 et pas 2.

t : Faux. Et je n'ai pas envie de chercher une particulière.

u : Vrai. Et on sait même l'explicitier..

◦29◦

♥ On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$, et B est une matrice vérifiant $A.B = B.A$. Diagonalisez A (matrice diagonale D et matrice de passage P).

On va montrer que B est diagonalisable, avec trois méthodes.

Méthode 1 : montrez que B est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 5.b & a + b/2 \end{pmatrix}$ et diagonalisez alors B .

Méthode 2 : on pose $C = P^{-1}.B.P$; montrez : $D.C = C.D$; en remontant au niveau des coefficients, montrez que C est diagonale ; diagonalisez B .

Méthode 3 : montrez qu'il existe α et β vérifiant $B = \alpha.I_2 + \beta.A$; calculez alors $P^{-1}.B.P$; diagonalisez B .

Question : laquelle des trois méthodes préférez vous, et en fonction de votre réponse, demandez vous quelle Spé je vais vous recommander.

A a pour valeurs propres -2 et 7 , on choisit $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ on trouve $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ par exemple.

On résume : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$

Méthode 1 : en écrivant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

on a la condition nécessaire et suffisante $c = 5.b$ et $d = a + \frac{b}{2}$

(il y a quatre équations, mais plusieurs ne servent à rien et sont « en double »)

On calcule alors le polynôme caractéristique : $X^2 - (3.a + b/2).X + a^2 - 5.b + a.b/2$.

puis son discriminant : $\frac{81.b^2}{4}$

et ses valeurs propres : $a - 2.b$ et $a + \frac{5.b}{2}$

une matrice diagonale : $\begin{pmatrix} a - 2.b & 0 \\ 0 & a + 5.b/2 \end{pmatrix}$

et une matrice de passage $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

on a D et P , et P est inversible. C'est gagné.

Méthode 2 : on pose donc $C = P^{-1}.B.P$

On calcule $C.D = (P^{-1}.B.P).(P^{-1}.A.P) = P^{-1}.B.A.P$

$D.C = (P^{-1}.A.P).(P^{-1}.B.P) = P^{-1}.A.B.P$

L'hypothèse $A.B = B.A$ donne alors $C.D = D.C$.

On la regarde au niveau des coefficients : $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

On obtient $-2.\beta = 7.\beta$ par exemple. β et γ sont nuls.

Et alors ?

C est diagonale !

Et on a $B = P.C.P^{-1}$.

Donc B est diagonalisable en C avec matrice de passage P

Méthode 3 : la relation $A.B = B.A$ donne la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 5.b & a + b/2 \end{pmatrix}$

qu'on écrit $\frac{b}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} + (a-b) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et même $\beta.A + \alpha.I_2$

(et réciproquement, toute matrice de cette forme « commute » avec A).

Or, A est diagonalisable

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$ qu'on écrit $A = P.D.P^{-1}$

on somme $B = \alpha.P.D.P^{-1} + \beta.I_2$

$B = P.\alpha.D.P^{-1} + P.\beta.I_2.P^{-1}$

$B = P.(\alpha.D + \beta.I_2).P^{-1}$

et $\alpha.D + \beta.I_2$ est diagonale.

30

(extrait d'un sujet de l'École du Génie de l'Eau et de l'Environnement (si si, ne cherchez pas un jeu de mot, un acronyme caché, ça existe), datant de quand vous n'étiez pas encore nés)

$I \sim 0$) On définit $\varphi = t \mapsto \int_0^t e^{-u^2/2}.du$. Montrez que φ est impaire, strictement croissante. Montrez pour tout t plus grand que 1 :

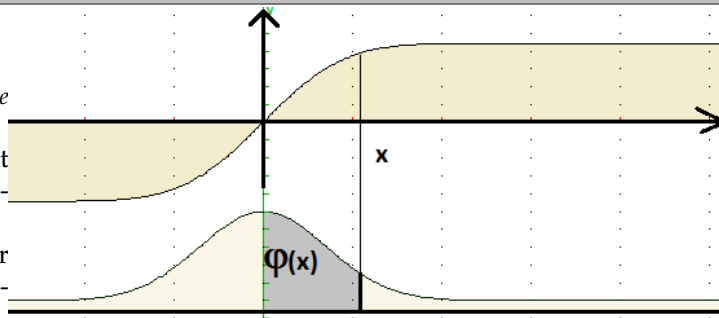
$\varphi(t) \leq \varphi(1) + \int_1^t e^{-u^2/2}.du$ et déduisez que φ admet une limite en $+\infty$ que l'on notera p (en fait, on pourrait montrer : $p = \sqrt{\pi}/2$ mais ça prend un sujet de Sup pour y parvenir^a).

a. j'en profite pour dire que $t \mapsto e^{t^2}$ n'a pas de primitive à l'aide des fonctions usuelles, et surtout pas un $t \mapsto \frac{e^{t^2}}{2.t}$ comme l'inventent de sombres crétiens qui oublient qu'il faudrait ensuite dériver aussi leur $1/t$!

Pour tout t (positif ou négatif), $\varphi(t)$ existe (intégrale d'une application continue sur un segment).

On se donne t et on compare $\varphi(t)$ et $\varphi(-t)$, soit par un argument géométrique, soit par un changement de variable.

Géométriquement, on a le même graphe sur $[-t, 0]$ que sur $[0, t]$, mais comme on prend l'intervalle en sens inverse...



Sinon, on pose $v = -u$: $\varphi(-t) = \int_{u=0}^{u=-t} e^{-u^2/2}.du = \int_{v=0}^{v=t} e^{-(-v)^2/2}.(-dv) = -\int_{v=0}^{v=t} e^{-v^2/2}.dv = -\varphi(t)$.

On dérive : $\varphi' = t \mapsto e^{-t^2/2}$. la dérivée est positive, l'application est croissante.

Qui a dérivé en $\varphi' = t \mapsto e^{-t^2/2} - e^{-0^2/2}$? Pourtant, en notant F une primitive de f , on peut exprimer $\int_0^t f(u).du = F(t) - F(0)$, et la constante $F(0)$ disparaît à la dérivation.

Sinon, on peut aussi se donner a plus petit que b et calculer par relation de Chasles :

$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_0^b e^{-u^2/2}.du - \int_0^a e^{-u^2/2}.du = \int_a^b e^{-u^2/2}.du$. C'est l'intégrale d'une application positive sur un segment pris dans le bon sens ; c' est positif.

C'est d'ailleurs cette démonstration qui est la bonne, car celle par dérivation fait appel à d'énormes théorèmes sans en avoir l'air (dérivation de l'intégrale, signe de la dérivée) dont vous n'avez démontré aucun en Terminale.

Pour t plus grand que 1, on découpe $\varphi(t)$ par relation de Chasles en $\int_0^1 e^{-u^2/2}.du + \int_1^t e^{-u^2/2}.du$. Or, pour les u entre 1 et t , on a $u^2 \geq u$ puis $-\frac{u^2}{2} \leq \frac{u}{2}$ et finalement $e^{-u^2/2} \leq e^{-u/2}$. On intègre cette relation de 1 à t (intervalle pris dans le sens croissant), on a la majoration indiquée.

Maintenant (et seulement maintenant), on calcule le membre de droite : $\varphi(t) \leq \varphi(1) + [-2.e^{-u/2}]_{u=1}^{u=t}$.

On majore donc $\varphi(t)$ par $\varphi(1) + 2e^{-1/2} - 2e^{-t/2}$ et même par $\varphi(1) + 2e^{-1/2}$.

De la sorte, le majorant est vraiment un nombre, qui ne dépend pas de t . Majorer par une quantité qui bouge avec t , ce n'est pas majorer.

L'application φ est croissante, majorée, elle admet une limite (il doit y avoir un nom comme "limite monotone", ou "théorème sur la convergence des applications croissantes majorées").

On notera que le théorème ne fournit pas la valeur de la limite, et que le majorant $\varphi(1) + 2.e^{-1/2}$ n'est pas le meilleur. ce n'est donc pas lui la limite.

L'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}.du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ est un classique du domaine des probabilités.

~0) On note E_a l'équation différentielle $y'_t = e^{yt} - t$ d'inconnue y fonction de t avec condition initiale $y_0 = a$. En posant $z_t = e^{-yt}$, résolvez (en utilisant φ) E_a .

L'équation $y'_t = e^{yt} - t$ n'est vraiment pas linéaire. Mais elle a la bonne idée d'être sous forme de Cauchy Lipschitz, ce qui garantit existence et unicité d'une solution maximale "sur un intervalle le plus long possible", une fois qu'on a fixé une condition initiale, comme le fait l'énoncé.

On pose donc $z_t = e^{-yt}$ dont l'existence et la dérivabilité est assurée par les théorèmes de composition.

On dérive : $z'_t = -y'_t.e^{-yt}$. y est solution de E_a si et seulement si (le facteur multiplicatif ne s'annulant jamais, on raisonne bien par équivalences) on a $z'_t = -(e^{yt} - t).e^{-yt}$ (plus une condition initiale).

On transforme en $z'_t = -1 + t.z_t$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus, avec un second membre.

On résout l'équation homogène $h'_t - t.h_t = 0$ et on trouve $S_h = \text{Vect}(t \mapsto e^{t^2/2})$.

• On cherche une solution particulière ?

• On utilise le facteur intégrant ?

• On fait une variation de la constante ?

Dans les deux cas, on aboutit à $\lambda'_t = -e^{-t^2/2}$.

On intègre $\lambda_t = -\int_0^t e^{-u^2/2}.du + \lambda_0$ (puisque la condition initiale est en 0).

On reporte : $z_t = \lambda_0.e^{-t^2/2} - \varphi(t).e^{-t^2/2}$.

On pouvait aussi proposer spontanément la solution particulière...

On détermine λ_0 par la condition initiale : $z_t = e^{-y_0}.e^{-t^2/2} - \varphi(t).e^{-t^2/2}$ puisque $\varphi(0)$ est nul.

On revient à la fonction cherchée $y : t \mapsto -\ln((e^{-y_0} - \varphi(t)).e^{-t^2/2})$ ou même $y = t \mapsto \frac{-t^2}{2} - \ln(e^{-y_0} - \varphi(t))$.

~0) Montrez qu'il existe une constante α (à préciser) telle que pour $a \leq \alpha$ la solution de E_a est définie sur \mathbb{R} , tandis que pour $a > \alpha$, la solution n'est définie que sur un intervalle $] -\infty, k_a[$ avec k_a dépendant de a .

Cette solution est valable tant que $e^{-y_0} - \varphi(t)$ est positif.

Il l'est en 0. Il l'est pour t négatif ($\varphi(t)$ est négatif, la somme devient positive).

Mais il y a un problème si $\varphi(t)$ atteint la valeur e^{-y_0} .

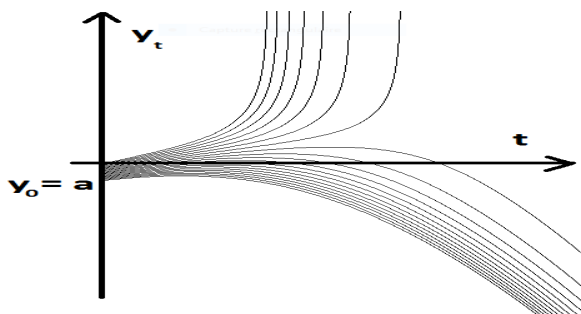
Est ce possible ? $\varphi(t)$ peut varier entre 0 et $\sqrt{\pi/2}$. Si e^{-y_0} est plus grand que $\sqrt{\pi/2}$, il n'y a donc pas de problème. Si e^{-y_0} est aussi entre 0 et $\sqrt{\pi/2}$, la valeur e^{-y_0} est atteinte une fois par φ . Et au delà de cette valeur, $e^{-y_0} - \varphi(t)$ devient négatif.

Le logarithme n'existe plus, la fonction n'est plus définie.

On résume :

$a = y_0 < -\ln(\sqrt{\pi/2})$	$a = y_0 = -\ln(\sqrt{\pi/2})$	$a = y_0 > -\ln(\sqrt{\pi/2})$
$e^{-y_0} > \sqrt{\pi/2}$	$e^{-y_0} = \sqrt{\pi/2}$	$e^{-y_0} < \sqrt{\pi/2}$
t décrit \mathbb{R}	t décrit \mathbb{R}	t décrit $] -\infty, \varphi^{-1}(e^{-y_0})$

Suivant la condition initiale, la solution dure plus ou moins longtemps.



I~0) On définit $f = t \mapsto e^{-t^2} \cdot \int_0^t e^{u^2}.du$ et $h = t \mapsto \frac{e^{t^2}}{2.t} - \int_0^t e^{u^2}.du$.

Donnez le tableau de variations de h sur $]0, +\infty[$, avec sa limite en 0 par valeur supérieure.

Pour le tableau de variations de h , on dérive

$$h' = \left(t \mapsto \frac{e^{t^2}}{2.t} - \int_0^t e^{u^2}.du \right)' = \left(t \mapsto \frac{2.t.e^{t^2}}{2.t} - \frac{e^{t^2}}{2.t^2} - e^{t^2} \right) = \left(t \mapsto -\frac{e^{t^2}}{2.t^2} \right).$$

L'application h décroît sur $]0, +\infty[$.

Si vous avez dérivé avec des $\frac{1}{(2.t)^2}$, c'est lourd comme pas permis. Pas faux, mais lourd lourd lourd. Où pourrez vous aller avec de tels sabots ?

En 0^+ (par valeur supérieure donc puisque le domaine est $]0, +\infty[$), l'intégrale tend vers 0 (continuité puisque dérivabilité). L'exponentielle tend vers 1. Son dénominateur tend vers 0. Le quotient tend vers l'infini positif.

On a même, pour être précis : $f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2.t}$.

~0) Montrez : $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour x positif.

Que vient faire la minoration $e^t \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ ici ? On n'en sait rien. Mais on la démontre par un argument de niveau Sup : la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} \cdot \int_{t=0}^1 (1-t)^2 \cdot e^{t.x} \cdot dt \quad (\text{les dérivées de l'exponentielle donnent l'exponentielle}).$$

Le reste intégrale est fait de termes tous positif. Il est positif.

Niveau Terminale, on étudie les variations de la différence $t \mapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, quitte à la dériver deux fois et à regarder les valeurs en 0.

~0) Démontrez qu'il existe un unique réel b de $]0, 1[$ vérifiant $h(b) = 0$.

On nous demande de regarder la valeur de f en 1. C'est $\frac{e}{2} - \int_0^1 e^{u^2} \cdot du$.

On exploite l'inégalité $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour x positif : ici : $e^{u^2} \geq 1 + u^2 + \frac{u^4}{2}$.

On intègre de 0 à 1 (sens positif) : $\int_0^1 e^{u^2} \cdot du \geq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10}$.

On estime : $\int_0^1 e^{u^2} \cdot du \geq \frac{43}{30} \geq \frac{e}{2}$ puisque on va estimer $\frac{e}{2}$ à $1,35$ à 10^{-2} près et $\frac{43}{30}$ à $1,43$ à 10^{-2} près aussi.

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure à l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$ entre 0 exclu et 1.

La stricte monotonie donne unicité de la solution.

Attention, il ne faut pas mélanger : l'existence vient de continuité et intervalle, tandis que l'unicité vient de la stricte monotonie.

I~0) Montrez que f est solution de l'équation différentielle linéaire $y'_t + 2.t.y_t = 1$.

On dérive f comme un produit : $f' = t \mapsto (-2.t) \cdot e^{-t^2} \cdot \int_0^t e^{u^2} \cdot du + e^{-t^2} \cdot e^{t^2}$.

On simplifie : $f'(t) = -2.t.f(t) + 1$. C'est l'équation $y'_t + 2.t.y_t = 1$.

~0) Résolvez cette équation différentielle sur \mathbb{R} .

L'équation différentielle a pour solutions homogènes $\text{Vect}(t \mapsto e^{-t^2})$.

Et pour solution particulière f .

Ses solutions sont donc de la forme $t \mapsto \lambda \cdot e^{-t^2} + f(t)$ avec λ réel à déterminer en fonction des conditions initiales.

I~0) Montrez pour tout t strictement positif : $0 \leq f(t) \leq e^{-t^2} \cdot \int_0^t e^{u^2} \cdot du$. Déduisez que f a une limite en $+\infty$ dont vous donnerez la valeur.

On se donne t positif. Dans $e^{-t^2} \cdot \int_0^t e^{u^2} \cdot du$, tout est positif, et l'intervalle est dans le bon sens.

De plus, pour tout u de $[0, t]$, on a $0 \leq u^2 \leq t.u$. On passe à l'exponentielle (croissante), on intègre (intervalle dans le bon sens) : $\int_0^t e^{u^2} \cdot du \leq \int_0^t e^{t.u} \cdot du$. On multiplie par e^{-t^2} (strictement positif).

Tout ce que m'importe de voir dans vos copies est ce que j'écris entre parenthèses : les arguments. Vous serez payés plus tard pour tout surveiller.

Profitons de la stricte positivité de t pour calculer explicitement l'intégrale (variable d'intégration u) : $\int_0^t e^{t.u} \cdot du =$

$$\left[\frac{e^{t.u}}{t} \right]_{u=0}^t = \frac{e^{t^2} - 1}{t}.$$

L'encadrement trouvé auparavant devient $0 \leq f(t) \leq e^{-t^2} \cdot \frac{e^{t^2} - 1}{t} = \frac{1 - e^{-t^2}}{t} \leq \frac{1}{t}$.

Le majorant tend vers 0 ; le minorant vaut 0.

Par théorème d'encadrement, $f(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

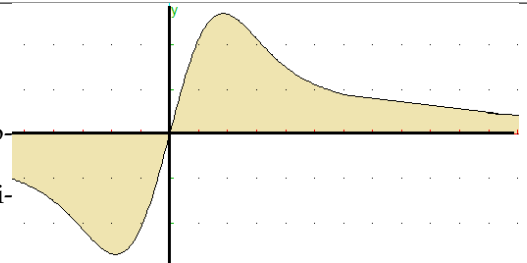
Faute de raisonnement : « on passe à la limite dans $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$ et on trouve $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$. Pour écrire ceci, il faut savoir que la limite existe. Or, rien ne dit qu'elle va exister. C'est le théorème d'encadrement qui donne l'existence de la limite et sa valeur du même coup.

Rappelons qu'on a $-1 \leq \sin(t) \leq 1$ pour tout t , mais qu'on ne peut pas en déduire $-1 \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \sin(t) \leq 1$, puisque le terme du milieu n'a pas de limite...

Donnez le tableau de variations de f sur \mathbb{R}^+ puis sur \mathbb{R} .

Peut-on simplifier $f(b)$? Sachant que $f'(b)$ est nul, on a $f(b) = 1 - 2 \cdot b \cdot f(b)$. On obtient guère mieux que $f(b) = 1/(2 \cdot b)$. Mais comme on ne connaît pas b ...

Et sur \mathbb{R} ? f est impaire ! En effet, l'intégrale $\int_{u=0}^{u=-t} e^{u^2} \cdot du$ est l'opposé de $\int_{v=0}^{v=t} e^{v^2} \cdot dv$ par changement de variable $v = -u$. On multiplie par le terme pair e^{-t^2} et on récupère $f(-t) = -f(t)$.



$I \sim 0$) On définit $A = t \mapsto 2 \cdot t \cdot e^{-t^2} \cdot \int_0^{t-1} e^{u^2} \cdot du$ et $B = t \mapsto 2 \cdot t \cdot e^{-t^2} \cdot \int_{t-1}^t e^{u^2} \cdot du$.

Montrez pour t plus grand que 1 : $A(t) \leq 2 \cdot t \cdot e^{-t^2} \cdot e^{(t-1)^2} \cdot (t-1)$.

L'existence de $A(t)$ et $B(t)$ ne pose aucun problème par continuité.

On prend t plus grand que 1 (pour que l'intervalle $[0, t-1]$ soit inclus dans \mathbb{R}^+) : $A(t) = 2 \cdot t \cdot e^{-t^2} \cdot \int_0^{t-1} e^{u^2} \cdot du$.

Sous le signe somme, on majore e^{u^2} par e^{t^2} (application croissante). L'intervalle est de longueur $t-1$ $\int_0^{t-1} e^{u^2} \cdot du \leq (t-1) \cdot e^{t^2}$.

Le multiplicateur est positif. On peut conclure.

~ 0) Déduisez la limite de $A(t)$ quand t tend vers l'infini.

Ensuite, $A(t)$ est positif. On encadre : $0 \leq A(t) \leq 2 \cdot t \cdot e^{-t^2 + (t-1)^2} \cdot (t-1) = 2 \cdot (t^2 - t) \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot e$.

Le polynôme n'y peut rien face à l'exponentielle. Par croissances comparées, le majorant tend vers 0.

Par encadrement, $A(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

~ 0) Montrez aussi : $\frac{1}{t} \cdot \int_{t-1}^t u \cdot e^{u^2} \cdot du \leq \int_{t-1}^t e^{u^2} \cdot du \leq \frac{1}{t-1} \cdot \int_{t-1}^t u \cdot e^{u^2} \cdot du$.

Pour $\frac{1}{t} \cdot \int_{t-1}^t u \cdot e^{u^2} \cdot du \leq \int_{t-1}^t e^{u^2} \cdot du \leq \frac{1}{t-1} \cdot \int_{t-1}^t u \cdot e^{u^2} \cdot du$, on écrit simplement $\int_{t-1}^t e^{u^2} \cdot du = \int_{t-1}^t \frac{1}{u} \cdot u \cdot e^{u^2} \cdot du$.

On encadre pour u entre $t-1$ et t (tous positifs) : $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{u} \leq \frac{1}{t-1}$.

On multiplie : $\frac{1}{t} \cdot u \cdot e^{u^2} \leq e^{u^2} \leq \frac{1}{t-1} \cdot u \cdot e^{u^2}$.

On intègre de $t-1$ à t (intervalle dans le sens croissant) : $\int_{t-1}^t \frac{1}{t} \cdot u \cdot e^{u^2} \cdot du \leq \int_{t-1}^t e^{u^2} \cdot du \leq \int_{t-1}^t \frac{1}{t-1} \cdot u \cdot e^{u^2} \cdot du$.

On sort les $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{t-1}$ des intégrales.

~0) D eduez que $\int_0^t e^{u^2} \cdot du$ est équivalent à $\frac{e^{t^2}}{2t}$ quand t tend vers l'infini.

Maintenant, les int egrals se calculent : $\frac{1}{t} \cdot \left[\frac{e^{u^2}}{2} \right]_{u=t-1}^t \leq \int_{t-1}^t e^{u^2} \cdot du \leq \frac{1}{t-1} \cdot \left[\frac{e^{u^2}}{2} \right]_{u=t-1}^t$.

On divise par $\frac{e^{t^2}}{2t}$ pour raconter l'histoire d'équivalent (le quotient doit tendre vers 1).

Ceci revient à multiplier par $2t \cdot e^{-t^2}$: $e^{-t^2} \cdot \left[\frac{e^{u^2}}{2} \right]_{u=t-1}^t \leq 2t \cdot e^{-t^2} \cdot \int_{t-1}^t e^{u^2} \cdot du \leq \frac{t}{t-1} \cdot e^{-t^2} \cdot \left[\frac{e^{u^2}}{2} \right]_{u=t-1}^t$.

Le terme $e^{-t^2} \cdot \left[\frac{e^{u^2}}{2} \right]_{u=t-1}^t$ vaut $1 - e^{-(t-1)^2 - t^2}$ et même $1 - e^{-2t+1}$.

Son exponentielle tend vers 0. Le minorant tend vers 1.

dans la majoration, c'est pareil : $\frac{t}{t-1}$ tend vers 1 de même que $e^{-t^2} \cdot \left[\frac{e^{u^2}}{2} \right]_{u=t-1}^t$.

Par encadrement, $2t \cdot e^{-t^2} \cdot \int_{t-1}^t e^{u^2} \cdot du$ tend vers 1 quand t tend vers l'infini.

On ajoute le terme $2t \cdot e^{-t^2} \cdot \int_0^{t-1} e^{u^2} \cdot du$ dont on a vu qu'il tendait vers 0.

Par somme et relation de Chasles, $2t \cdot e^{-t^2} \cdot \int_0^{t-1} e^{u^2} \cdot du + 2t \cdot e^{-t^2} \cdot \int_{t-1}^t e^{u^2} \cdot du$ tend vers 1.

C'est la définition de $\int_0^t e^{u^2} \cdot du \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{t^2}}{2t}$.

Pour le physicien et le math eam, la valeur moyenne de $u \mapsto e^{u^2}$ sur $[0, t]$ est «   peu près » $\frac{e^{t^2}}{2}$.

I~0) Soit l'équation différentielle $y'_t - (y_t)^2 - 2t \cdot y_t = 2$ d'inconnue y fonction de t strictement positif (not e (Q)). Vérifiez que $t \mapsto \frac{-1}{t}$ est solution.

Avec des notations simplifi es : $y_t = \frac{-1}{t}$ et $y'_t = \frac{1}{t^2}$.

On calcule alors $y'_t - (y_t)^2 - 2t \cdot y_t = \frac{1}{t^2} - \left(-\frac{1}{t} \right)^2 - 2t \cdot \frac{-1}{t} = 0 + 1$. C'est l'équation différentielle.

~0) En posant $y_t = \frac{-1}{t} + \frac{1}{z_t}$, résolvez (Q).

En posant $y_t = \frac{-1}{t} + \frac{1}{z_t}$... pourquoi pas. On dérive : $y'_t = \frac{1}{t^2} - \frac{z'_t}{(z_t)^2}$.

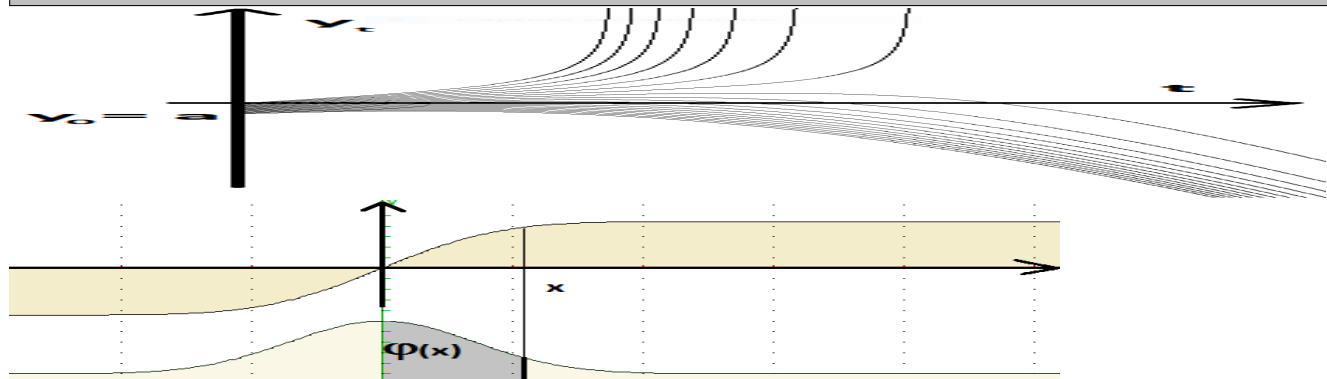
On reporte dans le premier membre de l'équation différentielle pour agir par équivalences :

$$y'_t - (y_t)^2 - 2t \cdot y_t = \frac{1}{t^2} - \frac{z'_t}{(z_t)^2} - \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{z_t} \right)^2 - 2t \cdot \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{z_t} \right) = 2 - \frac{t \cdot z'_t + 1 + \frac{2}{t} \cdot z_t + 2t \cdot z_t}{t \cdot (z_t)^2}$$

ceci est égal à 2 si et seulement si z est solution de $t \cdot z'_t + 1 + \frac{2}{t} \cdot z_t + 2t \cdot z_t = 0$.

Remarque : on a traité un sujet de problème. Il y a des méthodes jolies. Mais finalement, comprend on ce qu'on a fait ?

~0) Existe-t-il des solutions de (Q) qui se prolongent en 0 par continuité à droite et à gauche.



◦31◦

* ♡ Montrez que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
(injective : deux éléments différents ont des images différentes).

On suppose f et g injective. Deux éléments différents ont des images différentes.

On montre que $g \circ f$ l'est aussi.

On prend a différent de b et on écrit des implications, même si ce n'est pas cohérent de les enchaîner :

$$\begin{aligned} a \neq b &\Rightarrow f(a) \neq f(b) && \text{car } f \text{ injective} \\ &\Rightarrow g(f(a)) \neq g(f(b)) && \text{car } g \text{ injective} \end{aligned}$$

◦32◦

Montrez que ni $x \mapsto x^2$ ni $x \mapsto (x+1)^2$ n'est injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , tandis que $x \mapsto (x^2, (x+1)^2)$ est injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 .

1 et -1 ont la même image par $x \mapsto x^2$. Défaut d'injectivité.

0 et -2 ont la même image par $x \mapsto (x+1)^2$. Défaut d'injectivité.

Mais ensuite, à un réel, on associe un couple : $1 \mapsto (1, 4)$

$$-1 \mapsto (1, 0)$$

$$0 \mapsto (0, 1)$$

$$-2 \mapsto (4, 1)$$

Deux réels différents vont avoir des images différentes.

Par contraposée, prenons a et b ayant la même image (objectif : $a = b$).

On traduit : $(a^2, (a+1)^2) = (b^2, (b+1)^2)$.

On sépare : $a^2 = b^2$ et $(a+1)^2 = (b+1)^2$.

$$a = b \quad a + 1 = b + 1$$

On obtient : $\text{ou } a = -b \quad \text{et } a + 1 = b - 1$.

$$a = -b \quad a + 1 = -b - 1$$

Par distributivité, ceci donne quatre possibilités :

$(a = b \quad \text{et} \quad a + 1 = b + 1)$	<i>solution 1</i>
$\text{ou } (a = b \quad \text{et} \quad a + 1 = -b - 1)$	<i>solution 2</i>
$\text{ou } (a = -b \quad \text{et} \quad a + 1 = b + 1)$	<i>solution 3</i>
$\text{ou } (a = -b \quad \text{et} \quad a + 1 = -b - 1)$	<i>solution 4</i>

On résout à chaque fois :

$(a = b)$	<i>solution 1</i>
$\text{ou } (a = b = -1)$	<i>solution 2</i>
$\text{ou } (a = b = 0)$	<i>solution 3</i>
$\text{ou } \text{impossible}$	<i>solution 4</i>

Dans tous les cas qui survivent : $a = b$.

◦33◦

♡ Montrez que $x \mapsto \frac{a.x + b}{c.x + d}$ est injective sur son domaine de définition, sauf si $a.d$ est égal à $b.c$.

On se donne x et y et on suppose $\frac{a.x + b}{c.x + d} = \frac{a.y + b}{c.y + d}$.

Par produit en croix : $(a.x + b).(c.y + d) = (a.y + b).(c.x + d)$.

On développe, les $b.d$ et les $a.c.x.y$ s'en vont.

Il reste en simplifiant $(a.b - d.c).(x - y) = 0$.

Par intégrité, si $a.d - b.c$ est non nul : $x = y$.

Si non, on a une application constante comme $x \mapsto \frac{4.x + 6}{2.x + 3}$ (de domaine $] -\infty, -2/3[\cup] -2/3, +\infty[$).

Remarque :
 Le passage par « la dérivée est positive » n'est pas une preuve.
 La positivité de la dérivée ne donne que la croissance par intervalle.
 L'application est strictement croissante (donc injective) sur $] -\infty, -d/c[$,
 puis que $] -d/c, +\infty[$.
 Mais qui dit qu'elle ne repasse pas aux mêmes endroits d'un intervalle à l'autre ?

◦34◦

Montrez que $x \mapsto x^2 + \pi.x + 2$ est injective de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} (on pourra utiliser sans preuve que π est irrationnel)..

On se donne a et b rationnels.

On suppose $f(a) = f(b)$ (objectif : $a = b$).

On obtient $(a - b).(a + b + \pi) = 0$ après calculs.

Le terme $a + b + \pi$ ne peut être nul (si non π serait le rationnel $-a - b$).

Par intégrité, $a - b$ est nul.

On a utilisé ici la forme « $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ ».
Elle est bien équivalente à « $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ ».

◦35◦

Montrez que l'application $n \mapsto [n]$ n'est ni injective ni continue sur \mathbb{R}^+ .
Montrez que l'application $n \mapsto (n - [n]).([n] + 1 - n)$ est continue mais non injective sur \mathbb{R}^+ .
Montrez $n \mapsto n.(n - [n]).([n] + 1 - n) + n^2$ est continue et injective sur \mathbb{R}^+ .

La fonction partie entière prend plusieurs fois la même valeur : $[0] = [0, 1]$. Ceci est un contre-exemple pour l'injectivité.

Elle est continue en bien des points, mais elle n'est pas continue en 1 par exemple.

On a en effet $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} [x] = 0 \neq [1] = 1$ (égale quand même à $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} [x]$).

On dira que la partie entière est une application càdlàg (en tout point elle est continue à droite et admet une limite à gauche, éventuellement différente de sa limite à gauche).

C'est quoi ce $n \mapsto (n - [n]).([n] + 1 - n)$?

Déjà, ce qui est trompeur, c'est que la variable réelle s'appelle n (nom qu'on réserve plutôt aux entiers).

Si le réel n s'écrit $n = p + d$ avec p entier et d entre 0 et 1, on a alors

$$f(p + d) = (p + d - [p + d]).([p + d] + 1 - p - d)$$

$$f(p + d) = (p + d - p).(p + 1 - p - d)$$

$$f(p + d) = d.(1 - d)$$

(pourquoi pas).

Par exemple : $f(1, 1) = 0, 1 \times 0, 9 = 0, 09$

$f(3, 1) = 0, 1 \times 0, 9 = 0, 09$

$f(2, 4) = 0, 4 \times 0, 6 = 0, 24$

et ainsi de suite.

La disparition de p nous incite à dire que cette application est périodique, donc non injective.

D'ailleurs, $f(1, 1) = f(3, 1)$ est un contre-exemple.

Si vous avez pris le même que moi, c'est vraiment le hasard.

En général, les élèves se contentent de dire « périodique donc non injective ». Mais un vrai contre-exemple est toujours attendu par le mathématicien, car il est rigoureux.

Cette application est continue en tout point, alors même qu'elle contient une partie entière.

Plaçons nous en un point p entier. A droite, on a $f(x) = d.(1 - d)$ avec $x = p + d$ et d qui va tendre vers 0.

$f(x)$ tend vers 0.

A gauche, on a $f(x) = f(p - 1 + d)$ avec d qui va tendre vers 1 par valeur inférieure.

On a quand même $f(x) = d.(1 - d)$ et $f(x)$ tend vers 0.

La limite à droite est égale à la limite à gauche, et elles coïncident avec la valeur de la fonction, elle est continue.

En un point x non entier, l'application est localement définie par une formule simple et continue. L'application est continue.

Le seul problème était en effet aux points de raccordement.

Et à présent $n \mapsto n.(n - [n]).([n] + 1 - n) + n^2$.

gardons nos notations $n = p + d$ avec p entier et d dans $[0, 1[$.

On a alors (en l'appelant encore f) : $f(x) = f(p + d) = (p + d).d.(1 - d) + (p + d)^2$.

On développe et il reste un truc laid.

Mais il suffit de regarder intervalle par intervalle.

Sur $[p, p + 1[$, on a $x \mapsto x.(x - p).(p + 1 - x) + x^2$.

On constate que cette application est strictement croissante sur $[p, p + 1[$.

En p , elle vaut p^2 .

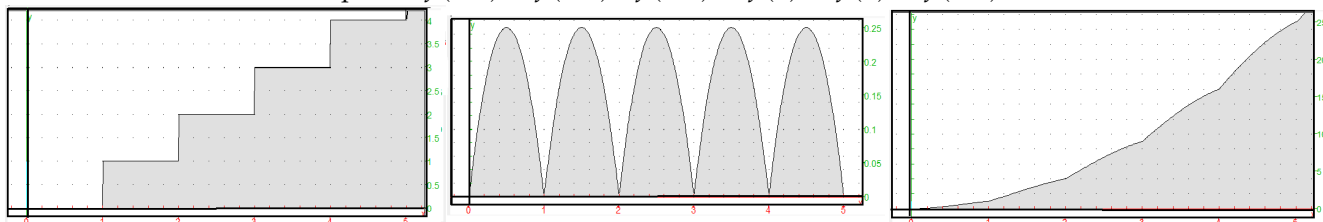
En $p + 1$ à gauche, elle tend vers $(p + 1)^2$.

La continuité sur chaque $]p, p + 1[$ est acquise.

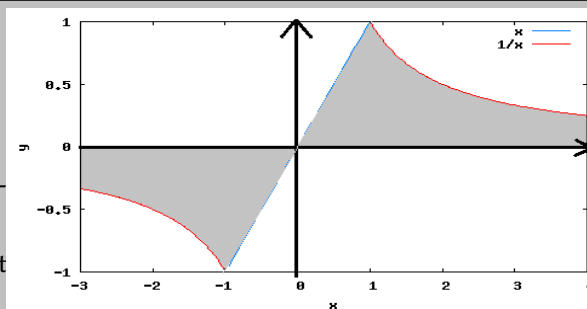
La continuité en $p + 1$ est acquise aussi : limite à gauche $(p + 1)^2$ valeur et limite à droite $(p + 1)^2$ aussi.

Par raccordement en chaque entier, la croissante « sur chaque intervalle » se transmet à croissante sur tout $\cup_p]p, p + 1[$ qui donne \mathbb{R}^+ .

Pour s'en convaincre en comparant $f(3,5)$ et $f(5,7)$: $f(3,5) < f(4) < f(5) < f(5,7)$.



♡ On pose $f = x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1/x & \text{sinon} \end{cases}$. Représentez graphiquement.
 f est-elle injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ? Déterminez $f \circ f$. Est-elle injective ?



◦36◦

f est définie partout mais pas injective : $f(2) = f(1/2)$.
 $f \circ f$ ne peut pas être injective.

On montre pour tout x $f(f(x)) = f(x)$.

En effet, $f(f(x))$ est de la forme $f(y)$ avec $y = f(x)$. Et ce y est entre -1 et 1 (graphe ou tableau de variations). On a donc $f(f(x)) = f(y) = y = f(x)$.

Un exemple : $f(f(2)) = f(1/2) = 1/2$.

Et bien sûr, $f \circ f$ n'est pas injective non plus.

◦37◦

Montrez que $n \mapsto n + (-1)^n$ est une bijection de \mathbb{N} .

On prend un entier naturel, et on associe un nouvel entier naturel ($n + (-1)^n$ est positif, même pour « n petit »).

Pour tout entier naturel b il existe un unique entier a vérifiant $a + (-1)^a = b$.

Raisonnons par analyse, pour trouver la seule solution possible a .

Après, on fera la synthèse et on montrera que c'est bien la solution.

Analyse (condition nécessaire)

Il faut bien choisir a , pour avoir $a + 1 = b$ ou $a - 1 = b$.

On constate que a est de parité opposée à celle de b (ajouter ou soustraire 1, ça vous change la congruence modulo 2).

On disjoncte les cas.

b pair. Alors a est impair. Mais $(-1)^a$ vaut donc -1 . L'équation devient $a - 1 = b$ soit $a = b + 1$.

b impair. Alors a est pair. Mais $(-1)^a$ vaut donc 1 . L'équation devient $a + 1 = b$ soit $a = b - 1$.

On synthétise $a = f^{-1}(b) = b + (-1)^b$.

Synthèse.

On vérifie alors $f(a) = b$. Par disjonction de cas.

En fait, c'est un peu con, mais $f^{-1} = f$.

Et voici f :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	2.p	2.p+1	...
$f(a)$	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8		2.p+1	2.p	

On échange les éléments deux à deux. Normal que l'opération inverse soit « on recommence ».

◦38◦

Un élève affirme pour les applications dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrez que c'est faux :

$\left. \begin{array}{l} f \text{ injective} \\ g \text{ injective} \end{array} \right\} \Rightarrow f + g \text{ injective}$	$f \text{ injective} \Rightarrow f' \text{ injective}$	$\left. \begin{array}{l} f \text{ injective} \\ g \text{ injective} \end{array} \right\} \Leftrightarrow g \circ f \text{ bijective}$
$\left. \begin{array}{l} f \text{ injective} \\ g \text{ injective} \end{array} \right\} \Rightarrow f \times g \text{ injective}$	$f' \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective}$	

En général, il suffit de donner le nom de l'élève pour prouver que c'est faux, non ?

On va quand même préférer donner des contre-exemple. Les applications vérifieront la première partie (avant l'implication) mais pas la seconde (après l'implication).

assertion	contre-exemple
$\left. \begin{array}{l} f \text{ injective} \\ g \text{ injective} \end{array} \right\} \Rightarrow f + g \text{ injective}$	$f = x \mapsto x$ $g = x \mapsto -x$
vérification	L'application identité est injective ainsi que ses multiples non nuls. Une application constante ne l'est plus.
assertion	contre-exemple
$f \text{ injective} \Rightarrow f' \text{ injective}$	$f = x \mapsto x$
vérification	L'application identité est injective. Une application constante ne l'est plus.
assertion	contre-exemple
$\left. \begin{array}{l} f \text{ injective} \\ g \text{ injective} \end{array} \right\} \Leftrightarrow g \circ f \text{ bijective}$	$f = x \mapsto x$ de $[-1, 1]$ dans lui même. $g = x \mapsto x$ de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R}
vérification	Bijective n'a pas de sens si on ne dit pas de quoi dans quoi.

assertion	contre-exemple
$\left. \begin{array}{l} f \text{ injective} \\ g \text{ injective} \end{array} \right\} \Rightarrow f \times g \text{ injective}$	$f = x \mapsto x$ $g = x \mapsto x$
vérification	L'application identité est injective. $x \mapsto x^2$ ne l'est plus (même valeur en 1 et -1).
assertion	contre-exemple
$f' \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective}$	$f = x \mapsto x^2$
vérification	Toujours la parabole et Id . Un jour, Jésus dit à ses disciples « $a.x^2 + b.x + c$ ». C'était une parabole.

◦39◦

On définit $f = x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \text{ rationnel} \\ \sqrt{2} - x & \text{si } x \text{ irrationnel} \end{cases}$. Un élève affirme après calcul : $f \circ f = Id$ (pour x rationnel, c'est évident, et pour x irrationnel, c'est $\sqrt{2} - (\sqrt{2} - x)$). Il en déduit que f est bijective (de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).
Montrez que f n'est pas injective, ni surjective, pourtant.

L'erreur de l'élève : si x est rationnel, on a bien $x \mapsto x \mapsto x$.

Mais pour x irrationnel, la première étape est bien $x \mapsto \sqrt{2} - x$.

Mais la question est ensuite $\sqrt{2} - x$ est il rationnel.

Et la réponse est « ça dépend ».

$$\sqrt{2} \mapsto 0 \mapsto 0$$

$$\sqrt{3} \mapsto \sqrt{2} - \sqrt{3} \mapsto \sqrt{2} - (\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{3}.$$

En fait on a déjà un défaut d'injectivité : $\begin{array}{l} 0 \rightarrow 0 \\ \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{2} \end{array}$ car rationnel / car irrationnel. Le réel 0 a deux antécédents (au moins).

On a un défaut d'injectivité : $\sqrt{2}$ n'a pas d'antécédent.

En effet, si on écrit $f(x) = \sqrt{2}$, on a deux (im)possibilités :

x rationnel	et $x = \sqrt{2}$	incohérent
x irrationnel	et $\sqrt{2} - x = \sqrt{2}$	incohérent

◦40◦

♥ Soit f de E dans E . Montrez que f est injective si et seulement si $f \circ f$ est injective.

Sens direct. Si f est injective, alors par composition, $f \circ f$ l'est aussi.

Réciproque. Si f n'est pas injective, il existe a et b avec a différent de b vérifiant $f(a) = f(b)$.

On compose : $f(f(a)) = f(f(b))$. Ceci montre par contre-exemple que $f \circ f$ n'est pas injective non plus.

On peut aussi utiliser $g \circ f$ injective implique f injective dans un cas particulier ici.

◦41◦

Montrez que l'application $n \mapsto \cos(n + \sqrt{2})$ est injective sur \mathbb{Q} . Montrez que $\theta \mapsto \cos(\theta)$ n'est pas injective sur \mathbb{Q} .

On se donne a et b (rationnels) et on suppose $\cos(a + \sqrt{2}) = \cos(b + \sqrt{2})$.

Les cas d'égalité des cosinus donnent $\exists k \in \mathbb{Z}, a + \sqrt{2} = b + \sqrt{2} + k\pi$ ou $\exists k \in \mathbb{Z}, a + \sqrt{2} = -b - \sqrt{2} + k\pi$.

Le premier cas donne si k est non nul $\pi = \frac{a-b}{k} \in \mathbb{Q}$; impossible, la seule solution est $k = 0$, et donc $a = b$.

Le second cas donne $\exists k \in \mathbb{Z}, a + \sqrt{2} = -b - \sqrt{2} + k\pi$ soit $a + b = k\pi - 2\sqrt{2}$. Que k soit nul ou non, le second membre est irrationnel. C'est donc impossible.

On a éliminé les fausses pistes : $a = b$ est la seule porte de sortie.

Le défaut d'injectivité de \cos sur \mathbb{Q} repose sur la parité, avec un contre-exemple tel que $\cos(1) = \cos(-1)$.

◦42◦

L'application *trinome* \mapsto (nombre de filles, nombre de lunettes) est elle injective de l'ensemble des trinômes de MPSI2 vers \mathbb{N}^2 ? Et l'application *trinome* \mapsto (nombre de filles, nombre d'élèves dont le nom commence par B) ?

La réponse dépend vraiment des années.

◦43◦

Le produit de deux applications injectives de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est injective : la preuve

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a \neq b) \Rightarrow \begin{pmatrix} f(a) \neq f(b) \\ \text{et} \\ g(a) \neq g(b) \end{pmatrix} \Rightarrow (f(a).g(a) \neq f(b).g(b)).$$

Le produit de deux applications surjectives de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ est surjective. La preuve :

je prends b dans \mathbb{R}^+ , alors par surjectivité de $f : \exists a \in \mathbb{R}, f(a) = \sqrt{b}$ et par surjectivité de $g : \exists a \in \mathbb{R}, g(a) = \sqrt{b}$.

On multiplie : $f(a).g(a) = \sqrt{b}.\sqrt{b} = b$.

Où sont les erreurs ?

C'est quoi cette idée de multiplier membre à membre des non égalités ?

On a certes $2 \neq 12$ et $18 \neq 3$ mais en multipliant membre à membre...

J'ai encore plus rigolo : $0 \neq \sqrt{2}.\pi$ et $e^{\sqrt{184}} \neq 0$. Multiplions membre à membre...

Sinon, certes ont $\exists a \in \mathbb{R}, f(a) = \sqrt{b}$ et $\exists a' \in \mathbb{R}, g(a') = \sqrt{b}$.

Mais rien ne permet de prendre le même a !

Rappelons que Id et Id sont bijectives de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

Mais le produit $x \mapsto x^2$ n'est ni injectif (deux réels opposés ont la même image)

ni surjectif (aucun réel négatif n'est atteint)

◦44◦

♥ L'application $n \mapsto (n \bmod 5, n \bmod 13)$ est elle injective sur $\text{range}(64)$?

L'application $n \mapsto (n \bmod 11, n \bmod 13)$ est elle injective sur $\text{range}(143)$?

La première question demande : peut on trouver a et b dans $\text{range}(64)$ vérifiant $(a\%5, a\%13) = (b\%5, b\%13)$.

Ceci vient à demander que $b - a$ soit à la fois multiple de 5 et de 13.

$b - a$ est multiple de 65 (car 5 et 13 sont premiers entre eux).

Mais dans $\text{range}(65)$, la différence de deux éléments ne peut pas atteindre 65 ni même ses multiples.

Sauf 0.

On aboutit à $a = b$.

De même $(a \% 11, a \% 13) = (b \% 11, b \% 13)$ donne $a = b$ [11] et $a = b$ [13] (je reprends le formalisme matheux et pas Python).

$b - a$ est multiple de 11 et de 13. C'est un multiple de 143.

Mais si on a pris $0 \leq a \leq 142$ et $0 \leq b \leq 142$ (donc $-142 \leq -a \leq 0$), on a $-142 \leq b - a \leq 142$.

Le seul multiple de 143 disponible est 0.

$f(a) = f(b)$ implique $a = b$.

◦45◦

L'application $x \mapsto x^x - x$ est elle injective (sur \mathbb{N} ou sur \mathbb{R}^+ ? oui, c'est à la question).

Sur \mathbb{N} , on calcule les valeurs :

n	0	1	2	3	4	5	et ainsi de suite
n^n	1	1	4	27	256	beaucoup	
$n^n - n$	1	0	2	24	252		

Les premières valeurs sont toutes distinctes.

Et ensuite, elle croît strictement.

Elle ne reprendra jamais les mêmes valeurs.

Elle est injective.

J'espère que vous avez calculé des valeurs au lieu de vous lancer dans la résolution de $a^a - a = b^b - b$ qui est quasiment impossible.

La définition du cours directement appliquée, c'est bien, mais quand ça semble trop lourd, on essaye des trucs à la main.

On remplace les équations « $f(a) = f(b)$ » par des raisonnements « peut on retrouver la même valeur ».

C'est en ce sens que les maths sont peut être plus difficiles que les matières où le chemin est balisé par des théorèmes et principes à appliquer qui conduisent toujours au résultat.

Dérivons la.

$$(x \mapsto e^{x \cdot \ln(x)} - x)' = (x \mapsto (1 + \ln(x)) \cdot e^{x \cdot \ln(x)} - 1)$$

C'est moche.

Mais en tout cas, elle est dérivable et continue.

En 0 elle commence par la valeur 1.

Entre 1 et 2 elle repasse de 0 à 2. Par théorème des valeurs intermédiaires, elle repassera par la valeur 1.

On a donc un a de $[1, 2]$ vérifiant $f(a) = 1 = f(0)$. Défaut d'injectivité sur \mathbb{R} .

Là encore, du raisonnement, et pas de calcul.

La meilleure chose à faire était de déjà représenter le graphe sur une calculatrice.

Avouez que la langue française est ambiguë : Les poules du couvent couvent. Il est de l'Est. Nous portions les portions de fils de fer à leurs fils. Les gens au caractère violent violent leur promesses. Dans cet affluent, les poissons affluent. Peut on se fier à un homme fier ?

◦46◦

- ◊ - a - Combien existe-t-il d'applications surjectives de MPSI2 dans \mathbb{N} ?
- b - Combien existe-t-il d'applications surjectives de MPSI2 dans $\{MPSI2\}$?
- c - Combien existe-t-il d'applications surjectives de MPSI2 dans \emptyset ?
- d - Combien existe-t-il d'applications surjectives de MPSI2 dans MPSI2 ?
- e - Combien existe-t-il d'applications surjectives de $MPSI2 \cup \{Sucr\}$ dans MPSI2 ?
- f - Combien existe-t-il d'applications surjectives de \emptyset dans \emptyset ?

◦47◦

Justifiez qu'il y a 1022 applications surjectives de l'ensemble $range(10)$ vers l'ensemble $range(2)$.

L'ensemble de départ a 10 éléments, de 0 à 9.

Et à l'arrivée, on a juste 0 et 1.

Déjà, il y a 2^{10} applications. Deux choix pour l'image de 0, fois deux choix pour l'image de 1 et ainsi de suite.

Et presque toutes ces applications réussissent à être surjectives (c'est à dire à tout atteindre).

D'ailleurs, seulement deux applications échoueront à être surjective.

L'application constante qui envoie tout le monde sur 0 et l'application constante qui envoie tout le monde sur 1.

Il y a donc par élimination $(2^{10} - 2)$ surjections.

◦48◦

Montrez que toute matrice réelle symétrique de taille 2 a deux valeurs propres distinctes, sauf si elle est déjà diagonale. Déduisez qu'elle est toujours diagonalisable.

Construisez une matrice complexe de taille 2 non diagonalisable (choisissez la nilpotente, vérifiant $S^2 = 0_2 \neq S$).

On prend M de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et on calcule sa trace, son déterminant, son polynôme caractéristique et même le discriminant de celui-ci.

$a+c$ $a.c - b^2$ $X^2 - (a+c).X + (a.c - b^2)$ $\Delta = (a+c)^2 - 4.(a.c - b^2) = (a-c)^2 + 4.b^2$

Le discriminant est toujours positif, on a deux valeurs propres réelles (éventuellement double).

Si a est différent de c ou b non nul, alors Δ est strictement positif. On a alors deux valeurs propres distinctes :

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= \frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{(a-c)^2 + 4.b^2}}{2} \\ \lambda_- &= \frac{a+c}{2} - \frac{\sqrt{(a-c)^2 + 4.b^2}}{2} \end{aligned}$$

Chaque système $M.X = \lambda_{\pm}.X$ est dégénéré et admet des solutions non nulles.

On peut donc créer une matrice de taille 2 sur 2 formée des deux colonnes.

La matrice de passage ainsi construite est inversible, et on la note P .

Si a est égal à c et b nul, on a deux fois la même valeur propre. La matrice risque de ne pas être diagonalisable. Mais en fait elle est déjà diagonale. Donc diagonalisable, via $P = I_2$.

De taille 2 non diagonalisable, c'est facile : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si elle était diagonalisable, elle serait semblable à $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $Tr(D) = Tr(M)$ et $\det(D) = \det(M)$. Ceci forcerait $a = b$.

Mais on ne pourrait trouver P inversible vérifiant $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P. \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} .P^{-1}$.

Mais si on exige « symétrique » ? $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ pour les mêmes raisons.

Elle devrait figurer dans tous les livres pour les concours.

Vous aurez en effet l'an prochain un théorème : « toute matrice réelle symétrique se diagonalise. »

Et trop souvent on entend les élèves se contenter de dire

« tout matrice symétrique se diagonalise ».

Trouvez l'erreur.

◦49◦

La matrice $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$ a pour vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et admet pour valeur propre -2 .
Diagonalisez la.

On traduit qu'un premier vecteur est propre : $\begin{pmatrix} 7 & -2 & a \\ b & -4 & -10 \\ c & d & e \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour un réel α .

La première ligne donne la valeur de α : 3 et ceci permet d'obtenir un coefficient de la seconde et une relation sur ceux de la troisième :

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & a \\ 14 & -4 & -10 \\ -2.d & d & e \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On passe à l'autre vecteur : $\begin{pmatrix} 7 & -2 & a \\ 14 & -4 & -10 \\ -2.d & d & e \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cette fois, β est nul (deuxième ligne) :

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 \\ 14 & -4 & -10 \\ -2.d & d & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on progresse.

On a deux valeurs propres, il en manque une, et on nous la donne ! La trace est la somme des trois valeurs propres (M et D ont la même trace) : $7 - 4 + d = 3 + 0 - 2$. d vaut -2 .

On cherche un vecteur propre de valeur propre -2 : $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 \\ 14 & -4 & -10 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On trouve le dernier vecteur propre (ou un de ses multiples), et on termine :

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 \\ 14 & -4 & -10 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On a donc une matrice P inversible (de déterminant -1 , merci !) :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

◦50◦

♥ On pose : $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix}$. Montrez que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de A (valeurs propres ?).

Donnez la troisième valeur propre, et trouvez un vecteur propre associé.

Diagonalisez A . Diagonalisez A^2 . Diagonalisez A^{-1} .

Diagonalisez ${}^t A$.

Pour « vecteur propre », il suffit de montrer que U et $A.U$ sont colinéaires.

Et le coefficient λ dans $A.U = \lambda.U$ sera la valeur propre associée.

Ici : $\begin{pmatrix} 8 & -5 & -12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: la valeur propre vaut 3

$\begin{pmatrix} 8 & -5 & -12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: la valeur propre vaut -4

Il est à noter que la valeur propre a le droit d'être nulle. C'est au vecteur qu'on interdit la chose. Pour qu'on puisse le mettre en colonne de la matrice P inversible.

λ sera sur la diagonale de D , et aura le droit d'être nulle.

Pour la troisième valeur propre, soyons matheux, et varions les points de vue.

Quand je dis soyons matheux, c'est évitons le truc « j'ai appris par cœur racines du polynôme caractéristique, donc je calcule celui ci, j'en cherche les trois racines... ». En étant déjà un peu plus intelligent, on se dit qu'on en connaît déjà deux racines, non ?

Mais le plus simple est de dire que les trois valeurs propres formeront la diagonale de D .

Et que D aura même trace que M .

La somme des trois valeurs propres vaut $8 + 3 - 10$.

deux valent déjà 3 et -4 .

La troisième vaut donc 2.

Ensuite, on cherche U vérifiant $M.U = 2.U$.

Là, c'est juste un système à résoudre, dont on sait qu'il a des solutions non triviales.

$$\begin{pmatrix} 8 & -5 & -12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On met les valeurs propres dans l'ordre qu'on veut dans D , et on complète les colonnes de D avec les vecteurs propres trouvés, dans l'ordre des valeurs propres :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & -5 & -12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour diagonaliser A^2 , on ne calcule pas A^2 , on réfléchit.

On a prouvé $AP.D.P^{-1}$ et on déduit $A^2 = P.D^2.P^{-1}$.

D^2 est diagonale de termes diagonaux 3^2 , $(-4)^2$ et 2^2 .
Et la matrice de passage est la même.

D'ailleurs, les vecteurs propres sont les mêmes :

$$M.U = \lambda.U \text{ entraîne } M^2.U = M.(M.U) = M.(\lambda.U) = \lambda.M.U = \lambda^2.U.$$

Plus généralement, A^n a pour matrice diagonale D^n et pour matrice de passage P .

L'exposant peut même être -1 : $M^{-1} = (P.D.P^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}.D^{-1}.P^{-1} = P.D^{-1}.P^{-1}$.

C'est bien sûr D^{-1} de valeurs propres $\frac{1}{\lambda_i}$ qui sert.

Et surtout, c'est la matrice de passage P .

Les vecteurs colonne n'ont pas changé. $M.U = \lambda.U$ donne $M^{-1}.U = \frac{1}{\lambda}.U$.

En revanche, pour M^t on a cette fois ${}^tM = {}^t.P^{-1}.D.{}^tP$ car ${}^tD = D$.

On garde les mêmes valeurs propres. Mais les vecteurs propres ont changé, et sont peut clairs : les lignes de P^{-1} ...
Pourquoi pas.

◦51◦

♥ Calculez $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2015}$ (sans diagonaliser). On pose : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$. Calculez J^2 et J^4 (on rappelle :

$$j = e^{2.i.\pi/3}).$$

Écrivez la matrice de taille 4 dont le terme de ligne n et colonne k (en indexation Pythonienne de 0 à 3) est $j^{n.k}$ (i est le célèbre complexe de carré -1). Écrivez A , calculez sa trace. Calculez A^2 et A^4 . Calculez A^{2015} .

♠ Généralisez en dimension n .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puis par récurrence immédiate : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2.n} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = 2^n.I_2$.

Par produit : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2015} = 2^{1007} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ en utilisant } 1 + j + j^2 = 0.$$

$$\text{Ensuite } J^4 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \text{ puis } A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^4 = 16.I_4.$$

Je ne donne pas ici la généralisation.

En effet, vous pouvez la formuler (proprement, si possible).

Mais de là à la prouver.

Et on rappelle qu'une généralisation sans preuve, c'est de la biologie (et encore), mais pas des maths.

En maths, tout ce qui est affirmé sans preuve est à mettre au panier (et dans un coin de votre esprit pour y réfléchir quand même).