



♡ 0 ♡ Sachant $z = \frac{1+2i}{5}$, calculez la partie réelle de $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$ (au sens de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n z^k$). (3 pt.)

♡ 1 ♡ Résolvez $\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$ d'inconnue réelle x . (2 pt.)

♡ 2 ♡ Sachant $\theta + \frac{\pi}{2} = 2 \cdot \text{Arctan}(e^t)$ montrez : $\text{ch}(t) \cdot \cos(\theta) = 1$. (2 pt.)

◇ 0 ◇ Diagonalisez $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ (notée M) sachant qu'on ne travaille pas dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ mais avec les entiers de 0 à 10 pour l'addition et la multiplication modulo 11. (3 pt.) Calculez M^n (toujours modulo 11). (1 pt.)

◇ 1 ◇ Sachant $e^t \cdot y'_t + t \cdot y_t = 0$ (pour tout t) et $y_0 = 1$, déterminez la limite de y_t quand t tend vers $+\infty$. (2 pt.) Déterminez le maximum de y_t quand t décrit $\mathbb{R}$. (2 pt.)

◇ 2 ◇ On définit $I = \int_0^\pi \cos^2(\cos(t)) + \sin^2(\sin(t)) \cdot dt$.

Montrez : $I = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos(t)) \cdot dt + 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2(\sin(t)) \cdot dt = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos(t)) \cdot dt + 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2(\cos(\theta)) \cdot d\theta$.
Déduisez la valeur de I . (3 pt.)

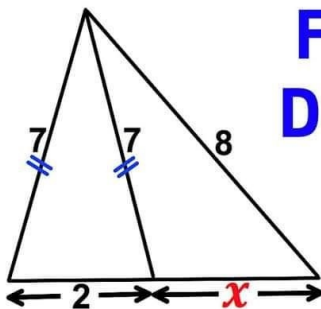
Dans les exercices qui suivent, vous avez le droit de changer le « nom » des inconnues.

◇ 3 ◇ Pour diagonaliser $\begin{pmatrix} \mathfrak{J} & -8 \\ 16 & \mathfrak{J} \end{pmatrix}^n$ j'ai trouvé $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Retrouvez $\mathfrak{J}$ (positif) et $\mathfrak{J}$, P et calculez $\begin{pmatrix} \mathfrak{J} & -8 \\ 16 & \mathfrak{J} \end{pmatrix}^n$ et sa trace. (5 pt.)

◇ 4 ◇ Retrouvez $\odot$ et $\bullet$ sachant que $t \mapsto -e^{3t}$ et $t \mapsto 3 \cdot e^{-t}$ sont solutions de $y''_t + \odot \cdot y'_t + \bullet \cdot y_t = \forall t \ 0$. (2 pt.)

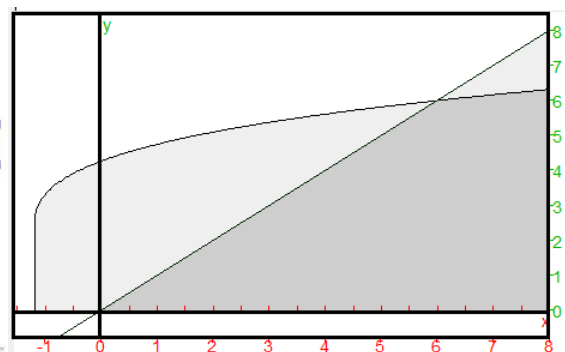
Retrouvez les réels $\wp$ et $\mathfrak{d}$ sachant que $t \mapsto e^{3t}$ et $t \mapsto e^{-2t}$ sont solutions de $y_t^{(3)} + \wp \cdot y'_t + \mathfrak{d} \cdot y_t = \forall t \ 0$. (2 pt.)

Retrouvez les réels $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{Y}$ sachant que $t \mapsto e^{3t}$ et $t \mapsto e^t \cdot \cos(t)$ sont solutions de $y_t^{(3)} + \mathfrak{O} \cdot y''_t + \mathfrak{U} \cdot y'_t + \mathfrak{Y} \cdot y_t = \forall t \ 0$. (2 pt.)



FIND THE DISTANCE

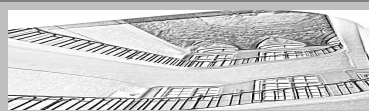
2 points



Résolvez $\sqrt{6+5\sqrt{6+5x}} = x$ d'inconnue x dans $\mathbb{Z}$. Combien cette équation a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$, et dans $\mathbb{C}$? (3 pt.)

Que va faire le programme ci contre ? (2 pt.)

```
n, f = 0, 1
while sum(int(c) for c in str(f)) <
2023 :
....n += 1
....f *= n
```





Une série géométrique.

IS10

On calcule déjà à horizon fini

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1 - \left(\frac{1+2i}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1+2i}{5}}$$

Mais quand n tend vers $+\infty$, le complexe $\left(\frac{1+2i}{5}\right)^{n+1}$ de module $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^{n+1}$ converge vers 0. Il ne reste que

$$\frac{1}{1 - \frac{1+2i}{5}}$$

Mais comme on en veut la partie réelle, il faut évincer le dénominateur non réel

$$\frac{1}{1 - \frac{1+2i}{5}} = \frac{5}{4-2i} = \frac{5 \cdot (4+2i)}{(4-2i) \cdot (4+2i)} = \frac{20+10i}{16+4}$$

La partie réelle cherchée vaut 1

Attention, certes la partie réelle de la somme est la somme des parties réelles, mais que faire de $\sum_{k=0}^{+\infty} \Re(z^k)$? On n'a rien pour la partie réelle d'un produit et/ou d'une puissance.



Des déterminants.

IS10

Pour résoudre $\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$, on ne calcule pas la matrice produit. On rappelle juste $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

L'équation devient $1 \cdot (x-3) \cdot (2-x) = -6$. On développe ($x^2 + 5x - 6 = -6$), on calcule le discriminant et on trouve 0 et -5

Euh, non, on ne calcule pas le discriminant, c'est direct.



Formule avec les deux types de trigonométrie.

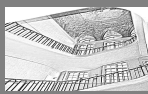
IS10

Pour prouver $\operatorname{ch}(t) \cdot \cos(\theta) = 1$, on peut remplacer θ dans la formule.

$$\operatorname{ch}(t) \cdot \cos\left(2 \cdot \operatorname{Arctan}(e^t) - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ch}(t) \cdot \sin\left(2 \cdot \operatorname{Arctan}(e^t)\right) = \operatorname{ch}(t) \cdot \frac{2 \cdot \tan\left(\frac{2 \cdot \operatorname{Arctan}(e^t)}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{2 \cdot \operatorname{Arctan}(e^t)}{2}\right)}$$

on a utilisé la formule en arc moitié, on simplifie ensuite $\tan(\operatorname{Arctan}(x))$ car c'est le bon sens

$$\operatorname{ch}(t) \cdot \cos\left(2 \cdot \operatorname{Arctan}(e^t) - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ch}(t) \cdot \frac{2 \cdot e^t}{1 + (e^t)^2} = \frac{(e^t + e^{-t}) \cdot e^t}{1 + e^{2t}} = \frac{e^{2t} + 1}{1 + e^{2t}} = 1$$



Equation différentielle linéaire.

IS10

L'équation $e^t \cdot y'_t + t \cdot y_t = 0$ est linéaire, homogène, avec second membre nul. Ses solutions forment un espace vectoriel de dimension 1. Avec la condition initiale, on aura une unique solution.

On l'écrit déjà $y'_t + t \cdot e^{-t} \cdot y_t = 0$ et on pose classiquement $a_t = t \cdot e^{-t}$ pour tout t .

Trop fort, pour intégrer, on va intégrer par parties

$$\int_0^T t \cdot e^{-t} \cdot dt = \left[t \cdot e^{-t} \right]_0^T + \int_0^T 1 \cdot (-e^{-t}) \cdot dt = 1 - (T+1) \cdot e^{-T}$$

On colle un signe moins, une exponentielle et la condition initiale : $y_t = 1 \cdot e^{(t+1) \cdot e^{-t} - 1}$

Quand t tend vers l'infini, $(t+1) \cdot e^{-t}$ tend vers 0 et par composition, y_t tend vers e^{-1} .

Pour ce qui est du maximum, il y a plus ou moins astucieux.

On peut rapprendre l'expression de y_t et dériver.

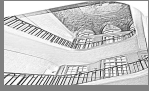
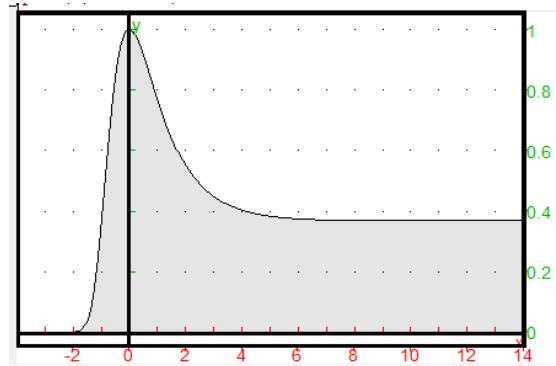
Si on ne fait pas d'erreur de calcul, ça va.

Mais le mieux est de rappeler qu'on a $y'_t + t \cdot e^{-t} \cdot y_t = 0$ donc $y'_t = -t \cdot e^{-t} \cdot y_t$.

Et comme y_t est de signe constant, c'est en $t = 0$ que la dérivée s'annule et change de signe.

L'application $t \mapsto y_t$ est croissante puis décroissante.

C'est en 0 qu'elle atteint son maximum, égal à 1.



Une diagonalisation modulo 11.

IS10

On calcule trace et déterminant de $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$: 1 et 0. L'équation caractéristique est $\lambda^2 - \lambda = 0$. Les deux racines sont 0 et 1. Pas de raison de refuser. Un 0 sur la diagonale d'une matrice diagonale ne l'empêche pas d'être diagonale.

On choisit $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On résout $M \cdot P = P \cdot D$ et on trouve $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Si vous avez choisi $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors vous avez $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Bonus : $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$. Et par récurrence sur n : $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ pour tout n différent de 0.

Logique : $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = M$



Une intégrale.

IS10

L'intégrale $\int_0^\pi \cos^2(\cos(t)) + \sin^2(\sin(t)) \cdot dt$ existe, par continuité des applications sous le signe « intégrale ». Mais on n'a pas de primitive. On va devoir ruser.

Déjà, on sépare en deux par linéarité $I = \int_0^\pi \cos^2(\cos(t)) \cdot dt + \int_0^\pi \sin^2(\sin(t)) \cdot dt$.

Puis on applique la relation de Chasles (ça semble dans la l'axe de la formule à démontrer, non ?)

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos(t)) \cdot dt + \int_{\pi/2}^\pi \cos^2(\cos(t)) \cdot dt + \int_0^{\pi/2} \sin^2(\sin(t)) \cdot dt + \int_{\pi/2}^\pi \sin^2(\sin(t)) \cdot dt$$

Ne pourrait on pas transformer $\int_{\pi/2}^\pi \cos^2(\cos(t)) \cdot dt$ en $\int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos(t)) \cdot dt$ pour que les deux fusionnent en une (avec donc le coefficient 2 de l'énoncé) ? On rappelle que de $\pi/2$ à π le cosinus reprend (au signe près) les mêmes valeurs que de 0 à $\pi/2$. Mais en sens inverse. On est donc tenté de faire un changement de variable royal¹ : on

1. allez voir Axel Arno et la propriété du roi expliquée sue quelques sommes et/ou intégrales

parcourt l'intervalle en sens inverse : $u = \pi - t$

$$\int_{t=\pi/2}^{\pi} \cos^2(\cos(t)).dt = \int_{u=\pi/2}^0 \cos^2(\cos(\pi - u)).(-du) = - \int_{\pi/2}^0 \cos^2(-\cos(\pi)).du = - \int_{\pi/2}^0 \cos^2(-\cos(\pi)).du$$

on fait appel à la parité du cosinus (et même de $\cos^2$) et on rétablit les bornes, avec le signe moins.

$$\text{On fait de même avec l'autre intégrale } \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2(\sin(t)).dt = \int_{u=\pi/2}^0 \sin^2(\sin(u)).(-du) = \int_0^{\pi/2} \sin^2(\sin(u)).du$$

On reporte et on fusionne car les variables d'intégration sont muettes²

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos(t)).dt + \int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos(u)).du + \int_0^{\pi/2} \sin^2(\sin(t)).dt + \int_0^{\pi/2} \sin^2(\sin(u)).du$$

les termes sont bien en double $I = 2. \int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos(t)).dt + 2. \int_0^{\pi/2} \sin^2(\sin(t)).dt.$

On veut transformer $\int_0^{\pi/2} \sin^2(\sin(t)).dt$ en $\int_0^{\pi/2} \sin^2(\cos(\theta)).d\theta$? Même ruse. On pose $\theta = \frac{\pi}{2} - t$ histoire de parcourir l'intervalle dans l'autre sens. Les bornes se renversent, mais dt devient $-d\theta$, et le sinus devient un cosinus.

Il ne reste plus qu'à re-fusionner les deux intégrales par linéarité (variables muettes). On a

$$I = 2. \int_0^{\pi/2} (\cos^2(\cos(t)) + \sin^2(\sin(t))).dt = 2. \int_0^{\pi/2} 1.dt = \pi$$



Diagonalisation avec des notes de musique.

IS10

On pose $M = \begin{pmatrix} \sharp & -8 \\ 16 & \flat \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. On sait que M et D sont semblables. Elles ont donc même trace et même déterminant.

On a donc $\sharp + \flat = 2$ et $\sharp \cdot \flat + 128 = -15$. Ayant la somme et le produit, Viète nous dit que les deux notes sont les deux racines de $X^2 - 2X - 143$. Ce trinôme a pour discriminant 576 ($\delta = 24$) et pour racines 13 et -11. L'énoncé nous dit que $\sharp$ est positif, ce qui restreint le choix (on savait à l'avance qu'une des racines était positive et l'autre négative. Bref : $M = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ 16 & -11 \end{pmatrix}$

On résout ensuite

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 0 \\ \hline 0 & -3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 13 & -8 \\ \hline 16 & -11 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & -3 \\ \hline 5.a & -3.b \\ \hline \end{array}$$

La première ligne donnent $a = 1$ et $b = 2$ et la seconde confirme.

Par concaténation classique (puis récurrence évidente)

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 2.5^n - (-3)^n & (-3)^n - 5^n \\ 2.c^n - 2.(-3)^n & 2.(-3)^n - 5^n \end{pmatrix} \text{ et } \text{Tr}(M^n) = 5^n + (-3)^n$$

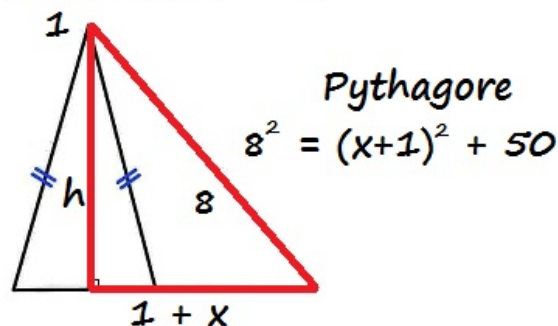
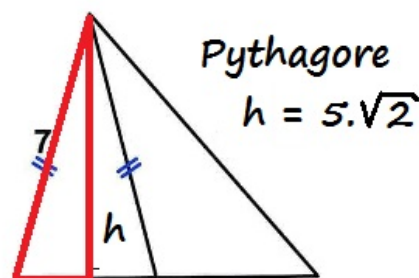
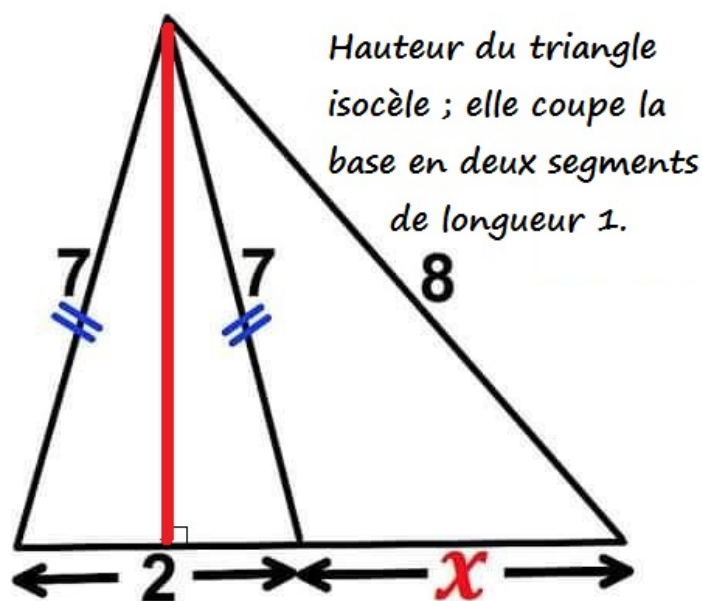
La valeur de la trace est cohérente, puisque $M^n = P.D^n.P^{-1}$. On en déduit que M^n et D^n ont la même trace, avec $\text{Tr}(D^n) = 5^n + (-3)^n$. On l'avait même sans diagonaliser.



Un triangle isocèle et un autre triangle.

IS10

2. formule pour dire $\int_a^b f(t).dt = \int_a^b f(u).du = \int_a^b f(x).dx$



$\sqrt{6+5\sqrt{6+5x}} = x$ implique $x \geq 0$ et aussi $6+5\sqrt{6+5x} = x$ (à ce stade, en mettant ensemble les deux conditions de droite, il y a même équivalence). On fait passer 6 de l'autre côté en surveillant tout

$$\sqrt{6+5\sqrt{6+5x}} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-6 \geq 0 \\ (x^2-6)^2 = 25(6+5x) \end{cases}$$

On résout $x^4 - 12x^2 - 125x - 114 = 0$ d'inconnue entière x .

Si les racines sont des entiers, leur somme vaut 0 et leur produit 114. Qui sont les diviseurs de 114 ? Qui essayer ? On trouve 6 comme racine évidente³. Puis -1. On pose deux divisions $x^4 - 12x^2 - 125x - 114 = (x-6)(x^3 + 6x^2 + 24x + 19) = (x-6)(x+1)(x^2 + 5x + 19)$

En tenant compte des signes imposés, il n'y a bien que la racine 6, entière et réelle à la fois $S_{\mathbb{R}} = S_{\mathbb{Z}} = \{6\}$ -1 n'est pas racine, car on a alors $x^2 - 6 = -5$ et $5\sqrt{6+5x} = 5$.

Les racines de $X^2 + 5X + 19$ ne sont pas réelles.

Mais dans C ? On est tenté de dire que l'équation de degré 4 a quatre racines, c'est tout.

Sauf que dans C le symbole $\sqrt{}$ n'a aucun sens ($\sqrt{-1}$ ce serait i ou $-i$?). Il ne reste que la solution réelle déjà mentionnée.



Equations différentielles dont on donne des solutions.

IS10

Deux approches possibles à chaque fois :

- porter les fonctions dans l'équation, déduire des conditions sur les coefficients, et conclure
- écrire l'équation caractéristique, et dire que le λ dans $x \mapsto e^{\lambda \cdot t}$ doit en être racine.

solutions	racines	équation caractéristique	équation différentielle	réponse
$t \mapsto -e^{3 \cdot t}$	3	$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$	$y'' - 2y' - 3y = 0$	$\ominus = -2$
$t \mapsto 3e^{-t}$	-1			$\oplus = -3$

Attention, la seconde n'est pas une faute de frappe. On parle bien de degré 3. C'est donc que l'espace des solutions est de dimension 3. Il nous manque une valeur propre λ qui n'est pas donnée par l'énoncé.

solutions	racines	équation caractéristique	équation différentielle	réponse
$t \mapsto 3 \cdot t$	3	$(\lambda - 3)(\lambda + 2)(\dots) = 0$	$y^{(3)} - 7y' - 6y = 0$	$\varnothing = -7$
$t \mapsto e^{-2 \cdot t}$	-2	$\lambda^3 - 7\lambda - 6 = 0$		$\ominus = -6$
une autre	?	mais la somme est nulle		

Mais l'équation $y_t^{(3)} + \varnothing \cdot y_t' + \ominus \cdot y_t = \forall t \ 0$ nous donne un indice : $\lambda^3 + \varnothing \cdot \lambda + \ominus \cdot \lambda = 0$. La somme des racines est donc

3. enfin, sans le graphe, je ne l'aurais pas trouvée

