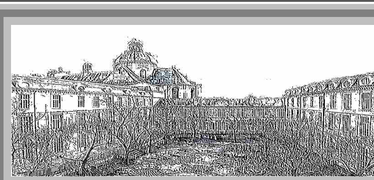
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 11 décembre
M.P.S.I.2



2023 2024

TD12

◦0◦ L'application f associe à un entier naturel n la somme des carrés de ses chiffres en base 10.
f est elle injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? f est elle surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? f est elle croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$?

◦1◦ Débrouillez vous pour que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ne soit pas injective de $\mathbb{R}^2$ dans lui même.
Est elle alors surjective ? Si non, déterminez son ensemble image (droite d'équation à préciser).

Débrouillez vous pour que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aille de $\mathbb{Z}^2$ dans lui même (combiend e choix possibles ?).

Débrouillez vous pour que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aille de $\mathbb{Z}^2$ dans lui même et soit bijective.

◦2◦ L'application $(a,\ b) \longmapsto (a+b,\ a^2+b^2,\ 1_{a<b})$ est elle injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$?
Est elle surjective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \{0,\ 1\}$?
Rappel : $1_{a<b} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & si & a<b \\ 0 & sinon & \end{array} \right|$.

◦3◦ Vrai ou faux : si f est injective de $]-\infty,\ 0]$ dans $\mathbb{R}$ et de $]0,\ +\infty[$, alors elle est injective de $]-\infty,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$

◦4◦ ♡ On pose $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ et $B = \{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$. Montrez qu'il y a $6 \times 5 \times 4 \times 3$ applications injectives de A dans B (et combien de B dans A ?).
Montrez qu'il y a $\dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ applications strictement croissantes de a dans B (et combien de B dans A ?).
Combien y a-t-il d'applications surjectives de A dans B ?
Montrez : pour toute application f : $(f \textit{ surjective de } A \textit{ dans } B) \Rightarrow (f \textit{ injective de } A \textit{ dans } B)$.
On définit : $f : A \longrightarrow B$ par $f(1) = 6$, $f(2) = 5$, $f(3) = 8$ et $f(4) = 7$. Combien y a-t-il d'applications g de B dans A vérifiant $f \circ g = Id_B$? Combien y a-t-il d'applications h de B dans A vérifiant $h \circ f = Id_A$?

◦5◦ On définit $E = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ et $F = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ et $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 5$ et $f(d) = 6$. Montrez que cette application est injective de E dans F. Existe-t-il g vérifiant $g \circ f = Id_E$. Si oui, combien de solutions. Si non, calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^5(t).\sin^4(t).dt$.

◦6◦ ♡ Donnez l'intervalle le plus grand possible contenant 0 sur lequel $x \longmapsto \cos(x) + 2.\sin(x)$ est injective.

◦7◦ ♡ On pose $a_0 = 5$ et $b_0 = 2$. Pour tout n, on pose $a_{n+1} = 3.a_n + 4.b_n$ et $b_{n+1} = 2.a_n + 3.b_n$. Montrez que pour tout n, $a_n$et b_n sont premiers entre eux.
Propagez la propriété ou essayez d'obtenir une identité de Bézout avec le déterminant de $\begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ b_n & b_{n+1} \end{pmatrix}$.

◦8◦ ♣ On définit : $T = \left\{ \dfrac{k.(k+1)}{2} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ *(ensemble des nombres triangulaires)*.
On définit $\sigma(n) = n-1$ si $n \notin T$, et $\sigma(n) = \dfrac{k^2+3.k}{2}$ si n est l'élément $\dfrac{k.(k+1)}{2}$.
Complétez

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\sigma(n)$																	

Vérifiez que σ va bien de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et est bijective *(permutation de $\mathbb{N}$)*.
Pouvez vous la décomposer en produit de cycles de supports disjoints ? Pouvez vous lui donner un ordre ?
Résolvez l'équation $\sigma^{10}(n) = n$ d'inconnue entière n.
Résolvez l'équation $\sigma^{2015}(n) = 2018$ d'inconnue entière n.

∘9∘ ♡ Résolvez $(n-1)$ divise n^3+1 d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$.

∘10∘

Combien l'équation $a.b = 10!$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

Il y a un proverbe chinois qui ne dit rien.
J'aime bien le citer quand je n'ai rien à dire.
Philippe GELUCK (le Chat)

∘11∘ Montrez que $n \longmapsto (-1)^n.\left[\frac{n+1}{2}\right]$ est injective sur $\mathbb{N}$ (distinguer suivant la parité de n) et bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

∘12∘ Y a-t-il plus d'applications injectives de S_4 dans S_3 que de parties à 12 éléments dans S_4 *(rappel : $S_n$est l'ensemble des permutations d'un ensemble à n éléments).*

∘13∘ ♡ Montrez que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

∘14∘ On veut résoudre l'équation $z^2 = z + \overline{z}$ d'inconnue z complexe.
Montrez que nécessairement, z^2 est un réel, puis que z est soit réel, soit imaginaire pur.
Traitez les deux cas.

∘15∘ $x \longmapsto \frac{2.x+1}{x-3}$ est elle définie de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$?
Elle elle injective de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$?
Est elle bijective de $\mathbb{R} - \{3\}$ dans $\mathbb{R}$?
Est elle bijective de $\mathbb{R} - \{3\}$ dans $\mathbb{R} - \{2\}$?

∘16∘

Notwen Caasi

On va démontrer et utiliser la formule d'inversion de Newton
C'est une formule avec des sommes ; pour information, la version « intégrale » et pas « somme » de ce type de résultats, c'est la transformée de Laplace et la transformée de Laplace inverse (avec juste un signe qui change)... mais peut être n'avez vous jamais croisé la transformée de Laplace, alors je dis ça comme ça.

♡ 0 ♡ En développant $(1+X)^p.(1+X)^q$ montrez : $\sum\limits_{i+j=n} \binom{p}{i}.\binom{q}{j} = \binom{p+q}{n}$.

(a_n) et (b_n) sont deux suites de complexes vérifiant $\forall p$, $\sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k}.a_k = b_p$.

♡ 1 ♡ Montrez alors $\forall q$, $\sum\limits_{p=0}^{q} (-1)^{p+q}.\binom{q}{p}.b_p = a_q$ *(c'est ça la formule d'inversion de Newton, si les b_n se construisent à l'aide des a_k et de binomiaux, alors les a_p se construisent à l'aide des b_i et de binomiaux).*

♡ 2 ♡ Que donne-t-elle si (a_n) est une suite géométrique (a^n) ?

♠ 0 ♠ Que donne-t-elle si (a_n) est la suite de Fibonacci ?

♯ J'ai tapé `Matrice(5)`. Inversez la. Pensez à ce qu'elle donne multipliée par un vecteur colonne des a_k.

```
def Matrice(n) :
....L=[1]+[0]*n
....M=[L]
....for k in range(n) :
........NL = [1]
............for i in range(1, n+1) :
................NL.append(L[i-1]+L[i])
........M.append(NL)
........L = NL[:]
....return(M)
```

Et maintenant un autre exercice `Python` qui n'a rien à voir avec l'inversion de Newton : écrivez un script qui cherche les `N` premiers entiers dont le carré commence par 2019.
Par exemple : $14\,211^2 = 201\,952\,521$.

Pour tout n, on note μ_n le nombre de permutations σ de $range(n)$ vérifiant $\forall i,\ \sigma(i) \neq i$.

◇ 0 ◇ Justifiez en donnant la liste des permutations :

n	0	1	2	3	4
μ_n	1	0	1	2	9

. Justifiez $\mu_5 = 44$.

Prouvez par un argument de dénombrement : $\mu_n \leqslant n!$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\mu_k = n!$.

♡ 3 ♡ Déduisez : $\mu_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+n}.\binom{n}{i}.i!$. Calculez μ_6.

♡ 4 ♡ Montrez : $\dfrac{\mu_n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.[1]

◇ 1 ◇ Déduisez que $\dfrac{\mu_n}{n!}$ converge vers $\dfrac{1}{e}$ quand n tend vers l'infini (proportion de permutations sans points fixes). Peut on écrire alors $\mu_n \sim \dfrac{n!}{e}$?

Pour tout N donné, on note $S(N,k)$ le nombre de surjections de $range(N)$ dans $range(k)$. Justifiez et complétez :

	$N=0$	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$
$k=0$		0	0	0	0
$k=1$		1	1	1	1
$k=2$	0	0	2		
$k=3$	0	0	0		36
$k=4$	0	0	0		

Démontrez la formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}.S(N,k) = p^N$ pour tout p de $\mathbb{N}$.

Déduisez une formule pour $S(N,q)$. Calculez le nombre de surjections d'un ensemble à 8 éléments vers un ensemble à 6 éléments. Combien y a-t-il d'applications d'un ensemble à huit éléments dans lui même dont l'ensemble image soit exactement de cardinal 6 ? Sachant qu'on trouve 5 362 560 à la question précédente, si je vous demande d'en donner la liste, quand pourrez vous me rendre votre copie ?

Voici un jeu des défi maths pour école primaire (et de la Fédération Française des Jeux Mathématiques) : Chaque flèche vise toute les cases vides de sa rangée (ligne, colonne ou diagonale), même « à travers » une autre flèche. Place un jeton dans chaque case vide visée par au moins trois flèches.

→		↓		←
↘	↙	↘	↙	
	→			
			↑	
↗	↑	↖		↖

∘17∘ **Niveau Bintou :** résolvez cet exercice.

Niveau I.P.T. : les données sont un entier (`n`, la taille du carré) et huit listes : les cases où sont les flèches en fonction de leur direction (ici : `N = [[3,3], [4,1]]`, `S=[[0,3]]`, `E=[[0,0], [2,1]]`, `O=[[0,4]]`, `NE=[[4,0]]`, `SO=[[1,3], [1,1]]`, `NO=[[4,2], [4,4]]` et `SE=...`) Écrivez un script `Python` qui retourne alors la liste des cases répondant au critère « case vide visée par au moins trois flèches ».

Bonus : écrivez un script qu'il n'y a pas dans les données des incohérences du type « une flèche hors du tableau », « une case avec deux flèches ».

Super bonus : écrivez un script avec des `can.create_rectangle(...)`, `can.create_oval(...)`.

∘18∘ ♡ Vrai ou faux : pour qu'une somme de carrés de complexes soit nulle, il suffit que chaque complexe soit nul.

Vrai ou faux : $\ln(n!) \sim_{n\to+\infty} \ln((n-1)!)$?

Vrai ou faux : $\Big(f(x) = \sin(x).o(x)_{x\to 0}\Big) \Rightarrow \Big(f(x) = o(x^2)_{x\to 0}\Big)$?

Vrai ou faux : $\Big(f(x) = \sin(x).o(x)_{x\to 0}\Big) \Leftrightarrow \Big(f(x) = o(x^2)_{x\to 0}\Big)$?

∘19∘ ♡ Bintou vient d'avoir un 20. Sa moyenne est donc passée de 13,5 à 14. Elle vous demande quelle note elle doit avoir à l'I.S. suivante pour que sa moyenne passe à 14,3 ?

∘20∘ ♡ Montrez que les matrices de taille 2 sur 2 à déterminant non nul forment un groupe pour la multiplication, non commutatif.

Montrez que l'ensemble des matrices de taille 2 sur 2 à coefficients entiers et à déterminant 1 en forme un sous-groupe.

---

1. par exemple, $\dfrac{\mu_8}{8!} = \dfrac{14833}{40320} \simeq 0,37$ correspond à une probabilité simple : 8 personnes ayant déposé chacune son téléphone sur la table, elles repartent précipitamment et prennent chacune un téléphone au hasard ; quelle est la probabilité qu'aucune n'ait repris son propre téléphone

En est il de même pour les matrices de taille 2 sur 2 à coefficients entiers et à déterminant 1 ou -1.

◦21◦ Résolvez l'équation différentielle $\begin{vmatrix} y_t & 1 & 1 \\ y'_t & 3 & -2 \\ y''_t & 9 & 4 \end{vmatrix} = e^t + t$ d'inconnue y fonction de t.

◦22◦ ♡ On doit résoudre $y'_t + |t^2 - 1|.y_t = 0$ d'inconnue y fonction de t avec condition initiale $y_0 = 1$. On demande de calculer y_5. L'élève Toitakour-Ahuiteur résout sur $[0,\ 1]$, calcule y_1, puis résout sur $[1,\ 5]$ en utilisant la condition initiale en 1 et calcule enfin y_5. Donnez plus directement la réponse.

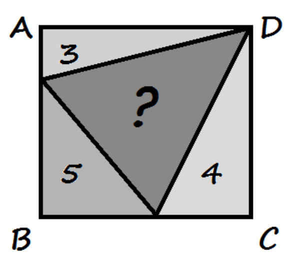
◦23◦ Résolvez $\sqrt{t^2 + 6.t + 10}.y'_t + y_t = 0$ d'inconnue y fonction de t.
Résolvez $\sqrt{t^4 + 6.t^2 + 10}.y'_t + t.y_t = 0$ d'inconnue y fonction de t.

◦24◦ On pose $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Diagonalisez M sachant qu'on travaille avec $range(17)$ et les opérations modulo 17. Combien la suite $(M^n)_{n\leqslant 2021}$ a-t-elle d'éléments ?
On travaille cette fois avec $(range(7)$ et les opérations modulo 7, montrez que M n'est pas diagonalisable. Trouvez quand même $T\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et P inversible vérifiant $M.P = P.T$ (déjà, qui est forcément a ?).

◦25◦

♡5 Donnez une équation différentielle à coefficients constants linéaire d'ordre 2 homogène dont deux solutions sont $t \longmapsto e^t.\cos(t+1)$ et $t \longmapsto e^{t+1}.\cos(t)$.

♣0 La grande figure est un carré. Les triangles ont les aires indiquées. Montrez que le triangle central a pour aire $4.\sqrt{6}$ ou 9 ou $5 + \sqrt{7}$.



(A,B,C,D) est un carré. On connaît les aires de trois triangles. Calculez l'aire du dernier.

◦26◦

I	S	A	A	C	N	E	W	T	**O**	**N**
	I	S	A	A	C	N	E	**W**	**T**	O
		I	S	A	**A**	**C**	**N**	**E**	W	T
			I	**S**	**A**	A	C	N	E	W
				I	S	A	A	C	N	E
					I	S	A	A	C	N
						I	S	A	A	C
							I	S	A	A
								I	S	A
									I	S
										I

◊2 Calculez $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant k\leqslant n}} 2^{Min(i,j)}.3^{Max(i,j)}$.

♡5 Simplifiez au maximum $\left(x \longmapsto Arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right)\right)''$ en précisant le domaine de définition.

♣ De combien de façons pouvez vous lire ISAACNEWTON sur ce tableau en sachant que vous pouvez vous déplacer d'une case à la fois ?

◦27◦ a, b et c sont trois réels distincts.
On pose $V = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} b.c & c.a & a.b \\ -b-c & -c-a & -a-b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} b-c & 0 & 0 \\ 0 & c-a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$.
Calculez $V.L.D$ et $L.D.V$. Inversez V.

◦28◦ Calculez le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

◦29◦ ♡ Calculez $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ pour tout entier naturel n. La formule obtenue est elle cohérente pour n négatif ?

◦30◦ ♡ Quand l'élève Yolett-Sassenbon développe $(2+3)^{2017}$ par la formule du binôme, quel est le plus grand coefficient binomial écrit, quel est le plus grand produit calculé ? *(conseil : signe de* $\binom{n}{k}.2^k.3^{n-k} - \binom{n}{k+1}.2^{k+1}.3^{n-k-1}$*).*

◦31◦ Montrez que $x \longmapsto Argch\left(\frac{x+1}{x}\right) + \ln(x)$ se prolonge par continuité en 0 par la valeur $\ln(2)$.
($Argch$ est la notation interdite pour la réciproque de $t \longmapsto ch(t)$ de $\mathbb{R}^+$ dans $[1,\ +\infty[$).

∘32∘ ♡ Donnez une primitive de $t \longmapsto \sin(\ln(t))$ sur $]0,\ +\infty[$.

∘33∘ Montrez, par récurrence sur n, pour f et g dérivables autant de fois qu'on veut : $(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.f^{(n-k)}.g^{(k)}$.

En appliquant ce résultat à $f = x \longmapsto 1+x^2$ et $g = Arctan'$, montrez :
$(1+x^2).Arctan^{(n+1)}(x) + 2.n.x.Arctan^{(n)}(x) + n.(n-1).Arctan^{(n-1)}(x) = 0$.

∘34∘ En arrivant à la caisse de votre magasin, vous constatez que vous avez deux tickets pour des réductions : l'un d'une valeur de dix euros, et l'autre qui donne droit à dix pour cent de réduction. Dans quel ordre les présentez vous ?

∘35∘ ♣ On définit sur $\mathbb{C}$ la relation ◀ par $z \blacktriangleleft z'$ si et seulement si $\left\{ \begin{array}{ccc} (\Re e(a) & < & \Re e(b)) \\ & ou & \\ (\Re e(a) = \Re e(b) & et & \Im m(a) \leq \Im m(b)) \end{array} \right|$.

a - Triez les complexes suivants : $1+i$, 2, $1-3.i$, $4-13.i$, $2.i$ et $-1-7.i$.
b - Montrez que c'est une relation d'ordre *(attention, (p ou q) et (r ou s) c'est (p et r) ou (p et z) ou (q et r) ou (q et s))*.
Pourquoi l'appelle-t-on "*ordre alphabétique*" ou "*lexicographique*" ou "*ordre du dictionnaire*" ?
c - Représentez graphiquement l'ensemble des complexes entre $1+i$ et $1+3.i$.
d - Représentez graphiquement l'ensemble des complexes entre $1+i$ et $3+3.i$.
e - Cette relation d'ordre des elle compatibles avec l'addition ? Est elle compatible avec la multiplication ?

Montrez qu'il ne peut pas exister de relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{C}$ telle que $z \longmapsto z^3$ soit croissante (point de départ : si on avait $i \preccurlyeq (-i)$ alors on aurait... et sinon...).

∘36∘ On rappelle que sur $\mathbb{R}$, la relation d'égalité est une relation d'ordre (ordre partiel évidemment). Montrez que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide, majorée pour l'égalité admet une borne supérieure (plus petit majorant pour l'égalité).

∘37∘ On rappelle que la relation « divise » est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. Montrez que $\mathbb{N}^*$ a un plus petit élément, et un plus grand élément.

∘38∘ Représentez graphiquement $x \longmapsto x.\ln(x)$ sur $]0,\ +\infty[$ *(notée f)*. On définit sur $\mathbb{R}^{+*}$ les relations $\Subset$ et $\risingdotseq$ par

$a \Subset b$	$a \risingdotseq b$
$f(a) \leqslant f(b)$	$f(a) = f(b)$

. Sont ce des relations d'ordre, d'équivalence ?

Pour la relation d'ordre si c'en est une, indiquez si il y a un plus petit élément. Pour la relation d'équivalence, indiquez en fonction de a le nombre d'éléments de la classe de a.
Même question avec $f = x \longmapsto x.\sin(x)$.

∘39∘ Pour a et b dans $\mathbb{Z}$, on pose $a \blacktriangleleft b$ si et seulement si on a $\pi.a + [\pi.b] \leqslant \pi.b + [\pi.a]$ *(les crochets désignent la partie entière)*.
Montrez que c'est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$. Pour information , j'ai classé les entiers de 0 à 20 :
$0 \blacktriangleleft 15 \blacktriangleleft 8 \blacktriangleleft 1 \blacktriangleleft 16 \blacktriangleleft 9 \blacktriangleleft 2 \blacktriangleleft 17 \blacktriangleleft 10 \blacktriangleleft 3 \blacktriangleleft 18 \blacktriangleleft 11 \blacktriangleleft 4 \blacktriangleleft 19 \blacktriangleleft 12 \blacktriangleleft 5 \blacktriangleleft 13 \blacktriangleleft 6 \blacktriangleleft 14 \blacktriangleleft 7$
Justifiez que 0 est bien le plus petit de tous les entiers.

∘40∘ Écrivez un script qui prend en entrée un entier naturel `n` et retourne la somme des inverses des diviseurs de `n`.

∘41∘ ♡ On définit la suite u, périodique de période 6 dont les premiers termes sont les suivants : $(1,\ 4,\ 5,\ 2,\ 7,\ 1,\ 1,\ 4,\ 5,\ 7,\ldots)$.
Écrivez un script `Python` qui pour n donné donne u_n.

∘42∘ ♣ L'application $n \longmapsto a_n$ est une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ *(telle par exemple que la suite de Stern-Brocott)*. On se donne ε strictement positif. Montrez que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a_n - \varepsilon.2^{-n-2},\ a_n + \varepsilon.2^{-n-2}]$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Q}$ et dont la longueur totale ne dépasse pas ε.

∘43∘ ♡ La suite u est définie par u_0 et u_1 donnés et $u_{n+2} = 5.u_{n+1} - 6.u_n$. Exprimez u_2,u_3, u_4 et u_5 à l'aide de u_0 et u_1.
On pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Trouvez la matrice M vérifiant $U_{n+1} = M.U_n$ pour tout n. Calculez sa trace et son déterminant. Trouvez une matrice diagonale D vérifiant $Tr(D) = Tr(M)$ et $\det(D) = \det(M)$. Trouvez P inversible *(de la forme* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$*)* vérifiant $M.P = P.D$. Explicitez alors D^n, M^n et U_n à l'aide de n. Donnez la forme explicite

de u_n pour tout n.
Pouvez vous choisir u_0 et u_1 pour avoir $u_{10} = 10$ et $u_{20} = 20$?

∘44∘ ♡ La suite a vérifie $a_{n+2} = 3.a_{n+1} - 2.a_n$ avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. Trouvez a_n pour tout n.
La suite b vérifie $b_{n+2} = 3.b_{n+1} - 2.b_n - 1$ avec $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$. Trouvez b_n pour tout n (que pensez vous de la suite $(b_n - n)$?).
La suite c vérifie $c_{n+2} = 3.c_{n+1} - 2.c_n + 2$ avec $c_0 = 0$ et $c_1 = 1$. Trouvez c_n pour tout n.
♠ La suite d vérifie $d_{n+2} = 3.d_{n+1} - 2.d_n + n$ avec $d_0 = 0$ et $d_1 = 1$. Trouvez d_n pour tout n.

∘45∘ Une matrice est un carré vraiment magique si la somme des termes de chacune de ses lignes est égale à la somme des termes de chacune de ses colonnes, ainsi que la somme des termes de ses deux diagonales *(exemple* $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ *; à vous d'en trouver d'autres)*. Donnez une base de l'ensemble des carrés vraiment magiques de taille 1.
♡ Donnez une base de l'ensemble des carrés vraiment magiques de taille 2.
♡ Donnez une base de l'ensemble des carrés vraiment magiques de taille 3.
♡ Donnez la dimension de l'ensemble des carrés vraiment magiques de taille 4.
Donnez la dimension de l'ensemble des carrés vraiment magiques et antisymétriques *($\forall(i,\ k),\ a_i^k = -a_k^i$)* de taille n.
Donnez la dimension de l'ensemble des carrés vraiment magiques et symétriques *($\forall(i,\ k),\ a_i^k = a_k^i$)* de taille n.

Ce gant est assoupLi. Il est PRémuni face aux Doutes. Sans Pèze, il manque de Bouffe. Les vieux Masques évitent la FLotte. Pas de Bouffe, pas de Tabac. On manque de CHaises pour attirer les corBeaux. Ne faites pas craMer votre CHambre. Ces SPoliés sont pleins de Germes. J'ai CHIné un gros CALIbre. Les Bars s'enDettente.

∘46∘ Une matrice carrée `M` *(tableau donné sous forme de liste de listes)* est dite magique si chaque somme en ligne est égale à chaque somme en colonne, elle même égale à chaque somme des diagonales. Écrivez un script Python qui vérifie si une matrice passée en argument est un carré magique.
Par exemple `test([[16, 3, 9, 6], [2, 13, 7, 12], [5, 10, 4, 15], [11, 8, 14, 1]])` devra répondre `True`.

Complétez en carré magique $\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ & 8 & & 5 \\ & & 6 & \\ & 14 & & \end{pmatrix}$.

∘47∘ ♡ Un carré magique est une matrice dont les sommes en lignes et les sommes en colonnes sont toutes égales (la somme commune est appelée valeur caractéristique du carré).
Montrez que M est un carré magique de valeur caractéristique s si et seulement si on a $M.U = s.U$ et $V.M = s.V$ où U (repspectivement V) est le vecteur colonne (respectivement ligne) dont tous les coefficients valent 1.
Déduisez que le produit de deux carrés magiques de même format est encore un carré magique.

∘48∘ ♡ Résolvez le système $\left\{ \begin{array}{rcl|} 8^x & = & 10.y \\ 2^x & = & 5.y \end{array} \right.$ d'inconnues réelles x et y.

∘49∘ ♣ Une application f de A dans B est dite bibijective si set seulement si chaque élément de B a exactement deux antécédents dans A.
Pourquoi la quantification n'est elle pas $\forall b \in B,\ \exists!(a,\ \alpha) \in A^2,\ f(a) = f(\alpha) = b$.
Un élève dit que la composée de deux application bibijectives ne peut pas être bibijective, car tout élément va avoir quatre antécédents par la composée et non pas deux. Et pourtant, il y a un cas...
Montrez que si f est bibijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors il existe φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $f \circ \varphi = Id_{\mathbb{N}}$.

∘50∘ Combien y a-t-il d'applications surjectives de `range(n)` dans `range(n)` ?
Combien y a-t-il d'applications surjectives de `range(n+1)` dans `range(n)` ?
Combien y a-t-il d'applications surjectives de `range(n+2)` dans `range(n)` ?

∘51∘ Complétez $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ avec des coefficients entiers sachant que son carré est $11.I_2$ et son déterminant -11. Combien de solutions ?

∘52∘ ♡ Montrez qu'il n'existe pas de matrice réelle carrée de taille 2 M vérifiant $M^2 = A$ (avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$). indication : c'est déterminant.
Trouvez une solution dans $M_2(\mathbb{C})$, que vous pourrez chercher sous la forme $a.I_2 + b.A$.

∘53∘ ♣ Mon corps est à sept éléments[2] version sur 2 sur 2. On pose donc $\mathbb{K} = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ avec l'addition et la multiplication modulo 7 qui en font un corps.
Montrez qu'il y a 7^4 matrices carrées de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Montrez qu'il y a $(7^2-1).(7^2-7)$ matrices carrées $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversibles *(indication : vecteurs non nuls et non colinéaires...)*.
Montrez qu'il y a $\dfrac{(7^2-1).(7^2-7)}{6}$ matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant 1.

∘54∘ ♣ Bintou se isiro $n!$ =40526 . . . 481280000000000000 (o nilo pupo ti akoko lati kọ) ati $(n+1)!$ =2350561 . . . 914240000000000000. O ni lati wa nọmba naa n ? Salaye. C'est du yorouba *(langue du Nigeria, Bénin, Togo, Côte d'Ivoire...)*. J'espère que vous comprenez qu'on vous demande de retrouver n à partir de $n!$ et $(n+1)!$.

∘55∘ ♡ Trouvez le réel a sachant $\left\{\begin{array}{rcl} 2^a \times 3^b \times 5^c & = & 235 \\ 3^a \times 5^b \times 2^c & = & 352 \\ 5^a \times 2^b \times 3^c & = & 523 \end{array}\right.$

∘56∘ Trouvez a, b, c, d et e *(si si !)* pour avoir
$\dfrac{24}{(X-1).(X-2).(X-3).(X-4)} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-2} + \dfrac{c}{X-3} + \dfrac{d}{X-4} + \dfrac{e}{X-5}$. Calculez $\displaystyle\sum_{4\leqslant k} \frac{1}{\binom{k}{4}}$.

∘57∘ ♡? Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comparez $\displaystyle\int_0^x \Big(\int_t^x f(u).du\Big).dt$ et $\displaystyle\int_0^x v.f(v).dv$.

∘58∘ Résolvez l'équation différentielle $\begin{vmatrix} y_t & 1 & 1 \\ y'_t & 3 & -2 \\ y''_t & 9 & 4 \end{vmatrix} = e^t + t$ d'inconnue y fonction de t.

∘59∘ ♣ Résolvez $\Re e\Big((e^e)^{i.\theta}\Big) \geqslant 0$ d'inconnue réelle θ.

∘60∘ ♡ Cette famille est liée dans $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$: ($\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$). Retrouvez les coefficients qui manquent et donnez une relation de dépendance linéaire.
(liée : l'un des éléments est combinaison linéaire des autres).

∘61∘ Écrivez $x \longmapsto \cos(x+a)$ comme combinaison linéaire de $x \longmapsto \cos(x+b)$ et $x \longmapsto \cos(x+c)$ (b et c sont deux réels donnés, dont la différence n'est pas multiple de π).
Pouvez vous écrire $x \longmapsto \cos(x+a)$ comme combinaison linéaire de $x \longmapsto \cos(x+b)$ et $x \longmapsto \cos(x+b+\pi)$.

∘62∘ ♡ Décomposez $x \longmapsto \cos(x+a)$ en $p+i$ avec p, paire et i impaire.
♡ Décomposez $x \longmapsto \exp(x+a)$ en $p+i$ avec p, paire et i impaire.
♡ Décomposez $x \longmapsto 2.|x+1|$ en $p+i$ avec p paire et i impaire.

∘63∘ Où est l'erreur dans le raisonnement suivant : « on sait $\begin{array}{rcl} x=1 & \Rightarrow & x+2=3 \\ x=3 & \Rightarrow & 2.x+2=8 \end{array}$ on déduit en additionnant $(2.x=4) \Rightarrow (3.x+4=11)$ ».

∘64∘ Montrez que tan est définie de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, injective. Montrez qu'elle n'est pas surjective.
Montrez que $x \longmapsto \tan([x])$ est défiie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non injective.
Montrez que $x \longmapsto tan(x)$ n'est pas injective de $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{2.k+21}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ dans $\mathbb{R}$, de même que $x \longmapsto [x]$.
Montrez que $x \longmapsto (\tan(x),\ [x])$ est injective.$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{2.k+2}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

2. comme disait Blanche Neige

Joël Martin (la Comtesse du Canard) à Paris :
Paris aux prestigieuses scènes est la capitale mondiale capitale du luxe. On y rencontre plein de titis qui rusent et bisent des copines à l'air cool. On voit plein de péniches à la Seine et plein de bus faciles à citer. On entend parfois soupirer des touristes subjugués par l'abîme dans la Tour : "Ah que j'aurais aimé connaître vos motivations, Eiffel !"

Et Joël Martin en Haute-Savoie (ah le goût de Mont-Blanc) :
Les amateurs de pentes collectionnent les faces, épatés par les faces et les pentes effilées. Une grimpeuse qui apprécie la Verte quand elle est jolie, et surtout la Verte enneigée, parcourt le mont sans craindre le vide. Une autre luge sous la Verte. Mais gare à l'excès de glisse quand se déchaîne le vent... détresse sur les faces !

◦65◦ Petit jeu. Votre adversaire pense à un nombre a entre 1 et N (inclus).
Vous avez droit à n questions du type « l'entier a est il plus grand que x » auxquelles il répondra « oui » ou « non ».
A la fin ou même avant, vous devez avoir trouvé l'entier auquel il a pensé.
Si vous avez droit à six questions.
Il est évident que vous allez pouvoir gagner si N est égal 128 (quel algorithme appliquez vous ?).

Mais voilà, il y a une règle du jeu en plus. La personne en face ne doit pas répondre plus de trois fois « non ».
C'est à dire que si par exemple les réponses ont été « non, oui, non, oui, non » vous n'avez pas droit à la sixième question, vous devez avoir trouvé a.

Montrez qu'alors, vous avez un algorithme pour trouver a si N vaut 42.
Votre première question sera « est il supérieur ou égal à 17 ».
Et si on vous répond « non », ce sera « $a \geqslant 5$ ».

Justifiez le tableau suivant en donnant l'algorithme :

	1	2	3	4	5	6	q
0	1	1	1	1	1	1	
1	2	3	4	5	6	7	
2		4	7	11	16	22	
3			8	15	26	42	
4				16	?	?	
n							

q est le nombre de questions autorisées. n est le nombre maximum de réponses « non » autorisées.
Et on indique en case (q, n) la valeur de N du « range » sur lequel on peut travailler.