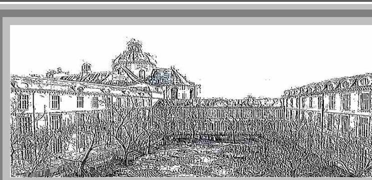
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 18 décembre
M.P.S.I.2



2023 2024

TD13

∘0∘ $(G, *)$ est un groupe. On enlève un élément, ça reste un groupe. Qui est G ?
$(G, *)$ est un groupe. On enlève deux élément, ça reste un groupe. Qui est G ? (deux solutions)
On pourra utiliser le théorème de Lagrange : le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe.

∘1∘ Dans $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{2014}$ quel est le plus grand terme, et que vaut il ? Même question avec $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{2014}$ *(évidemment, les deux questions sont liées)*.

∘2∘ Un couple de suites récurrentes vérifie : $u_0 = 1$, v_0 donné et pour tout n $\left\{ \begin{array}{rcrr} u_{n+1} & = & u_n & +2.v_n \\ v_{n+1} & = & 6.u_n & +2.v_n \end{array} \right|$. Existe-t-il des valeurs de v_0 pour lesquelles on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$?

∘3∘ ♡ La suite $(☻_n)$ est définie par $☻_{n+2} = ☻_{n+1} + 20.☻_n$ avec $☻_0$ et $☻_1$ donnés. Déterminez a et b pour avoir $☻_0 = a + b$ et $☻_1 = 5.a - 4.b$. Montrez alors pour tout n : $☻_n = a.5^n + b.(-4)^n$.
Pouvez vous choisir $☻_0$ et $☻_1$ pour avoir $☻_{2018} = 2018$ et $☻_{2019} = 2019$?

∘4∘ Mon fils a eu 6 sur 20 *(en gym, pas en maths)*. La moyenne de classe est à 11. Il me dit : "*j'aurais eu cinq points de plus, j'aurais eu comme la moyenne*". Je lui dis "*non, car la moyenne de la classe aurait alors augmenté*". "*Ah oui, j'aurais du avoir* $11,2$ *alors*". Combien y a-t-il d'élèves dans la classe de mon fils ?

∘5∘ Calculez pour tout réel a strictement positif $\displaystyle\int_{x=1/a}^{a} \Big(\int_{y=0}^{1} \frac{dy}{x^2 + y^2} \Big).dx$.

∘6∘ Complétez et diagonalisez $\begin{pmatrix} & 7 \\ 1 & \end{pmatrix}$ pour que ses valeurs propres soient 3 et -5 *(s'il y a plusieurs solutions, traitez les toutes)*.
Pouvez vous compléter $\begin{pmatrix} & 7 \\ 1 & \end{pmatrix}$ pour qu'elle ne soit pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Pouvez vous compléter $\begin{pmatrix} & 7 \\ 1 & \end{pmatrix}$ pour qu'elle ne soit pas diagonalisable, même sur $\mathbb{C}$.

∘7∘ ♡ Une suite récurrente u vérifiant $u_{n+2} = 12.u_n - u_{n+1}$ pour tout n reste de signe constant. Montrez que c'est une suite géométrique, et calculez u_{100}/u_5.

∘8∘ Est il possible de choisir a réel pour que les suites récurrentes "$u_{n+2} = a.u_{n+1} - u_n$ pour tout n" soient toutes périodiques de période 9 ?
Est il possible de choisir a et b rationnels pour que les suites récurrentes "$u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$ pour tout n" soient toutes périodiques de période 12 ?

Est il possible de choisir a et b irrationnels pour que les suites récurrentes "$u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$ pour tout n" soient toutes périodiques de période 12 ?
Est-il possible de choisir a, b, c et d réels pour que dans le couple $(u,\ v)$ de suites vérifiant $\left\{ \begin{array}{rcrr} u_{n+1} & = & a.u_n & +b.v_n \\ v_{n+1} & = & c.u_n & +d.v_n \end{array} \right|$ pour tout n, la suite u soit périodique de période 6.
Montrez que si u est périodique, alors v l'est aussi.

∘9∘ ♡ Soit $(E, *)$ une structure interne, dotée d'un neutre et vérifiant :
$\forall (a,\ b,\ c) \in E^3,\ a * (b * c) = (a * c) * b$. Montrez que la loi est commutative et associative.

∘10∘ ♡ Montrez que les matrices de taille 2 sur 2 à déterminant non nul forment un groupe pour la multiplication, non

commutatif.
Montrez que l'ensemble des matrices de taille 2 sur 2 à coefficients entiers et à déterminant 1 en forme un sous-groupe.
En est il de même pour les matrices de taille 2 sur 2 à coefficients entiers et à déterminant 1 ou -1.
Montrez que les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 2.a & a \\ -2.a & -a \end{pmatrix}$ avec a décrivant $\mathbb{R}^*$ forment un groupe pour la multiplication, mais pas un sous-groupe du groupe précédent...

∘11∘

N	diviseurs de N	somme des diviseurs non triviaux	somme des carrés des chiffres
125	1, 5, 25, 125	$5+25=30$	$1^2+2^2+5^2=30$
581	1, '7, 83, 581	$7+83=90$	$5^2+8^2+1^2=90$
8 549	1, 83, 103, 8549	$83+103=186$	$8^2+5^2+4^2+9^2=?$
16 999	1, 89, 191	$89+191=?$	$1^2+6^2+9^2+9^2+9^2=280$

Un nombre parfait canadien est un nombre dont la somme des diviseurs propres est la somme des carrés de ses chiffres *(on se demande pourquoi un jour au congrès de la Canadian Mathématical Society à l'Université du Manitoba des gens se sont posé la question dans un couloir entre deux conférences* [1]*)*. Écrivez un programme qui cherche les 7 premiers nombres supercanadiens *(la somme des diviseurs propres est la somme des cubes de ses chiffres)*, et vérifiez à la main que 160 en fait partie.

∘11∘ On a posé : $n = 88\ 825$ et $p = 7\ 267$. Votre voisin a écrit : $192\ 171.p - 15\ 722.n = 7$. Vous en déduisez : $p.g.c.d.(n,\ p) = 7$.
Vous avez tort. Pourquoi ?

∘12∘ On rappelle que $\{1,\ 2, \dots 18\}$ est un groupe pour la multiplication modulo 19. Donnez moi quand même pour vérifier la liste des inverses des éléments :

a	1	2	3	4	5	6	7	8	8	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a^{-1}																		

Bonus : calculez la somme des éléments de la deuxième ligne.

∘13∘ ♡ Montrez que $\phi = (a,\ b) \longmapsto 2^a.(2.b+1)$ est bijective de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.
Ecrivez un script Python qui prend en entrée n et retouve son antécédent par ϕ.

∘14∘ Soient A et B deux ensembles. On définit $A \Subset B$ si il existe une application injective de A dans B.
♡ Montrez que cette relation est transitive et réflexive, mais pas symétrique ni antisymétrique (contre-exemples).

♠ 0 ♠ On veut maintenant montrer que si il existe une application injective f de A dans B et une application injective g de B dans A alors il existe au moins une bijection de A dans B.

On rappelle

pour $X \subset A$	on définit	$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = \{b \in B \mid \exists a \in A,\ y = f(a)\}$
X partie de A		$f(X)$ partie de B
pour $Y \subset B$	on définit	$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$
Y partie de B		$f^{-1}(Y)$ partie de A

On rappelle que la notation $f^{-1}(Y)$ ne s'applique qu'à une partie et qu'on ne peut écrire $x = f^{-1}(y)$ que si f est bijective, ou à la rigueur y dans $f(X)$ (ensemble image, y a au moins un antécédent) et f injective (pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur le choix de x).

Montrer que si $g(B)$ est égal à A alors g est une bijection de B dans A.

♠ 1 ♠ On suppose donc $g(B) \neq A$. On pose $X_0 = A - g(B)$ (c'est à dire $X_0 = \{a \in A \mid \forall b \in B,\ g(b) \neq a\}$). Justifiez l'existence de la suite d'ensembles (X_n) définie par $\forall n,\ X_n = g(f(X_n))$. Montrez que chaque X_n est une partie non vide de A non vide, de même que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

♠ 2 ♠ On pose enfin $X' = A - X$. Quantifiez $a \in X'$.

♠ 3 ♠ Montrez : $\forall x \in X,\ g(f(x)) \in X$.

♠ 4 ♠ Justifiez $\forall a \in X',\ \exists! b \in B,\ a = g(b)$.
On définit alors φ sur A par $\varphi(a) = f(a)$ si $a \in X$ et $\varphi(a)$ est l'unique antécédent de x par g si a est dans X' (voir question précédente).

1. *si, pour le plaisir de chercher, c'est ce qui caractérise les mathématiciens et mathématiciennes et fait que les physiciens les regardent avec les yeux surpris du « à quoi ça sert » ?*

$\boxed{\clubsuit 0 \clubsuit}$ Pour se mettre en situation le temps d'une question : $A = B = \mathbb{N}$ et $f = g = n \longmapsto n+1$ pouvez vous déterminer X, X' et φ ?

$\boxed{\spadesuit 5 \spadesuit}$ Justifiez : $\varphi(X') = g^{-1}(X')$ et $\varphi(X) = f(X)$.
$\boxed{\spadesuit 6 \spadesuit}$ Montrez : $\varphi(X) \cap \varphi(X') = \emptyset$.

$\boxed{\spadesuit 7 \spadesuit}$ Montrez par disjonction de cas $\forall (a, \alpha) \in A^2,\ \varphi(a) = \varphi(\alpha) \Rightarrow a = \alpha$

	$a \in X$	$a \in X'$
$\alpha \in X$		
$\alpha \in X'$		

$\boxed{\spadesuit 8 \spadesuit}$ Montrez par disjonction de cas : $\forall y \in B,\ \exists a \in A,\ \varphi(a) = y$

$g(y) \in X'$	$g(y) \in X$

$\boxed{\spadesuit 9 \spadesuit}$ Concluez.

$\boxed{\circ 15 \circ}$ ♡ Résolvez $\sum\limits_{k=n+1}^{2.n} k \geqslant 10^5$.

Résolvez $2. \sum\limits_{k=n}^{2.n} k^3 \geqslant 15. \sum\limits_{k=0}^{n^2} k$.

$\boxed{\circ 16 \circ}$ ♡ Montrez que $\left(2.\sqrt{n} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ et $\left(2.\sqrt{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ sont adjacentes.
Couple de suites adjacentes : l'une croit, l'autre décroit, celle qui décroit majore celle qui croit, et la différence tend vers 0.

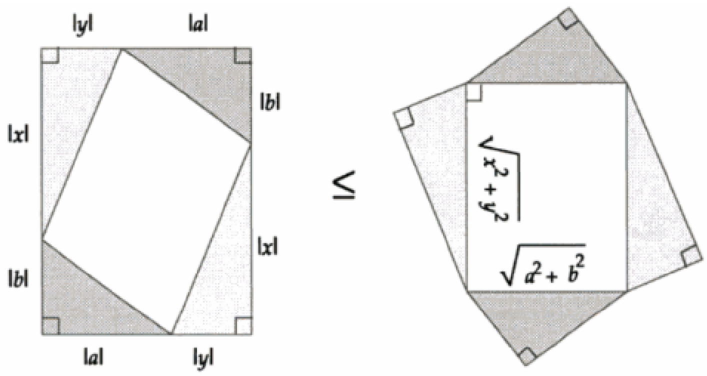
$\boxed{\circ 17 \circ}$ On note S^+ l'ensemble des matrices symétriques de taille 2 (c'est à dire de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$) dont la trace et le déterminant sont strictement positifs.
Montrez que S^+ est stable par addition.
Est il stable par multiplication ? Contient il I_2 ? Est il stable par passage à l'inverse ?
On définit la relation $\blacktriangleleft$ par $\forall (A, B) \in (S^+)^2,\ (A \blacktriangleleft B) \Leftrightarrow (B - A \in S^+)$.
Montrez que c'est une relation d'ordre (réflexvive antisymétrique et transitive).
Cet ordre est il total (deux matrices prises au hasard sont elles forcément comparables, ou bien peut on n'avoir ni $A \blacktriangleleft B$ ni $B \blacktriangleleft A$) ?
Existe-t-il une matrice de S^+ plus petite que toutes les autres ?
Et si on travaille parmi les matrices de S^+ à coefficients entiers ?

$\boxed{\circ 18 \circ}$

On se place dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ muni de la base canonique orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Pour tout triplet de vecteurs $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$, on définit la matrice G (dite « matrice de Gram ») de terme général $g_i^k = \overrightarrow{v_i}.\overrightarrow{v_k}$ (produit scalaire des deux vecteurs) : $\begin{pmatrix} ||\overrightarrow{u_1}||^2 & \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & ||\overrightarrow{u_2}||^2 & \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3} & \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3} & ||\overrightarrow{u_3}||^2 \end{pmatrix}$
Montrez : $Tr(G) \geqslant 0$ et $Tr(Com(G)) \geqslant 0$ (comatrice).
Montrez aussi $Tr(Com(G))$ est nulle si et seulement si les trois vecteurs sont colinéaires.

Rappel : La comatrice de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

$\boxed{\circ 19 \circ}$ Un explorateur prétend être allé dans un pays étrange où il y a des chats noirs et des chats blancs. Les chats sont des animaux très propres qui passent leur temps à se laver ou même à laver les autres *(j'ai d'abord voulu raconter ça avec des bonobos, mais je ne savais plus trop ce qu'ils faisaient)*. Chaque chat dispose de la liste des chats qu'il peut laver *(lui même peut ou non en faire partie)*. Quelle que soit la liste à laquelle vous pensez, il y a un chat dont c'est la lave-liste *(pas love-list...)*. Il y a donc un chat "sale" qui ne lave personne. Tiens, existe-t-il un chat qui ne lave que lui même ? Deux chats différents ont des listes différentes. Un chat qui se lave lui même est forcément blanc. Un chat qui ne se lave pas lui même est forcément noir..
De quelle couleur est le chat qui ne lave que les chats noirs ?



$$(|a|+|y|)(|b|+|x|) \leq 2\left(\frac{1}{2}|a||b|+\frac{1}{2}|x||y|\right)+\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\therefore\ |ax+by| \leq |a||x|+|b||y| \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

Comparez
$2.\Big(\sum_{i\leqslant n} a_i.b_i\Big)^2+\sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}}(a_i.b_j-a_j.b_i)^2$
et $\Big(\sum_{i\leqslant n}(a_i)^2\Big).\Big(\sum_{j\leqslant n}(b_j)^2\Big)$.
Retrouvez l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Montrez :
$a.\cos(t)+b.\sin(t)\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

∘20∘

∘21∘ Soient a, b, c et d quatre réels. Montrez : $(a^5+b^5+c^5+d^5)^2\leqslant(a^4+b^4+c^4+d^4).(a^6+b^6+c^6+d^6)$.

∘22∘ Montrez : $\int_0^1|\ln(t)|^n.dt=n!$ pour tout entier naturel n. Montrez alors $(n+m)!\leqslant\sqrt{(2.n)!.(2.m)!}$. Pouvez vous le prouver sans passer par les intégrales ?

∘23∘ Montrez pour α et β réels positifs : $\alpha+\beta\geqslant 2.\sqrt{\alpha.\beta}$. Soient $[a_1,\dots a_n]$ et $[b_1,\dots b_n]$ deux listes de réels, on pose $A=\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2$, $B=\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2$ et $P=\sum_{k=1}^{n}a_k.b_k$ *(supposé non nul)*. Montrez : $\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{(a_k)^2.B}{P^2}+\frac{(b_k)^2}{B}\Big)\geqslant 2.\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k.b_k}{P}$. Retrouvez l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

∘24∘ f est de classe C^2, nulle en a et b. Montrez
$\Big(\int_a^b(f'(t))^2.dt\Big)^2\leqslant\Big(\int_a^b f(t).f''(t).dt\Big)^2\leqslant\int_a^b(f(t))^2.dt.\int_a^b(f''(t))^2.dt$.

∘25∘ Mettez sous la forme $t\longmapsto A.\cos(t-\varphi)$ la fonction $t\longmapsto a.\cos(t)+\sqrt{1-a^2}).\sin(t)$ sachant que a est un réel de $]-1,\ 1[$.

∘26∘ Calculez $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}ch(k.t)$ (noyau de Dir*hyp*chlet ?).

∘27∘ ♡ On pose $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Montrez : $\ln(n+1)\leqslant H_n\leqslant\ln(n)+1$ par un argument intégral. Déduisez que H_n est équivalent à $\ln(n)$ quand n tend vers l'infini.

Que pouvez vous dire de $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$?

Encadrez $H_{2.n}-H_n$ et montrez que cette quantité tend vers $\ln(2)$ quand n tend vers l'infini.
Quelle est la limite de $H_{3.n}-H_{2.n}$?

∘28∘ z est un complexe plus petit que 1 en module.
Montrez : $\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{+\infty}z^k$. Montrez $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{z^p}{1-z^{2.p}}=\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{z^{2.q+1}}{1-z^{2.q+1}}$.

∘29∘ Si f (dérivable) se décompose en $p+i$ avec p paire et i impaire, peut on affirmer que p et i sont dérivables.
Qui est alors la partie paire de f' et qui est sa partie impaire ?

∘30∘ ♡ Guillaume et Clément doivent vider un tonneau de cent litres. Guillaume le vide avec un broc de trois litres et Clément avec un broc de deux litres. Ils l'ont vidé en trente cinq brocs. Combien chacun ?

♣ Guillaume dispose de deux mèches qui brulent chacune en une heure *(mais pas de façon uniforme, on ne peut pas dire* "tiens, le quart a brulé, il s'est écoulé quinze minutes"). Quelles sont les durées qu'il peut mesurer avec ces mèches :
une heure en en brulant une, deux heures en en brulant une puis l'autre, une demi heure en en brulant une par les deux bouts.
Mais encore ?
Et avec trois mèches ? Et peut on les brûler dans votre camp ?
L'exercice peut être prolongé par la lecture d'un article de Delahaye dans Pour la Science sur les « nombres combustibles ».

∘31∘ Soit σ une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrez par l'absurde que $\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) \geqslant n\}$ est infini.
Pouvez vous trouver σ telle que $\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) \geqslant n\}$ soit égal à $\mathbb{N}$?
Pouvez vous trouver σ telle que $\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) \geqslant n\}$ soit égal à $\mathbb{N}^*$?
Pouvez vous trouver σ telle que $\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) \geqslant n\}$ soit égal à $2.\mathbb{N}$?

∘32∘ On va démontrer de plusieurs façons que l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers est infini dans $\mathbb{N}$.

♡ 0 ♡ On suppose que l'ensemble des nombres premiers est fini, formé de N entiers $\{p_1, \dots p_N\}$. On pose alors $Q = 1 + \prod_{i=1}^{N} p_n$. Montrez que cet entier admet au moins un diviseur premier q. Montrez que q n'est aucun des pp_k.

♡ 1 ♡ Concluez.

◇ 0 ◇ Pour tout n, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ (nombre de Fermat, à comprendre comme $2^{(2^n)} + 1$). Calculez F_n pour n de 0 à 3.

◇ 1 ◇ Montrez pour tout n : $2 + \prod_{k=0}^{n} F_n = F_{n+1}$.

◇ 2 ◇ Déduisez que le seul diviseur commun de F_k et F_p pour k différent de p est égal à 1.

◇ 3 ◇ Le raisonnement commence alors par « même si les F_i ne sont pas forcément premiers... » et se termine par « ...il y a donc une infinité de nombres premiers ».
Complétez le.

♯ 0 ♯ Bonus : Ecrivez un script qui détermine combien de F_k pour k de 0 à 6 sont premiers.

♠ 10 ♠ Soit p un nombre premier. On pose $N = 2^p - 1$ et on note q un facteur premier de N.

Exemples

$p = 5$	$N = 2^5 - 1$ est premier	$q = 2^5 - 1 = 31$
$p = 7$	$N = 2^7 - 1$ est premier	$q = 2^7 - 1 = 127$
$p = 11$	N =2^11 -1 se factorise	$q = 23$ ou $q = 89$

Montrez : $2^p = 1\ [q]$ eet $\forall n \in \mathbb{N},\ (n < p) \Rightarrow (2^n \neq 1 \backslash\ [q])$ (il faudra penser à écrire une identité de Bézout entre n et p).

♠ 11 ♠ On pose $A = \{1,\ 2, \dots q-1\}$ et on définit sur A la relation $\Re$ par $(a \Re b) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N},\ a = 2^n.b\ [q])$.
Montrez que c'est une relation d'équivalence sur A.

♠ 12 ♠ Explicitez les six classes d'équivalence dans le cas $p = 5$.

♠ 13 ♠ Déterminez les deux classes d'équivalence pour p égal à 11 (avec le choix $q = 23$).

♠ 14 ♠ On revient au cas général pour p. Montrez qu'il y a p éléments dans chaque classe d'équivalence.

♠ 15 ♠ Déduisez que p divise $q - 1$ puis que q est strictement plus grand que p.

♠ 16 ♠ Déduisez : $\forall p \in \mathbb{P},\ \exists q \in \mathbb{P},\ q > p$. Déduisez que $\mathbb{P}$ est infini.

♣ 1 ♣ Pour tout couple d'entiers relatifss $(a,\ b)$, on pose $N_{a,b} = \{a + n.b \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Déterminez $N_{a,,0}$, $N_{a,1}$, $N_{0,2}$ et $N_{1,2}$.
Une partie A de $\mathbb{Z}$ est dite « ouverte » si $\forall a \in A,\ \exists b \in \mathbb{N}^*,\ N_{a,n} \subset A$.
Montrez que ce sont des ensembles ouverts :

$\emptyset$	$\mathbb{Z}$	$2.\mathbb{Z}$

♣ 2 ♣ Montrez que $\mathbb{P}$ n'est pas ouvert (qu'il soit fini ou non, ce n'est pas encore la question).

♣ 3 ♣ Montrez que tyout ouvert non vide est infini.

♣ 4 ♣ Montrez que si A et Ω sont ouverts, alors $A \cup \Omega$ et $A \cap \Omega$ sont ouverts.

♣ 5 ♣ Montrez que si les k ensembles A_1 à A_k sont ouverts, alors $\bigcap_{i=1}^{k} A_k$ est encore un ouvert.

♣ 6 ♣ Montrez que si les ensembles A_i (pour i dans I) sont ouverts, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est encore un ouvert.

Rappel $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$ et $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$.

♣ 7 ♣ On dit qu'un ensemble F est fermé si son complémentaire dans $\mathbb{Z}$ est un ouvert.
Montrez que $\{-1,\ 1\}$ est un fermé (mais pas un ouvert).

♣ 8 ♣ Montrez que ce sont à la fois des ouverts et des fermés : | $\emptyset$ | $\mathbb{Z}$ | $2.\mathbb{Z}$ |

♣ 9 ♣ Montrez que $\mathbb{N}$ n'est ni ouvert, ni fermé.

♣ 10 ♣ Montrez que chaque $N_{\alpha,\beta}$ est à la fois ouvert et fermé.

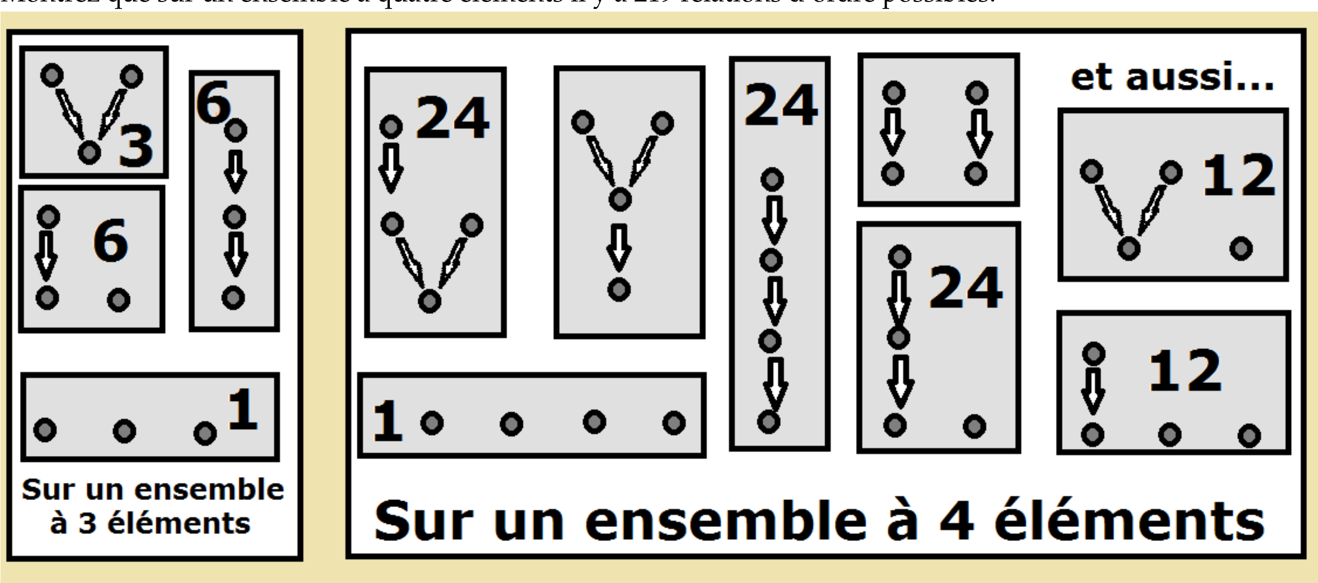
♣ 11 ♣ Montrez que $\bigcup_{p\in\mathbb{P}} N_{0,p}$ est égal à $Z - \{-1,\ 1\}$.

♣ 12 ♣ Concluez que $\mathbb{P}$ ne peut pas être fini.

∘33∘ Une loi $*$ est compatible à droite avec une relation $\blacktriangleleft$ sur un ensemble E si $\forall(a,b,c) \in E^3,\ (a \blacktriangleleft b) \Rightarrow (a * c) \blacktriangleleft (b * c)$.
Parmi ces couples, lesquels sont compatibles, et vérifiez au passage si ce sont des relations d'ordre, d'équivalence :

ensemble	loi	relation	réflexive	symétrique/anti	transitive
$\mathbb{N}^*$	$+$	« est premier avec »			
$P(E)$	$\bigcup$	$\subset$			
$P(E)$	Δ	le cardinal de leur intersection est pair			
$\mathbb{N}^*$	$\times$	« a au moins un diviseur commun avec »			
$\mathbb{R}^+$	puissance	$\leqslant$			
$\mathbb{N}$	puissance	« est premier avec »			
$P(E)$	$\bigcup$	« rencontre »			
$\mathbb{Z}^*$	puissance	$\leqslant$			
$\mathbb{C}[X]$	$\times$	a une racine commune avec			

∘34∘ Montrez que sur un ensemble de cardinal n il y a $n!$ relations d'ordres totaux.
Sur un ensemble à deux éléments a et b il y a trois relations d'ordre :
• un ordre partiel (l'égalité) a et b ne sont pas en relation
• deux ordres totaux : | $a \lhd b$ | $a \lhd b$ |
Montrez que sur un ensemble à trois éléments il y a dix neuf relations d'ordre possibles.
Montrez que sur un ensemble à quatre éléments il y a 219 relations d'ordre possibles.



Ne cherchez pas à expliciter des relations d'ordre par des formules, on fait des maths, pas de la physique qui prétend décrire un monde réel. Ces relations sont caractérisées par leur graphe, et tant pis si vous trouvez absurde ou abscons de dire « a ◀ b ◀ d et c est à côté sans relation avec eux ».

∘35∘ Montrez $7.\mathbb{Z} + 8.\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Montrez $7.\mathbb{Z}+8.\mathbb{N}=\mathbb{Z}$.
Montrez que tous les entiers à partir de 42 sont dans $7.\mathbb{N}+8.\mathbb{N}$.

◦36◦ Montrez que ce sont des sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$:

$\mathbb{Z}$	$\left\{\frac{a}{7}+\frac{2.b}{5} \mid (a,\ b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$	$\left\{\frac{a}{7}+\frac{2.b}{5}+c \mid (a,\ b,\ c)\in\mathbb{Z}^3\right\}$	$\left\{a.\sqrt{4}+b.\sqrt{25} \mid (a,\ b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$
$\mathbb{Q}$	$\left\{a+\sqrt{2}.b \mid (a,\ b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$	$\left\{a+\sqrt{2}.b+c.\sqrt{3} \mid (a,\ b,\ c)\in\mathbb{Z}^2\right\}$	

Lesquels peuvent s'écrire sous la forme $\{a.p \mid p\in\mathbb{Z}\}$ pour au moins un réel a bien choisi ?

◦37◦ On définit sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ une relation et deux lois :

$(a,\ b)\Re(\alpha,\ \beta)$	$(a,\ b)\oplus(c,\ d)$	$(a,\ b)\otimes(c,\ d)$
si et seulement si	est égal à	est égal à
$a.\beta=b.\alpha$	$(a.d+b.c,\ b.d)$	$(a.c,\ b.d)$

Montrez que ce sont des lois internes sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, commutatives, associatives.
Donnez le neutre de chacune.
Montrez que les deux lois sont compatibles avec $\Re$ $\left.\begin{array}{c}(a,\ b)\Re(\alpha,\ \beta)\\ et\\ (c,\ d)\Re(\gamma,\ \delta)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}((a,\ b)\oplus(c,\ d))\Re((\alpha,\ \beta)\oplus(\gamma,\delta))\\ et\\ ((a,\ b)\otimes(c,\ d))\Re((\alpha,\ \beta)\otimes(\gamma,\delta))\end{array}\right\}$.
Montrez que tout élément de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ admet *(modulo $\Re$)* un symétrique pour l'addition *(c'est à dire pour tout q il existe q' vérifiant $q\oplus q'\Re(0,1)$)*.
Montrez que tout élément de $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*$ admet (modulo $\Re$) un symétrique pour la multiplication *(c'est à dire pour tout q il existe q' vérifiant $q\otimes q'\Re(1,1)$)*.
Est il vrai que la multiplication est directement distributive sur l'addition ?
Montrez que tout élément est en relation par $\Re$ avec un élément irréductible (a,b) avec a et b premiers entre eux et b positif.
Que venez vous de construire ? Était ce passionnant ?

◦38◦ ♡ La relation « ne pas être inclus dans » est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive sur $P(\mathbb{R})$? Est elle compatible avec $\cap$? Est elle compatible avec $\cup$?

◦39◦

• Combien de façons de placer deux jetons *Aissata* et *Bintou* dans des cases du tableau ?
• Combien de façons de placer deux jetons *Aissata* et *Bintou* dans des cases distinctes du tableau ?
• Combien de façons de placer deux jetons indistinguables dans deux cases distinctes du tableau ?
• Combien de façons de placer deux jetons indistinguables dans deux cases du tableau, aux symétries, rotations près ?
• Combien de façons de placer deux jetons indistinguables dans deux cases du tableau, sans qu'ils soient sur une même ligne ou une même colonne ?

.	.	.
.	.	.
.	.	.

Aissata et Bintou, c'est juste pour A et B.

◦40◦ Combien faut il d'échanges de lettres deux à deux pour passer de "LA_VERITE" à "_RELATIVE" (chaines de caractères de longueur 9).

LA_VERITE	_ALVERITE	_RLVEAITE	...	_RELATIVE

Combien si en plus vous imposez que les lettres échangées soient à chaque fois contigües (on peut commencer par échanger R et I mais pas R et T (mais passez par RI puis IT)) ?
Les TRIPES ont elle des ESPRITS ? Quelles sont les MOEURS des MORUES ? Le PIRATE a-t-il une PARTIE ? Le SPORTIF fait il des PROFITS ? L'ÉTREINTE dure-t-elle une ÉTERNITÉ ?
Associez deux à deux les anagrammes :

La gravitation universelle	tout commença dans l'eau
La vitesse de la lumière	vérité théatrale et loi intersidérale
L'origine de l'univers	un vide noir grésille
La théorie de la relativité restreinte	rien n'est établi
Albert Einstein	limite les rêves au-delà
Le commandant Cousteau	un lot de vestes d'Hérodote
Le Radeau de la Méduse	loi vitale régnant sur la vie
Saint-Germain des Près	matins nègres de Paris
Hôtel des ventes de Drouot	au-delà de la démesure

Ce sont des cadeaux d'Etienne Klein.

Boire l'eau	Gringalet con	Ceux là sont de Basile Morin.
Pot au café	Teinte ocre	
Testicule	Dure matrone	
Note écrite	A cup of tea ?	
Gentil garçon	C'est utile	
Tendre amour	ou la bière	

∘41∘ ♡ Deux matrices carrées A et B de même format sont dites semblables si il existe une matrice inversible P vérifiant $A.P = P.B$.
Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables en trouvant une matrice P.
Montrez que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ont même trace et même déterminant mais ne sont pas semblables.
Ajustez pour que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \clubsuit \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & \spadesuit \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ soient semblables.

∘42∘ Montrez que $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ est semblable à son double *(en donnant P inversible vérifiant donc $A.P = P.(2.A)$)*. Même question avec ses multiples *($\lambda.A$ pour λ non nul)*.

∘43∘ ♡ L'ensemble des suites réelles a vérifiant $\forall n,\ a_{2.n} = 0 \ ou\ a_{2.n+1} = 0$ est il un espace vectoriel ?
Montrez $\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n,\ u_{2.n} = 0\} \oplus \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n,\ u_{2.n} = u_{2.n+1}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ après avoir montré que chaque ensemble est un espace vectoriel. Pourquoi ne pouvez vous pas utiliser les théorèmes sur les dimensions ?

∘44∘ ♡ Donnez une base de l'ensemble E_6 des suites réelles périodiques de période 6 après avoir vérifié qu'il s'agit bien d'un espace vectoriel. Donnez une base de l'ensemble E_8 des suites de période 8. Qui est $E_6 \cap E_8$? Donnez en une base $(a,\ b)$.
Reprenez vos bases de E_6 et E_8 pour qu'elles contiennent a et b.
Montrez que la somme d'une suite de période 6 et d'une suite de période 8 est de période 24.
Montrez qu'il existe des suites de période 24 qui ne sont pas somme d'une suite de période 6 et d'une suite de période 8 *(soit par un argument de dimension, soit en donnant un exemple)*.