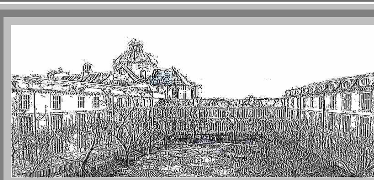
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 8 janvier
M.P.S.I.2



2023 2024

TD14

◦0◦ Soit $(G, *)$ un groupe à onze éléments, et a un élément de G différent du neutre e. Montrez, en étudiant $p \longmapsto a^p$ de $\mathbb{N}$ dans G qu'il existe deux exposants p et q distincts vérifiant $a^p = a^q$ *(a^p désigne $a * a * \ldots a$ p fois)*. Déduisez qu'il existe r dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $a^r = e$.
Déduisez que a^{-1} *(inverse de a)* est une puissance de a. Montrez qu'il existe même r dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $a^r = e$ et $a^k \neq e$ pour tout k de 1 à $r-1$.
Quel est alors le cardinal de $\{a^k \mid 0 \leqslant k < r\}$ *(noté A)* et montrez que cette partie est un sous-groupe de $(G, *)$.
On définit sur G le relation $\bowtie$ par $(x \bowtie y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N},\ y = x * a^k)$. Montrez que c'est une relation d'équivalence.
On suppose qu'il y a un élément b de G qui n'est pas dans A. Montrez qu'alors $\{b * a^k \mid 0 \leqslant k < r\}$ *(noté B)* a le même cardinal que A et aucun élément en commun avec A.
On suppose qu'il y a un élément c de G qui n'est ni dans A ni dans B. Montrez qu'alors $\{c * a^k \mid 0 \leqslant k < r\}$ *(noté C)* a le même cardinal que A et aucun élément en commun avec A ni avec B.
En notant que l'on "tranche" G en parties ayant toutes le même cardinal, concluez que le cardinal de A vaut 1 ou 11 *(mais on a déjà éliminé 1)*.
Concluez que G est égal à A et est commutatif.
Par quoi pouvez vous remplacer 11 ?

◦1◦ ♡ Pour tout groupe $(G, *)$, on note Z l'ensemble $\{a \in G \mid \forall b \in G,\ a * b = b * a\}$. Montrez que Z est égal à G si et seulement si $(G, *)$ est commutatif. Montrez que Z est un sous-groupe de $(G, *)$.

◦2◦ A et B sont deux ensembles. Montrez : $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.[1]
Trouvez deux ensembles A et B vérifiant $Card(P(A) \cup P(B)) = 11$.
Trouvez deux ensembles A et B vérifiant $Card(P(A) \cup P(B)) = 10$.

◦3◦ Combien de $\binom{2022}{k}$ sont impairs ? (Python ?)

◦4◦ ♣ : C'est facile, les produits matriciels : $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 24 \\ 36 & 28 \end{pmatrix}$, il suffit de coller les chiffres côte à côte. Vous m'en trouvez d'autres ?

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 36 \\ 36 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & 55 \\ 33 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 77 \\ 22 & 38 \end{pmatrix}$$

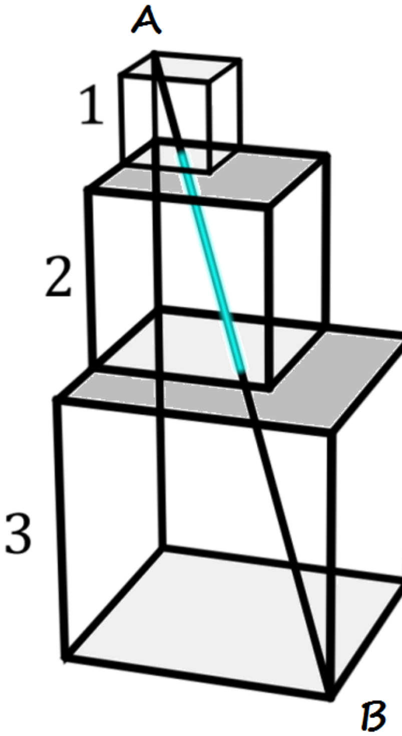
◦5◦ ♣ Calculez ces étranges produits $\prod_{n=0}^{+\infty} \sqrt[2^n]{3}$ et $\prod_{n=1}^{+\infty} \sqrt[2^n]{3^n}$.

◦6◦ Le professeur a donné le premier terme de la suite a *(c'est $a_0 = 10$)* et sa raison *(positive)*. Il avait oublié de préciser si elle était arithmétique ou géométrique *(l'étourdi)*. Il a demandé de calculer a_2. Et tous les élèves ont pourtant trouvé la même chose. Retrouvez la raison.

◦7◦ Montrez : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a).(c-a).(c-b)$ (déterminant de VanDerMonde de taille 3).

◦8◦

1. $P(A)$ désigne l'ensemble de toutes les parties de A (ou sous-ensembles de A)



Quelle est la longueur de la grande diagonale $[A, B]$. Quelle est la longueur de sa partie « en bleu » dans le cube du milieu ?

Calculez $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}.dx$ et $\int_0^2 \sqrt{4-2^x}.dx$.

L'une vaudra $2.\dfrac{\ln(2+\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}}{\ln(2)}$ *et l'autre* π.

Résolvez le système $\log_x(y)+\log_y(x) = \dfrac{50}{7}$ et $x.y = 256$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$ *(rappel* $y=\log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$*).*

Donnez moi un entier ayant exactement 15 diviseurs.

On est dans $rang(53)$ pour l'addition et la multiplication modulo 53. L'équation $x^2+2.x+2=0$ a pour discriminant -4. L'élève dit « Δ est négatif, elle n'a donc pas de solution ». Il n'a rien compris ! Δ a une racine carrée assez évidente ! Résolvez l'équation.

◦9◦ On donne $u_0 = 9$, $u_1 = -8$ et $u_2 = 2$.
Trouvez α et β vérifiant $u_n = \alpha.2^n + \beta.(-1)^n$ pour tout n de $\{0,\ 1\}$. A-t-on alors $u_n = \alpha.2^n + \beta.(-1)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$?

Trouvez α et β vérifiant $u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.3^n$ pour tout n de $\{0,\ 1\}$. A-t-on alors $u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.3^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$?

Trouvez α et β vérifiant $u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.(-3)^n$ pour tout n de $\{0,\ 1\}$. A-t-on alors $u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.(-3)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$?

◦10◦ ♡ Montrez que toute matrice réelle symétrique de taille 2 a deux valeurs propres distinctes, sauf si elle est déjà diagonale.

◦11◦ Levez les à la puissance n :

A	B	C	D	E	F
$\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

◦12◦ La notation de la factorielle a longtemps été $\left.\underline{n}\right|$, jusqu'à ce qu'en 1808, Christian Kramp invente la notation $n!$, plus pratique. Comme on est en MPSI2, il faut qu'on invente autre chose : n♪ est le produit des entiers plus petits que n, mais premiers avec n. Par exemple, $10!$ vaut $1.2.3.4.5.6.7.8.9.10$, alors que 10♪ vaut $1.3.7.9$. Calculez n♪ pour n de 1 à 13. La suite (n♪) est elle monotone ? Calculez p♪ pour p premier. Calculez pour tout n le $p.g.c.d.$ de n et n♪. Montrez : 2018♪ $= \dfrac{2018!}{2^{1009}.1009!.1009}$ *(en sachant que* 1 009 *est premier)*. Décomposez 30♪ en produit de facteurs premiers. Résolvez n♪ $= 3^3.7.11.13.17.19$. Trouvez le premier entier n tel que n♪ soit un multiple de 1 000.
$\sharp_0$ Écrivez un script Python qui prend en entrée n et retourne n♪.

◦13◦ L'élève veut créer une loi sur $\mathbb{N}$ qui admette un neutre à droite n vérifiant donc $\forall a \in \mathbb{N},\ a * n = a$, et un neutre à gauche m vérifiant $\forall b \in \mathbb{N},\ m * b = b$. Il pense à l'addition et $a = b = 0$. Ou à la multiplication avec $n = m = 1$. Mais il a oublié la consigne : il faut que les deux neutres soient distincts : $m \neq n$. Alors il cherche une loi vraiment tordue.
Aidez le. Soit en en trouvant une, soit en lui prouvant que c'est impossible.

∘14∘ Une suite de SAIAS et MAZET[2] est une suite d'entiers naturels non nuls, distincts, où chaque terme est diviseur ou multiple du terme qui suit. Par exemple `[1, 2, 6, 3, 12, 4]`, ou `[5, 1, 4, 2, 6, 3]`. Écrivez un script qui prend en entier une liste de nombres et vérifie si elle est de SAIAS et MAZET.[3]
On peut construire une suite de SAIAS et MAZET qui contient tous les entiers naturels. En voici le début : `[1, 2, 6, 3, 12, 4, 20, 5, 35, 7, 56, 8, 72, 9, 90, 10, 110, 11, 143, 13]` Donnez les six termes suivants. Donnez l'algorithme qui en fournit les `n` premiers termes.

∘15∘ Sur une ligne du triangle de Pascal, j'ai trouvé côte à côte les deux entiers suivants. Sur quelle ligne suis-je ? Et quel est l'indice de colonne ?

$3.5^2.7.13.17.19.23.37.53.67.71.73.101.103.107.109.113.137.139.149.151.157.163.167.173.179.181.191.193.197.199.211.223.227.229$

$3^3.5^2.11.13.17.23.37.53.67.71.73.101.103.107.109.113.137.139.149.151.157.163.167.173.179.181.191.193.197.199.211.223.227.229$

Charade introuvable :

Mon premier est un oiseau de l'alphabet.

Mon second est un milli-iule.

Mon troisième est en double sur le vélo en quintuple sur la voiture.

Mon quatrième est suivi de son double dans l'alphabet.
Vous ne trouvez pas mon tout.

∘16∘ Soient G un groupe, u dans G commutant avec tout élément de G, (x, y, z) dans G. On pose $u = x.y.z$ et on suppose $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ (le neutre). Montrer que $u^4 = 1$.

∘17∘ ♠♡ La suite de Fifi Bonacci est défifinie par ϕ_0, ϕ_1 et ϕ_2 donnés et $\phi_{n+2} = -\phi_{n+1} + \phi_n + \phi_{n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ *(les lapins de la génération $n+1$ ou plutôt $n-1$ meurent)*.
Écrivez un script Pypithon qui calcule ϕ_n pour n donné.
On pose $U_n = \begin{pmatrix} \phi_n \\ \phi_{n+1} \\ \phi_{n+2} \end{pmatrix}$ *(donc U_0 est donné)*. Trouvez la matrice A vérifiant $U_{n+1} = A.U_n$ pour tout n.
On pose alors $B = A + I_3$. Calculez B^2, B^3 et B^4. Montrez : $B^k = 2^{k-2}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout k supérieur ou égal à 2. Calculez $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}.2^k.(-1)^{n-k}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
Calculez alors A^n pour tout n à l'aide de la formule du binôme dont vous justifierez l'utilisation.
Exprimez alors U_n à l'aide de U_0, puis ϕ_n à l'aide de n, $(-1)^n$, ϕ_0, ϕ_1 et ϕ_2.
Retrouvez le résultat précédent par simple récurrence sur n.

∘18∘ ♡ n et k sont des entiers fixés, a et b sont deux complexes *(différents de 1 si nécessaire et autres conditions du même type)*.
Simplifiez

$A = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k$	$B = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k}.a^{n-i}.b^i$	$C = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.a^{n-k}.b^k$
$D = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.a^{n-k}.b^i$	$E = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{n}{k}.a^{n-i}.b^j$	$F = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}.a^{n-i}.b^i$
$G = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant n}} \binom{n}{i}.a^{n-j}.b^j$	$H = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant n}} \binom{n}{i}.a^{n-i}.b^j$	$I = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant n}} \binom{n}{i}.a^{n-i}.b^i$

On rappelle : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k = (a+b)^n$ mais méfiez vous ici des indices et des variables...

---

2. Eric SAIAS et Pierre MAZET, mathématiciens français contemporains, Juliette Genzmer en connaît au moins un des deux
3. Pour le test de type de variable, vous ne connaissez pas : « `type(a) is int` » est un booléen qui dit si `a` est de type `int`, vous pouvez tester aussi `char`, `float`, `str`, `list`.... et ce n'est pas pour que vous écriviez un test à la con de parité du type type(a/2,int). Non, c'est parce qu'il y a un truc à ne pas oublier dans la définition.

∘19∘ ♡ Un élément a d'un anneau $(A,+,.)$ est dit nilpotent si il existe n vérifiant $a^n = 0$ (neutre additif)
idempotent si il existe p vérifiant $a^p = 1$ (neutre multiplicatif).
Donnez les éléments nilpotents et les éléments idempotents de l'anneau des entiers $(range(120),+,.)$.
Montrez que la somme et le produit de deux éléments nilpotents est encore nilpotent.

Montrez que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes dans $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ mais que leur somme ne l'est plus, de même que l'un de leurs produits.

∘20∘ E est un ensemble fini. On pose $\mathbb{P} = P(P(E))$ et on définit sur $\mathbb{P}$ la relation $\lesssim$ par $X \lesssim Y$ si et seulement si $\forall B \in Y,\ \exists A \in X,\ B \subset A$.
Attention, $P(E)$ est l'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de E
(comme $P(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ si $E = \{a,b,c\}$). Et $P(P(E))$ est donc fait des parties dont les éléments sont eux même des parties (par exemple $\{\{a\},\ \{b,c\},\ \{a,b,e\},\ \emptyset\} \in P(P(E))$ si $E = \{a,b,c,d,e\}$, et pour ce E, $P(P(E))$ a 2^{32} éléments dont la liste ne sera pas donnée ici).

Pour cette question : $E = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$. Donnez le cardinal de $\mathbb{P}$. Comparez (en justifiant) pour $\lesssim$ les deux parties suivantes :
$X = \big\{\{a,b,c\},\ \{d,e\}\big\}$ et $Y = \big\{\{a,b,c\},\ \{a,b\},\ \{d,e\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{e\}\big\}$.

On revient au cas général. Montrez que le relation $\lesssim$ est réflexive, transitive. Est-ce une relation d'ordre ?

Pour cette question : $E = \{a,\ b,\ c\}$.
Combien chacune des quatre équations suivantes a-t-elle de solutions : $X \lesssim \emptyset$, $X \lesssim \{\emptyset\}$, $\emptyset \lesssim X$, $\{\emptyset\} \lesssim X$.

Combien pouvez vous trouver X vérifiant $\big\{\{a,\ b,\ c\},\ \{b\}\big\} \lesssim X \lesssim \big\{\{a,b\},\ \{b,c\},\ \{c\}\big\}$.

∘21∘ Voici les notes des élèves à l'École Nationale Supérieure des Technologies du Routage Informatique et du Numérique de Grenoble

L'admission étant à 180, combien de points a-t-il manqué en maths à l'étudiant Filtonpuliféfroi pour être admis ?

Étudiant	Maths	Physique	Informatique	Total
Tréfermlaporte	12	10	14	189
Sejusqu'auboudelanui	12	15	14	209
Filtonpuliféfroi	10	10	10	155

Un bonus à qui comprend mes mauvais jeux de mots.

∘22∘ ♡ Résolvez le système $\left\{\begin{array}{ccc} n & = & 53\ [52] \\ n & = & 52\ [53] \end{array}\right\|$ d'inconnue entière n.

∘23∘ L'écriture $A \cap B \cup C \cap D$ est ambigüe, car on ne sait pas comment mettre les parenthèses : $((A \cap B) \cup C) \cap D$ ou $(A \cap B) \cup (C \cap D)$ et ainsi de suite. Combien d'ensembles différents peut on obtenir ?

∘24∘ ♡ Montrez que si dans un groupe $(G,*)$ on trouve deux éléments a et b vérifiant $a * b = a$, alors b est le neutre du groupe.
On rappelle que le neutre c'est $\forall x,\ x * b = x$ alors qu'ici on a $\exists a,\ a * b = a$, plus l'information : on a un groupe.

∘25∘ Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 2020 dont le p.g.c.d. avec 2020 est 2 ?
Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 2020 dont le p.g.c.d. avec 2020 est 10 ?

∘26∘ ♡ Déterminez $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}},\ \frac{1}{2^k}\right]$.

Déterminez $B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left]-\frac{1}{2^k},\ \frac{1}{2^k}\right]$ et $C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left]0,\ \frac{1}{2^k}\right]$.
Rappel : $\bigcap_{i \in I} A_i = \{\ \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$ et $\bigcup_{i \in I} A_i = \{\ \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$

∘27∘ ♡A est un ensemble. Que signifient :

$\forall(a,\, b)\in A^2,\ a=b$	$\exists(a,\, b)\in A^2,\ a=b$
$\exists(a,\, b)\in A^2,\ \forall x\in A,\ x=a$ *ou* $x=b$	$\forall(a,\, b)\in A^2,\ a\neq b$
$\exists(a,\, b)\in A^2,\ \forall x\in A,\ x\neq a\ \Rightarrow\ x=b$	$\exists(a,\, b)\in A^2,\ a\neq b$
$\exists(a,\, b)\in A^2,\ \forall x\in A,\ x\neq a\ \Leftrightarrow\ x=b$	

∘28∘ La suite $\left(\left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right)\%17\right)_n$ est elle périodique ? (ici, % est pris au sens pythonien de modulo »). Et « à partir d'un certain rang » ?

∘29∘ Quelles sont les deux plus petites valeurs que peut prendre $\left|\begin{vmatrix} 2014 & 2945 \\ a & b \end{vmatrix}\right|$ sachant que a et b sont des entiers relatifs ? *(oui, la notation est étrange pour la valeur absolue d'un déterminant !)*

∘30∘ Les suites a et b sont définies par $a_0=5$ et $b_0=2$ et $a_{n+1}=2.a_n+3.b_n$ et enfin $b_{n+1}=5.a_n+8.b_n$ pour tout n. Montrez que $a_n$et b_n sont toujours entiers. Trouvez α_0 et β_0 vérifiant det $\begin{pmatrix} a_0 & \alpha_0 \\ b_0 & \beta_0 \end{pmatrix}=1$. Trouvez M *(carrée de taille 2)* vérifiant $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=M.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour tout n. Montrez alors $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=M^n.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ pour tout n. Montrez en regardant le déterminant de $M^n.\begin{pmatrix} a_0 & \alpha_0 \\ b_0 & \beta_0 \end{pmatrix}$ que a_n et $b_n$sont toujours premiers entre eux.

∘31∘ On donne $\dfrac{a}{b}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+1}}}}}$ et $\dfrac{u}{v}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}}$. Calculez $\dfrac{a}{b}-\dfrac{u}{v}$.

∘32∘ L'institutrice a donné à mon neveu cinq nombres à additionner. Mon neveu a effectué toutes les additions possibles *(il y en a* 31 *je crois car mon neveu refuse de considérer la somme ne contenant rien)* et me dit : *"c'est drôle, parmi les nombres que j'ai calculés, il n'y a aucun multiple de* 5". Je lui réponds alors sans même regarder ses calculs qu'il ment. Pourquoi ?
Indication : regardez les nombres a, $a+b$, $a+b+c$, $a+b+c+d$ et $a+b+c+d+e$ modulo 5 et soustrayez en deux bien choisis).

∘33∘ ♡ Complétez $F=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} -2.a+\heartsuit.b \\ 3.a-b \end{pmatrix}$ sachant que F admet plusieurs points fixes sur $\mathbb{R}^2$ *(un point fixe de f c'est une solution de $f(x)=x$).*

Déterminez $F\circ F\circ F\circ F$. Résolvez $F(F(U))=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

∘34∘ Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall(x,\, y)\in\mathbb{R}^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant\dfrac{2.|x-y|}{3}$.
Montrez (par l'absurde ?) qu'il existe au plus un réel a vérifiant $f(a)=a$.
On définit la suite (u_n) par « u_0 donné » et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$.
Montrez par récurrence sur n : $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_{n+1}-u_n|\leqslant\left(\dfrac{2}{3}\right)^n.|u_1-u_0|$.
On définit deux suites : $A_n=\sum_{k=0}^{n-1}|u_{k+1}-u_k|$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\Big(|u_{k+1}-u_k|+(u_{k+1}-u_k)\Big)$.
Montrez pour tout n : $A_{n+1}-A_n\geqslant 0$ et $S_{n+1}-S_n\geqslant 0$.
Montrez pour tout n : $\dfrac{S_n}{2}\leqslant A_n\leqslant\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\dfrac{2}{3}}.|u_1-u_0|\leqslant 3.|u_1-u_0|$.
déduisez dans l'ordre que (A_n), (S_n), (S_n+A_n) et (u_n) convergent.
On note α la limite de la suite (u_n). Montrez : $f(\alpha)=\alpha$. Déduisez que α ne dépend pas du choix de u_0.
Montrez pour tout n : $|u_n-\alpha|\leqslant\dfrac{2^n}{3^{n-1}}.|u_1-u_0|$.

∘35∘ ♡ On rappelle la définition de $A+B$ quand A et B sont deux parties d'un groupe $(G,+)$: $A+B=\{a+b\mid a\in A,\ b\in B\}$.

Pour le groupe $(\mathbb{R},\ +)$, $a-$déterminez $\mathbb{N}+\mathbb{N}$ et comparez avec $2.\mathbb{N}$
$b-$ déterminez $\mathbb{R}^+ + \{0\}$ et comparez avec $\mathbb{R}^* \cup \{0\}$
$c-$ déterminez $\mathbb{Z}+[0,\ 1]$
$d-$ déterminez $\mathbb{Z}+]0,\ 1[$
$e-$ montrez : $\mathbb{Q}+]0,\ \varepsilon[=\mathbb{R}$ pour tout réel strictement positif ε.
Pour le groupe $(\mathbb{Z}_{12},+)$[4] : $f-$déterminez $\{0,\ 1,\ 3\}+\{1,\ 2,\ 10,\ 11\}$
$g-$ pouvez vous trouver A de cardinal 3 vérifiant $A+A=\mathbb{Z}_{12}$
$h-$ pouvez vous trouver B de cardinal 4 vérifiant $B+B=\mathbb{Z}_{12}$

◦36◦ Vérifiez que

Id	$\overrightarrow{(1\,2\,3)}$	$\overrightarrow{(3\,2\,1)}$	$\overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}$
$\overrightarrow{(1\,2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,3\,4)}$	$\overrightarrow{(2\,3,\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,3)}\circ\overrightarrow{(2\,4)}$
$\overrightarrow{(4\,2\,1)}$	$\overrightarrow{(4\,3\,1)}$	$\overrightarrow{(4\,3,\,2)}$	$\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)}$

est un groupe pour a loi de composition.
Montrez qu'il n'est pas commutatif.
Donnez des sous-groupes de cardinal 2 et 3.
Pouvez vous trouver des sous-groupes de cardinal 1 et 12 ?
Pouvez vous trouver des sous-groupes de cardinal 4 et 6 ?

◦37◦ ♡ On rappelle la définition de $A+B$ quand A et B sont deux parties d'un groupe $(G,+)$: $A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$.
Pour le groupe $(\mathbb{R},\ +)$, $a-$déterminez $\mathbb{N}+\mathbb{N}$ et comparez avec $2.\mathbb{N}$
$b-$ déterminez $\mathbb{R}^+ + \{0\}$ et comparez avec $\mathbb{R}^* \cup \{0\}$
$c-$ déterminez $\mathbb{Z}+[0,\ 1]$
$d-$ déterminez $\mathbb{Z}+]0,\ 1[$
$e-$ montrez : $\mathbb{Q}+]0,\ \varepsilon[=\mathbb{R}$ pour tout réel strictement positif ε.
Pour le groupe $(\mathbb{Z}_{12},+)$[5] : $f-$déterminez $\{0,\ 1,\ 3\}+\{1,\ 2,\ 10,\ 11\}$
$g-$ pouvez vous trouver A de cardinal 3 vérifiant $A+A=\mathbb{Z}_{12}$
$h-$ pouvez vous trouver B de cardinal 4 vérifiant $B+B=\mathbb{Z}_{12}$

◦38◦ ♣ Construisez une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ sans point fixe.
Soit u une suite réelle et σ une permutation de $\mathbb{N}$ *(bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$)*. Montrez que si u converge, alors $(u_{\sigma(n)})$ converge. Réciproque ?
Conseil : utiliser la quantification $\forall\varepsilon, \exists N_\epsilon, \forall n, |u_n-a|>\varepsilon \Rightarrow n<N_\varepsilon$.
Soit u une suite réelle et σ une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrez que si u converge, alors $(u_{\sigma(n)})$ converge. Réciproque ?
Construisez une suite u et une surjection σ telle que u converge et $(u_{\sigma(n)})$ diverge.

◦39◦ On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1,\ \ldots n\}$ (les $n!$ bijections de cet ensemble dans lui même). On note P_n le sous ensemble $\{\sigma\in S_n \mid \forall k\in\{1,\ \ldots n\},\ \sigma(x)\neq x\}$ (permutations sans poitn fixe).

Justifiez

n	0	1	2	3	4	5
$Card(P_n)$ (noté p_n)	1	0	1	2	9	44

Montrez : $\forall n\in\mathbb{N},\ p_{n+1}=n.(p_n+p_{n-1})$.

Attention, ce n'est pas parce qu'il y a un n dans la formule qu'il faut réagir « oh, je vais faire une récurrence ». Ce serait en effet totalement idiot, car il faudrait, pour passer de n à n + 1 avoir une vision sur p_n,p_{n+1},p_{n+2} et p_{n+3} ! Pure folie.
Non, c'est une formule que vous allez démontrer directement, par un dénombrement jusidiceux, et qui servira ensuite à des récurrences (cerveau>>>>réflexes).
Une piste : si on regarde σ dans P_{n+1}, alors $\sigma(n+1)$ est un entier entre 1 et n, quu'on va noter k et qui a deux possibilités : $\sigma(k)=n+1$ ou $\sigma(k)\neq n+1$.

Prouvez alors : $p_n = n!.\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}$ (là, d'accord, faires une récurrence).

Déduisez $\dfrac{p_n}{n!} \longrightarrow_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e}$ (proportion de permutations « partout mélangeantes » parmi toutes les permutations).

◦40◦ On donne $A=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$. Résolvez $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ d'inconnue ensembliste B.
Résolvez $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$ d'inconnue ensembliste B. ($P(E)$ est l'ensemble des parties de E).

4. ensemble des entiers de 0 à 11 (inclus) pour l'addition modulo 12
5. ensemble des entiers de 0 à 11 (inclus) pour l'addition modulo 12

∘41∘ ♡♣ Donnez les seize parties de l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.
Sur l'ensemble de ces parties, on définit la relation $\leqslant$ par $A \leqslant B$ si et seulement si $1 \in A \Rightarrow 1 \in B$. Rappelez les définitions de "réflexive", "symétrique", "antisymétrique" et "transitive". Lesquelles de ces propriétés vérifie $\leqslant$?
Résolvez $A \leqslant \{0,\ 2\}$ d'inconnue A. Résolvez $\{0,\ 2\} \leqslant A$ d'inconnue A.

∘42∘ On numérote les élèves de $MPSI2$ par ordre alphabétique de e_0 à e_{46}. On définit f de $P(MPSI_2)$ (ensemble des parties de la MPSI2) dans $\mathbb{N}$ par $f(A) = \sum\limits_{k\leqslant 47} 2^k.1_{e_k \in A}$ (on rappelle que le booléen $1_{condition}$ vaut 1 si la condition est réalisée, et 1 sinon).
Calculez l'image de votre trinôme.
Montrez que f est injective. Est elle surjective ? Trouvez l'antécédent par f de 2019.

∘43∘ On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout n de $\mathbb{Z}$ (et pas seulement $\mathbb{N}$).
Indiquez pour chacune des propriété ci dessous si vous la démontrez par récurrence simple, récurrence double, récurrence à forte hérédité, preuve directe.

		simple	double	forte	directe
a	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \in \mathbb{N}$				
b	$\forall n \in \mathbb{N},\ \sin(F_n.\pi) = 0$				
c	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{-2.n} \in \mathbb{N}$				
d	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{-2.n+1} \in \mathbb{Z}$				
e	chaque $F_{3.n+2}$ est pair				
f	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{2.n-1} + F_{-2.n-1} = 0$				
g	F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux				
h	$\forall n,\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$				
i	$\forall n \in \mathbb{N},\ (F_n)^2 + (F_{n+1})^2 = F_{2.n+2}$				
j	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n.(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_{2.n+1}$				

∘44∘ L'ordre d'une permutation σ est le plus petit indice p non nul vérifiant $\sigma^p = Id$. Donnez dans S_{15} puis dans S_{16} une permutation d'ordre le plus grand possible. Combien y a-t-il dans S_9 de permutations d'ordre 7 ?
Combien y a-t-il dans S_9 de permutations d'ordre 8 ? Combien y a-t-il dans S_9 de permutations d'ordre 6 ?

∘45∘ Décomposez $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d\ e)} \circ \tau_{a,f} \circ \overrightarrow{(f\ g\ h\ i)}$ en produit de cycles de supports disjoints, et donnez son ordre (première puissance donnant Id).
La notation $\tau_{a,b}$ désigne le "bicycle" $\overrightarrow{(a\ b)}$.

∘46∘ On appelle *ordre* d'une permutation σ de S_n le plus petit entier naturel non nul d vérifiant $\sigma^d = Id$. Montrez que toute permutation a effectivement un ordre. Les questions 1 à 5 sont ♡ et on passe ensuite à ♠/♣.
1– Déterminez l'ordre d'un cycle.
2– Déterminez l'ordre de $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 8 & 2 & 15 & 11 & 3 & 5 & 13 & 4 & 12 & 1 & 10 & 6 & 14 & 9 \end{matrix}$.
3– Montrez que σ et $\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$ ont le même ordre.
4– Pouvez donner l'ordre de $\sigma \circ \sigma'$ en fonction de l'ordre de σ et de l'ordre de σ' quand σ et σ' commutent.
5– Déterminez l'ordre de $i \longmapsto 3.i \quad mod \quad 19$ dans S_{19}.
6– Combien y a-t-il de permutations d'ordre 8 dans S_8 ?
7– Combien l'équation $ordre(\sigma) = 3$ a-t-elle de solutions dans S_6 ?
8– Combien l'équation $ordre(\sigma) = 4$ a-t-elle de solutions dans S_7 ?
9– Pour quelles valeurs de n existe-t-il dans S_n une permutation d'ordre 120 ?
10– Déterminez pour tout n de 1 à 15 le maximum de l'application "ordre" sur S_n.

∘47∘ Combien y a-t-il dans S_6 de cycles de taille 4 ?
Combien y a-t-il dans S_6 de cycles σ de taille 4 vérifiant $\sigma(1) = 1$?
Combien y a-t-il dans S_6 de cycles σ de taille 4 vérifiant $\sigma(1) = 2$?
Combien y a-t-il dans S_6 de permutations σ de signature 1 ?
Combien y a-t-il dans S_6 de permutations σ de signature 1, vérifiant $\sigma(1) = 2$?

Rappel : la signature d'une permutation est 1 si elle se décompose en un nombre pair de bicycles, -1 sinon.
Exemple : $Sgn(\overrightarrow{(a\ b)}) = -1$, $Sgn(\overrightarrow{(a\ b\ c)}) = 1$ car $\overrightarrow{(a\ b\ c)} = \overrightarrow{(a\ c)} \circ \overrightarrow{(a\ b)}$, $Sgn(Id) = (-1)^0 = 1$.
La signature d'un $k-$cycle est $(-1)^{k-1}$. La signature d'une permutation générale est le produit des signatures des cycles qui la composent.

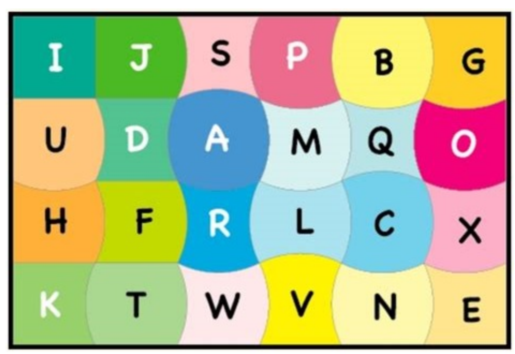
∘48∘ ♣ x est un rationnel ; l'écriture décimale de x^2 a pour motif périodique 897959183673469387755102040816326530612244.
Pouvez vous retrouver l'écriture décimale de x lui même ?

∘49∘ La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k.\binom{n}{k}$ vaut $2^{n-1}.n$. Pouvez vous le prouver par récurrence sur n ?
Que pensez vous de l'élève qui veut le prouver par récurrence sur k ?
♡ Un élève propose : $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ldots$, je dérive, je calcule en 1.
♡ Une autre preuve commence par $k.\binom{n}{k} = \dfrac{n!.k}{(n-k)!.k!} = \dfrac{n!.}{(n-k)!.(k-1)!} = \dfrac{n!.}{((n-1)-(k-1))!.(k-1)!}$; complétez.
Une dernière passe par $\displaystyle\sum_{A\in P(E)} Card(A)$ et $\displaystyle\sum_{\substack{A\in P(E)\\ x\in E}} 1_A(x)$; retrouvez les morceaux.

∘50∘ L'opérateur $^\omega$ est défini sur l'espace vectoriel des applications C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : « il est linéaire », $p^\omega = p'$ si p est paire et $i^\omega = -i'$ si i est impaire. Calculez $\exp^\omega$. Calculez $(x \longmapsto Arctan(x+1))^\omega$. Qu'est ce qui est vrai : $\boxed{\forall f,\ (f^\omega)^\omega = -f''}$ $\boxed{\forall f,\ (f^\omega)^\omega = f''}$ $\boxed{\text{ni l'un ni l'autre}}$ On pose $s_a = x \longmapsto \sin(x+a)$ et $c_a = x \longmapsto \cos(x+a)$. Exprimez $(c_a)^\omega$ et $(s_a)^\omega$. Pourquoi la formule $(\cos(x+a))^\omega$ est elle idiote ?
On demande de résoudre $f^\omega = f$ d'inconnue f. L'élève cherche : « il n'y a pas de solution f paire à part la fonction nulle, il n'y a pas de solution impaire, à part la fonction nulle, donc la seule solution est la fonction nulle ». Montrez qu'il a tort.
Rappel : transformation linéaire : $\phi(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.\phi(u) + \mu.\phi(v)$, par exemple $(\lambda.u + \mu.v)' = \lambda.u' + \mu.v'$.

∘51∘ a - Vrai ou faux : si f est dérivable, alors p et i sont dérivables.
b - Vrai ou faux : si f est périodique, alors p et i sont périodiques.
c - Vrai ou faux : si f est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors p et i le sont aussi.
d - Vrai ou faux : si f est monotone, alors p ou i est monotone.
Ici, pour f donnée, p et i sont les fonctions paire et impaire de somme f.

Voici les pièces du jeu de Curvica.
Déterminez les classes d'équivalence pour chacune des relations suivantes
« avoir le même périmètre que »
« avoir la même aire que »
« avoir le même périmètre et la même aire que ».
Assemblez quatre pièces de même périmètre pour en faire un rectangle.
Trouvez deux pièces de même périmètre, possédant chacune deux axes de symétrie.
∘52∘ Assemblez quatre pièces formant un carré. Même question avec neuf pièces.



Déterminez maximum et minimum de $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)-2}$.
Question plus facile : Montrez $Max\left\{\dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)-2}\ \middle|\ , x \in \mathbb{R}\right\} = 0$ et $Max\left\{\dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)-2}\ \middle|\ , x \in \mathbb{R}\right\} = \dfrac{4}{3}$ (cours sur $a.\cos(t) + b.\sin(t)$ après soustraction).
∘53∘ Calculez l'aire de la partie en gris.