LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 5 décembre
M.P.S.I.2

2023 2024

IS11

♡ 0 ♡ Soient f, g et h trois applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$. On suppose que $h \circ g \circ f$ est bijective de E dans H. Montrez que f est injective et que h est surjective de G sur H. Donnez un exemple où on a bien $h \circ g \circ f$ bijective, mais où aucune n'est bijective. 3 pt.

♡ 1 ♡ Un élève a invente la formule $\forall(A,\ B) \in M_2(\mathbb{R}),\ Tr(A.B) = Tr(A).Tr(B)$. Donnez lui un contre-exemple. 1 pt.

♡ 2 ♡ La suite (a_n) vérifie $\forall n,\ a_{n+2} = 7.a_{n+1} - 10.a_n$. Montrez que les suites $(a_{n+1} - 2.a_n)$ et $(a_{n+1} - 5.a_n)$ sont géométriques (raison ?). Retrouvez la formule pour a_n en fonction de n, a_0 et a_1. 4 pt.

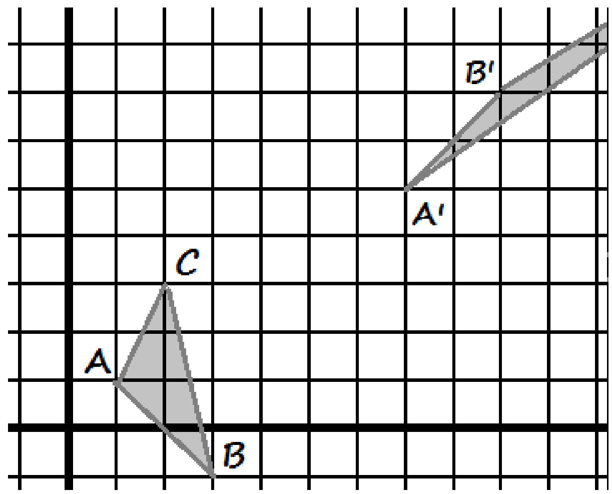
♡ 3 ♡ On donne $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Montrez : $M^n = a_n.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b_n.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $a_n = \dfrac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$ et $b_n = \dfrac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}$. 3 pt.

$\diamondsuit_0$ Le polynôme $X^4 - 5.X^3 + 6.X - 1$ a pour racines a, b, c et d. Donnez un polynôme de degré 4 de racines $2.a$, $2.b$, $2.c$ et $2.d$. Même question avec $a+1$, $b+1$, $c+1$ et $d+1$. 3 pt.

$\diamondsuit_1$ Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de $\begin{pmatrix} & 15 \\ -9 & \end{pmatrix}$ (notée M), et cette matrice a pour trace -2. Retrouvez la matrice et les deux valeurs propres associées. Calculez $Tr(M^{2023})$. 4 pt.

$\diamondsuit_2$ Inversez la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ & 2 \end{pmatrix}$ sachant que la matrice et son inverse sont à coefficients entiers. 2 pt.

$\diamondsuit_3$ Une matrice M (inconnue) a transformé les points A, B et C en A', B' et C' (tous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$). Pouvez vous me donner les coordonnées de C' ? 2 pt.



♣ 0 ♣ Voici les notes des élèves de la classe

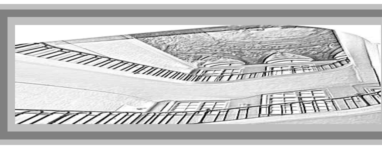
élève	Alvin	Blaise	Clovis	Dan	Élise	Fiona	Gaël	Hannah	Jane	Katia	Léa	Marc	Nick	Omid
maths	12	10	8	5	13	14	10	9	11	7	6	8	10	11
physique	11	12	10	14	7	5	11	15	11	10	13	14	8	7

On définit la relation $\ggg$ par ($a \ggg b$ si et seulement si « a a une meilleure note en maths que b »). Montrez que cette relation est réflexive, transitive mais pas antisymétrique. 3 pt. • On définit la relation $\blacktriangleright$ par ($a \blacktriangleright b$ si et seulement si « a a une meilleure note en maths et en physique que b »[1]). Montrez que cette relation est réflexive, transitive. Est elle antisymétrique. 3 pt. • On définit la relation $\succcurlyeq$ par $a \succcurlyeq b$ si et seulement si « a a une meilleure note en maths ou en physique que b ». Ceci a-t-il un sens ($a \succcurlyeq b \succcurlyeq c$) ? 1 pt.

Une relation $\Re$ sur un ensemble E est si elle vérifie	réflexive	transitive	antisymétrique
	$\forall a \in E,\ a\Re a$	$\forall (a,b,c) \in E^3,\ (a\Re b \text{ et } b\Re c) \Rightarrow (a\Re c)$	$\forall (a,b) \in E^2,\ (a\Re b \text{ et } b\Re a) \Leftrightarrow (a = b)$

On définit a relation $\supseteq$ par $(a \supseteq b) \Leftrightarrow \big((maths_a > math_b) \text{ ou } (maths_a = maths_h \text{ et } physique_a > physique_b)\big)$ (ne pas vérifier que c'est une relation d'ordre). Classez les élèves pour cette relation du « meilleur » au « moins bon ». 3 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2023 2024
IS11
21- points

1. au sens de $maths_a \geqslant maths_b$ et $physique_a \geqslant physique_b$

LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 5 décembre
M.P.S.I.2

2023 2024
IS11
CORRECTION

Injections, bijections, surjections. IS11

On rappelle que l'injectivité est héréditaire à droite et la surjectivité à gauche.
Mais prouvons le ici en situation. On suppose donc $h \circ g \circ f$ bijective.
On montre que f est injective.
On prend a et α dans E et on suppose $f(a) = f(\alpha)$ (objectif : $a = \alpha$).
On compose par g puis par h : $g(f(a)) = g(f(\alpha))$ puis $h(g(f(a))) = h(g(f(\alpha)))$.
Par injectivité de $h \circ g \circ f$ on obtient $a = \alpha$.

On montre que h est surjective de G dans H.
On se donne γ dans H (objectif : lui trouver un antécédent dans G).
On sait déjà qu'il a un antécédent par $h \circ g \circ f$ qu'on note α dans E : $h(g(f(\alpha))) = \gamma$.
Mais alors $g(h(\alpha))$ (qu'on va noter β) est dans G et vérifie $h(\beta) = \gamma$. C'est donc un antécédent de γ par h.

> *Ce type de question ne nécessite aucun calcul, mais du raisonnement.*
> *Si vous comprenez et réussissez : tant mieux.*
> *Si vous écrivez n'importe quoi, vous pourrez quand même réussir vos épreuves de physique et même la plupart des épreuves de maths de plein de concours.*
> *Mais cela signifiera quand même qu'il vous manque une capacité à raisonner de manière un peu abstraite, c'est à dire à faire plus que « calculer et appliquer ».*

Contre exemple ? Il faut aller au plus simple, avec de petits ensembles[2], et des applications f injective et h surjective, avec la composée bijective.

$$\begin{array}{ccccccc} & f & & g & & h & \\ E & & F & & G & & H = E \\ a & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \alpha & \longrightarrow & a \\ b & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & \beta & \longrightarrow & b \\ c & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & \gamma & \longrightarrow & c \\ & & 4 & \nearrow & \delta & \nearrow & \end{array}$$

$h \circ g \circ f$ est ici l'identité de E donc bien bijective.

Contre-exemple. IS11

Pour montrer qu'on n'a pas $Tr(A.B) = Tr(B.A)$, il suffit de donner deux matrices A et B pour lesquelles c'est faux.
Le plus simple est $A = B = I_2$. On a $Tr(A.B) = 2$ et $Tr(A).Tr(B) = 2.2 = 4$.

Une suite récurrente sans diagonaliser. IS11

On suppose donc $\forall n,\ a_{n+2} = 7.a_{n+1} - 10.a_n$ puis on pose $\forall n,\ u_n = a_{n+1} - 2.a_n$ et $v_n = a_{n+1} - 5.a_n$. On constate :

$$u_{n+1} = a_{n+2} - 2.a_{n+1} = (7.a_{n+1} - 10.a_n) - 2.a_{n+1} = 5.a_{n+1} - 10.a_n = 5.u_n$$

La suite (u_n) est géométrique de raison 5 : $u_n = 5^n.(a_1 - 2.a_0)$ par récurrence immédiate. On pousse un calcul similaire avec v_n pour tout n

$$v_{n+1} = a_{n+2} - 5.a_{n+1} = (7.a_{n+1} - 10.a_n) - 5.a_{n+1} = 2.a_{n+1} - 10.a_n = 2.v_n$$

On a à la fois $a_{n+1} - 2.a_n = 5^n.(a_1 - 2.a_0)$ et $a_{n+1} - 5.a_n = 2^n.(a_1 - 5.a_0)$. On combine (leur différence) pour effacer a_{n+1} entre les deux formules

$$3.a_n = 5^n.(a_1 - 2.a_0) - 2^n.(a_1 - 5.a_0) \text{ puis } a_n = \frac{a_1.(5^n - 2^n) + a_0.(5.2^n - 2.5^n)}{3}$$

2. oui, il y a encore plus petit, sans b ni c

Une puissance n^{ieme} sans diagonalisation. IS11

Si on nous donne la formule, une récurrence suffit. On initialise en calculant $a_0 = \frac{(a+b)^0+(a-b)^0}{2} = 1$ et $b_0 = \frac{(a+b)^0-(a-b)^0}{2} = 0$ et en vérifiant $M^0 = 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Si on y tient, on vérifie aussi au rang 1.

On se donne ensuite n quelconque, et on suppose $M^n = a_n.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b_n.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $a_n = \frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}$ et $b_n = \frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}$. On calcule alors

$$A^{n+1} = A^n.A = (a_n.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b_n.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}).(a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

On distribue et on regroupe, après avoir constaté $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{n+1} = A^n.A = (a.a_n + b.b_n).\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (a.b_n + b.a_n).\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule alors les deux coefficients pour voir si ils ont bien la forme a_{n+1} et b_{n+1} attendue

$$a.a_n + b.b_n = a.\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} + b.\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} = \frac{(a+b).(a+b)^n+(a-b).(a-b)^n}{2}$$

On a bien $a.a_n + b.b_n = \frac{(a+b)^{n+1}+(a-b)^{n+1}}{2} = a_{n+1}$. On fait de même avec l'autre coefficient.

Vous avez trouvé cet exercice chiant comme la pluie sous cette forme : MP.
Vous avez traité cet exercice sans faute, et vous êtes heureux d'avoir des points : PSI.
Vous avez planté cet exercice : secouez vous !
Vous avez oublié cet exercice ? Ça ne m'étonne pas de vous !

Formules de Viète. IS11

L'exercice sur le polynôme $X^4 - 5.X^3 + 6.X - 1$ utilise les formules de Viète. On ne réussit pas à trouver de racine évidente. Alors on écrit les formules telles que $a+b+c+d = 5$, $a.b+a.c+a.d+b.c+b.d+c.d = 0$ et ainsi de suite.
On écrit alors les nouvelles relations coefficients racines : $2.a+2.b+2.c+2.d = -10$, jusqu'à $(2.a).(2.b).(2.c).(2.d) = 16.(-1)$.
Le polynôme unitaire de racines $2.a$, $2.b$, $2.c$ et $2.d$ est $X^4 - 10.X^3 + 48.X - 16$

Pour la translation, on peut recommencer $(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1) = 5+4$

$$(a+1).(b+1) + (a+1).(c+1) + \ldots + (c+1).(d+1) = D + 4.S + 4$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$(a+1).(b+1).(c+1).(d+1) = P + T + D + S + 1$$

On peut aussi dire qu'on va poser $Y = X+1$ donc $X = Y-1$. On reporte dans le polynôme

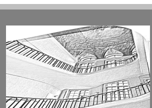
$$Q(Y) = P(Y-1) = (Y-1)^4 - 5.(Y-1)^3 + 6.(Y-1) - 1 = Y^4 - 9.Y^3 + 21.Y^2 - 13.Y - 1$$

Inversion à coefficients entiers. IS11

La matrice $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ est à coefficients entiers, et $\dfrac{1}{10-3.a}.\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -a & 5 \end{pmatrix}$ aussi [3].
C'est donc que a est entier, et aussi que $10-3.a$ divise 5, -3, $-a$ et 2.
Une solution est de donner au déterminant la valeur 1. C'est possible avec $a=3$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Question logique de matheux : est ce la seule solution ?
Si un entier divise 5 *et* -3*, il ne peut valoir que* 1 *ou* -1 *(liste des diviseurs communs).*
Sinon, il y a une belle astuce : $\det(M).\det(M^{-1}) = \det(M.M^{-1}) = \det(I_2) = 1$*. Ensuite, si* M *et* M^{-1} *sont à coefficients entiers, leurs déterminant le sont aussi. Et deux entiers de produit* 1*, il n'y a que le couple* $(1,\ 1)$ *et le couple* $(-1,\ -1)$*.*



Des relations sur les élèves. IS11

On vérifie les propriétés de la relation $\ggg$ (qui semble marquer une sacrée domination).
$\boxed{\text{Réflexivité}}$ On se donne un élève a quelconque. On vérifie $maths_a = maths_a$ et donc $maths_a \geqslant maths_a$. On reconnaît $a \ggg a$.

Il y a des élèves qui refusent d'écrire $10 \geqslant 10$*, me déclarant « il y a une égalité et pas une inégalité ». Ce sont ceux qui dans la locution « supérieur ou égal » entendent une incantation, et n'entendent même pas le « ou » dans « ou égal ».*

$\boxed{\text{Transitivité}}$ On se donne trois élèves a, b et c (et on ne dit pas de qui il s'agit, c'est un $\forall$). On fait une hypothèse double : $a \ggg b$ et $b \ggg c$.
On traduit : $maths_a \geqslant maths_b$ et $maths_b \geqslant maths_c$. Par transitivité dans $\mathbb{R}$ on déduit $maths_a \geqslant maths_c$ (a est effectivement meilleur que c en maths, puisqu'il y a b entre eux). On reconnait ce qu'on écrit $a \ggg c$.

$\boxed{\text{Antisymétrie}}$ On se donne deux élèves a et b quelconques. pas si quelconques. On fait sur eux une hypothèse : $a \ggg b$ et aussi $b \ggg a$. C'est donc que a est meilleur en maths que b et aussi que b est meilleur en maths que a. Que déduit on ? Qu'ils ont la même note en maths. Mais ce n'est pas parce qu'on arrive à une égalité qu'il faut l'encadrer et dire « j'ai fait un raisonnement ». Il fallait voir si on aboutissait à $a=b$.
Mais rien ne permet de dire que a est égal à b. On donne même un contre-exemple : *Blaise* $\ggg$ *Nick* et *Nick* $\ggg$ *Blaise*. mais pourtant, on n'a pas *Blaise* $\ggg$ *Nick* (non, ils n'ont même pas la même note de physique, ce sont bien deux élèves distincts).

On peut quand même les « trier » par groupes

élève	Fiona	$\ggg$	Élise	$\ggg$	Alvin	$\ggg$	Jane	Omid	$\ggg$	Blaise	Nick	Gaël	$\ggg$	...	$\ggg$	Dan
maths	14		13		12		11	11		10	10	10		jusqu à		5
physique	5		7		11		11	7		12	8	11				14

Rien ne permet de classer Jane et Omid avec cette relation. On a le symbole $\ggg$ « dans les deux sens ».

$\boxed{\text{Réflexivité}}$ On se donne un élève a quelconque. On vérifie $maths_a \geqslant maths_a$ et $physique_a \geqslant physique_a$. On reconnaît $a \blacktriangleright a$.

$\boxed{\text{Transitivité}}$ On se donne trois élèves a, b et c. On fait une hypothèse double : $a \blacktriangleright b$ et $b \blacktriangleright c$.
On traduit les quatre hypothèses : $maths_a \geqslant maths_b$ et $maths_b \geqslant maths_c$, $physique_a \geqslant physique_b$ et $physique_b \geqslant physique_c$. Par transitivité dans $\mathbb{R}$ on déduit $maths_a \geqslant maths_c$ et $physique_a \geqslant physique_c$. On reconnaît évidemment $a \blacktriangleright c$.

Tiens, au fait, on a bien une telle situation dans notre classe fictive ?
Oui, *Alvin* $\blacktriangleright$ *Jane* $\blacktriangleright$ *Katia*.

$\boxed{\text{Antisymétrie}}$ Quel contre-exemple donner ? Peut on trouver deux élèves qui ont même note de maths mais aussi même note de physique, et qui pourtant sont distincts ?
Ici, avec nos données, le cas ne se rencontre pas. Sur cet ensemble, la relation $\blacktriangleright$ est antisymétrique.

---

3. l'énoncé parle de l'inverse, c'est donc que $10-3.a$ est non nul ; de toutes façons, avec a entier, $10-3.a$ est non nul

Pour la dernière relation, écrire $a \succcurlyeq b \succcurlyeq c$ signifie sans doutes $a \succcurlyeq b$ et aussi $b \succcurlyeq c$.
Mais ceci sous-entend il aussi $a \succcurlyeq c$? Ce n'est pas acquis. A cause du « ou ».

Il se peut que a soit meilleur que b en maths, puis que b soit meilleur que c en physique. mais qu'ensuite, a ne soit pas comparable favorablement à c en maths ni en physique.

Prenons un contre-exemple avec cet objectif a bat b en maths (mais pas en physique), b bat c en physique (mais pas en maths).
:

élève	a=Omid	$\succcurlyeq$	b=Hannah
maths	11	$\geqslant$	9
physique	7		15

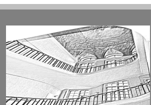
b=Hannah	$\succcurlyeq$	c=Alvin
9		12
15	$\geqslant$	11

a=Omid	$\not\succcurlyeq$	c=Alvin
11	$\ngeqslant$	12
7	$\ngeqslant$	11

Des exercices sans difficulté pour qui est matheux, c'est à dire pour qui raisonne.
Mais il faut avoir de l'initiative, avoir compris les définitions, et pas juste les appliquer.
Le plus difficile pour certains.

La dernière relation est en deux temps. On compare les notes de maths. Si $maths_a$ est plus grand que $maths_b$ alors $a \unrhd b$ (logique, non ?). Si les deux élèves ont égalité sur la note de maths (on en a qui ont tous deux 11 par exemple) alors on compare les notes de physique. A notes de maths égales, c'est $physique_a \geqslant physique_b$ qui permet à a d'être au dessus de b.
On trie donc suivant la note de maths et en cas d'ex-aequo, on trie sur la note de physique :

élève	Fiona	Élise	Alvin	Jane	Omid	Blaise	Gaël	Nick	Hannah	Marc	Clovis	Katia	Lea	Dan
maths	14	13	12	11	11	10	10	10	9	8	8	7	6	5
physique	5	7	11	11	7	12	11	8	15	14	10	10	13	14



Diagonalisation. IS11

On pose $M = \begin{pmatrix} a & 15 \\ -9 & b \end{pmatrix}$, puis $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. On nous dit que U et V sont vecteurs propres, on décide de noter α et β les deux valeurs propres associées. Les relations $M.U = \alpha.U$ et $.V = \alpha.V$ et $Tr(M) = -2$ donnent un système que j'écris tout de suite cinq équations pour quatre inconnues

$$\begin{array}{ccccccl} a & & +15 & = & \alpha & & L1 \\ & b & -9 & = & \alpha & & L2 \\ 5.a & & +43 & = & & 5.\beta & L3 \\ & 3.b & -45 & = & & 3.\beta & L4 \\ a & +b & & = & & -2 & L5 \end{array}$$

c'est peut être trop d'équations. Il faudra être prudent et ne pas s'arrêter à l'exploitation de seulement quatre d'entre elles.
Par condition nécessaire $L1 + L2 - L5$ on trouve la valeur de α : $\alpha = 2$.
On reporte et on trouve a (avec $L1$), puis b (avec $L2$). On reporte aussi dans $L3$ pour avoir β et on vérifie.

$$\begin{pmatrix} -13 & 15 \\ -9 & 11 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -13 & 15 \\ -9 & 11 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = -4. \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si vous préférez : $\begin{pmatrix} -13 & 15 \\ -9 & 11 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ ou même

$$\begin{pmatrix} -13 & 15 \\ -9 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

L'élève un peu gentil va calculer ensuite par concaténation (et récurrence pour D^n) :

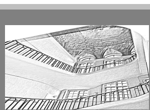
$$\begin{pmatrix} -13 & 15 \\ -9 & 11 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \textit{truc moche}$$

il calculera la somme des termes diagonaux du truc moche et trouvera $\boxed{2^n + (-4)^n}$

L'élève avec un cerveau et pas juste une moelle épinière dira :

$$Tr(M^n) = Tr(P.D^n.P^{-1}) = Tr(P^{-1}.P.D^n) = Tr(D^n) = 2^n + (-4)^n$$

Ça donne le même résultat, mais avec beaucoup moins d'efforts. Le pire est que ce sont ceux qui savent faire le moins d'efforts qui vont aller dans les meilleures écoles. Logique puisque les meilleures écoles cherchent les gens intelligents.

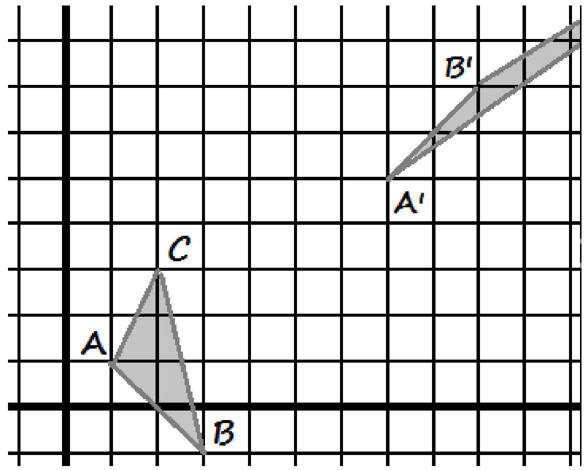


Une matrice qui fait bouger des points. IS11

La matrice M a quatre coefficients et transforme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On cherche les coordonnées des points sur le quadrillage et on traduit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \ et \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$



L'élève lourdingue écrit un système et le résout. L'élève matheux (qui veut éviter les calculs en réfléchissant d'abord) transforme en un seul petit système et résout alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ayant la matrice, on trouve $\boxed{C' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \end{pmatrix}}$

Le tout sans bidouiller un truc en tirant des traits imprécis.

Plus astucieux encore : $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{11}{4}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}.\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et donc

$$M.C = \frac{11}{4}.M.A - \frac{1}{4}.M.B = \frac{11}{4}.\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}.\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Qui a trouvé ça est digne du grand cordon de l'algèbre linéaire.