LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 19 décembre
M.P.S.I.2

2023 2024

IS13

♡ 0 ♡ Montrez que toute application de $[-1,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ se décompose d'une façon unique comme somme d'une application paire et d'une application impaire. 2 pt.

♡ 1 ♡ Montrez pour A dans $M_{n,p}(\mathbb{R})$ et B dans $M_{p,n}(\mathbb{R})$ que $A.B$ et $B.A$ existent et qu'on a $Tr(A.B) = Tr(B.A)$. 2 pt.

♡ 2 ♡ Retrouvez les réels : $\forall t,\ 2.\cos(t) + ☺.\sin(t) = ☻.\cos\left(t - \dfrac{\pi}{12}\right)$. 3 pt.

◇ 0 ◇ On donne $y_0 = 2$ et $(1+t)^2.y' + y_t.\ln(t+2) = 0$. déterminez la limite de y en $+\infty$. 4 pt.

♡ 3 ♡ Résolvez $16^{\frac{x-1}{x}}.5^x = 100$ d'inconnue réelle x. 2 pt.

◇ 1 ◇ Voici les notes du lycéen Bonlivre-Mélafin-Hétrist : `B = [10, 12, 11, 15, 7, 10, 9, 9, 17, 6, 10, 12, 9]`. Écrivez les comme la somme d'une liste croissante `C` et d'une suite décroissante `D`. 2 pt.

Peut on imposer `C[0] = 0`. Peut on imposer `C[-1] = 20` ? 2 pt.

Peut on imposer `C[0] = 0` et `C[-1] = 20` ? 2 pt.

♯ 0 ♯ Écrivez un programme `Python` qui prend en entrée une liste `B` et retourne deux listes `C` et `D` croissante et décroissante de somme `B`. 2 pt.

◇ 2 ◇ On pose $f = x \longmapsto \sin(x.\pi/2)$. Montrez que $x \longmapsto f(x+1)$ et $x \longmapsto f(x-1)$ sont paires, mais que f n'est pas périodique de période 2. 2 pt.

Montrez que si g est une application telle que $x \longmapsto g(x+1)$ et $x \longmapsto g(x-1)$ sont paires, alors g est périodique de période 4. 2 pt.

◇ 3 ◇ C est un réel donné, strictement positif. Montrez que $\varphi = x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{C^2 - x^2}}$ est bijective de $]-C,\ C[$ (noté I) dans $]-\infty,\ +\infty[$. Explicitez φ^{-1} de $\mathbb{R}$ dans I. 2 pt.

◇ 4 ◇ On définit $*$ par $\forall (x,\ y) \in I^2,\ x * y = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y))$. Même si vous n'avez pas trouvé φ^{-1}, montrez que $*$ est une loi de groupe sur I. 3 pt. Justifiez $x * y \simeq x + y$ pour x et y « petits devant C ». 1 pt.

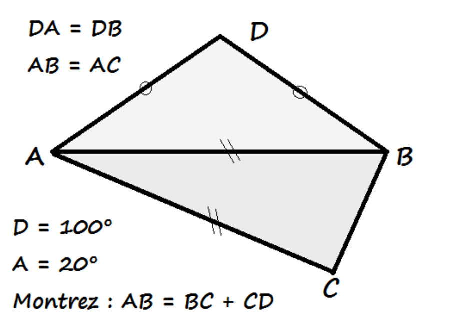
◇ 5 ◇ On définit : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. On pose $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & +2.y & +z \\ x & +3.y & +4.z \end{pmatrix}$. Résolvez l'équation $f(X) = 0_2$ d'inconnue X dans $\mathbb{R}^3$ (dimension ?). 2 pt.

Montrez que f n'est pas injective mais est surjective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. 2 pt.

Résolvez l'équation $M.R = I_2$ d'inconnue R (matrice de quel format ?). 2 pt.

Résolvez l'équation $L.M = I_3$ d'inconnue L (matrice de quel format ?). 2 pt.

Montrez que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & +y & +z \\ x & +y & +2.z \\ x & +2.y & +4.z \end{pmatrix}$ est bijective de $\mathbb{R}^3$ dans lui même. 3 pt.

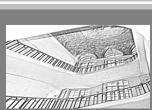


2 *pt*

♡ 4 ♡ $a_0 = b_0 = 1,\ \forall n,\ a_{n+1} = -a_n + 2.b_n$ et $b_{n+1} = 8.a_n - b_n$. Calculez $a_{100} = ?$. 4 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 19 décembre
M.P.S.I.2

2023 2024
IS13
CORRECTION



Questions de cours. IS13

Synthèse. On se donne f et on définit $p = x \longmapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i = x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ (définies effectivement sur $[-1,\ 1]$). On vérifie que l'une est paire et l'autre impaire et que leur somme redonne f.

Analyse. On suppose que f se décompose en $p+i$ (avec p paire et i impaire). On calcule alors $f(x) = p(x)+i(x)$ et $f(-x) = p(-x)+i(-x) = p(x)-i(x)$. On demi somme et on demi soustrait, et on trouve qu'on n'avait pas le choix. p et i sont les deux fonctions définies plus haut.

Si A a n lignes et p colonnes (terme général a_i^k avec $i \leqslant n$ et $k \leqslant p$) et B a p lignes et n colonnes (terme général b_i^k avec $i \leqslant p$ et $k \leqslant n$), alors on peut calculer $A.B$ (n sur n) et $B.A$ (p sur p).

<table>
<tr><td>Le terme général de $A.B$ est $c_i^k = \sum_{j=1}^{k} a_i^j.b_j^k$.

Son terme général diagonal est $c_i^i = \sum_{j=1}^{k} a_i^j.b_j^i$.

Sa trace est $\sum_{i=1}^{n} c_i^i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_i^j.b_j^i$.</td><td>Le terme général de $B.A$ est $\gamma_u^w = \sum_{v=1}^{n} b_u^v.a_v^w$.

Son terme général diagonal est $\gamma_u^u = \sum_{v=1}^{n} b_u^v.a_v^u$.

Sa trace est $\sum_{u=1}^{k} \gamma_u^u = \sum_{u=1}^{k}\sum_{v=1}^{n} b_u^v.a_v^u$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">En écrivant dans les deux cas $\sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant k}} a_i^j.b_j^i$ ou $\sum_{\substack{v\leqslant n\\ u\leqslant k}} a_v^u.b_u^v$ on a la même chose.</td></tr>
</table>

On peut bien sûr se convaincre avec des points de suspension aussi.

On développe et on identifie dans $\forall t,\ 2.\cos(t) + \smiley.\sin(t) = \blacksmiley.\cos\left(t - \dfrac{\pi}{12}\right)$ et on identifie[1] $2 = \blacksmiley.\cos(\pi/12)$ et $\smiley = \blacksmiley.\sin(\pi/12)$.

Si on n'a pas trop d'éléments de cours de M.P.S.I.2., on trouve $\boxed{\blacksmiley = \dfrac{2}{\cos(\pi/12)}}$ $\boxed{\smiley = 2.\tan(\pi/12)}$

Si on a des habitudes de M.P.S.I.2., on écrit $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et on chasse les racines du dénominateur. Ensuite on rappelle $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sin(\pi/6)}{1+\cos(\pi/6)}$.

$\boxed{\blacksmiley = 2.(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$ $\boxed{\smiley = 4 - 2.\sqrt{3}}$

On résout $16^{\frac{x-1}{x}}.5^x = 100$ en passant au logarithme (tout est positif)

$$\frac{x-1}{x}.\ln(16) + x.\ln(5) = \ln(100)$$

x étant non nul, on multiplie et on met un peu d'ordre

$$\ln(5).x^2 + (\ln(100)-\ln(16)).x - \ln(16) = 0$$

On calcule le discriminant mais déjà, $\ln(100)-\ln(16) = 2.(\ln(5)-\ln(4))$, $\ln(16) = 4.\ln(2)$

$$\Delta = 4.(\ln(5)-\ln(4))^2 - 16.\ln(5).\ln(2)) = 4.(\ln(5)+\ln(2))^2$$

Les racines (car il y en a deux) sont 2 et $-2.\ln(2)/\ln(5)$.

La solution $x = 2$ était peut être prévisible dès le début : $16^{1-\frac{1}{2}}.5^2 = \dfrac{16}{\sqrt{16}}.25 = 100$.

1. en fait, il y a le sens de la synthèse « on propose/on vérifie » et pour le sens d'identification, on dit que si c'est vrai pour tout t, ça l'est pour 0 et $\pi/2$

Pour l'autre, je vous invite à vérifier : $5^{2.\ln(2)/\ln(5)} = \left(e^{\ln(5)}\right)^{\frac{2.\ln(2)}{\ln(5)}} = e^{2.\ln(2)} = 4$ *et* $16^{\frac{-1}{x}} = 16^{\frac{-\ln(5)}{\ln(2)}} = e^{4.\ln(2).\frac{-\ln(5)}{\ln(2)}} = e^{4.\ln(5)} = 5^4$.

Equation différentielle. IS13

On met $(1+t)^2.y'_t + y_t.\ln(t+2) = 0$ (équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus à second membre nul, à résoudre sur $]-2,\ +\infty[$) sous la forme « de Cauchy-Lipschitz » (sans coefficient devant $y'(t)$) : $y'_t + y_t.\frac{\ln(t+2)}{(1+t)^2} = 0$ (cette fois on travaille sur $]-1,\ +\infty[$). Il nous reste à intégrer

$$\int_0^t \frac{\ln(2+u)}{(1+u)^2}.du = \left[\ln(2+u).\frac{-1}{1+u}\right]_0^t + \int_0^t \frac{du}{(2+u).(1+u)} = \left[\ln(2+u).\frac{-1}{1+u}\right]_0^t + \int_0^t \left(\frac{1}{1+u} - \frac{1}{2+u}\right).du$$

On calcule, on met un signe moins, on place dans une exponentielle, et on met le 2 devant car on a pris la primitive nulle en 0.

A l'infini, il reste (par croissances comparées) : $2.e^{-\ln(2)}$

Une suite de notes et un Python. IS13

Oui, on peut décomposer. Et il y a même plusieurs façons de le faire.

B	10	12	11	15	7	10	9	9	17	6	10	12	9
		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
C	5	7	7	11	11	14	14	14	22	22	23	25	25
D	5	5	4	4	-4	-4	-5	-5	-5	-14	-14	-14	-17
C	0	2	2	6	6	9	9	10	18	18	22	24	24
D	10	10	9	9	1	1	0	-1	-1	-12	-12	-12	-15
C	-3	-1	-1	3	3	6	6	6	14	14	18	20	20
D	10	10	9	9	1	1	0	0	0	-11	-11	-11	-14

L'idée : à chaque étape, une des suite stagne. Si la note monte, on fait monter la suite C. Si la note descend, on fait descendre la suite D.

Plus précisément, si la note augmente de a, on pose $C_{N+1} = C_n + a$ et $D_{n+1} = D_n$. Si la note diminue de b, on pose $C_{n+1} = C_n$ et $D_{n+1} = D_n - b$.

On voit qu'on peut commencer avec la valeur qu'on veut pour une (l'autre est alors imposée). On translate l'ensemble vers le haut ou vers le bas.
On voit aussi que quand la note stagne, on peut

Pour avoir `C[-1] = 20`, il suffit de tout décaler là aussi au début. Ou de lire la liste à l'envers.

Mais peut on avoir à la fois `C[0] = 0` et `C[-1] = 20` ? Sachant que `C` a du prendre en charge tous les accroissements, ça semble irréaliste (au plus serré, les notes augmentent de 22).

En fait, petite preuve par l'absurde : on suppose $C_0 = 0$ et $C_{12} = 20$. On suppose aussi $C_0 + D_0 = 10$ et $C_1 + D_1 = 12$.
On a donc $(C_1 - C_0) + (D_1 - D_0) = 2$ par soustraction.
Mais $D_1 - D_0$ est négatif (décroissance). On a donc $C_1 - C_0 \geqslant 2$.

Ensuite, $C_2 - C_1 \geqslant 0$ par croissance.

Ensuite : $(C_3 - C_2) + (D_3 - D_2) = B_3 - B_2 = 15 - 11 = 4$ d'où $C_3 - C_2 \geqslant 4$.

A chaque fois que (B_n) augmente, il faut que (C_n) augmente d'au moins autant.
Et sinon, $C_{n+1} - C_n$est au moins positif.

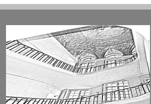
On somme les accroissements :

$$C_{11} - C_0 = \sum_k C_{k+1} - C_k \geqslant \sum_{\substack{k\leqslant 10 \\ B_{k+1}\geqslant B_k}} B_{k+1} - B_k + \sum_{\substack{k\leqslant 10 \\ B_{k+1}\geqslant B_k}} 0 = 2+0+4+0+3+0+0+8+0+4+2+0$$

Et c'est trop.

Script python. On crée deux listes avec valeur initiales `0` et `B[0]`.
Et étape par étape, on regarde suivant `B[k+1]-B[k]`. Si cet accroissement est positif, on agrandit la liste `C` d'un terme égal à la somme du dernier et de l'accroissement, et on agrandit la liste `D` d'un terme égal au dernier.
Sinon, c'est D qui prend en charge la décroissance.

```
def decompose(B) : #list -> list, list
....C = [0]
....D =[B[0]]
....for k in range(len(B)-1) : #gare au dernier indice, pas de débordement
........acc = L[k+1}-L[k] #on calcule l'accroissement car il servira trois fois
........if acc >= 0 :
............C.append(C[-1]+acc)
............D.append(D[-1])
........else :
............C.append(C[-1])
............D.append(D[-1]+acc)
....return C, D
```



Fonctions périodiques. IS13

On a posé $f = x \longmapsto \sin(x.\pi/2)$. On pose $f_1 = x \longmapsto f(x+1)$ et $f_{-1} = x \longmapsto f(x-1)$.
On simplifie : $f_1 = x \longmapsto \cos(x)$ et $f_{-1} = -\cos(x)$. Les deux sont paires.
En revanche $f(x+2) = \sin\left(\frac{x.\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{x.\pi}{2}\right)$. On donne un vrai contre-exemple avec $x = -1$, on n'a pas $f(-1+2) = f(-1)$ (l'un vaut 1 et l'autre vaut -1).

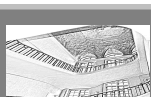
> *Attention, l'argument $f(x+2) = -f(x)$ ne prouve pas que f n'est pas 2 périodique. Elle pourrait être nulle !*

Prenons g telle que g_1 et g_2 soient paires. On a pour tout x : $g(-x+1) = g(x+1)$ et $g(-x-1) = g(x-1)$.

On se donne x et on calcule en utilisant ce qu'on peut

$$g(x+4) = g\big((x+3)+1\big) \underset{g_1}{=} g\big(-(x+3)+1\big) = g\big(-x-2\big) = g\big(-(x+1)-1\big) \underset{g_{-1}}{=} g\big((x+1)-1\big) = g(x)$$

On a indiqué sous le signe égale à quel moment on a utilisé la parité de g_1 et de g_{-1}.



Loi de groupe sur $]-C,\ C[$. IS13

On peut dériver φ puisqu'elle l'est, déduire qu'elle est croissante (strictement donc injective). Comme elle est continue sur un intervalle, elle atteint toutes les valeurs entre ses deux limites aux bornes. Elle atteint tout $\mathbb{R}$ (surjectivité).

La voilà habillée pour l'hiver.

Mais on a aussi vite fait de déterminer tout de suite φ^{-1}. On se donne t et on suppose $\varphi(x) = t$. On cherche x avec l'équation $x = t.\sqrt{c^2 - x^2}$.Elle forme x et t à être du même signe. On élève ensuite au carré et on résout :

$x^2 = t^2.(C^2 - x^2)$ puis $x^2 = \frac{t^2.C^2}{1+t^2}$.

Si on raisonne comme un port, on extrait $x^2 = \frac{t.C}{\sqrt{1+t^2}}$. Mais il y a normalement une valeur absolue. Sauf que x et t sont du même signe.

On a donc $\varphi^{-1} = t \longmapsto \frac{t.C}{\sqrt{1+t^2}}$. Il reste à vérifier $\dfrac{\frac{x}{\sqrt{C-x^2}}.C}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{C^2-x^2}}\right)^2}} = x$ et $\dfrac{\frac{t.C}{\sqrt{1+t^2}}}{\sqrt{C^2-\left(\frac{t.C}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}} = t$ pour tout x entre $-C$ et C et pour tout t réel.

$\boxed{\text{Existence et « interne »}}$ Pour x et y donnés entre $-C$ et C, $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ sont deux réels, leur somme aussi, et on peut remonter. L'image réciproque est entre $-C$ et C.

$\boxed{\text{Commutativité}}$ Pour x et y donnés, on a évidemment $\varphi^{-1}(\varphi(x)+\varphi(y)) = \varphi^{-1}(\varphi(y)+\varphi(x))$.

$\boxed{\text{Associativité}}$ On se donne x et y et on calcule

$$\varphi^{-1}(\varphi(x*y)+\varphi(z)) = \varphi^{-1}\big((\varphi(x).\varphi(y)).\varphi(z)\big) = \varphi^{-1}\big(\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)\big)$$

Le calcul de $\varphi^{-1}\big(\varphi(x)+\varphi(y*z)\big)$ donne le même résultat.

Tout repose sur $\varphi(x*y) = \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(x)+\varphi(y))) = \varphi(x)+\varphi(y)$.

$\boxed{\text{Neutre}}$ Quoi de plus naturel que 0. On a $\varphi(0) = 0$ et donc pour tout x

$$\varphi^{-1}(\varphi(x)+\varphi(0)) = \varphi^{-1}(\varphi(x)+0) = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$$

$\boxed{\text{Symétriques}}$ Le symétrique de x est $-x$. Et il est bien dans I si x y était

$$\varphi^{-1}(\varphi(x)+\varphi(-x)) = \varphi^{-1}(\varphi(x)-\varphi(x)) = \varphi^{-1}(0) = 0$$

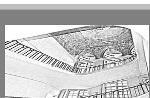
Cette loi est une loi de composition des vitesses. On aura beau « additionner » des x et des y, on ne dépassera pas C.
Mais si on regarde des développements limités quand x et y tendent vers 0 :

$$\varphi(x) = 0 + 1.x + o(x)$$

$$\varphi(x)+\varphi(y) = x + y + o(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$\varphi(x)+\varphi(y) = \varphi^{-1}(x+y+o(\sqrt{x^2+y^2})) = x+y+o(\sqrt{x^2+y^2})$$

Quand x et y sont petits, c'est presque l'addition usuelle. Comme pour les vitesses.
Additionner (au sens de $*$) des vitesses proches de C ne pourra nous faire dépasser C.



Application de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ dans $(\mathbb{R}^2, +, .)$. IS13

On part de $\mathbb{R}^3$ et on arrive dans $\mathbb{R}^2$. L'application aura un défaut d'injectivité.

L'équation $\left\{\begin{array}{cccc} x & +2.y & +z & = & 0 \\ x & +3.y & +4.z & = & 0 \end{array}\right|$ a pour solutions les $\begin{pmatrix} 5.z \\ -3.z \\ z \end{pmatrix}$ avec z décrivant $\mathbb{R}$ (c'est une droite).

---

f n'est pas injective, puisque tous les vecteurs cités ci dessus ont la même image.

En revanche, chaque couple $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a des antécédents.

Il a déjà l'antécédent $\begin{pmatrix} 3.a-2.b \\ b-a \\ 0 \end{pmatrix}$ par exemple, puis tous les $\begin{pmatrix} 3.a-2.b & +5.z \\ b-a & -3.z \\ & z \end{pmatrix}$ avec z décrivant $\mathbb{R}$.

Peut on résoudre $M.N = I_2$ d'inconnue R ? $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline u & u' \\ \hline v & v' \\ \hline w & w' \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$

Les formats sont compatibles ainsi.
On a quatre équations pour six inconnues. C'est jouable, on sent qu'on peut même choisir les dernières.
Et on a des systèmes qui rappellent fortement la dernière question.

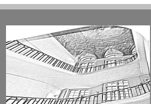
En fait, on constate $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & -2 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline 0 & 0' \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$

Puis plus généralement $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline 3+5.x & -2+5.w' \\ \hline -1-3.w & -1-3.w' \\ \hline w & w' \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$

Je vous laisse constater que j'ai raisonné par équivalence et trouvé toutes les solutions.

En revanche l'autre format est aussi imposé pour $\begin{array}{|c|c|c|}\hline u & u' & u'' \\ \hline v & v' & v'' \\ \hline w & w' & w'' \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$ mais on a cette fois neuf équations pour six inconnues. Il ne faut pas pousser !
Si on tente de résoudre on aboutit à une absurdité. mais on ne tente pas de résoudre.

On réfléchit. Cela reviendrait à composer $\mathbb{R}^3 \underset{M}{\overset{f}{\longrightarrow}} \mathbb{R}^2 \underset{L}{\overset{g}{\longrightarrow}} \mathbb{R}^3$ (*puis*) pour avoir $g \circ f = Id_{\mathbb{R}^3}$ et donc $L.M = I_3$.
Mais f n'est pas injective. $g \circ f$ ne peut donc pas l'être.
Ici, pas de solution.



Application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. IS13

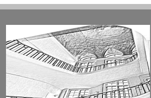
On peut montrer que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & +y & +z \\ x & +y & +2.z \\ x & +2.y & +4.z \end{pmatrix}$ est injective, et surjective.
Mais si on montrait en une fois qu'elle est bijective ?

On se donne a, b et c et on cherche l'unique antécédent en résolvant $\left\{\begin{array}{ccccc|} x & +y & +z & = & a \\ x & +y & +2.z & = & b \\ x & +2.y & +4.z & = & c \end{array}\right.$

Par méthode du pivot de Gauss $\left\{\begin{array}{cccccccc|} x & +y & +z & = & a & & \\ & & z & = & -a & +b & \\ & y & +3.z & = & -a & & +c \end{array}\right.$ puis $\left\{\begin{array}{ccccccc|} x & +y & +z & = & a & & \\ & & z & = & -a & +b & \\ & y & & = & 2.a & -3.b & +c \end{array}\right.$

et on trouve aussi x $\left\{\begin{array}{cccccc|} x & & & = & & 2.b & -c \\ & y & & = & 2.a & -3.b & +c \\ & & z & = & -a & +b & \end{array}\right.$.

Les spécialistes verront la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et son inverse $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.



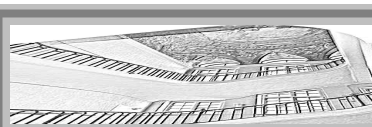
Une diagonalisation. IS13

On donne $a_0 = b_0 = 1$, on pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On donne $\forall n,\ a_{n+1} = -a_n + 2.b_n \ et \ b_{n+1} = 8.a_n - b_n$.
On traduit : $U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
On diagonalise $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. On concatène :

$$U_n = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} .U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-5)^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2/4 & 1/4 \\ 2/4 & 1/4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} . \begin{pmatrix} (-5)^n & +3^{n+1} \\ -2.(-5)^n & +6.3^n \end{pmatrix}$$

On peut conclure $a_{100} = \dfrac{5^{100} + 3^{101}}{4}$.

LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2023 2024
IS13
37- points