LYCEE CHARLEMAGNE 2023 2024

Mardi 12 décembre

M.P.S.I.2

IS12

♡ 0 ♡ Montrez : $\forall \overrightarrow{a} \in E,\ 0 \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ ($(E, +, .)$ espace vectoriel). 2 pt.

♡ 1 ♡ Montrez que dans un groupe $(G, *)$, le neutre est unique. 1 pt.

◊ 0 ◊ On pose $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c}\begin{pmatrix} 3 \\ \\ 7 \end{pmatrix}$. Trouvez le coefficient qui manque pour que l'angle entre $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ soit le même qu'entre $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$.(entier entre -10 et 10). 3 pt.

◊ 1 ◊ On se donne n réels a_1 à a_n et on définit leur moyenne arithmétique $\dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ et leur moyenne quadratique $\sqrt{\dfrac{(a_1)^2 + \ldots + (a_n)^2}{n}}$(racine de la moyenne des carrés). En écrivant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le vecteur $(a_1, \ldots a_n)$ et un vecteur bien choisi aussi dans $\mathbb{R}^n$ indiquez laquelle des deux moyennes est la plus grande. 2 pt.

◊ 2 ◊ Quel est le maximum de $t \longmapsto 6.\cos\left(t - \dfrac{\pi}{3}\right) + 4.\cos\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ quand t décrit $\mathbb{R}$? (dériver ? bof) 3 pt.

◊ 3 ◊ Montrez que $x \longmapsto x^2 - \sqrt{2}.x$ est injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. 2 pt.

◊ 4 ◊ Montrez que $x \longmapsto x + \cos(x)$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 2 pt. .

♠ 0 ♠ On donne $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 6 \\ 6 & 5 & \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 4 \\ 10 & & \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 7 & & \\ & & 1 \\ & 5 & \end{pmatrix}$ et on travaille avec les entiers de 0 à 10 et les opérations modulo 11. Complétez les matrices. Calculez $Tr(A)$, $Tr(A^2)$ et $Tr(A^3)$ (toujours modulo 11 rappelons le). 3 pt.

♠ 1 ♠ On affirme que A est diagonalisable de spectre $[a,\ b,\ c]$. calculez $a + b + c$, $a^2 + b^2 + c^2$, $a.b + a.c + b.c$, $a^3 + b^3 + c^3$, $(a + b + c).(a^2 + b^2 + c^2 - a.b - b.c - c.a)$ et $a.b.c$. Déduisez le polynôme $C(X)$ de degré 3 de racines a, b et c. 3 pt.

♠ 2 ♠ Montrez que 1 est une valeur propre et trouvez les deux autres. 2 pt.

♠ 3 ♠ Donnez une matrice de passage P. 2 pt.

♠ 4 ♠ Montrez $C(A) = 0_{3,3}$ (dans un polynôme en A, la matrice A^0 c'est I_3 évidemment). 2 pt.

♡ 2 ♡ $\blacktriangleleft$ est une relation d'ordre sur un ensemble E. Quantifiez[1] « il existe un élément plus petit que tous les autres ». 1 pt. Quantifiez « il n'existe pas d'élément plus grand que tous les autres » (sachant que $\nexists$ n'existe pas comme symbole mathématique). 2 pt.

◊ 5 ◊ Vrai ou faux ? Argumentez. 6 pt.

$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ \sin(a) = 2.\sin(b)$	$\exists a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ \sin(a) = 2.\sin(b)$ *et* $\cos^2(a) = \cos(b)$	
$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ 2.\sin(a) = \sin(b)$	$\exists b \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ \sin(a) \leqslant \sin(b)$	$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ \sin(a) - 1 \leqslant 1 + \sin(b)$
$\exists b \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ \sin(a) = 2.\sin(b)$	$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (\cos(a) > \cos(b))$	

♯ 0 ♯ Écrivez une procédure qui prend en entrée une matrice carrée[2] et retourne le bloc « Nord Ouest » de la matrice (arrondi à la moitié par défaut). 2 pt.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

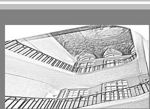
♣ 0 ♣ Quelle est la somme des chiffres de l'entier $9 + 99 + 999 + \ldots + 99\ldots99$ (cent termes) ? 3 pt.

---

1. quantifier, c'est écrire avec des $\forall$ et autres symboles propres
2. liste de listes

LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 12 décembre
M.P.S.I.2

2023 2024
IS12
CORRECTION



Vecteur nul dans un espace vectoriel. IS12

Nos démonstrations sont des classiques. On se donne un vecteur $\overrightarrow{a}$ et un réel λ.
On calcule un enchainement de trivialités utilisant « $\overrightarrow{0}$ est neutre » et la distributivité :

$$\overrightarrow{0} + 0 \times \overrightarrow{a} = 0 \times \overrightarrow{a} = (0+0) \times \overrightarrow{a} = 0 \times \overrightarrow{a} + 0 \times \overrightarrow{a}$$

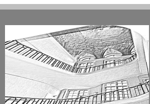
et on ajoute de chaque côté l'opposé de $0 \times \overrightarrow{a}$ et il reste $\overrightarrow{0} = 0 \times \overrightarrow{a}$.

Avec l'autre distributivité on a aussi

$$\lambda \times \overrightarrow{0} = \lambda \times (\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}) = \lambda \times \overrightarrow{0} + \lambda \times \overrightarrow{0}$$

on ajoute de chaque côté l'opposé de $\lambda \times \overrightarrow{0}$.

Et pour ce qui est du neutre dans un groupe. On en prend deux e et ε et on calcule $e * \varepsilon$. Comme ε est neutre, on a $e = e * \varepsilon$. Et comme e est neutre, on a $e = e * \varepsilon = \varepsilon$.



Trois vecteurs, des angles. IS12

On nous a donné $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c}\begin{pmatrix}3\\y\\7\end{pmatrix}$. On mesure l'angle entre $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$

$$\cos(\widehat{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}) = \frac{1.1+1.5+2.9}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}.\sqrt{1^2+5^2+9^2}.} = \frac{24}{\sqrt{6}.\sqrt{107}}$$

On mesure l'autre angle (contenant l'inconnue y)

$$\cos(\widehat{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})}) = \frac{1.3+1.y+2.7}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}.\sqrt{3^2+y^2+7^2}.} = \frac{17+y}{\sqrt{6}.\sqrt{58+y^2}}$$

On va donc simplement exiger $\frac{24}{\sqrt{6}.\sqrt{107}} = \frac{17+y}{\sqrt{6}.\sqrt{58+y^2}}$ soit après simplifications

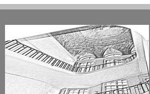
$$24.\sqrt{58+y^2} = \sqrt{107}.(17+y)$$

Le calcul est ensuite moche avec des risques d'erreur :

$$(17+y) > 0 \; et \; (58+y^2).576 = 107.(y+17)^2$$

Je pourrais terminer avec mention « calculable », mais je poursuis $469.y^2 - 3638.y + 2485 = 0$ et une racine est 7 tandis que l'autre est $\frac{355}{489}$.
Les deux conviennent.

Même avec l'indication « entier entre -10 et 10 », on tâtonne. Sauf si on se dit que ce serait bien d'avoir $\sqrt{58+y^2} = \sqrt{107}$ ce qui est ici le cas.



Comparaison de moyennes. IS12

J'ai bien envie de dire que la plus petite est celle qui réussit à être négative dans certains cas

$$\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{(a_1)^2 + \ldots + (a_n)^2}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.\Big(\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2\Big)^{1/2}$$

Évidemment, on n'a rien prouvé ici, mais on a une piste.
Comment faire intervenir ce qui s'écrit $(x_1.y_1 + \ldots + x_n.y_n)^2 \leqslant ((x_1)^2 + \ldots + (x_n)^2).((y_1)^2 + \ldots + (y_n)^2)$ et le vecteur de l'énoncé ?
On définit $\overrightarrow{u}$ de composantes $(a_1, \ldots, a_n)$ et $\overrightarrow{v}$ de composantes $(1, \ldots 1)$.
Leur produit scalaire est $a_1 + \ldots + a_n$.
La norme du premier est $\sqrt{(a_1)^2 + \ldots + (a_n)^2}$. la norme du second est $\sqrt{1^2 + \ldots + 1^2}$ c'est à dire $\sqrt{n}$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz dit alors

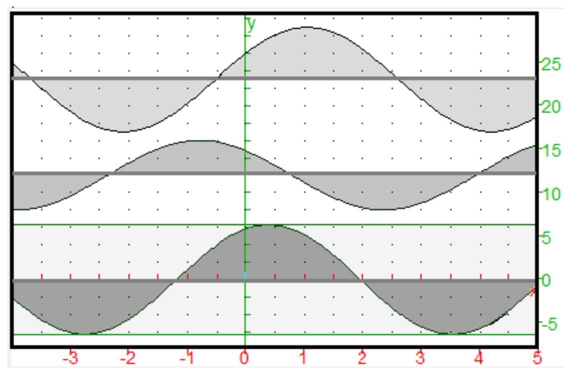
$$a_1 + \ldots + a_n \leqslant \sqrt{(a_1)^2 + \ldots + (a_n)^2}.\sqrt{n}$$

et en divisant par n (positif) on a le résultat.

Le maximum d'un signal sinusoïdal. IS12

La somme $t \longmapsto 6.\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + 4.\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ est finalement une combinaison linéaire de sinus et de cosinus.

$6.\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$	$3.\cos(t)$	$3.\sqrt{3}.\sin(t)$
$4.\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$	$2.\sqrt{2}.\cos(t)$	$-2.\sqrt{2}.\sin(t)$
somme	$3 + 2.\sqrt{2}.\cos(t)$	$+(3.\sqrt{3} - 2.\sqrt{2}).\sin(t)$
φ à déterminer	$\sqrt{(3+2.\sqrt{2})^2 + (3.\sqrt{3} - 2.\sqrt{2})^2}.\cos\left(t - \varphi\right)$	



On ne cherchera pas à calculer φ puisqu'on ne nous demande pas quand le maximum est atteint. Il suffit de dire qu'il vaut $\sqrt{52 + 12.(\sqrt{2} - \sqrt{6})}$ (pour le physicien $6,3$).

Diagonalisation. IS12

On nous donne $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 6 \\ 6 & 5 & a \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 4 \\ 10 & & \end{pmatrix}$. Pour trouver 10 en ligne 3 colonne 1 de A^2, on a forcément $10 = 7.6 + 5.5 + 6.a$.
On trouve $10 = 9 + 3 + 6.a$ puis $6.a = -2 = 9$. On multiplie par l'inverse de 6 (c'est 2) : $a = 9.2 = 18 = 7$.
Maintenant qu'on a A, il ne reste qu'à faire tomber les colonnes sur les lignes, en réduisant à chaque fois modulo 11. On a des coefficients pour être sûr de ne pas s'être trompé.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 6 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 4 \\ 10 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule les traces : $Tr(A) = 10$, $Tr(A^2 = 10$ et $Tr(A^3) = 0$.

On sait que la diagonalisation va donner $M^n = P.D^n.P^{-1}$ pour tout n et donc $Tr(M^n) = Tr(D^n) = a^n + b^n + c^n$ pour tout n.

On résume

$a+b+c$	$a^2+b^2+c^2$	$a.b+a.c+b.c$	$a^3+b^3+c^3$	$(a+b+c).(a^2+b^2+c^2-a.b-a.c-b.c)$
10	10	1	0	$(10).(10-1)=3$

On a trouvé $a.b+a.c+b.c = \dfrac{(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2)}{2}$ classiquement et on a calculé $10^2-10=1-10=2$.
Mais si on développe et simplifie $(a+b+c).(a^2+b^2+c^2-a.b-a.c-b.c) = a^3+b^3+c^3-3.a.b.c$.
Ceci va nous permettre de trouver $3.a.b.c=9$ puis $a.b.c=3$.

On a les trois fonctions symétriques des racines, on trouve le polynôme caractéristique par les formules de Viète

$$(X-a).(X-b).(X-c) = X^3-S.X^2+D.X-P = X^3-10.X^2+X-3 = X^3+X^2+X+8$$

Une racine évidente ? Oui, il y a 1. $1+1+1+8=0$.
On factorise : $(X-1).(X^2+2.X+3)$, on calcule un discriminant $\Delta = 4-4.3=-8=3$. C'est le carré de 5.
On a donc $(-2+5)/2$ ce qui fait 7 et $(-2-5)/2$ ce qui fait 2.

Bilan : $\boxed{\text{spectre } \{1,\ 2,\ 7\}}$ et on confirme la somme, le produit et tout ce qui va avec...

Pour ce qui est de la matrice de passage, on découpe le travail, vecteur propre par vecteur propre (ou colonne par colonne si on n'a pas le recul) :

$\begin{pmatrix}7&5&6\\5&7&6\\6&5&7\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\y\\z\end{pmatrix}=1.\begin{pmatrix}1\\y\\z\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&5&6\\5&7&6\\6&5&7\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\y\\z\end{pmatrix}=2.\begin{pmatrix}1\\y\\z\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&5&6\\5&7&6\\6&5&7\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\y\\z\end{pmatrix}=7.\begin{pmatrix}1\\y\\z\end{pmatrix}$
$5.y+6.z=5$ $6.y+6.z=6$ et vérification	$5.y+6.z=6$ $5.y+6.z=6$ et $5.y+5.z=5$	$5.y+6.z=0$ $6.z=6$ et vérification
$\begin{pmatrix}7&5&6\\5&7&6\\6&5&7\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=1.\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&5&6\\5&7&6\\6&5&7\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=2.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&5&6\\5&7&6\\6&5&7\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=7.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

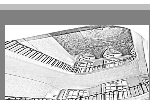
On a une matrice $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ et on a des matrices $\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\\alpha&0&\gamma\\0&\beta&\gamma\end{pmatrix}$. On ne nous demande pas de l'inverser. tant mieux !

On doit ensuite calculer $A^3+A^2+A+8.I_3$ et on trouve la matrice nulle.

C'est direct, mais c'est génial aussi de passer par ce qui suit :

$$A^3+A^2+A+8.I_3 = P.D^3.P^{-1}+P.D^2.P^{-1}+P.D.P^{-1}+P.I_3.P^{-1} = P.(D^3+D^2+D+8).P^{-1}$$

$$A^3+A^2+A+8.I_3 = P.\begin{pmatrix}1^3+1^2+1+8&0&0\\0&2^3+2^2+2+8&0\\0&0&7^3+7^2+7+8\end{pmatrix}.P^{-1} = P.0_{3,3}.P^{-1} = 0_{3,3}$$



Injectivité. IS12

On définit $f = x \longmapsto x^2-\sqrt{2}.x$. On se donne a et b dans $\mathbb{Q}$ et on suppose $f(a)=f(b)$ (objectif $a=b$).
On traduit : $a^2-b^2-\sqrt{2}.a+\sqrt{2}.b=0$ puis $(a-b).(a+b)-\sqrt{}.(a-b)=0$.
On factorise : $(a-b).(a+b-\sqrt{2})=0$. Par intégrité : $a-b=0$ ou $a+b=\sqrt{2}$.
Mais a et b sont rationnels. On ne peut donc pas avoir $a+b=\sqrt{2}$ (rationnel=irrationnel ?).
Il ne reste que $a-b=0$ c'est à dire $a=b$.

Remarque : on a raisonné avec l'hypothèse « a et b rationnels » (et on a déduit « a + b rationnel »).
Mais nulle part on n'a trainé des $a=\dfrac{p}{q}$ et $b=\dfrac{r}{s}$ avec p, q, r et s entiers.
Il faut savoir être algébriste (et matheux) : considérer les objets pour ce qu'ils sont et pas forcément pour « comment on les écrit ».

Pour l'application $x \longmapsto x + \cos(x)$, doit on prouver l'injectivité puis la surjectivité ?
Comment passer de $a - b + \cos(a) - \cos(b) = 0$ à $a = b$? pas évident (quoique faisable).
Et ensuite, comment trouver x vérifiant $x + \cos(x) = y$? Pas évident vu le mélange des genres.

Alors tant pis, on va sortir les gros arguments de l'analyse.
• La dérivation pour la stricte monotonie.
L'application $x \longmapsto x + \cos(x)$ a pour dérivée $x \longmapsto 1 - \sin(x)$. Cette dérivée est positive ou nulle : f est croissante. Cette dérivée ne s'annule qu'en des points isolés, la croissance est stricte.
Par stricte croissance, cette application est injective.

• Le théorème des valeurs intermédiaires pour la surjectivité.
On se donne y quelconque. Il existe au moins un point où f est plus petite que y (prendre en un multiple de $2.\pi$ bien chois) et un point où elle est plus grande que y (là aussi, un multiple de $2.\pi$ bien choisi). L'application est continue, le domaine de définition est un intervalle. Elle atteint toute valeur intermédiaire.

En prépas, on sépare bien en deux étapes. On fout à la poubelle le « corolaire du théorème des valeurs intermédiaires » qui est une escroquerie dans sa formulation. C'est deux théorèmes en un. valeurs intermédiaires pour la surjectivité ; stricte monotonie pour l'injectivité. Allez vous l'appeler alors « corolaire du théorème d'injectivité des applications strictement monotones » ? Non. Ce que vous devez comprendre c'est « qu'est ce qu'il y a derrière chaque outil que j'utilise ». Et ça vous permet de l'utiliser intelligemment, et de ne pas avoir des boites noires que vous ne comprenez pas.

Des $\forall$ et des $\exists$. IS12

$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ \sin(a) = 2.\sin(b)$	$\exists a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ \sin(a) = 2.\sin(b)$ *et* $\cos^2(a) = \cos(b)$
(1) - Vrai	(2) - Vrai

$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ 2.\sin(a) = \sin(b)$	$\exists b \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ \sin(a) \leqslant \sin(b)$	$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ \sin(a) - 1 \leqslant 1 + \sin(b)$
(3) - Faux	(4) - Vrai	(5) - Vrai

$\exists b \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ \sin(a) = 2.\sin(b)$	$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (\cos(a) > \cos(b))$
(6) - Faux	(7) - Vrai

(1) - Pour a donné, on pose $b = Arcsin(\sin(a)/2)$. Il existe (et il dépend de a évidemment).

(2) - Prenons $a = b = 0$ et on a les égalités demandées.

(3) - Pour $a = \pi/2$, on ne pourra pas trouver b vérifiant $\sin(b) = 2$.

(4) - On prend $b = \pi/2$ et pour tout a, on a bien $\sin(a) \leqslant 1$.

(5) - Pour a et b quelconques donnés, on a toujours $\sin(a) - \sin(b) \leqslant 2$. Ou aussi $\sin(a) - 1 \leqslant 0 \leqslant 1 + \sin(b)$.

(6) - Si un tel b existait, on aurait pour tout a et tout a' : $2.\sin(a) = \sin(b)$ et $2.\sin(a)' = \sin(b)$. Par transitivité, l'application sinus serait constante.

(7) - Pour a donné, il suffit de choisir b vérifiant $\sin(b) \neq \sin(a)$. L'égalité $\sin(a) = \sin(b)$ est fausse, et donc l'implication $(\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (\ldots)$ est vraie.

Element plus grand que tous les autres. IS12

On doit quantifier qu'il existe un élément, dont le nom n'est pas donné dans l'énoncé. Ce sera donc à nous de le nommer : $\exists a \in E$.
Il faut dire qu'il minore tous les autres : $\forall b \in E,\ a \blacktriangleleft b$. On met bout à bout

$$\exists a \in E,\ \forall b \in E,\ a \blacktriangleleft b$$

On remplace $\nexists a \in E,\ \forall b \in E,\ b \blacktriangleleft a$ par

$$\forall a \in E,\ \exists b \in E,\ not(b \blacktriangleleft a)$$

(si on vous donne un élément quelconque, il n'a pas le droit de majorer tout le monde, c'est donc qu'il y a un élément (au moins un) qu'il ne majore pas.

Reste à se demander si $not(b \blacktriangleleft a)$ *c'est* $a \blacktriangleleft b$ *comme on le pense spontanément. Mais en fait, non ! Un élément peut très bien ne pas être comparable à un autre. Et dans ce cas, il ne le majore, ni le minore.*

Découpage de matrices. IS12

On va devoir récupérer la taille de la matrice et la diviser par 2 (division euclidienne, arrondie par défaut, pas de problème).

Ce sera `d = len(M)//2`

Il vaut mieux le faire une fois pour toutes que de redemander à chaque fois des for i in range(len(M)//2).

Ensuite, on ne garde que la première moitié des lignes de la matrice entrée : `M[i] for i in range(d)`
Mais pour chaque ligne `L[i]` on ne garde que la moitié `L[i][0 : d]` , ou même `L[i][ : d]` sachant que **Python** met `0` comme valeur de départ par défaut.

```
def nord_ouest(M) :
....d = len(M) // 2
....return [M[i][0 : d] for i in range(d)]
```

D'autres solutions sont possibles comme

```
def nord_ouest(M) : #list of list -> list of list
....d = len(M) // 2
....NO = [ ] #création de la matrice
....for i in range(d) :
........L = [ ] #création d'une ligne
........for k in range(d) : #parcours de la demi-ligne
............L.append(L[i][k]) #on ajoute l'élément de la matrice initiale
........NO.append(L) #la ligne est complète, on la met dans la matrice
....return NO #la matrice est complète on la retourne
```

Une somme avec plein de 9. IS12

On peut certes calculer ce nombre $9 + 99 + 999 + \ldots + 99\ldots999$ avec ses cent termes. En posant l'addition.
Mais il doit y avoir quelquechose à deviner en sommant les premiers.
Je propose de nommer cette somme S et de lui ajouter 100. Pourquoi ? Parce qu'on ajoute alors 1 à chacun des cent termes.
On a alors $S + 100 = 10 + 100 + 1000 + \ldots + 100\ldots000 = 111\ldots11110$.

Le dernier $100\ldots00$ *est* 10^{101}. *Et les nombre total a cent un chiffres : cent* 1 *et un* 0.

On revient en arrière : $\boxed{S = 1111\ldots\ 11010}$ (le chiffre des unités est un 0 et le chiffre des centaines aussi).

La somme des cent un chiffres vaut 99.