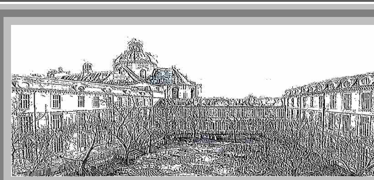
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 8 janvier
M.P.S.I.2



2023 2024

TD14

◦0◦

Soit $(G, *)$ un groupe à onze éléments, et a un élément de G différent du neutre e. Montrez, en étudiant $p \longmapsto a^p$ de $\mathbb{N}$ dans G qu'il existe deux exposants p et q distincts vérifiant $a^p = a^q$ (*a^p désigne $a * a * \ldots a$ p fois*). Déduisez qu'il existe r dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $a^r = e$.
Déduisez que a^{-1} (*inverse de a*) est une puissance de a. Montrez qu'il existe même r dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $a^r = e$ et $a^k \neq e$ pour tout k de 1 à $r-1$.
Quel est alors le cardinal de $\{a^k \mid 0 \leqslant k < r\}$ (*noté A*) et montrez que cette partie est un sous-groupe de $(G, *)$.
On définit sur G le relation $\bowtie$ par $(x \bowtie y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N},\ y = x * a^k)$. Montrez que c'est une relation d'équivalence.
On suppose qu'il y a un élément b de G qui n'est pas dans A. Montrez qu'alors $\{b * a^k \mid 0 \leqslant k < r\}$ (*noté B*) a le même cardinal que A et aucun élément en commun avec A.
On suppose qu'il y a un élément c de G qui n'est ni dans A ni dans B. Montrez qu'alors $\{c * a^k \mid 0 \leqslant k < r\}$ (*noté C*) a le même cardinal que A et aucun élément en commun avec A ni avec B.
En notant que l'on "tranche" G en parties ayant toutes le même cardinal, concluez que le cardinal de A vaut 1 ou 11 (*mais on a déjà éliminé* 1).
Concluez que G est égal à A et est commutatif.
Par quoi pouvez vous remplacer 11 ?

Tout groupe de cardinal premier est engendré par un élément. Et il est donc forcément commutatif.
C'est ce qu'on va prouver ici.

On s'est donné a.. Par stabilité du groupe (= « loi interne »), les éléments a, $a * a$, $a * a * a$ et ainsi de suite sont tous dans G.
Mais G est un ensemble fini.
On est donc obligé de retomber au bout d'un moment sur un élément déjà pris.

Proprement, si tous les a^n étaient différents, la liste $[a,\ a^2,\ a^3, \ldots a^{12}]$ serait faite de douze éléments distincts de G, ce qui n'est pas possible.

Il existe donc deux indices distincts p et q vérifiant $a^p = a^q$.

Par symétrie des rôles, on va supposer $p < q$. On a donc $a * a * a \ldots * a = a * a * \ldots * a * \ldots a$ avec p éléments d'un côté et q de l'autre.
On simplifie par a de chaque côté (en composant par a^{-1} qui existe puisqu'on est dans un groupe).
Quitte à avoir même posée $q = p + r$, on simplifie p fois de suite par a.
Il reste e du côté gauche (le neutre), et a^r de l'autre.

On a donc obtenu $a^r = e$ (avec r strictement positif, sachant que par convention naturelle on avait déjà $a^0 = e$).

On a $a * a * a \ldots * a = e$ (avec r termes). On en met un de côté :
$a * a^{r-1} = a^{r-1} * a = e$.
On reconnaît la définition du symétrique de a. Et c'est donc a^{r-1} qui tient ce rôle.

Prenons un exemple avec les entiers de 0 à 10 pour l'addition modulo 11 (la loi $*$ est donc l'addition).
On part de 3 et on calcule ses « puissances » successives : 3, $3*3 = 6$, $3*3*3 = 9$, $3*3*3*3 = 1$, $3*3*3*3*3 = 4$, $3*3*3*3*3*3 = 7$, $3*3*3*3*3*3*3 = 10$,
$3*3*3*3*3*3*3*3 = 2$, $3*3*3*3*3*3*3*3*3 = 5$, $3*3*3*3*3*3*3*3*3*3 = 8$ *pour l'instant toutes les valeurs sont distinctes.*
Mais si on continue : $3*3*3*3*3*3*3*3*3*3*3 = 0$ *et* $3*3*3*3*3*3*3*3*3*3*3*3 = 3$.
On vient de retrouver un élément déjà présent dans la liste.
On a donc $3 = 3*3*3*3*3*3*3*3*3*3*3*3$.
On simplifie : $0 = 3*3*3*3*3*3*3*3*3*3*3$ *(on le savait, mais bon...).*
On déduit que le symétrique de 3 *est* $3*3*3*3*3*3*3*3*3*3$ *(avec un terme de moins).*

A ce stade, il existe un entier r vérifiant $a^r = e$. Mais est ce le plus petit ?
Pas forécement. Mais si on regarde l'ensemble $\{q \in \mathbb{N}^* \mid a^q = e\}$, c'est une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide (on y a trouvé

un r).
Il suffit de prendre ensuite le plus petit élément de cet ensemble (vous auriez dit « prenons le premier r tel que $a^r = e$, mais auriez vous pensé à dire qu'il en existait au moins un ?).
En tant que premier, il vérifie $a^r = e$. Et comme il n'y en a pas avant, on a $a^k \neq e$ pour tout k entre 1 et $r-1$.

Les élémentsa^k avec k entre 1 et r sont différents de e.
Mais sont ils tous différents entre eux ?

Si tel est le cas, la liste $[a^0,\ a^1,\ a^2, \dots a^{r-1}]$ sera faite de r éléments distincts.

Et justement, si pour deux d'entre eux, p et q (avec $0 \leqslant p < q < r$ par symétrie des rôles) on avait $a^p = a^q$, on aurait $a^{q-p} = e$ avec $q-p$ entre 1 et $r-1$ ce qui est contradictoire.

L'ensemble $\{a^0,\ a^1,\ a^2, \dots a^{r-1}\}$ contient donc bien r éléments exactement.

> *r est appelé « ordre de a », et l'ensemble $\{a^0,\ a^1,\ a^2, \dots a^{r-1}\}$ est un sous-groupe de $(G, *)$. C'est même le plus petit sous-groupe de $(G, *)$ contenant a.*
> *On l'appelle sous-groupe engendré par a.*
> *Si le grupe $(G, *)$ est celui des entiers de 0 à 11 pour l'addition modulo 12 (donc à 12 éléments attention), le sous groupe engendré par 0 est $\{0\}$, le sous groupe engendré par 1 est $\{0, 1, 2, 3, \dots 11\}$. Le sous-groupe engendré par 2 est $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. le sous groupe engdneré par 3 est $\{0, 3, 6, 9\}$. Celui engendré par 4 est $\{0, 4, 8\}$. mais celui engendré par 5 reprand tous les entiers de 0 à 11 (dans l'ordre $[0, 5, 10, 3, 8, 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7]$ si vous y tenez. Et si vous avez deviné, tout va dépendre de « a et 12 sont ils premiers entre eux ? ».*

On va ensuite construire la relation d'équivalence « modulo ce sous-groupe ».
On se donne x, y et z (histoire de tout quantifier).

$\bullet_R$ On vérifie $x \bowtie x$. E, effet $(\exists k \in \mathbb{N},\ x = x * a^k)$, il suffit de prendre $k = 0$ (ou r).

$\bullet_S$ On suppose $(x \bowtie y)$. On traduit $(\exists k \in \mathbb{N},\ y = x * a^k)$. Quitte à réduire modulo r, on peut supposer $0 \leqslant k < r$.
On a alors $(y * a^{(r-k)} = x * a^k * a^{r-k} = x)$. On a l'entier $r-k$ qui vérifie $(x = y.a^{r-k})$. On reconnaît $y \bowtie x$.

$\bullet_T$ On suppose à la fois $x \bowtie y$ et $y \bowtie x$. On traduit : $(\exists k \in \mathbb{N},\ y = x * a^k)$ et $(\exists k' \in \mathbb{N},\ z = y * a^{k'})$.
On enchasse $(\exists q \in \mathbb{N},\ z = x * a^q)$ avec tout simplement $q = k + k'$.
On reconnaît $x \bowtie z$.

La relation est réflexive, symétrique et transitivie, c'est une relation d'équivalence et elle va permettre de découper G en tranches.

> *L'erreur sur ce type de question des élèves sans compréhension mathémtique.*
> *Vouloir passer de $(\exists k \in \mathbb{N},\ y = x * a^k)$ et $(\exists k \in \mathbb{N},\ z = y * a^k)$ à $(\exists k \in \mathbb{N},\ z = x * a^k)$, sans comprendre que $\exists k$ signifie qu'il existe au moins un k mais qu'il doit changer à chaque fois qu'on change de x et de y.*
> *Bref, un problème fondamental de variables.*
> *Donc de maths.*

Combien d'éléments dans chaque classe d'équivalence ?
Dans la classe d'équivalence de x, il y a tous les y s'écrivant $y = x * a^k$ pour k dans $\mathbb{N}$.
Mais en fait, k va juste de 0 (inclus) à r (exclu), puisqu'ensuite, ce snt les mêmes valeurs qui reviennent.
Et les r éléments de la forme $x * a^k$ sont tous distincts.

> *Si on avait $x * a^k = x * a^p$ on aurait $a^k = a^p$ en composant par le symétrique de x, puis $a^{k-p} = e$ et donc $k - p = 0$.*

On a découpé G en classes d'équivalance (disons qu'il y en a c), toutes de même cardinal r.
Comme elles forment une partition, on a $Card(G) = c \times r$ (nombre de classes fois cardinal de chacune).

Mais comme $Card(G)$ est un nombre premier [1], on déduit que c vaut 1 et r vaut 11.

> *La solution $c = 11$ et $r = 1$ donne $x = e$ qu'on a refusé de prendre.*

1. oui, je vends la èche, on peut remplacer 11 par n'importe quel nombre premier

Il n'y a donc qu'une classe. Et comme le neutre est dans une d'entre elles, on peut dire que cette classe est celle de e.

Au fait, avez vous reconnu ici la démonstration du théorème de Lagrange : le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe.
Et ici, comme le cardinal du groupe est premier, àa ne nous laisse que deux sous groupes possibles : le neutre tout seul (cardinal 1*), le groupe tout entier (cardinal* 11*).*

On a donc finalement
$$G = classe\ de\ e = \{e * a^k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{e * a^k \mid 0 \leqslant k < r\}$$
Notre groupe de cardinal premier est donc de la forme « les puissances d'un quelconque de ses éléments, autre que le neutre ».

On appelle ceci un groupe monogène (engendré par un élément).
Et en tant qu'ensemble des a^k, il est commutatif : $x * y = a^k * a^p = a^{k+p} = a^{p+k} = a\hat{}p * a\hat{}k = y * x$
Bilan : tout groupe de cardianl p premier est monogène et donc forcément commutatif.

Il n'y aura donc qu'un modèle de groupe de cardinal 2*. De même, un seule modèle de groupe de cardinal* 3*. De même pour* 5 *et* 7*. Et à chaque fois, ils sont commutatifs.*
En revanche, on peut construire un groupe de cardinal 4 *qui n'est pas monogène. Mais il est commutatif.*
Et pour un cardinal 6*, le groupe* $(S_3, \circ)$ *est un groupe ni monogène, ni commutatif.*
Je vous laisse chercher les groupes de cardianl 8 *puis* 9 *et* 10*.*
On notera qu'un groupe de cardinal 10 *peut contenir des sous groupes (commutatifs) de cardinal* 2 *et de cardinal* 5*.*
Il y a plein de choses passionnantes là dessus, mas patience.

∘1∘ ♡ Pour tout groupe $(G, *)$, on note Z l'ensemble $\{a \in G \mid \forall b \in G,\ a * b = b * a\}$. Montrez que Z est égal à G si et seulement si $(G, *)$ est commutatif. Montrez que Z est un sous-groupe de $(G, *)$.

Z est ce que l'on appelle le centre » du groupe G.
Z est égal à G si et seulement si tous les a de G sont dans Z, ce qui revient à dire $\forall a \in G,\ \forall b \in G,\ a * b = b * a$.

Les éléments de Z sont ceux qui « commutent avec tout le monde ».
Par définition, ce sont des éléments de G.

Le neutre est dans Z.

On prend a et α dans G (on traduit : $\begin{array}{l} \forall b \in G,\ a * b = b * a \\ \forall b \in G,\ \alpha * b = b * \alpha \end{array}$).
On veut savoir si $a * \alpha$ est dans G.
On se donne b quelconque, et on calcule $(a * \alpha) * b$ et $b * (a * \alpha)$: sont ils égaux :
$(a * \alpha) * b = a * (\alpha * b)$ par associativité
$(a * \alpha) * b = a * (b * \alpha)$ car α est dans Z
$(a * \alpha) * b = (a * b) * \alpha$ par associativité
$(a * \alpha) * b = (b * a) * \alpha$ car a est dans Z
$(a * \alpha) * b = b * (a * \alpha)$
On reconnaît que $a * \alpha$ est dans Z.

On se donne a dans G (on traduit : $\forall b \in G,\ a * b = b * a$).
On s'interroge : a^{-1} (dont l'existence est assurée car on est dans G) est il dans Z.
On se donne b quelconque et on veut comparer $a^{-1} * b$ et $b * a^{-1}$.
On prend l'initiative de partir de $a * b = b * a$
et de multiplier à droite et à gauche par a^{-1} :
$a^{-1} * (a * b) * a^{-1} = a^{-1} * (b * a) * a^{-1}$
on simplifie par associativité $(a^{-1} * a) * b * a^{-1} = a^{-1} * b * (a * a^{-1})$
et c'est pile poil ce que l'on voulait

Remarque :
Un type d'exercice qui peut être fatal.
Il est hyper simple, il demande juste à ce que vous posiez correctement vos variables et surtout vos questions.
Mais il montre si vous avez compris ou non.

Il n'y a aucune connaissance encyclopédique, aucune capacité à calculer vite bien, à sortir le bon théorème au bon moment, à avoir appris par couer trente huit méthodes et quatre cent trente sept exercices du livre.

Juste la question « savez vous raisonner ». Et c'est terrible de s'entendre dire « non ».

Ou pour le moins « pas encore, car tu n'as pas passé le cap de tes blocages ».

∘2∘

A et B sont deux ensembles. Montrez : $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.[a]
Trouvez deux ensembles A et B vérifiant $Card(P(A) \cup P(B)) = 11$.
Trouvez deux ensembles A et B vérifiant $Card(P(A) \cup P(B)) = 10$.

a. $P(A)$ désigne l'ensemble de toutes les parties de A (ou sous-ensembles de A)

On va raisonner par équivalences.
En étudiant les éléments de $P(A \cap B)$. Ce sont des ensembles (ou parties).

$$X \in P(A \cap B) \iff X \subset A \cap B \iff \begin{array}{ccc} X & \subset & A \\ & et & \\ X & \subset & B \end{array} \iff \begin{array}{ccc} X & \in & P(A) \\ & et & \\ X & \in & P(B) \end{array} \iff X \in (P(A) \cap P(B))$$

Et je ne peux plus rien pour les élèves qui se perdent entre $X \subset A$ et $X \in P(A)$.
Ou alors, si, je peux faire appel à Blaise Pascal. Celui du triangle, et celui du « pari »
et prier.
Si un Dieu existe, il vous viendra en aide, et c'est tout ce qu'il reste comme solution pour faire de vous des gens intelligents
Si aucun Dieu n'existe, j'aurai perdu mon temps, mais vous vous en foutez de votre côté.

Si A possède n élément, $P(A)$ possède 2^n éléments (parties de A). Si B possède p élément, $P(B)$ en possède 2^p.

$P(A) \cup P(B)$ est formé des 2^a parties de A et 2^p parties de B.
On s'attend à avoir $2^n + 2^p$ éléments. Ce qui ne saurait faire 11.
Mais dans $P(A)$ il y a $\emptyset$ (l'ensemble vide) et dans $P(B)$ aussi. On peut donc ne compter qu'une fois cet élément, et arriver à 11 avec $8 + 4 - 1$. On prend pour A un ensemble à trois éléments et pour B un ensemble à deux éléments.

$A = \{0, 1, 2\}$	$P(A) = \Big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\Big\}$
$B = \{3, 4\}$	$P(B) = \Big\{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}\Big\}$

On a bien $P(A) \cup P(B) = \Big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}\Big\}$ de cardinal 11.

Et cet ensemble n'a rien à voir avec $P(A \cup B)$ de cardinal 32 qui contient aussi $\{1, 4\}$ et $\{0, 1, 3, 4\}$ par exemple.

Pour aboutir à un cardinal 10, il faut effacer encore une partie commune. Il suffit de demander à A et B d'avoir un élément commun ce qui fera un singleton en commun à $P(A)$ et $P(B)$.

$A = \{0, 1, 2\}$	$P(A) = \Big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\Big\}$
$B = \{2, 3\}$	$P(B) = \Big\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\Big\}$

On a bien

$$P(A) \cup P(B) = \Big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{3\}, \{2,3\}\Big\}$$

de cardinal 10.

Question ouverte : quelles sont les valeurs que peut prendre $P(A) \cup P(B)$ quand A et b sont deux ensembles ?

Mais on la ferme vite cette question : $2^a + 2^b - 2^c$ avec $c \leqslant Min(a, b)$.

∘3∘

Combien de $\binom{2022}{k}$ sont impairs ? (Python ?)

Au moins deux puisque $\binom{2022}{0}$ et $\binom{2022}{2022}$ valent 1.
Pas tous puisque $\binom{2022}{1}$ et $\binom{2022}{2021}$ valent 2022.

```
binomial = 1
n = 2022
compteur = 1
for k in range(n) :
....binomial = binomial*(n-k)//(k+1)
....if binomial%2 == 1 :
........compteur += 1
```

En une ligne, le test et l'incrémentation du compteur peuvent être remplacés par compteur += (binomial %2), vous ne trouvez pas ?

La réponse est alors 256.
Et voici la ligne des binomiaux $\binom{2022}{k}$ modulo 2 .
1010101000000000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010
1010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000000010101010
0000000000000000000000001010101000000000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000
0000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000
0000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000000010101010000000000000
0000000000001010101000000000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000
0000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000
0000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000000010101010000000000000000000000000
1010101000000000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010
1010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000000010101010
0000000000000000000000001010101000000000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000
0000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000
0000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000000010101010000000000000
0000000000001010101000000000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000
0000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000
0000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000000010101010000000000000000000000000
1010101000000000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010
1010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000000000000000000010101010
0000000000000000000000001010101000000000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000
0000000000000000000010101010000000000000000000000000101010100000000000000000000000001010101000000000
00000000000000001010101

Exerxice : tracer le triangle de Pascal modulo 2.
O même modulo p fixé à l'avance, avec une palette de couleurs.

Sinon, il y a quand même une formule explicite pour trouver qui sont les binomiaux impairs.
C'est la formule de Lucas.
https ://blogdemaths.wordpress.com/2013/07/16/sierpinski-et-pascal-sont-dans-un-triangle/

◦4◦

♣ : C'est facile, les produits matriciels : $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 24 \\ 36 & 28 \end{pmatrix}$, il suffit de coller les chiffres côte à côte. Vous m'en trouvez d'autres ?
$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 36 \\ 36 & 22 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & 55 \\ 33 & 25 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 77 \\ 22 & 38 \end{pmatrix}$

On veut $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a\alpha} & \overline{b\beta} \\ \overline{c\gamma} & \overline{d\delta} \end{pmatrix}$ où $\overline{a\alpha}$ désigne le nombre à deux chiffres a suivi de α (c'est à dire $10.a + \alpha$).
J'ai pour ma part écrit un programme...
[[[0, 0], [0, 0]], [[0, 0], [0, 0]]] [[[2, 2], [3, 2]], [[8, 4], [6, 8]]] [[[4, 2], [4, 2]], [[8, 4], [8, 4]]] [[[3, 2], [6, 2]], [[9, 2], [6, 8]]] [[[5, 2], [7, 2]], [[9, 2], [7, 6]]] [[[7, 2], [8, 2]], [[9, 2], [8, 4]]] [[[9, 2], [9, 2]], [[9, 2], [9, 2]]] [[[2, 3], [2, 2]], [[8, 6], [4, 8]]] [[[5, 3], [3, 2]], [[8, 6], [6, 2]]] [[[3, 3], [4, 2]], [[9, 3], [4, 8]]] [[[6, 3], [5, 2]], [[9, 3], [5, 5]]] [[[9, 3], [6, 2]], [[9, 3], [6, 2]]] [[[4, 4], [2, 2]], [[8, 8], [4, 4]]] [[[3, 4], [3, 2]], [[9, 4], [3, 8]]] [[[7, 4], [4, 2]], [[9, 4], [4, 4]]] [[[6, 5], [3, 2]], [[9, 5], [3, 5]]] [[[3, 6], [2, 2]], [[9, 6], [2, 8]]] [[[9, 6], [3, 2]], [[9, 6], [3, 2]]] [[[5, 7], [2, 2]], [[9, 7], [2, 6]]] [[[7, 8], [2, 2]], [[9, 8], [2, 4]]] [[[9, 9], [2, 2]], [[9, 9], [2, 2]]] [[[2, 2], [6, 3]], [[8, 2], [6, 9]]] [[[3, 2], [7, 3]], [[8, 2], [7, 8]]] [[[4, 2], [8, 3]], [[8, 2], [8, 7]]] [[[5, 2], [9, 3]], [[8, 2], [9, 6]]] [[[3, 3], [3, 3]], [[6, 6], [6, 6]]] [[[2, 3], [4, 3]], [[8, 3], [4, 9]]]

[[[5, 3], [6, 3]], [[8, 3], [6, 6]]] [[[8, 3], [8, 3]], [[8, 3], [8, 3]]] [[[2, 4], [3, 3]], [[8, 4], [3, 9]]] [[[4, 4], [4, 3]], [[8, 4], [4, 7]]] [[[6, 4], [5, 3]], [[8, 4], [5, 5]]] [[[3, 4], [6, 3]], [[9, 2], [3, 9]]] [[[8, 4], [6, 3]], [[8, 4], [6, 3]]] [[[7, 4], [8, 3]], [[9, 2], [4, 7]]] [[[6, 5], [4, 3]], [[8, 5], [4, 5]]] [[[2, 6], [2, 3]], [[8, 6], [2, 9]]] [[[5, 6], [3, 3]], [[8, 6], [3, 6]]] [[[3, 6], [4, 3]], [[9, 3], [2, 9]]] [[[8, 6], [4, 3]], [[8, 6], [4, 3]]] [[[9, 6], [6, 3]], [[9, 3], [3, 6]]] [[[3, 7], [2, 3]], [[8, 7], [2, 8]]] [[[4, 8], [2, 3]], [[8, 8], [2, 7]]] [[[8, 8], [3, 3]], [[8, 8], [3, 3]]] [[[7, 8], [4, 3]], [[9, 4], [2, 7]]] [[[5, 9], [2, 3]], [[8, 9], [2, 6]]]

∘5∘ ♣ Calculez ces étranges produits $\prod_{n=0}^{+\infty} \sqrt[2^n]{3}$ et $\prod_{n=1}^{+\infty} \sqrt[2^n]{3^n}$.

$\prod_{n=0}^{N} \sqrt[2^n]{3}$ a pour logarithme $\sum_{n=0}^{N} \frac{\ln(3)}{2^n}$ ($\sqrt[a]{b}$ c'est $b^{\frac{1}{a}}$ et ça a pour logarithme $\frac{\ln(b)}{a}$).
On simplifie cette somme :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{\ln(3)}{2^n} = \ln(3).\frac{1-\frac{1}{2^{N+1}}}{1-\frac{1}{2}}$$

On fait tendre N vers l'infini (et on jette $\frac{1}{2^{N+1}}$). Il reste $2.\ln(3)$.

On revient au produit par l'exponentielle : $\prod_{n=0}^{N} \sqrt[2^n]{3} \longrightarrow_{N\to+\infty} 9$

ou si vous préférez : $\boxed{\prod_{n=0}^{+\infty} \sqrt[2^n]{3} = 9}$

Passons au logarithme de $\prod_{n=1}^{N} \sqrt[2^n]{3^n}$

Cette fois, on a $\sum_{n=1}^{N} \frac{n.\ln(3)}{2^n}$.

On a cette fois la série $\sum_{n=1}^{N} n.x^n$ avec x égal à $\frac{1}{2}$.

Le cours indique : $\sum_{k=1}^{n} k.z^k = \frac{z-(n+1).z^{n+1}+n.z^{n+2}}{(1-z)^2}$.

Dérivez $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$, *multimliez par* x.

Ici, z vaut $\frac{1}{2}$. Et $n.z^n$ tend vers 0 (croissances comparées).

Bref, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n.\ln(3)}{2^n} = 2.\ln(3)$.

Cette fois encore : $\boxed{\prod_{n=1}^{+\infty} \sqrt[2^n]{3^n} = 9}$

Dans cet exercice quand je le pose en I.S. ou en colle, trop de confusions sur $\sqrt[2^n]{a}$, avec des exposants dans le mauvais sens.
Rappel : $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ et $\sqrt[b]{a} = a^{1/b}$.

∘6∘ Le professeur a donné le premier terme de la suite a *(c'est* $a_0 = 10$*)* et sa raison *(positive)*. Il avait oublié de préciser si elle était arithmétique ou géométrique *(l'étourdi)*. Il a demandé de calculer a_2. Et tous les élèves ont pourtant trouvé la même chose. Retrouvez la raison.

Partant de $a_0 = 10$ avec raison r, les « suites arithmétique » ont trouvé $a_2 = 10 + 2.r$.
Partant de $a_0 = 10$ avec raison r, les « suites géométrique » ont trouvé $a_2 = 10.r^2$.
En supposons qu'il existe des élèves des deux sorts, on identifie : $10 + 2.r = 10.r^2$.

On résout, et r vaut $\frac{1+\sqrt{101}}{10}$ (ou $\frac{1-\sqrt{101}}{10}$).

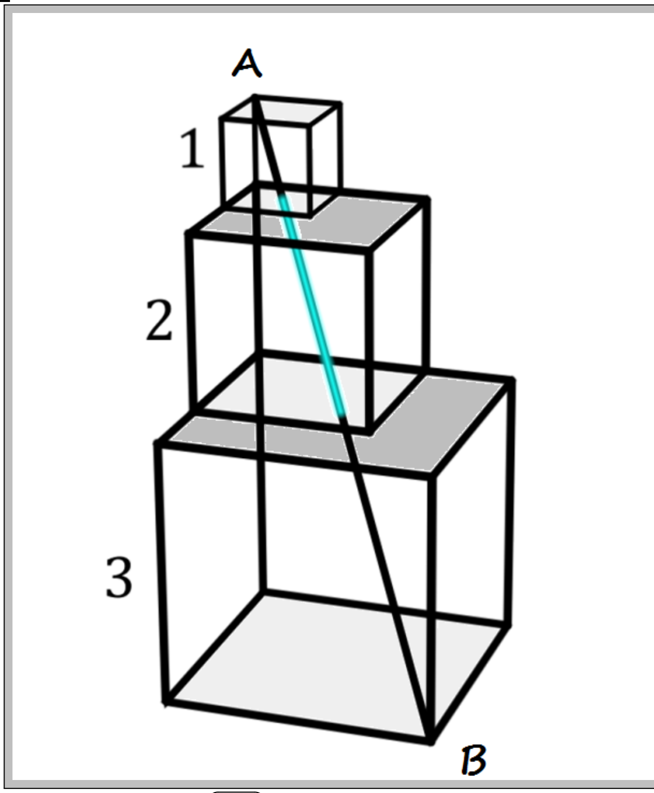
Il ne reste plus qu'à me donner le nom de ce prof qui a des exercices aussi peu pratiques (a_2 vaut alors $\frac{51+\sqrt{101}}{5}$, pourquoi pas !).

∘7∘

Montrez : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a).(c-a).(c-b)$ (déterminant de VanDerMonde de taille 3).

Pour a égal à b ou c le déterminant est nul à cause de deux colonnes égales.
Pareil pour $b = c$. La factorisation est donc naturelle.
Sinon, on développe avec 6 termes : $b.c^2 - b^2.c + a.b^2 - a^2.b + a^2.c - a.c^2$ et on compare.

∘8∘



Quelle est la longueur de la grande diagonale $[A,\ B]$. Quelle est la longueur de sa partie « en bleu » dans le cube du milieu ?

Calculez $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}.dx$ et $\int_0^2 \sqrt{4-2^x}.dx$.

L'une vaudra $2.\dfrac{\ln(2+\sqrt{3}) - \ln(2-\sqrt{3}) - \sqrt{3}}{\ln(2)}$ *et l'autre* π.

Résolvez le système $\log_x(y) + \log_y(x) = \dfrac{50}{7}$ et $x.y = 256$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$ *(rappel* $y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$*).*

Donnez moi un entier ayant exactement 15 diviseurs.

On est dans $rang(53)$ pour l'addition et la multiplication modulo 53. L'équation $x^2 + 2.x + 2 = 0$ a pour discriminant -4. L'élève dit « Δ est négatif, elle n'a donc pas de solution ». Il n'a rien compris ! Δ a une racine carrée assez évidente ! Résolvez l'équation.

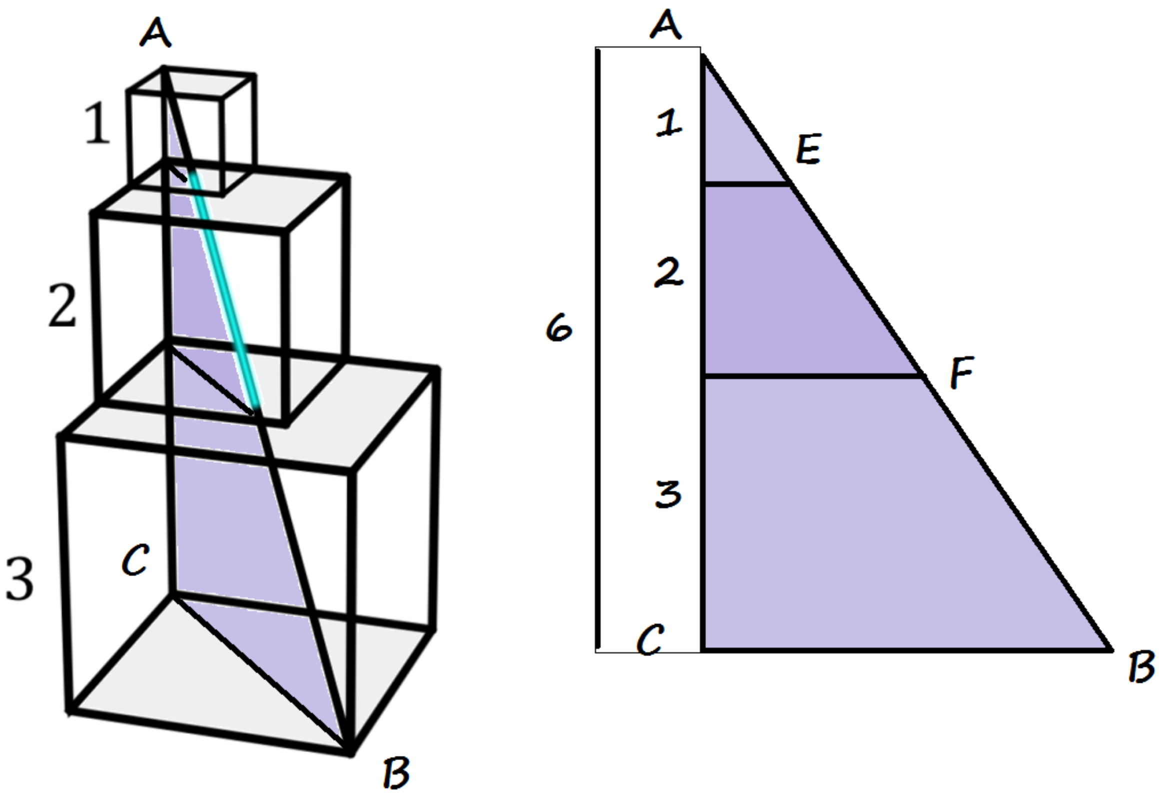
Un entier tel que $\boxed{2^{14}}$ a quinze diviseurs : les 2^p pour p allant de 0 à 14 lui même.
[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384]

Sinon, il y a 144. [1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144] .
On explique : $\boxed{144 = 2^4.3^2}$
Des diviseurs sont les $2^a.3^b$ avec $a \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ et $b \in \{0,\ 1,\ 2\}$.
Cinq choix pour l'un, et trois pour l'autre. Total (ou produit) : 15.

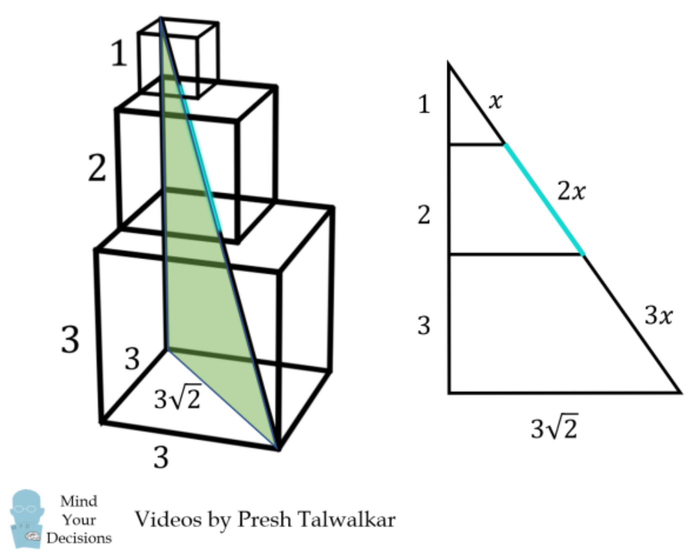
Le carré qui supporte l'ensemble a pour côté 3 et donc pour diagonale $3.\sqrt{2}$.
On coupe l'empilement de cubes suivant le plan de coupe matérialisé.
On obtient un triangle. Rectangle en un point qu'on va appeler C.

La hauteur totale des trois cubes est 6. On a donc $AC = 6$.
On l'a dit au début : $BC = 3.\sqrt{2}$.

Par théorème de Pythagore : $AB = \sqrt{6^2 + (3.\sqrt{2})^2} = \sqrt{54}$. Simplifiable si on veut.



On va conclure par théorème de Thalès. La section que l'on cherche est à 2 (hauteur du cube du milieu)
ce que $\sqrt{54}$ (grande diagonale)
est à 6 (hauteur totale).



On a donc $\dfrac{EF}{2} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{54}}{6}$.
La longueur cherchée vaut $\dfrac{\sqrt{54}}{3}$ ce qui fait $\sqrt{6}$.
Sinon, il y a aussi ça (source : Mind Your Decisions) :

On rappelle
$$\begin{aligned} y = \log_a(x) &\Leftrightarrow a^y = x \\ &\Leftrightarrow e^{y.\ln(a)} = x \\ &\Leftrightarrow y.\ln(a) = \ln(x) \\ &\Leftrightarrow y = \tfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$
(et pour $a = e$, on a le logarithme naturel).

L'équation $\log_x(y) + \log_y(x) = \dfrac{50}{7}$ donne $\dfrac{(\ln(x))^2 + (\ln(y))^2}{\ln(x).\ln(y)} = \dfrac{50}{7}$.
et $x.y = 256$ donne $\ln(x) + \ln(y) = 8\ln(2)$.

On note a et b les deux « vraies inconnues » : $a = \ln(x)$ et $b = \ln(y)$: $7.(a^2 + b^2) = 50.a.b$
$a + b = 8.\ln(2)$
La première équation dit $7.(a+b)^2 = 64.a.b$. En y reportant la seconde (et en divisant par 64) : $a.b = 7.(\ln(2))^2$.

a et b sont les deux racines de $X^2 - 8.\ln(2).X + 7.(\ln(2))^2$ de discriminant $25.(\ln(2))^2$ et de racines $7.\ln(2)$ et $\ln(2)$.
On a donc $\{a,\ b\} = \{\ln(2),\ 7.\ln(2)\}$ puis $\{x,\ y\} = \{2,\ 128\}$.
On encadre $\boxed{S_{x,y} = \{(2,\ 128),\ (128,\ 2)\}}$ et on vérifie : $\log_2(128) + \log_{128}(2) = 7 + \dfrac{1}{7}$.

Résolvons $x^2 + 2.x + 2 = 0$ (et c'est $(x+1)^2 + 1 = 0$).
Son discriminant vaut -4. Mais ne dites pas que ce nombre est négatif et n'a donc pas de racine carrée...
La notion de signe n'a pas de sens dans $(\mathbb{F}_{53}, +, .)$. Rappelons que -1 c'est aussi 52. Alors...
La vraie question, dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$ et partout n'est pas « quel est le signe de Δ
elle est Δ est il le carré de quelqu'un.
Et ici, $7^2 = 49 = -4$.
On a de la chance, on n'a pas eu à chercher trop loin...
Sinon, il fallait étudier $d^2 = -4 + p.53$ avec p et d dans $\mathbb{Z}$.
On pose donc $\delta = 7$ (et on fout à la poubelle les cours de Terminale avec $\sqrt{\Delta}$,on est d'accord !).
On a donc deux racines : $(-2+\delta).2^{-1}$ et $(-2-\delta).2^{-1}$.
Mais qui est -2 ? C'est 51.
Et qui est 2^{-1} ? C'est 27 car $2 \times 27 = 54$.

Plein de vos réflexes acquis au collège et lycée sont à étendre.

$-x$ est l'opposé de x. Et ici, c'est modulo 53.

Une division par 2, c'est une multiplication par l'inverse de 2.

Une extraction de racine, c'est une question « de qui est ce le carré ? ».

On trouve $\boxed{S = \{22,\ 29\}}$

Et on vérifie : somme = $22 + 29 = 51 = -2$
produit : $22 \times 29 = 638 = 2$ car 636 est multiple de 53

◦9◦ On donne $u_0 = 9$, $u_1 = -8$ et $u_2 = 2$.
Trouvez α et β vérifiant $u_n = \alpha.2^n + \beta.(-1)^n$ pour tout n de $\{0,\ 1\}$. A-t-on alors $u_n = \alpha.2^n + \beta.(-1)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$?

Trouvez α et β vérifiant $u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.3^n$ pour tout n de $\{0,\ 1\}$. A-t-on alors $u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.3^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$?

Trouvez α et β vérifiant $u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.(-3)^n$ pour tout n de $\{0,\ 1\}$. A-t-on alors $u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.(-3)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$?

Pour ces trois questions, on résout un système pour trouver α et β, puis on regarde si la propriété est vraie déjà au rang suivant. Si ce n'est pas le cas, inutile de continuer, les deux suites comme (2^n) et $((-1)^n)$ ne sont pas les bonnes.
Si en revanche tout va bien encore pour n égal à 2, voire à 3, on pousse plus avant.

formule	$u_n = \alpha.2^n + \beta.(-1)^n$	$u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.3^n$	$u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.(-3)^n$
système	$\alpha + \beta = 9$	$\alpha + \beta = 9$	$\alpha + \beta = 9$
	$2.\alpha - \beta = -8$	$-2.\alpha + 3.\beta = -8$	$-2.\alpha - 3.\beta = -8$
solution	$\alpha = \dfrac{1}{3}$ et $\beta = \dfrac{26}{3}$	$\alpha = 7$ et $\beta = 2$	$\alpha = 19$ et $\beta = -10$
rang 2	$46 = (2)^n/3 + 26.(-1)^n/3$?	$46 = 7.(-2)^n + 2.(3)^n$?	$46 = 19.(-2)^n - 10.(-3)^n$?
	non	peut-être	non

Sur les trois propositions, s'il y en a une à propager par récurrence, c'est $\boxed{u_n = 7.(-2)^n + 2.3^n}$ pour tout n.
On l'a initialisée aux rangs 0 et 1 *(création du système)* et 2 *(vérification)*.
Supposons la proposition vraie pour deux rangs, et établissons la au rang suivant

on suppose	P_n vraie	$u_n =$	$7.(-2)^n$	$+2.3^n$	
et	P_{n+1} vraie	$u_{n+1} =$	$7.(-2)^{n+1}$	$+2.3^{n+1}$	
on somme	$u_{n+2} =$	$u_{n+1} + 6.u_n =$	$7.(-2)^{n+1}$	$+2.3^{n+1}$	
			$+6.7.(-2)^n$	$+6.2.2^n$	
on factorise		$u_{n+2} =$	$7.(-2)^n.(-2+6)$	$+2.3^n.(3+6)$	
on simplifie		$u_{n+2} =$	$7.(-2)^n.4$	$+2.3^n.9$	
on confirme :		$u_{n+2} =$	$7.(-2)^{n+2}$	$+2.3^{n+2}$	P_{n+2} est vraie

∘10∘

♡ Montrez que toute matrice réelle symétrique de taille 2 a deux valeurs propres distinctes, sauf si elle est déjà diagonale.

On prend $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ de trace $a+c$ et de déterminant $a.c - b^2$.
Son polynôme caractéristique est $X^2 - (a+c).X + (a.c - b^2)$.
Il a pour discriminant $(a+c)^2 - 4.(a.c - b^2)$ qui s'écrit $(a-c)^2 + 4.b^2$.
Premier cas : le discriminant est nul. On a une valeur propre double. Mais la nullité du discriminant donne $a = c$ et $b = 0$ [2]. Et la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est déjà diagonale [3].

Second cas : le discriminant est strictement positif en tant que somme de carrés. On a donc deux valeurs propres, lourdes à écrire λ_1 et λ_2.
On résout donc $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u & v \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
On veut $a + b.u = \dfrac{(a+c) + \sqrt{(a-c)^2 + 4.b^2}}{2}$ et $b + c.u = \dfrac{(a+c) + \sqrt{(a-c)^2 + 4.b^2}}{2}.u$.
Les deux donnent la même chose :

On vérifie que u et v sont différents, ce qui assure que la matrice de passage P est inversible.

∘11∘

Levez les à la puissance n :

A	B	C	D	E	F
$\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

A	B	C
$\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$
$A^2 = 0$	$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$C^2 = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$
nilpotente !	$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	
$A^n = 0_{2,2}$ dès que n dépasse 2 sinon, $A = I_2$ et $A = A$ si j'ose dire.	$B^n = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 2^{n+1} + (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2.(2^n - (-1)^n) & 2^n + 2.(-1)^n \end{pmatrix}$	$C^{2.n} = 11^n.I_2$ et $C^{2.n+1} = 2^{11}.C$

et

D	E	F
$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	pareil !	$I_2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	si si !	$I_2 + n.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
$D^n = \frac{1}{4}.\begin{pmatrix} 2.(5^n + 1) & 4.(5^n - 1) \\ 5^n - 1 & 2.(5^n + 1) \end{pmatrix}$	.	$\begin{pmatrix} 1+n & n \\ -n & 1-n \end{pmatrix}$.

2. air connu : une somme de carrés de réels est nulle si et seulement si chaque réel est nul
3. donc diagonalisable en elle même via $P = I_2$

∘12∘ La notation de la factorielle a longtemps été $\underline{n|}$, jusqu'à ce qu'en 1808, Christian Kramp invente la notation $n!$, plus pratique. Comme on est en MPSI2, il faut qu'on invente autre chose : $n♪$ est le produit des entiers plus petits que n, mais premiers avec n. Par exemple, 10! vaut 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10, alors que 10♪ vaut 1.3.7.9. Calculez $n♪$ pour n de 1 à 13. La suite $(n♪)$ est elle monotone ? Calculez $p♪$ pour p premier. Calculez pour tout n le $p.g.c.d.$ de n et $n♪$. Montrez : $2018♪ = \dfrac{2018!}{2^{1009}.1009!.1009}$ *(en sachant que 1 009 est premier)*. Décomposez 30♪ en produit de facteurs premiers. Résolvez $n♪ = 3^3.7.11.13.17.19$. Trouvez le premier entier n tel que $n♪$ soit un multiple de 1 000.
$\natural_0$ Écrivez un script Python qui prend en entrée n et retourne $n♪$.

Tout commence par un tableau :

n	produit	résultat		n	produit	résultat
1	1	1		8	1.3.5.7	105
2	1	1		9	1.2.4.5.7.8	2 240
3	1.2	2		10	1.3.7.9	189
4	1.3	3		11	1.2.3.4.5.6.7.8.9.10	3 628 800
5	1.2.3.4	24		12	1.5.7.11	385
6	1.5	5		13	1.2.3...12	479 001 600
7	1.2.3.4.5.6	720		14	1.3.5.9.11.13	19 305

Ces premiers calculs donnent tout de suite des contre-exemples : la suite n'est ni croissante ni décroissante

non croissante		$5 = 6♪ < 5♪ = 24$
non décroissante		$3 = 4♪ > 3♪ = 2$

Pour p premier, $p♪$ contient tous les entiers de 1 à $p-1$ (n'abusons pas, p n'est pas premier avec p). On a donc $\boxed{p♪ = (p-1)!}$

Comme $n♪$ est fait d'entiers tous premiers avec n, il est forcément premier avec n :
$\boxed{p.g.c.d.(n,\ n♪) = 1 \text{ pour tout } n}$

Pour 2018♪, on doit prendre les entiers de 1 à 2018 et éliminer ceux qui ont un facteur commun avec 2018. C'est à dire ceux qui contiennent un facteur 2 ou un facteur 1009 *(et même 2018 qui a deux facteurs communs avec lui même)*.
Il ne reste que des entiers impairs, et encore, il n'y a même pas 1009.
$2018♪ = \dfrac{1.2.3.4.5\dots2016.2017.2018}{2.4.6\dots2016.2018}.\dfrac{1}{1009}$ le second terme étant là pour éliminer le 1009 dans ce qu'il reste : $1.3.5.7\dots2017$.
Mais le produit $2.4.6\dots2018$ est fait de 1009 entiers pairs. On extrait un facteur 2 de chacun : $2.4.6\dots2018 = 2^{1009}.(1.2.3\dots1009) = 2^{1009}.1009!$.
Proprement :

$$\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2018\\ k\ pair}} k = \prod_{p=1}^{1009}(2.p) = \Big(\prod_{p=1}^{1009}2\Big).\Big(\prod_{p=1}^{1009}p\Big) = 2^{1009}.1009!$$

On effectue le quotient et c'est fini.

On veut trouver $n♪ = 3^3.7.11.13.17.19$. Le produit de ces entiers jusqu'à n (en en effaçant certains) doit contenir 17 et 19. n est donc supérieur à 19.

Il n'y a pas de 23. C'est donc que 23 n'est pas entre 1 et n, ou que 23 n'était pas premier avec n. Mais si n est un multiple de 23 autre que 23, c'est donc que n vaut au moins 46 et on aura d'autres nombres premiers à prendre dans le calcul de $n♪$.

Mais si n vaut 23, alors 2, 4 et autres sont premiers avec n, et il y a des 2 dans $n♪$. Dès lors, n ne vaut pas 23.

D'ailleurs, si n est impair, alors 2 est dans le produit $1.2\dots n$ et n'est pas effacé. On a donc n *impair* $\Rightarrow n♪$ *pair*.

En lisant bien d'ailleurs, comme il y n'a pas de 2 ni de 5 dans $n♪$, c'est qu'il y en a dans n.
On arrive vite à $\boxed{n = 20}$

On vérifie en barrant les multiples de 2 et les multiples de 5 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		3				7		9		11		13				17		19	

Pour que n♪ soit un multiple de 1000, il faut qu'on y trouve $2^3.5^3$.
On peut l'obtenir en mettant dans n♪ les entiers 2, 4, 5, 8, 10, 15 (et on n'en a pas assez avant).

Il faut donc que n dépasse 15 et soit premier avec 2 et 5.

Prenons 17♪. C'est 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16 On a les facteurs demandés.

Et avec n plus petit que 17, on n'aura jamais assez de 5 dans n♪.

On va avoir besoin de savoir si des entiers sont premiers entre eux, on écrit donc une procédure qui calcule le p.g.c.d. de deux entiers :

```
def pgcd(a, b) :
....if a%b == 0 :
........return b
....return pgcd(b, a%b)
```

Il ne reste plus qu'à créer une procédure avec une boucle impérative sur une variable qui va de 1 à n (inclus, mais ça ne sert à rien) ; pour chaque k, on calcule le p.g.c.d. et s'il est convenable, on multiplie, sinon on n'en fait rien :

```
def fucktorielle(n) :
....p = 1 #on initialise le produit
....for k in range(1, n+1) : #on parcourt
........if pgcd(n, k) == 1 : #on teste
............p *= k #le facteur k est dans le produit
....return p #on a fini la boucle
```

∘13∘

L'élève veut créer une loi sur $\mathbb{N}$ qui admette un neutre à droite n vérifiant donc $\forall a \in \mathbb{N},\ a * n = a$, et un neutre à gauche m vérifiant $\forall b \in \mathbb{N},\ m * b = b$. Il pense à l'addition et $a = b = 0$. Ou à la multiplication avec $n = m = 1$. Mais il a oublié la consigne : il faut que les deux neutres soient distincts : $m \neq n$. Alors il cherche une loi vraiment tordue.
Aidez le. Soit en en trouvant une, soit en lui prouvant que c'est impossible.

Bon, c'est dans le cours, ça.
On calcule $m * n$. On trouve $n = m * m = n$. Et c'est fini.

∘14∘

Une suite de Saias et Mazet[a] est une suite d'entiers naturels non nuls, distincts, où chaque terme est diviseur ou multiple du terme qui suit. Par exemple `[1, 2, 6, 3, 12, 4]`, ou `[5, 1, 4, 2, 6, 3]`. Écrivez un script qui prend en entier une liste de nombres et vérifie si elle est de Saias et Mazet.[b]
On peut construire une suite de Saias et Mazet qui contient tous les entiers naturels. En voici le début : `[1, 2, 6, 3, 12, 4, 20, 5, 35, 7, 56, 8, 72, 9, 90, 10, 110, 11, 143, 13]` Donnez les six termes suivants. Donnez l'algorithme qui en fournit les `n` premiers termes.

a. Eric Saias et Pierre Mazet, mathématiciens français contemporains
b. Pour le test de type de variable, vous ne connaissez pas : « `type(a) is int` » est un booléen qui dit si `a` est de type `int`, vous pouvez tester aussi `char`, `float`, `str`, `list`.... et ce n'est pas pour que vous écriviez un test à la con de parité du type type(a/2,int). Non, c'est parce qu'il y a un truc à ne pas oublier dans la définition.

On va parcourir la liste `L`[4], vérifier que les éléments sont des entiers, positifs, pour chacun, on vérifiera qu'il divise le suivant ou est divisible par lui. En cas d'échec, on sortira tout de suite avec un `False`. Si on est allé jusqu'au bout *(attention au range, on ne doit pas aller trop loin)*, on sortira vainqueur. Au fur et à mesure, on vérifiera que l'élément ne fait pas déjà partie des précédents, puisqu'on a demandé « tous distincts ».

4. pas original d'appeler une liste `L`, mais `OirDeFrance` c'est trop long

```
def TestMazet(L) :
....for elt in L :
.......if not(type(elt) is int) :
...........return False #l'un d'entre eux n'est pas entier
.......if elt <= 0 :
...........return False #ou s'il est entier, il est négatif !
....for k in range(len(L)-1) : #ne pas déborder
.......Element, Suivant = L[k], L[k+1] #comme on va les utiliser plusieurs fois
.......TestDiv = (Element%Suivant==0) or (Suivant%Element==0) #le test
.......if not(TestDiv) : #le test a échoué
...........return False #on sort brutalement
.......if Suivant in L[ : k+1] :
...........return False #la valeur est déjà prise
....return True
```

Pour remplir la suite qui va prendre tous les entiers un à un. On part de `1` et `2`. On aimerait tout de suite atteindre `3`, on va transiter par `6` (multiple de `2` et de `3`), et on redescendra à `3`.
On veut atteindre `4`, on prend le *ppcm* de `3` et `4`, c'est `12`, on le place après `3`, on redescend à `4`.
On insère le couple `20`, `5`.
On n'a pas besoin ensuite d'accéder à `6`, il est déjà apparu dans la suite. On passe donc à `7` qui n'y est pas encore, et on y accède par l'intermédiaire du produit `35` *(dont on est sûr qu'il n'y est pas encore)*.

```
def Mazette(n) :
....L = [1, 2]
....while len(L) < n :
.......Element = L[-1] #le dernier trouvé
.......Suivant=Element+1 #celui qu'on veut
...........while suivant in L : #mais s'il est déjà pris
...............Suivant +=1 #et même tant qu'il est déjà pris
.......Multiple = Element*Suivant #le produit pour monter descendre
.......L.append(Produit) #on monte
.......L.append(Suivant) #on descend
....return L
```

Bon, il est possible que la suite soit trop longue car on avance de deux en deux. Si **n** était impair, on a un élément de trop, on le détruit par **return(L[: n])**

`[1, 2, 6, 3, 12, 4, 20, 5, 35, 7, 56, 8, 72, 9, 90, 10, 110, 11, 143, 13, 182, 14, 210, 15, 240, 16, 272, 17, 306, 18, 342, 19, 399, 21, 462, 22, 506, 23, 552, 24, 600, 25, 650, 26, 702, 27]`

La complexité est en **n** pour le parcours, mais à chaque valeur de **k**, il y a des tests sur une liste de longueur **k**. On a donc plutôt $\sum_{k=0}^{k} k$, ce qui crée un $O(n^2)$.

$$https : //www.arxiv - vanity.com/papers/1803.10073/$$

○15○

Sur une ligne du triangle de Pascal, j'ai trouvé côte à côte les deux entiers suivants. Sur quelle ligne suis-je ? Et quel est l'indice de colonne ?
$3.5^2.7.13.17.19.23.37.53.67.71.73.101.103.107.109.113.137.139.149.151.157.163.167.173.179.181.191.193.197.199.211.223.227.229$
$3^3.5^2.11.13.17.23.37.53.67.71.73.101.103.107.109.113.137.139.149.151.157.163.167.173.179.181.191.193.197.199.211.223.227.229$

Comment passe-t-on de $\binom{n}{k}$ à $\binom{n}{k+1}$?

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\dfrac{n!}{(k+1)!.(n-k-1)!}}{\dfrac{n!}{(k)!.(n-k)!}} = \frac{n-k}{k+1}$$

On effectue ici le quotient des deux entiers : $\dfrac{7.19}{3^2.11}$.

N'allons pas en déduire $n-k = 7.19$ et $k+1 = 9.11$! On n'identifie pas !

On a juste $133.k + 133 = 99.(n-k)$ et donc $99.n = 232.k + 133$.

Au vu des facteurs premiers présents dans nos binomiaux, n vaut au moins 229 et on n'a pas atteint 233 (le nombre premier suivant qui serait présent au numérateur et pas éliminé au dénominateur).

On teste les valeurs de n donnant k entier

n	229	230	231	232
$99.n-133$	22539	22637	22736	22835
multiple de 232	non	non	oui : 98	non

On a une unique solution : $\boxed{\binom{231}{98} \text{ et } \binom{231}{99}}$ vérifiable avec un logiciel adapté.

Et il y a une autre solution à l'autre bout de la ligne...

Un exercice qu'on pourrait poser en Terminale.
Pas de connaissance à part la dfinition.
Mais de la jugeotte. Et pas de chemin tracé à l'avance par le professeur ou le livre.

Charade introuvable :

Mon premier est un oiseau de l'alphabet.

Mon second est un milli-iule.

Mon troisième est en double sur le vélo en quintuple sur la voiture.

Mon quatrième est suivi de son double dans l'alphabet.
Vous ne trouvez pas mon tout.

GEAI (le geai se prononce G).
PATTE (le iule est le mille pattes, donc le milli-iule est $\dfrac{mille}{1000}.pattes$.
ROUE (la voiture a cinq roues dont celle de secours).
V est suivi de W.
J'AI PAS TROUVÉ.

∘16∘ Soient G un groupe, u dans G commutant avec tout élément de G, (x, y, z) dans G. On pose $u = x.y.z$ et on suppose $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ (le neutre). Montrer que $u^4 = 1$.

On va calculer u^2 pour commencer, en profitant d'une hypothèse : u commute avec tout le monde, en particulier avec z :

$$u^2 = (x.y.z).(x.y.z) = (x.y).(z.(x.y.z)) = (x.y).((x.y.z).z) = (x.y).((x.y).(z.z)) = (x.y).(x.y)$$

On a évidemment aussi utilisé l'associaitivité, et la propriété $z^2 = 1$. Mais aucune commutativité abusive.
On continue avec u^3 qu'on écrit $u^2.u$ avec u^2 déjà calculé :

$$u^3 = (x.y).(x.y).(x.y.z) = ((x.y).x).(y.(x.y.z)) = ((x.y).x).((x.y.z).y) = (x.y).(x.x).(y.z.y)$$
$$u^3 = (x.y).(y.z.y) = x.(y.y).z.y = x.z.y$$

On termine en multipliant encore par u qu'on fait permuter avec un bloc $z.y$:

$$u^4 = (x.z.y).(x.y.z) = x.((z.y).(x.y.z)) = x.((x.y.z).(z.y))$$
$$u^4 = x.((x.y).(z.z).y) = (x.x).y.1.y = 1.y.y = 1$$

Peut être peut on y parvenir par d'autres chemins.

Exercice un peu décevant où finalement il suffit de tenter sa chance en utilisant les hypothèses au bon moment.
En colle, il permet de voir si en tout cas vous n'allez pas trop vite en permutant des termes qui n'ont pas le droit d'être permutés.

∘17∘ ♠♡ La suite de Fifi Bonacci est défifinie par ϕ_0, ϕ_1 et ϕ_2 donnés et $\phi_{n+2} = -\phi_{n+1} + \phi_n + \phi_{n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ *(les lapins de la génération $n+1$ ou plutôt $n-1$ meurent)*.
Écrivez un script Pypithon qui calcule ϕ_n pour n donné.
On pose $U_n = \begin{pmatrix} \phi_n \\ \phi_{n+1} \\ \phi_{n+2} \end{pmatrix}$ *(donc U_0 est donné)*. Trouvez la matrice A vérifiant $U_{n+1} = A.U_n$ pour tout n.
On pose alors $B = A + I_3$. Calculez B^2, B^3 et B^4. Montrez : $B^k = 2^{k-2}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout k supérieur ou égal à 2. Calculez $\sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k}.2^k.(-1)^{n-k}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
Calculez alors A^n pour tout n à l'aide de la formule du binôme dont vous justifierez l'utilisation.
Exprimez alors U_n à l'aide de U_0, puis ϕ_n à l'aide de n, $(-1)^n$, ϕ_0, ϕ_1 et ϕ_2.
Retrouvez le résultat précédent par simple récurrence sur n.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} \phi_{n+1} \\ \phi_{n+2} \\ \phi_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{n+1} \\ \phi_{n+2} \\ -\phi_{n+2} + \phi_{n+1} + \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n \\ \phi_{n+1} \\ \phi_{n+2} \end{pmatrix}$$

Ah oui, déjà, la difficulté : quel est le format de la matrice trouver ?

On trouve $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On effectue :

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Cette disposition permet de calculer facilement B, B^2, B^3 et ainsi de suite, sans perdre trop de place :

	B	B	B
B	B^2	B^3	B^4

La formule $B^k = 2^{k-2}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ se démontre par récurrence sur k déjà initialisée ($k = 2$) .

On suppose pour un k donné : $B^k = 2^{k-2}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

On calcule : $B^{k+1} = B^k.B = 2^{k-2}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2^{k-2}.\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2^{k-1}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

La formule $\sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k}.2^k.(-1)^{n-k}$ est une formule du binôme incomplète :

$\sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k}.2^k.(-1)^{n-k}$	$=\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.2^k.(-1)^{n-k}$	$-(-1)^n$	$-n.2.(-1)^{n-1}$
$[2,\ n]$	$[0,\ n]$	$k = 0$	$k = 1$

Finalement $\sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k}.2^k.(-1)^{n-k} = (2-1)^n - (-1)^n - 2.n.(-1)^{n-1}$ (merci Newton et les autres)

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}.2^k.(-1)^{n-k} = 1 + (-1)^n.(2.n-1)}$$ en regroupant les $(-1)^n$

Comment utiliser tout ça pour calculer A^n ?

On écrit $A = B - I_3$ jusque là tout va bien.

On élève : $A^n = (B - I_3)^n$ logique

On développe : $A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.B^k.(-I_3)^{n-k}$ c'est le binôme, car I_3 et B sont permutables *($I_3.B = B.I_3$, la chose à vérifier en anneau non commutatif).*

On sépare :

$A^n =$	$\displaystyle\sum_{k=2}^n \binom{n}{k}.B^k.(-I_3)^{n-k}$	$+(I_3)^n$	$+n.B.(-I_3)^{n-1}$
	$[2,\ n]$	$k=0$	$k=1$

On remplace : $A^n = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k}.2^{k-2}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.(-1)^{n-k}.I_3 + (-1)^n.(I_3 - n.B)$

On factorise : $A^n = \frac{1}{4}.\Big(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k}.2^k.(-1)^{n-k}\Big).\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^n.(I_3 - n.B)$

On exploite ce qu'on a fait plus haut :

$$A^n = \frac{1+(-1)^n.(2.n-1)}{4}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^n.\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - n.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

On se contentera de ça, sans aller jusqu'à citer les 9 coefficients.

En quoi est ce génial de connaître A^n ?
On part de $U_{n+1} = A.U_n$ et par récurrence évidente : $U_n = A^n.U_0$.

Non, même pas par récurrence, mais avec le mot clef « suite géométrique de raison à gauche A » (c'est la généralisation de $u_{n+1} = a.u_n$ à une forme matricielle).

On a donc une formule explicite pour U_n, et en regardant juste le premier terme de ce vecteur, pour ϕ_n.

∘18∘

♡ n et k sont des entiers fixés, a et b sont deux complexes *(différents de 1 si nécessaire et autres conditions du même type)*.
Simplifiez

$A = \sum_{i=0}^n \binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k$	$B = \sum_{i=0}^n \binom{n}{k}.a^{n-i}.b^i$	$C = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}.a^{n-k}.b^k$
$D = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}.a^{n-k}.b^i$	$E = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{n}{k}.a^{n-i}.b^j$	$F = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}.a^{n-i}.b^i$
$G = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant n}} \binom{n}{i}.a^{n-j}.b^j$	$H = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant n}} \binom{n}{i}.a^{n-i}.b^j$	$I = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant n}} \binom{n}{i}.a^{n-i}.b^i$

On rappelle : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k = (a+b)^n$ mais méfiez vous ici des indices et des variables...

$A=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k$ k fixé, i compteur $A=(n+1).\binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k$	$B=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{k}.a^{n-i}.b^i$ k fixé, série géométrique $B=\binom{n}{k}.\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$	$C=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.a^{n-k}.b^k$ k fixé, ligne entière $C=2^n.a^{n-k}.b^k$
$D=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.a^{n-k}.b^i$ binôme en b $D=a^{n-k}.(1+b)^i$	$E=\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}^{n}\binom{n}{k}.a^{n-i}.b^j$ géométriques $E=\binom{n}{k}.\left(\frac{a^n.(1-b^{n+1})}{(1-a).(1-b)}-\frac{a^{n-1}.(1-\frac{b^{n+1}}{a^{n+1}})}{(1-a).(1-\frac{b}{a})}\right)$	$F=\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}^{n}\binom{j}{i}.a^{n-i}.b^i$
$G=\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}\binom{n}{i}.a^{n-j}.b^j$ somme ligne et géométrique $G=2^n.\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$	$H=\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}\binom{n}{i}.a^{n-i}.b^j$ binôme et géométrique $H=(1+a)^n.\frac{1-b^{n+1}}{1-b}$	$I=\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}\binom{n}{i}.a^{n-i}.b^i$ j compteur $(n+1).(a+b)^n$

Pour E et F, on a des sommes doubles dépendantes (et trois variables si nécessaire).

$$E=\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}^{n}\binom{n}{k}.a^{n-i}.b^j$$

$$E=\binom{n}{k}.\sum_{j=0}^{n}\left(b^j.\sum_{i=0}^{j}a^{n-i}\right)$$

$$E=\binom{n}{k}.\sum_{j=0}^{n}\left(b^j.\frac{a^n-a^{n-j-1}}{1-a}\right)$$

$$E=\binom{n}{k}.\left(\frac{a^n}{1-a}.\sum_{j=0}^{n}b^j-\frac{a^{n-1}}{1-a}.\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^j\right)$$

A partir de G, on a des produits de sommes : $G=\left(\sum_i\binom{n}{i}\right).\left(\sum_j a^{n-j}.b^j\right)$.

∘19∘

♡ Un élément a d'un anneau $(A,+,.)$ est dit nilpotent si il existe n vérifiant $a^n=0$ (neutre additif)
idempotent si il existe p vérifiant $a^p=1$ (neutre multiplicatif).
Donnez les éléments nilpotents et les éléments idempotents de l'anneau des entiers $(range(120),+,.)$.
Montrez que la somme et le produit de deux éléments nilpotents est encore nilpotent.

Montrez que $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ sont nilpotentes dans $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ mais que leur somme ne l'est plus, de même que l'un de leurs produits.

Pour chaque entier *(enfin, on va voir si on va jusqu'au bout)* de 0 à 120, on calcule ses puissances successives, jusqu'à
• soit tomber sur 0 *(élément nilpotent)*
• soit tomber sur 1 *(élément idempotent)*
• soit déceler une période qui nous fera dire « c'est bon, on ne passera que par ces valeurs ».

On note au passage qu'il est incompatible qu'un élément soir à la fois nilpotent et idempotent.

0		nilpotent
1		idempotent
2	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 8, 16, 32, 64, 8	périodique
3	1, 3, 9, 27, 81, 3, 9, 27, 81, 3,	périodique
4	1, 4, 16, 64, 16, 64, 16, 64	périodique
5	1, 5, 25, 5, 25, 5, 25	périodique
6	1, 6, 36, 96, 96, 96, 96	périodique
7	1, 7, 49, 103, 1	idempotent
8	1, 8, 64, 32, 16, 8, 64, 32, 16	périodique
9	1, 9, 81, 9, 81, 9	périodique

Tous les calculs sont faits à la main *(ou à l'ordinateur)*.

Mais qui pourrait être nilpotent ? Il faudrait avoir $a^n = 0\ [120]$ pour un n.
C'est à dire $a^n = 120.k = 2^3.3.5.k$ pour un k bien choisi.
Il faut donc qu'il y ait dans a^n un facteur 2, un facteur 3 et un facteur 5 *(et après, on mettra le reste dans k)*.

30	1, 30, 60, 0	nilpotent
60	1, 60, 0	nilpotent
90	1, 90, 60, 0	nilpotent

$30^3 = 2^3.3^3.5^3 = (2^3.3.5).k$ avec $k = \dots$.
$60^2 = (2^3.3.5).(2.3^{.5)}$et $90^3 = (2^3.3.5).(3^2.5^2)$.

Les nombres premiers avec 120 sont idempotents.

Si a est nilpotent *(avec $a^n = 0$)* et b nilpotent *(avec $b^p = 0$)*,
alors $a.b$ est nilpotent. Il suffit de l'élever à la puissance $n + p$ *(et même $Max(n, p)$)*.
On a en effet : $(a.b)^{n+p} = a^{n+p}.b^{n+p}$ *(car ils commutent)* donc

$$(a.b)^{n+p} = a^{n+p}.b^{n+p} = (a^n).a^p.b^n.(b^p)$$

Les deux termes entre parenthèses sont nuls, le produit est nul.

Pour la somme, je vous le rédige sur un exemple.
Si a est nilpotent d'indice 3 et b d'indice 4, alors $a + b$ est nilpotent d'indice 6 :

$$(a + b)^6 = a^6 + 6.a^5.b + 15.a^4.b^2 + 20.a^3.b^3 + 15.a^2.b^4 + 6.a.b^5 + b^6$$

(commutativité)
Et dans cette somme, chaque terme est nul, soit à cause de a $(a^6 + 6.a^5.b + 15.a^4.b^2 + 20.a^3.b^3)$, soit à cause de b $(15.a^2.b^4 + 6.a.b^5 + b^6)$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes car $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (donc $n = 2$).
Mais leur somme est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dont le carré est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{pair} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{impair} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On ne pourra jamais avoir $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

∘20∘ E est un ensemble fini. On pose $\mathbb{P} = P(P(E))$ et on définit sur $\mathbb{P}$ la relation $\lesssim$ par $X \lesssim Y$ si et seulement si $\forall B \in Y,\ \exists A \in X,\ B \subset A$.
Attention, $P(E)$ est l'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de E
(comme $P(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ si $E = \{a, b, c\}$). Et $P(P(E))$ est donc fait des parties dont les éléments sont eux même des parties (par exemple $\{\{a\},\ \{b, c\},\ \{a, b, e\},\ \emptyset\} \in P(P(E))$ si $E = \{a, b, c, d, e\}$, et pour ce E, $P(P(E))$ a 2^{32} éléments dont la liste ne sera pas donnée ici).

Quand E est de cardinal n, $P(E)$ est de cardinal 2^n et $P(P(E))$ est de cardinal $2^{(2^n)}$.

$Card(E)$	0	1	2	3
$Card(P(E))$	1	2	4	8
$Card(P(P(E)))$	2	4	16	256

Et c'est vite l'horreur.

Pour cette question : $E = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$. Donnez le cardinal de $\mathbb{P}$. Comparez (en justifiant) pour $\lesssim$ les deux parties suivantes :
$X = \{\{a,b,c\},\ \{d,e\}\}$ et $Y = \{\{a,b,c\},\ \{a,b\},\ \{d,e\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{e\}\}$.

Ayant posé $X = \{\{a,b,c\},\ \{d,e\}\}$ et $Y = \{\{a,b,c\},\ \{a,b\},\ \{d,e\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{e\}\}$ on a à la fois $X \lesssim Y$ et $Y \lesssim X$.
Il faut dans un premier temps montrer que toute partie de l'ensemble Y est incluse dans une partie de X au moins :

la partie de Y	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{d,e\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{e\}$
est incluse dans	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{d,e\}$	$\{a,b,c\}$	$\{d,e\}$	$\{d,e\}$

Ceci règle un sens, passons à l'autre :

la partie de X	$\{a,b,c\}$	$\{d,e\}$
est incluse dans	$\{a,b,c\}$	$\{d,e\}$

Ceci nous servira plus loin pour dire que la relation n'est pas antisymétrique : on peut avoir à la fois « $X \lesssim Y$ et $Y \lesssim X$ » sans pour autant avoir $Y = X$.

On revient au cas général. Montrez que le relation $\lesssim$ est réflexive, transitive. Est-ce une relation d'ordre ?

Cette relation est réflexive.

On se donne une partie de parties X et on vérifie $X \lesssim X$: $\forall B \in X,\ \exists A \in X,\ B \subset A$.
Pour B donnée appartenant à X, il suffit de prendre $A = B$ (appartenant effectivement à X).

Elle est transitive.

On se donne deux gros ensembles de parties de parties X, Y et Z.
On suppose $X \lesssim Y$ et $Y \lesssim Z$.
On veut montrer $X \lesssim Z$, c'est à dire $\forall C \in Z,\ \exists A \in X,\ Z \subset X$.

Ça se prouve même sans avoir compris la définition.
On se donne C appartenant à Z.
Alors, par « $Y \lesssim Z$ », on sait qu'il existe B appartenant à Y vérifiant $C \subset B$.
Mais pour ce B, on sait qu'il existe A (appartenant à X) vérifiant $B \subset A$.
Par transitivité, il existe donc ce A vérifiant

Et comme on l'a dit, c'est raté pour l'antisymétrie.

Ce ne sera pas une relation d'ordre (R.A.T.).
Ni d'équivalence d'ailleurs.

Pour cette question : $E = \{a,\ b,\ c\}$.
Combien chacune des quatre équations suivantes a-t-elle de solutions : $X \lesssim \emptyset$, $X \lesssim \{\emptyset\}$, $\emptyset \lesssim X$, $\{\emptyset\} \lesssim X$.

Pour cette question : $E = \{a,\ b,\ c\}$. Il y a 8 parties

$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$
$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$

Et on peut créer 2^8 ensembles de parties comme $\{\{a,b\},\ \{a,c],\ \{a\},\ \emptyset\}$ ou même $\{\emptyset\}$ (on a juste pioché dans la première case) à ne pas confondre avec $\emptyset$ (là, on n'a rien pris).

$X \lesssim \emptyset$ se lit : $\forall B \in \emptyset,\ \exists A \in X,\ B \subset A$
Comme il n'y a aucun B à tester, c'est toujours vrai.

Toutes les parties de parties X conviennent, il y a 2^8 solutions.

$X \lesssim \{\emptyset\}$ se lit $\forall B \in \{\emptyset\},\ \exists A \in X,\ B \subset A$.

Mais qui est le seul B qu'on puisse prendre dans $\{\emptyset\}$? C'est $B = \emptyset$. C'est donc juste pour lui qu'on doit vérifier si il existe A dans X vérifiant $\emptyset \subset A$.
Mais ça, c'est toujours vrai, pour toute partie A (singleton, paire, ensemble vide).
C'est donc toujours vrai... dès lors qu'il y a quand même au moins une partie dans X.

On peut accepter $X = \{\{a\},\ \{a,b\}\}$ ou même $X = \{\{a\},\ \emptyset\}$ ou même $X = \{\{a\},\ \emptyset\}$.
Mais pas $X = \emptyset$ (car alors X n'existe pas).

Il y a donc une solution de moins : $S = P(P(E)) - \{\emptyset\}$.

$\emptyset \lesssim X$ se lit : $\forall B \in X,\ \exists A \in \emptyset,\ B \subset A$.

Mais il n'y a pas de A dans $\emptyset$! C'est donc impossible dès que vous avez une partie B.
Seule façon de s'en sortir : X est telle qu'il n'y ait aucun B dedans : $X = \emptyset$.
C'est peu, mais c'est une solution.

$\{\emptyset\} \lesssim X$ se lit $\forall B \in X,\ \exists A \in \{\emptyset\},\ B \subset A$

Mais le seul A possible dans $\{\emptyset\}$ est $A = \emptyset$. Peut on avoir $B \subset \emptyset$?
Oui, mais seulement pour $B = \emptyset$.

Le seul B possible dans X est l'ensemble vide.
On a une solution : $X = \{\emptyset\}$.
Et la solution $X = \emptyset$ pour laquelle il n'y a pas de B (et donc la question ne se pose pas de trouver A).

Bilan :

Équation	$X \lesssim \emptyset$	$X \lesssim \{\emptyset\}$	$\emptyset \lesssim X$	$\{\emptyset\} \lesssim X$
Nombre de solutions	2^8	$2^8 - 1$	1	2
Solutions	$X \subset P(E)$	$X \subset P(E)$ mais $X \neq \emptyset$	$X = \emptyset$	$X = \emptyset$ et $X = \{\emptyset\}$

Combien pouvez vous trouver X vérifiant $\{\{a,\ b,\ c\},\ \{b\}\} \lesssim X \lesssim \{\{a,b\},\ \{b,c\},\ \{c\}\}$.

La condition $\{\{a,\ b,\ c\},\ \{b\}\} \lesssim X$ dit que tout élément B de x (partie de E) doit être inclus dans $\{a,\ b,\ c\}$ ou dans $\{b\}$.
Mais tous les éléments de X sont inclus dans $\{a,\ b,\ c\}$. Aucune condition de ce côté.

De l'autre côté, on veut que $\{a,b\}$, $\{b,c\}$ et $\{c\}$ soient inclus dans des éléments de X.
Plusieurs cas.
Si $\{a,b,c\}$ est un des éléments de X, c'est gagné. Et on choisit les autres éléments au hasard parmi les 7 autres parties disponibles. On a 2^7 solutions.

Si $\{a,b,c\}$ n'est pas un des éléments de E, il faut que $\{a,b]$ en soit un, de même que $\{b,c\}$. Une fois que vous avez $\{b,c\}$, plus de problème si vous prenez $B = \{c\}$, il sera inclus dans $\{b,c\}$.
Vous devez donc prendre $X = \{\{a,b\},\ \{b,c\},...\}$ et dans les trois petits points, vous mettez ou non d'autres parties.
Des autres parties choisies dans la liste $[\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,c\}]$. D'où 2^5 solutions.

∘21∘ Voici les notes des élèves à l'École Nationale Supérieure des Technologies du Routage Informatique et du Numérique de Grenoble

Étudiant	Maths	Physique	Informatique	Total
Tréfermlaporte	12	10	14	189
Sejusqu'auboudelanui	12	15	14	209
Filtonpuliféfroi	10	10	10	155

L'admission étant à 180, combien de points a-t-il manqué en maths à l'étudiant Filtonpuliféfroi pour être admis ?
Un bonus à qui comprend mes mauvais jeux de mots.

Et tu dis « entre et ferme la porte ». « Et tu danses jusqu'au bout de la nuit », « et tu dis enfile ton pull il fait froid ».
J'ai les points ? Quant au nom de l'école, que sera son sigle ?

Et si on notait m, p et i les trois coefficients ? On a alors

$$\begin{pmatrix} 12 & 10 & 14 \\ 12 & 15 & 14 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} m \\ p \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 189 \\ 209 \\ 155 \end{pmatrix}$$

Il suffit d'inverser la matrice : $\begin{pmatrix} m \\ p \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 14 \\ 12 & 15 & 14 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 189 \\ 209 \\ 155 \end{pmatrix}$.

On trouve $\begin{pmatrix} m \\ p \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{10}.\begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 189 \\ 209 \\ 155 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5,5 \end{pmatrix}$ *(oh la belle école, les beaux coefficients).*

Si on ne sait pas inverser les matrices, il suffit de résoudre le système.
Par substitutions si on y tient.

Par combinaisons. Car il y a un élève à considérer :

$$7 \times Filtonpuliféfroi - 4 \times Sejusqu'auboudelanui - Trefermlaporte$$

Regardez ses notes :

Maths	Physique	Informatique
$7 \times 10 - 4 \times 12 - 12$	$7 \times 10 - 4 \times 15 - 10$	$7 \times 10 - 4 \times 14 - 14$
10	0	0

Il est pratique cet élève. Pour lui, seules comptent les maths (note 10). Avec coefficient m.
Et il a $7 \times 189 - 4 \times 209 - 155$ points.

Et l'élève

$$Sejusqu'auboudelanui - Trefermlaporte$$

vous permet de retrouver le coefficient de la physique.

Et c'est

$$3.Trefermlaporte + 2 \times Sejusqu'auboudelanui - 6 \times Filtonpuliféfroi$$

qui n'a fait que de l'informatique...
Lui, il vous donnera le coefficient de l'informatique.

Remarque : *Vous saisissez le lien avec les coefficients de P^{-1}.*
Vous comprenez pourquoi trois élèves suffisent à tout reconstituer.
Sauf si un élève a 0 partout.
si deux élèves ont exactement les mêmes notes
un élève a le double (ou le triple) des notes d'un autre
un élève est combinaison de deux autres
Dans ces cas là, vous n'avez pas assez d'informations pour conclure.
Et en fait, la matrice des notes n'est pas inversible.

Maintenant que vous avez les coefficients, il manque 25 points au dernier. Quatre points coefficient 6.

◦22◦ ♡ Résolvez le système $\left\{\begin{array}{lcll} n & = & 53 & [52] \\ n & = & 52 & [53] \end{array}\right.$ d'inconnue entière n.

On veut à la fois n de la forme $53 + 52.p$ et $52 + 53.k$ avec p et k entiers.

On garde deux information : $\begin{array}{lcll} n & = & 53 & +52.p \\ 1 & = & 53.k & -52.p \end{array}$

Une solution évidente ? $\begin{array}{ccll} n & = & 53 & +52.p \\ 53-52 & = & 53.k & -52.p \end{array}$.

On simplifie : $\begin{array}{ccll} n & = & 53 & +52.p \\ 52.(p-1) & = & 53.(k-1) & \end{array}$

$p-1$ est un multiple de 53. p s'écrit $53.r+1$.

On reporte : $n = 53 + 52.(1 + 53.r)$. $\boxed{S = \{105 + 52.53.r \mid r \in \mathbb{Z}\}}$

◦23◦ L'écriture $A \cap B \cup C \cap D$ est ambigüe, car on ne sait pas comment mettre les parenthèses : $((A \cap B) \cup C) \cap D$ ou $(A \cap B) \cup (C \cap D)$ et ainsi de suite. Combien d'ensembles différents peut on obtenir ?

$A \cap (B \cup (C \cap D))$	$A \cap ((B \cup C) \cap D)$	$(A \cap B) \cup (C \cap D)$	$((A \cap B) \cup C) \cap D$	$(A \cap (B \cup C)) \cap D$

Faites les petits dessins avec des ensembles « patates » pour comprendre si ces ensembles sont bien tous différents.
Ou prenez un exemple (si ils sont différents sur un exemple, c'est bon, si ils sont égaux, vous ne pouvez rien déduire, c'est peut être juste un cas particulier).

◦24◦ ♡ Montrez que si dans un groupe $(G, *)$ on trouve deux éléments a et b vérifiant $a * b = a$, alors b est le neutre du groupe.
On rappelle que le neutre c'est $\forall x,\ x * b = x$ alors qu'ici on a $\exists a,\ a * b = a$, plus l'information : on a un groupe.

Le neutre n doit vérifier $\forall x,\ x * n = x$ et pas juste $\exists a,\ a * n = a$ comme ici.

Mais voilà, on part de $a * b = a$, et on note n le neutre et α le symétrique de a.
On a alors $\alpha * (a * b) = \alpha * a$ et en simplifiant : $(\alpha * a) * b = n$, puis $n * b = n$ et enfin $b = n$.

∘25∘

Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 2020 dont le p.g.c.d. avec 2020 est 2 ?
Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 2020 dont le p.g.c.d. avec 2020 est 10 ?

Première question.
De tels entiers doivent être pairs.
Mais pas multiples de 4 sinon le p.g.c.d. vaudrait 4 (dans 2020 il y a un 4).
Pour l'instant, en gros, un quart des entiers.
Mais il faut éliminer aussi les multiples de 5, sinon le p.g.c.d. vaudrait 10.
Et les multiples de 101.

Mais il ne faut pas pousser. Il ne faux pas par exemple décompter deux fois 1010 qui est multiple de 2, de 5 et de 101.

Et pour les flemmards :

```
def pgcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = b a%b
....return a
#plus classique que ça, tu meurs...
```

```
C = 0
for k in range(1, 2021) :
....C += int(pgcd(k,2020)==2)
print(C)
```

Réponse : 400.

Et pour un p.g.c.d. de 10 : il y en a cent.

∘26∘

♡ Déterminez $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}},\ \frac{1}{2^k}\right]$.
Déterminez $B = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left]-\frac{1}{2^k},\ \frac{1}{2^k}\right]$ et $C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left]0,\ \frac{1}{2^k}\right]$.
Rappel : $\bigcap_{i\in I} A_i = \{\ |\ \forall i \in I,\ x \in A_i\}$ et $\bigcup_{i\in I} A_i = \{\ |\ \exists i \in I,\ x \in A_i\}$

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{2^{k+1}},\ \frac{1}{2^k}\right] =]0,\ 1]$$

car les intervalles se « collent bout à bout ».
On n'a que des réels strictement positifs.
Mais tout réel x de $]0,\ 1]$ est dans un de ces intervalles $\left[\frac{1}{2^{k+1}},\ \frac{1}{2^k}\right]$ pour n bien choisi.
Comment je le choisis ? $n = \left[\frac{-\ln(x)}{\ln(2)}\right]$.

Dans B il y a toujours 0.
Mais c'est tout.
En effet, si un x est dans b, alors pour tout n, on a $\frac{-1}{2^n} < x \leqslant \frac{1}{2^n}$.En passant à la limite (et aux inégalité larges) : $0 \leqslant x \leqslant 0$.
B est donc le singleton $\{0\}$.

Et C est vide. Tout réel x finit par être exclu pour n assez grand.

∘27∘

♡A est un ensemble. Que signifient :

$\forall(a,\ b) \in A^2,\ a = b$	$\exists(a,\ b) \in A^2,\ a = b$
$\exists(a,\ b) \in A^2,\ \forall x \in A,\ x = a \text{ ou } x = b$	$\forall(a,\ b) \in A^2,\ a \neq b$
$\exists(a,\ b) \in A^2,\ \forall x \in A,\ x \neq a\ \Rightarrow\ x = b$	$\exists(a,\ b) \in A^2,\ a \neq b$
$\exists(a,\ b) \in A^2,\ \forall x \in A,\ x \neq a\ \Leftrightarrow\ x = b$	

$\forall(a,\ b) \in A^2,\ a = b$	A n'a qu'un élément, ou même aucun
$\exists(a,\ b) \in A^2,\ \forall x \in A,\ x = a \text{ ou } x = b$	A est de cardinal 2 (pour $a \neq b$) ou 1 ($a = b$)
$\exists(a,\ b) \in A^2,\ \forall x \in A,\ x \neq a \Rightarrow x = b$	A est encore de cardinal 2 ou 1 (c'est comme dessus)
$\exists(a,\ b) \in A^2,\ \forall x \in A,\ x \neq a \Leftrightarrow x = b$	A est vraiment de cardinal 2
$\exists(a,\ b) \in A^2,\ a = b$	A contient au moins un élément (prendre $b = a$)
$\forall(a,\ b) \in A^2,\ a \neq b$	impossible car on peut prendre $b = a$, donc A est vide
$\exists(a,\ b) \in A^2,\ a \neq b$	le cardinal de A vaut au moins 2

∘28∘ La suite $\left(\left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right)\%17\right)_n$ est elle périodique ? (ici, % est pris au sens pythonien de modulo »). Et « à partir d'un certain rang » ?

On peut écrire $\left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right)\%17$, mais c'est aussi $\sum_{k=0}^{n}(k^2\%17)$.
Or, la suite k^2 % 17 est périodique, puisque $a = b\ [17] \Rightarrow a^2 = b^2\ [17]$.

On montre que cette suite (notée S) est périodique de période 17.

On calcule en effet $S_{n+17} - S_n$ et on trouve $\left(\sum_{k=n+1}^{n+17} k^2\%17\right)$.

On translate $S_{n+17} - S_n = \left(\sum_{p=1}^{17}(n+p)^2\%17\right)$.

On sépare en $17.n^2$, $2.n.\sum_{p=1}^{17} p$ et $dsp\sum_{p=1}^{17} p^2$.

Le terme $17.n^2$ est évidemment multiple de 17.

La somme $2.n.\sum_{p=1}^{17} p$ vaut $n.17.18$, c'est un multiple de 17.

La dernière est $\frac{17.18.35}{2}$, c'est encore un multiple de 17.

La période n'est pas plus petite, il suffit de calculer les premiers termes de la suite :

[0, 1, 3, 6, 10, 15, 4, 11, 2, 11, 4, 15, 10, 6, 3, 1, 0, 0, 1, 3, 6, 10, 15, 4, 11, 2, 11, 4, 15, 10, 6, 3, 1, 0, 0, 1, 3, 6, 10, 15]

Merci Python.

∘29∘ Quelles sont les deux plus petites valeurs que peut prendre $\left|\begin{vmatrix} 2014 & 2945 \\ a & b \end{vmatrix}\right|$ sachant que a et b sont des entiers relatifs ? *(oui, la notation est étrange pour la valeur absolue d'un déterminant !)*

Ce déterminant $2014.a - 2945.b$ est un élément de $2014.\mathbb{Z} + 2945.\mathbb{Z}$.
Il est donc dans $19.\mathbb{Z}$ (le p.g.c.d. des deux).

On atteint 0 par exemple avec $\begin{vmatrix} 2014 & 2945 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} 2014 & 2945 \\ 2014 & 2945 \end{vmatrix}$ ou même $\begin{vmatrix} 2014 & 2945 \\ 106 & 155 \end{vmatrix}$.
Mais sinon, on atteint des multiples non nuls de 19, donc la plus petite valeur strictement positive est 19.

Et on l'atteint pour $\begin{vmatrix} 2014 & 2945 \\ -13 & -19 \end{vmatrix}$.

Mais si, une identité de Bézout !

∘30∘

Les suites a et b sont définies par $a_0 = 5$ et $b_0 = 2$ et $a_{n+1} = 2.a_n + 3.b_n$ et enfin $b_{n+1} = 5.a_n + 8.b_n$ pour tout n. Montrez que $a_n$et b_n sont toujours entiers. Trouvez α_0 et β_0 vérifiant det $\begin{pmatrix} a_0 & \alpha_0 \\ b_0 & \beta_0 \end{pmatrix} = 1$. Trouvez M *(carrée de taille 2)* vérifiant $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour tout n. Montrez alors $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ pour tout n. Montrez en regardant le déterminant de $M^n.\begin{pmatrix} a_0 & \alpha_0 \\ b_0 & \beta_0 \end{pmatrix}$ que a_n et $b_n$sont toujours premiers entre eux.

Par récurrence, on démontre la propriété P_n pour tout n : ($a_n \in \mathbb{Z}$ et $b_n \in \mathbb{Z}$).
C'est initialisé, et si pour un n quelconque donné, a_n et b_n sont entiers, alors $2.a_n + 3.b_n$ et $5.a_n + 8.b_n$ le sont aussi.

La formule $\begin{vmatrix} a_0 & \alpha_0 \\ b_0 & \beta_0 \end{vmatrix} = 1$ est une identité de Bézout : $\beta_0.a_0 - \alpha_0.b_0 = 1$.
On propose donc $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$ ou même $\begin{vmatrix} 5 & 27 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1$.

On a sans effort non plus $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
Par récurrence sur n, on obtient $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}^n.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$. Ou en parlant de suite géométrique de raison à gauche M.
C'est vrai au rang 0 et au rang 1. n donné.
Si on a $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}^n.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M.(M^n.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}) = M^{n+1}.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

par associativité.

La matrice $M^n.\begin{pmatrix} a_0 & \alpha_0 \\ b_0 & \beta_0 \end{pmatrix}$ est par récurrence sur n une matrice à coefficients entiers.
Par récurrence sur n aussi, elle est de la forme $\begin{pmatrix} a_n & \alpha_n \\ b_n & \beta_n \end{pmatrix}$ avec α_n et β_n entiers,
vérifiant d'ailleurs $\alpha_{n+1} = 2.\alpha_n + 3.\beta_n$ et $\beta_{n+1} = 5.\alpha_n + 8.\beta_n$.
Passons au déterminant $\det(\begin{pmatrix} a_n & \alpha_n \\ b_n & \beta_n \end{pmatrix}) = \det(M^n).\det(\begin{pmatrix} a_0 & \alpha_0 \\ b_0 & \beta_0 \end{pmatrix}) = 1^n.1$ en ayant itéré la formule $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$.
On obtient $\beta_n.a_n - \alpha_n.b_n = 1$. C'est une identité de Bézout qui nous dit que a_n et b_n sont premiers entre eux.

∘31∘

On donne $\dfrac{a}{b} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2+1}}}}}$ et $\dfrac{u}{v} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}}$. Calculez $\dfrac{a}{b} - \dfrac{u}{v}$.

On peut calculer $\dfrac{a}{b}$ explicitement, en partant du bas :

$$\frac{a}{b} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3}}}}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\frac{10}{3}}}}}$$

$$\frac{a}{b} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{3}{10}}}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{53}{10}}}}$$

$$\frac{a}{b} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{10}{53}}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{116}{53}}}$$

$$\frac{a}{b} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{53}{116}} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{401}{116}}$$

$$\frac{a}{b} = 3 + \frac{116}{401} = \frac{1319}{401}$$

On fait de même avec $\dfrac{c}{d} = \dfrac{921}{280}$.

On effectue la différence : $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{1319.280 - 921.401}{401.280} = \dfrac{-1}{401.280}$.

Oui, bon, et alors ?

Alors, c'est un exercice sur les fractions continuées, sur l'agorithme d'Euclide et les meilleures approximations d'irrationnels par des rationnels.
Mais ça ne se voit pas. Et ça donne un exercice de pur calcul...

∘32∘

L'institutrice a donné à mon neveu cinq nombres à additionner. Mon neveu a effectué toutes les additions possibles *(il y en a 31 je crois car mon neveu refuse de considérer la somme ne contenant rien)* et me dit : *"c'est drôle, parmi les nombres que j'ai calculés, il n'y a aucun multiple de* 5". Je lui réponds alors sans même regarder ses calculs qu'il ment. Pourquoi ?
Indication : regardez les nombres a, $a+b$, $a+b+c$, $a+b+c+d$ et $a+b+c+d+e$ modulo 5 et soustrayez en deux bien choisis).

Partant de cinq entiers a, b, c, d et e, on a donc calcule

a	b	c	d	e					
a+b	a+c	a+d	a+e	b+c	b+d	b+e	c+d	c+e	d+e
c+d+e	b+d+e	b+c+e	b+c+d	a+d+e	a+b+e	a+c+d	a+b+e	a+b+d	a+b+c
b+c+d+e	a+c+d+e	a+b+d+e	a+b+c+e	a+b+c+d					
a+b+c+d+e									

Serait il possible qu'aucun ne soit multiple de 5 ?

Comme indique, regardons par exemple a, $a+b$, $a+b+c$, $a+b+c+d$ et $a+b+c+d+e$.
Ce sont cinq entiers. On les réduit modulo 5. On a cinq nombres valant 0, 1, 2, 3 ou 4.

Si l'un d'entre eux vaut 0, c'est fini, c'est qu'on avait un multiple de 5.
Sinon, ils ne prennent que quatre valeurs différentes. Pour cinq nombres.
Deux d'entre eux sont donc égaux.
Et leur différence est donc nulle.

C'est donc une différence du type $(a+b+c+d) - (a+b)$ ou $(a+b+c+d) - (a+b+c)$ ou $(a+b+c) - (a)$.

Et ceci signifie que cette différence est un multiple de 5.
Et cette différence est dans une des cases du tableau.
Principe du pigeonnier, finalement...

∘33∘

♡ Complétez $F = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2.a + \heartsuit.b \\ 3.a - b \end{pmatrix}$ sachant que F admet plusieurs points fixes sur $\mathbb{R}^2$ *(un point fixe de f c'est une solution de $f(x) = x$).*
Déterminez $F \circ F \circ F \circ F$. Résolvez $F(F(U)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un point fixe, c'est un vecteur propre de valeur propre 1 : $M.U = U$.
On en détecte la présence (autre que $U = 0_2$ puisqu'on a dit plusieurs) en disant que l'équation $(M - 1.I_2).U = 0_2$ admet d'autres solutions que la solution triviale.
On annule donc $\det(M - 1.I_2)$. Avec ici $M = \begin{pmatrix} -2 & \heartsuit \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Et sans calcul, car on est en maths : 1 est valeur propre, et la trace vaut -3.
C'est donc que l'autre valeur propre vaut -4.
Le produit des valeurs propres vaut -4.
Le déterminant vaut -4.
$\heartsuit$ vaut 2.

On vérifie alors $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et tous les multiples conviennent encore.

Pour ce qui est de F^4, on élève la matrice à la puissance 4.

A la main : $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$ logiquement de spectre $\{1, 16\}$ et déterminant 16.

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 154 & -102 \\ -153 & 103 \end{pmatrix}$$

à mettre sous forme $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 154.a - 102.b \\ \dots \end{pmatrix}$.

Disposant de M^2 inversible, on résout $M^2.U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et on trouve $\begin{pmatrix} 13/16 \\ 19/16 \end{pmatrix}$.

∘34∘ Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{2.|x-y|}{3}$.
Montrez (par l'absurde ?) qu'il existe au plus un réel a vérifiant $f(a) = a$.
On définit la suite (u_n) par « u_0 donné » et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrez par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - u_n| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n .|u_1 - u_0|$.
On définit deux suites : $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k|$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(|u_{k+1} - u_k| + (u_{k+1} - u_k)\Big)$.
Montrez pour tout n : $A_{n+1} - A_n \geqslant 0$ et $S_{n+1} - S_n \geqslant 0$.
Montrez pour tout n : $\dfrac{S_n}{2} \leqslant A_n \leqslant \dfrac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} .|u_1 - u_0| \leqslant 3.|u_1 - u_0|$.
déduisez dans l'ordre que (A_n), (S_n), $(S_n + A_n)$ et (u_n) convergent.
On note α la limite de la suite (u_n). Montrez : $f(\alpha) = \alpha$. Déduisez que α ne dépend pas du choix de u_0.
Montrez pour tout n : $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{2^n}{3^{n-1}} .|u_1 - u_0|$.

C'est le théorème du point fixe.

Le théorème sous sa forme habituelle énonce :

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant, pour un k de $[0,\ 1[$:

$$\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k.|x - y|$$

On appelle ceci $k-$contractante avec un aport k strictement plus petit que 1.

Alors f admet un unique point fixe (solution de $f(x) = x$). On obtient ce point fixe comme limite de suite $u_{n+1} = f(u_n)$ (dont on sait qu'elle va toujours converger). De plus, on connaît la vitesse de convergence vers le point fixe a (vérifiant $f(a) = a$) : $|u_n - a|$ tend vers 0 plus vite qu'une suite géométrique de raison k (rappelons que comme k est plus petit que 1, la suite géométrique $(k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0).

Unicité du point fixe en cas d'existence.

On suppose qu'il existe deux points fixes a et α : $f(a) = a$ et $f(\alpha) = \alpha$.

Mais alors avec la propriété de contraction :

$$|a - \alpha| = f(a) - f(\alpha)| \leqslant \frac{2.|a - \alpha|}{3}$$

Ceci condit à un contradiction du type $3.d \leqslant 2.d$ avec d strictement positif diront les uns.
Ceci conduit à une contradiction, sauf avec $a - \alpha = 0$ diront les autres.

La récurrence pour $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n.|u_1 - u_0|$ est évidente.
L'initialisation à $n = 0$ est une égalité.

On se donne ensuite n quelconque. (on a transformé le « $\forall n \in \mathbb{N}$ » en démonstration mathématique).
On suppose $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n.|u_1 - u_0|$ (c'est la propriété P_n).
On calcule alors

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(_n)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right).|u_{n+1} - u_n| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right)^n.|u_1 - u_0| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.|u_1 - u_0|$$

Ainsi se trouve démontré P_{n+1}.
Le principe de récurrence permet de conclure.

La croissance de (A_n) et (S_n) se fait en calculant deux différences.
Pour tout n donné

$$A_{n+1} - A_n = \sum_{k=0}^{n+1-1} |u_{k+1} - u_k| - \sum_{k=0}^{n+1-1} |u_{k+1} - u_k| = |u_{n+1} - u_n| \geqslant 0$$

Dans la formule $\sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_n$, *beaucoup d'élèves voient un télescopqge. Il n'en est rien, c'est juste la relation de Chasles* $\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{On} = \overrightarrow{nN}$.

De même

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n} \Big(|u_{k+1} - u_k| + (u_{k+1} - u_k)\Big) - \sum_{k=0}^{n-1} \Big(|u_{k+1} - u_k| + (u_{k+1} - u_k)\Big) = \Big(|u_{n+1} - u_n| + (u_{n+1} - u_n)\Big)$$

Le terme qui reste est de la forme $|y| + y$ et il est positif[5].
La positivité de $S_{n+1} - S_n$ et $A_{n+1} - A_n$ pour tout n traduit bien la croissance des deux suites (S_n) et (A_n).

L'élève qui aura voulu simplifier tout de suite $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$ *en* $u_n - u_0$ *en disant « ouah j'ai deviné un truc de fou, je suis trop fort » aura perdu tout ce que l'énoncé mettait en place pour lui.*

$\frac{S_n}{2} \leqslant A_n \leqslant \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}.|u_1 - u_0| \leqslant 3.|u_1 - u_0|$ se démontre sans récurrence. Le mot clef est « série géométrique de raison $\left(\frac{2}{3}\right)$ ».
Déjà, la première inégalitré, en calculant une différence.

$$A_n - \frac{S_n}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k| - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|u_{k+1} - u_k| + (u_{k+1} - u_k)}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|u_{k+1} - u_k| - (u_{k+1} - u_k)}{2}$$

Or, chaque terme $\frac{|u_{k+1} - u_k| - (u_{k+1} - u_k)}{2}$ de la somme est positif[6], la somme est positive.

La majoration $A_n \leqslant \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}.|u_1 - u_0|$ vient d'une majoration établie plus haut pour tout

$$A_n \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k.|u_1 - u_0| = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}.|u_1 - u_0|$$

5. toute somme $|y| + y$ est soit nulle (pour y négatif), soit égale à $2.|y|$ (pour y positif)
6. toute différence $|y| - y$ est soit nulle (pour y positif), soit égale à $2.|y|$ (pour y négatif)

On calcule ensuite explictement la sérié géométrique de raison $\left(\dfrac{2}{3}\right)$ avec la formule[7]

$$\frac{(premier\ terme\ ecrit) - (premier\ terme\ a\ venir)}{1 - raison}$$

Enfin, la majoration $\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\dfrac{2}{3}}.|u_1-u_0| \leqslant 3.|u_1-u_0|$ vient juste de $\left(\frac{2}{3}\right)^n.|u_1-u_0| \geqslant 0$.

Et du calcul $\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{3}} = 3$, mais ne me dites pas que c'est ça qui a été la difficulté pour vous !

La suite (A_n) est une suite réelle croissante (deux questions plus haut) et majorée (par le réel $3.|u_1-u_0|$), elle converge vers son plus petit majorant.

> *Par rapport à la terminale, prenez l'habitude d'insister sur « suite **réelle** croissante majorée » et « converge **vers son plus petit majorant** ». Ce second point permet de dire ensuite « et sa limite est plus petite que $3.|u_1-u_0|$ » sans invoquer le moindre passage à la limite. ? C'est juste « $3.|u_1-u_0|$ **est un majorant** » et « **la limite est le plus petit majorant** ».*

De même, (S_n) est une suite réelle croissante majorée. Elle converge.

Mais alors, par théorème algébrique[8], leur différence cnverge aussi.
Et la différence $S_n - A_n$ est la somme télescopique évoquée plus haut en remarque

$$S_n - A_n = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(|u_{k+1}-u_k| + (u_{k+1}-u_k)\Big) - \sum_{k=0}^{n-1}|u_{k+1}-u_k| = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = u_n - u_0$$

Grâce à cette astuce de S_n et A_n, on vienty de prouver que $(a_n - a_0)$ converge. Et comme a_0 est un réel fixé, la suite (a_n) converge.

> *On ne sait pas si elle est monotone, elle n'a d'ailleurs aucune raison de l'être.*
> *Il a fallu ici ruser par rapport aux théorèmes habituels.*

Sachant que (u_n) converge (on nomme sa limite, même si on ne la connaît pas encore[9]), on déduit par continuité que $(f(u_n))$ vers $f(\alpha)$.
Mais on a aussi $u_{n+1} = f(u_n)$ par construction. Par passage à la limite : $\alpha = f(\alpha)$.
La limite est un point fixe.

Et finalement, qu'a-t-on prouvé ?
Que la suite « $u_{n+1} = f(u_n)$ existe »
Que la suite « $u_{n+1} = f(u_n)$ converge » donc que sa limite existe.
Que sa limite est un point fixe. Il existe donc un point fixe.

De plus, comme le point fixe est unique (début du problème), il ne dépend pas du choix de la valeur initiale.

Pour la vitesse de convergence vers le point fixe, on va recommencer les arguments « somme télescopique » et « série géométrique », avec en plus « inégalité triangulaire » . On commence par travailler à horizon fini, entre n et N (avec $N \geqslant n$ a priori) :

$$u_N - u_n = \sum_{k=n}^{N-1}(u_{k+1}-u_k)$$

$$|u_N - u_n| = \Big|\sum_{k=n}^{N-1}(u_{k+1}-u_k)\Big| \leqslant \sum_{k=n}^{N-1}|u_{k+1}-u_k|$$

$$|u_N - u_n| \leqslant \sum_{k=n}^{N-1}|u_{k+1}-u_k| \leqslant \sum_{k=n}^{N-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k.|u_1-u_0|$$

---

7. comptez les termes si vous voulez, mais la formule du décompte est la plus mauvaise à retenir, et tant pis si c'est celle qu'on vous a enseigné, dites vous que ce n'est pas la première fois qu'on vous aura mal conseillé
8. appellation pour les histoires de « sommes, produits, combinaisons linaires »
9. et on ne la connaîtra pas, elle sera juste caractérisée

$$|u_N - u_n| \leqslant \sum_{k=n}^{N-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k.|u_1 - u_0| = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^N}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)}.|u_1 - u_0|$$

$$|u_N - u_n| \leqslant \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^N}{\frac{1}{3}}.|u_1 - u_0| \leqslant 3.\left(\frac{2}{3}\right)^n.|u_1 - u_0|$$

n reste fixé, mais on fait tendre N vers l'infini.
Maintenant qu'on sait que la suite $(u_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge (vers α), on peut passer à la limite à gauche (et à droite il n'y a pas de N)

$$|\alpha - u_n| \leqslant 3.\left(\frac{2}{3}\right)^n.|u_1 - u_0|$$

On connaît donc la vitesse de convergence.

L'exemple le plus classique est la suite $u_{n+1} = \cos(u_n)$. On appuie sans arrêt sur la touche con de sa calculatrice.
On voit bien que la suite converge. Mais vers quoi ?
On ne sait pas dire. Mais ce dont on est sûr c'est que la limite est solution de $\cos(x) = x$. Et c'est même « la solution de $\cos(x) = x$ ».
Ce que vous savez même, c'est la vitesse de convergence maintenant. Combien de décimales sont exactes à la douzième itération (avec ici un rapport de contraction autre que $\frac{2}{3}$ sur l'intervalle de travail).

∘35∘ Vérifiez que

Id	$\overrightarrow{(1\,2\,3)}$	$\overrightarrow{(3\,2\,1)}$	$\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}$
$\overrightarrow{(1\,2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,3\,4)}$	$\overrightarrow{(2\,3,\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,3)} \circ \overrightarrow{(2\,4)}$
$\overrightarrow{(4\,2\,1)}$	$\overrightarrow{(4\,3\,1)}$	$\overrightarrow{(4\,3,\,2)}$	$\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}$

est un groupe pour a loi de composition.
Montrez qu'il n'est pas commutatif.
Donnez des sous-groupes de cardinal 2 et 3.
Pouvez vous trouver des sous-groupes de cardinal 1 et 12 ?
Pouvez vous trouver des sous-groupes de cardinal 4 et 6 ?

On a douze éléments, on doit dresser une table de taille 12 sur 12.
Pour le caractère interne, il faudra vérifier que quand on les compose, on retrouve une permutation de la famille.

Par exemple $\overrightarrow{(1\,2\,4)} \circ \overrightarrow{(4\,2\,1)} = Id$
$\overrightarrow{(1\,2\,4)} \circ \overrightarrow{(3\,2\,1)} = \overrightarrow{(1\,3\,4)}$
$\overrightarrow{(1\,2\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3\,4)} = \overrightarrow{(1\,2\,3)}$
$\overrightarrow{(1\,2\,4)} \circ (\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}) = \overrightarrow{(4\,2\,3)}$ *(à mémoriser)*
$(\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}) \circ \overrightarrow{(1\,2\,4)} = \overrightarrow{(1\,3\,2)}$ *(à mémoriser aussi)*
$(\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}) \circ (\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}) = Id$
$(\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}) \circ (\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}) = \overrightarrow{(1\,3)} \circ \overrightarrow{(2\,4)}$

En tant que loi de composition, elle est associative.
On dispose d'un neutre, c'est Id.
Et chaque permutation a son symétrique : pour un cycle $\overrightarrow{(a\,b\,c)}$ prendre $\overrightarrow{(a\,c\,b)}$
pour un bi-bycycle prendre lui même
La loi n'est pas commutative (exemple visible plus haut).

Sous groupes de cardinal 2 : | Id | $\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}$ | et les deux du même type.

Sous groupes de cardinal 2 : | Id | $\overrightarrow{(1\,2\,3)}$ | $\overrightarrow{(3\,2\,1)}$ | et les trois du même type.

Sous groupe de cardinal 1 : $\boxed{Id}$
Et aucun autre,car dans le sous-groupe, il faut qu'il y ait le neutre.

Sous groupe de cardinal 12 : le groupe lui même !

Sous groupe de cardinal 4 :

$g\circ f$	Id	$\overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,3)}\circ\overrightarrow{(2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)}$	f
Id	Id	$\overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,3)}\circ\overrightarrow{(2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)}$	
$\overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}$	Id	$\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)}$	$\overrightarrow{(1\,3)}\circ\overrightarrow{(2\,4)}$	
$\overrightarrow{(1\,3)}\circ\overrightarrow{(2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,3)}\circ\overrightarrow{(2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)}$	Id	$\overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}$	
$\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)}$	$\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)}$	$\overrightarrow{(1\,3)}\circ\overrightarrow{(2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}$	Id	
g					

Klein !

Sous groupe de cardinal 6 : impossible *(c'est un peu long à montrer, mais on s'interroge « si on y met deux tricycles, on finit par avoir tout », si on y met un tricycle et un bi-bicyle, c'est pareil au final »).*

∘36∘

♡ On rappelle la définition de $A+B$ quand A et B sont deux parties d'un groupe $(G,+)$: $A+B=\{a+b\mid a\in A,\ b\in B\}$.
Pour le groupe $(\mathbb{R},\ +)$, $a-$déterminez $\mathbb{N}+\mathbb{N}$ et comparez avec $2.\mathbb{N}$
$b-$ déterminez $\mathbb{R}^{+}+\{0\}$ et comparez avec $\mathbb{R}^{*}\cup\{0\}$
$c-$ déterminez $\mathbb{Z}+[0,\ 1]$
$d-$ déterminez $\mathbb{Z}+]0,\ 1[$
$e-$ montrez : $\mathbb{Q}+]0,\ \varepsilon[=\mathbb{R}$ pour tout réel strictement positif ε.
Pour le groupe $(\mathbb{Z}_{12},+)$ [a] : $f-$déterminez $\{0,\ 1,\ 3\}+\{1,\ 2,\ 10,\ 11\}$
$g-$ pouvez vous trouver A de cardinal 3 vérifiant $A+A=\mathbb{Z}_{12}$
$h-$ pouvez vous trouver B de cardinal 4 vérifiant $B+B=\mathbb{Z}_{12}$

a. ensemble des entiers de 0 à 11 (inclus) pour l'addition modulo 12

$a-$ Les éléments de $\mathbb{N}+\mathbb{N}$ sont de la forme $a+b$ avec a et b entiers naturels. Ce sont des entiers naturels : $\mathbb{N}+\mathbb{N}\subset\mathbb{N}$. Mais en plus tout élément n de $\mathbb{N}$ est atteint, de la forme $n+0$ par exemple.
On a donc $\mathbb{N}+\mathbb{N}=\mathbb{N}$. Tandis que $2.\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers pairs.

Oui, on doit raisonner par double inclusion.
Dois je même dire « on doit raisonner » ?

$b-$ Prenez un réel non nul quelconque, ajoutez lui 0 (seul élément de $\{0\}$, vous retrouvez x : $\mathbb{R}^{*}+\{0\}=\mathbb{R}^{*}$).
$\mathbb{R}^{*}\cup\{0\}$, ça fait justement $\mathbb{R}$.

$c-$ L'ensemble $\mathbb{Z}+[0,\ 1]$ est inclus dans $\mathbb{R}$, mais il est même égal à $\mathbb{R}$. En effet, tout réel x s'écrit $[x]+(x-[x])$ *(partie entière et partie décimale)* avec $[x]$ dans $\mathbb{Z}$ et $x-[x]$ dans $[0,\ 1[$ *(donc a fortiori dans $[0,\ 1]$)*. On a $\mathbb{Z}+[0,\ 1]=\mathbb{R}$.

$d-$ $\mathbb{Z}+]0,\ 1[$ ne donnera pas $\mathbb{R}$. Les entiers ne peuvent pas s'écrire comme somme d'un entier et « d'un truc en $0,quelquechose$ ».
Ce sont d'ailleurs les seuls éléments qu'on n'arrive pas à avoir. $\mathbb{Z}+]0,\ 1[=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.
On l'écrit d'ailleurs aussi $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n,\ n+1[$.

$e-$ $\mathbb{Q}+]0,\ \varepsilon[$ est inclus dans $\mathbb{R}$. Mais pourquoi est il égale à $\mathbb{R}$? parce que tout réel est la somme d'un rationne et d'un truc tout petit.
Pour x donné, l'intervalle $]x-\varepsilon,\ x[$ contient au moins un rationnel *(densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)*. On note q un tel rationnel.
On a alors $x=q+(x-q)$ avec $x-q$ entre 0 et ε.

$f-$ Un tableau :

	1	2	10	11
0	1	2	10	11
1	2	3	11	0
3	4	5	1	2

$\{0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 11\}$

$g-$ Si A n'a que trois éléments a, b et c, l'ensemble $A+B$ n'en contiendra pas plus de 9 (peut-être moins si on a des situations comme $a+b=a+c$). En tout cas, ne rêvons pas d'atteindre $\mathbb{Z}_{12}$.

$h-$ Un exemple ? Mais $B+B$ contient 16 éléments au maximum. Sauf qu'on a une certaine symétrie : a_0+a_1 et a_1+a_0.

On a donc au plus 10 éléments différents. Raté encore.

◦37◦

♣ Construisez une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ sans point fixe.
Soit u une suite réelle et σ une permutation de $\mathbb{N}$ *(bijection de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$*)*. Montrez que si u converge, alors $(u_{\sigma(n)})$ converge. Réciproque ?
Conseil : utiliser la quantification $\forall\varepsilon, \exists N_\varepsilon, \forall n, |u_n - a| > \varepsilon \Rightarrow n < N_\varepsilon$.
Soit u une suite réelle et σ une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrez que si u converge, alors $(u_{\sigma(n)})$ converge. Réciproque ?
Construisez une suite u et une surjection σ telle que u converge et $(u_{\sigma(n)})$ diverge.

On veut une application qui mélange les entiers sans en laisser un seul sur place.

Et si on les échangeait deux à deux :

0	1	2	3	4	5	6	7	...
1	0	3	2	5	4	7	6	...

Difficile à expliciter ? Pas tant que ça ! $\boxed{\sigma(2.p) = 2.p+1}$ $\boxed{\sigma(2.p+1) = 2.p}$
Et même $\sigma(n) = n + (-1)^{n+1}$. Et on montre sous cette forme $\sigma(\sigma(n)) = n$, ce qui prouve la bijectivité.

Quand on part d'une suite et qu'on mélange tout, on n'a pas une sous-suite, ça c'est un fait.
Mais quand même, $\sigma(n)$ doit tendre vers l'infini quand n tend vers l'infini.

On écrit l'hypothèse et la conclusion cherchée comme toujours :
$\boxed{\text{H} : \forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall n,\ (n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon)}$
$\boxed{? : \forall\varepsilon > 0,\ \exists S_\varepsilon,\ \forall n,\ (n \geqslant S_\varepsilon \Rightarrow |u_{\sigma(n)} - \alpha| \leqslant \varepsilon)}$
On se donne ε et on veut que $|u_{\sigma(n)} - \alpha|$ soit plus petit que ε. Facile, il suffit de demander que $\sigma(n)$ soit assez grand, c'est à dire évite les valeurs de 0 à N_ε.

Mais il n'y a qu'un nombre fini de valeurs à éviter. Il suffit de prendre n assez grand.

Explicitement : on pose $A_\varepsilon = \{n \mid \sigma(n) < N_\varepsilon\}$. C'est un ensemble fini de cardinal N_ε. Il a un plus grand élément P. On pose $S_\varepsilon = P + 1$.

En fait, ici, plutôt que $(n \geqslant S_\varepsilon \Rightarrow |u_{\sigma(n)} - \alpha| \leqslant \varepsilon)$, on utilise la contraposée $(|u_{\sigma(n)} - \alpha| > \varepsilon \Rightarrow n < S_\varepsilon)$.

On a prouvé $((u_n)\ \textit{converge} \Rightarrow (u_{\sigma(n)})\ \textit{converge})$.
On l'applique à la suite $(u_{\sigma(n)})$ et à la permutation σ^{-1} et on a la réciproque.
Remarque : | Il y a des fois où en « inversant les rôles », on trouve l'autre sens sans effort.

Pour une injection, on refait la même preuve avec $A_\varepsilon = \{n \mid \sigma(n) < N_\varepsilon\}$ qui est encore de cardinal fini (plus petit que N_ε et non plus forcément égal cette fois).
Pour la réciproque, si $u_{\sigma(n)}$ ne prend que des termes épars de la suite initiale, on ne peut rien conclure.
Prenons la célèbre $((-1)^n)$ et pour σ l'injection $n \longmapsto 2.n$. La suite $((-1)^{2.n})$ converge, mais la suite initiale ne le fait pas.

Si on demande juste à σ d'être surjective, c'est à dire d'atteindre tout entier au moins une fois, on perd le résultat.
On peut demander à ce qu'un entier comme 0 soit atteint une infinité de fois.

Prenons la suite $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$. Elle converge vers 0. Et prenons la surjection

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\sigma(n)$	0	1	0	2	0	3	0	4	...
$u_{\sigma(n)}$	1	$\dfrac{1}{2}$	1	$\dfrac{1}{4}$	1	$\dfrac{1}{8}$	1	$\dfrac{1}{16}$	

La suite $(u_{\sigma(2.n)})$ vaut u_0 elle converge vers 1.
La suite $(u_{\sigma(2.n)})$ vaut $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$. Elle converge vers 0.
Avec ces deux sous-suites, la suite ne peut converger.

∘38∘

On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots n\}$ (les $n!$ bijections de cet ensemble dans lui même). On note P_n le sous ensemble $\{\sigma \in S_n \mid \forall k \in \{1, \ldots n\},\ \sigma(x) \neq x\}$ (permutations sans poitn fixe).

Justifiez

n	0	1	2	3	4	5
$Card(P_n)$ (noté p_n)	1	0	1	2	9	44

Montrez : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = n.(p_n + p_{n-1})$.

Attention, ce n'est pas parce qu'il y a un n dans la formule qu'il faut réagir « oh, je vais faire une récurrence ». Ce serait en effet totalement idiot, car il faudrait, pour passer de n à $n+1$ avoir une vision sur p_n,p_{n+1},p_{n+2} et p_{n+3} ! Pure folie.
Non, c'est une formule que vous allez démontrer directement, par un dénombrement jusidiceux, et qui servira ensuite à des récurrences (cerveau>>>>réflexes).
Une piste : si on regarde σ dans P_{n+1}, alors $\sigma(n+1)$ est un entier entre 1 et n, quu'on va noter k et qui a deux possibilités : $\sigma(k) = n+1$ ou $\sigma(k) \neq n+1$.

Prouvez alors : $p_n = n!.\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ (là, d'accord, faires une récurrence).

Déduisez $\dfrac{p_n}{n!} \longrightarrow_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e}$ (proportion de permutations « partout mélangeantes » parmi toutes les permutations).

∘39∘

On donne $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$. Résolvez $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ d'inconnue ensembliste B.
Résolvez $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ d'inconnue ensembliste B. ($P(E)$ est l'ensemble des parties de E).

Une solution évidente est $B = A$ puisqu'alors $P(A \cup B) = P(A)$ et $P(A) \cup P(B) = P(A)$.

Une autre est $B = \emptyset$ puisque $P(A \cup B) = P(A)$ et $P(A) \cup P(B) = P(A) \cup \{\emptyset\} = P(A)$ (car $\emptyset$ est déjà dans $P(A)$).

On propose aussi $B = \{0\}$ et on vérifie $P(A \cup B) = P(A)$ et $P(A) \cup P(B) = P(A) \cup \{\emptyset, \{0\}\} = P(A)$ (car $\emptyset$ et $\{0\}$ sont déjà dans $P(A)$).

Et même, toute partie B incluse dans A convient (on a alors $P(B) \subset P(A)$ et donc $P(A \cup B) = P(A)$ puis $P(A) \cup P(B) = P(A)$).

A ce stade : $P(A) \subset S$ (tous les B de $P(A)$ sont solutions).

Mais si B contient A, on a aussi $\forall X \in P(A),\ X \in P(B)$.

Preuve : on prend X dans $P(A)$.
$X \in P(A)$ signifie $X \subset A$.
Comme on a aussi $A \subset B$, par transitivité, on déduit $X \subset B$.
On reconnaît $X \in P(B)$.

Avec $P(A) \subset P(B)$ (c'est ce qu'on vient d'écrire), on a $P(A) \cup P(B) = P(B)$.
Et avec $A \subset B$, on a $P(A \cup B) = P(B)$.

A ce stade : $S = \{B \mid (A \subset B)\ ou\ (B \subset A)\}$ (assez normal par symétrie des rôles).

Si vous avez des doutes, prenez $B = \mathbb{N}$. On a alors $P(A \cup B) = P(\mathbb{N})$ et $P(A) \cup P(B) = P(\mathbb{N})$ car ajouter les seize parties plus haut ne change pas grand chose (et même rien) à $P(\mathbb{N})$.

Dans $P(A)$ il y a seize éléments (parties de A) :

$\emptyset$	$\{0\}$	$\{0,\ 1\}$	$\{1,\ 2,\ 4\}$	$\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$
	$\{1\}$	$\{0,\ 2\}$	$\{0,\ 2,\ 4\}$	
	$\{2\}$	$\{0,\ 3\}$	$\{0,\ 1,\ 4\}$	
	$\{3\}$	$\{1,\ 2\}$	$\{0,\ 1,\ 2\}$	
		$\{1,\ 3\}$		
		$\{2,\ 3\}$		

$A \cup B$ aura au moins quatre éléments (disons $4+n$). Et $P(A \cup B)$ aura 2^{4+n} éléments.
Dans $P(A) \cup P(B)$ il y a $2^4 + 2^b - \ldots$ éléments (il faut décompter les parties à la fois dans $P(A)$ et dans $P(B)$, comme $\emptyset$).

Peut on avoir $2^{4+n} = 2^4 + 2^b - \ldots$?

Attention toutefois, ce type de raisonnement ne tient pas si B est infini. Il faut donc un raisonnement par anaylse et synthèse.

Supposons $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

On sait déjà $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$.
En effet, si un certain X est dans $P(A) \cup P(B)$, il est soit dans $P(A)$, soit dans $P(B)$.
Si X est dans $P(A)$, il est dans $P(A \cup B)$ (passage de $X \subset A$ à $X \subset A \cup B$).
Si X est dans $P(B)$, il est dans $P(A \cup B)$ (passage de $X \subset B$ à $X \subset A \cup B$).

On va donc exploiter $P(A \cup B) \subset P(A) \cup P(B)$, seule partie pertinente de l'hypothèse.

Parmi les parties de $A \cup B$, il y a justement $A \cup B$.
C'est donc par hypothèse un élément de $P(A) \cup P(B)$. Ce qui signifie : $A \cup B$ est dans $P(A)$ ou $A \cup B$ est dans $P(B)$.

Dans le premier cas, on aboutit à $A \cup B \subset A$, et ceci donne $B \subset A$ (on y avait pensé).

Dans le second cas, on aboutit à $A \cup B \subset B$ et ceci donne $A \subset B$ (on y avait pensé).

On a donc prouvé $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B) \Rightarrow (A \subset B \text{ ou } B \subset A)$.

Et la réciproque a été développée au début.

On a une équivalence.

Passons au second problème : $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

Une solution évidente : $B = A$.
Mais aussi $B = \emptyset$.

Ce qu'on sait déjà et qui ne servira donc pas : $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.

On a donc tout de suite $P(A \cap B) \subset P(A)$ puis $P(A \cap B) \subset P(B)$
et donc $P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B)$.

Mais on sait aussi : $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$.

Soit X dans $P(A) \cap P(B)$.
On traduit : $X \in P(A)$ et $X \in P(B)$.
On revient à la définition : $X \subset A$ et $X \subset B$.
On déduit $X \subset A \cap B$.
On reconnaît $X \in P(A \cap B)$.

On aurait pû raisonner par équivalences.

En fait, l'égalité $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ est dans le cours.

Bilan : $\forall B,\ P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.
Conclusion presque propre : $S = \textit{tous les ensembles } B$.
Conclusion plus propre : $S = \{B \mid B \textit{ ensemble}\}$.
Et je suis embêté car il n'existe pas d'ensemblede tous les ensembles.

◦40◦

♡♣ Donnez les seize parties de l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.
Sur l'ensemble de ces parties, on définit la relation $\leqslant$ par $A \leqslant B$ si et seulement si $1 \in A \Rightarrow 1 \in B$. Rappelez les définitions de "réflexive", "symétrique", "antisymétrique" et "transitive". Lesquelles de ces propriétés vérifie $\leqslant$?
Résolvez $A \leqslant \{0,\ 2\}$ d'inconnue A. Résolvez $\{0,\ 2\} \leqslant A$ d'inconnue A.

On donne la liste des seize parties en fonction de leur cardinal :

$\emptyset$		$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
$\{0,\ 1\}$	$\{0,\ 1\}$	$\{0,\ 1\}$	$\{0,\ 1\}$	$\{0,\ 1\}$	$\{0,\ 1\}$
$\{0,\ 1,\ 2\}$	$\{0,\ 1,\ 3\}$	$\{0,\ 2,\ 3\}$	$\{1,\ 2,\ 3\}$		$\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

La relation $\leqslant$ prend deux ensembles et fait une affirmation $1 \in A \Rightarrow 1 \in B$ qui s'écrit aussi $1 \notin A$ ou $1 \in B$. Par exemple $1 \in \{1,\ 3,\ 4\} \Rightarrow 1 \in \{2,\ 3\}$ (fausse) *ou $1 \in \{1,\ 3,\ 4\} \Rightarrow 1 \in \{1,\ 3\}$* (vraie).

réflexive	$\forall A,\ A \leqslant A$	vrai	$1 \in A \Rightarrow 1 \in A$
symétrique	$\forall (A,\ B),$ $(A \leqslant B) \Rightarrow (B \leqslant A)$	faux	$1 \in \emptyset \Rightarrow 1 \in \{1,\ 2\}$ mais $1 \in \{1,\ 2\} \not\Rightarrow 1 \in \emptyset$
antisymétrique	$\forall (A,\ B),$ $(A \leqslant B \text{ et } B \leqslant A) \Rightarrow A = B$	faux	$\{1,\ 2\} \Rightarrow 1 \in \{1\}$ et $1 \in \{1\} \Rightarrow 1 \in \{1,\ 2\}$
transitive	$\forall (A,\ B,\ C),$ $(A \leqslant B \text{ et } B \leqslant C) \Rightarrow A \leqslant C$	vrai	$((1 \in A \Rightarrow 1 \in B)$ et $(1 \in B \Rightarrow 1 \in C))$ $\Rightarrow (1 \in A \Rightarrow 1 \in C)$

On cherche les parties A vérifiant $1 \in A \Rightarrow 1 \in \{0,\ 2\}$. Comme la conclusion est fausse, il est impossible que le prémisse le soit. Par exemple on ne peut pas écrire $1 \in \{1,\ 3\} \Rightarrow 1 \in \{0,\ 2\}$. En revanche, comme $Faux \Rightarrow Faux$ est vrai, on peut écrire $1 \in \{0,\ 3\} \Rightarrow 1 \in \{0,\ 2\}$.

On a donc $\boxed{S = \Big\{\emptyset,\ \{0\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{0,2\},\ \{0,3\},\ \{2,3\},\ \{0,2,3\}\Big\}}$ *(l'ensemble des huit parties ne contenant pas* 1*).*

On résout ensuite $1 \in \{0,\ 2\} \Rightarrow 1 \in A$ d'inconnue A *(partie de $\{0,1,2,3\}$)*. C'est sur le modèle $Faux \Rightarrow (sans\ importance)$. On peut donc prendre pour A toutes les parties, contenant ou non 1 : S a seize éléments dont la liste figure plus haut.

Si vous avez apprécié cet exercice, vous êtes sur le chemin de l'étoile.

Si vous ne comprenez même pas cet exercice, c'est que vous n'avez toujours pas quitté la Terminable *ou le* "simple calcul pour la Physique élémentaire"*.*
Vous êtes sur la route de la PSI, mais vous pouvez aussi pendre le chemin de l'étoile si vous réussissez à casser votre mauvaise approche des mathématiques (en abandonnant donc enfin le "*simple outil*" pour y voir le "*langage des raisonnements*"*).*
D'ailleurs,il y a des PSI etoiles. Et elles permettent d'integrer de très bonnes ecoles, même sans être une bête en maths...

∘41∘

On numérote les élèves de $MPSI2$ par ordre alphabétique de e_0 à e_{46}. On définit f de $P(MPSI_2)$ (ensemble des parties de la MPSI2) dans $\mathbb{N}$ par $f(A) = \sum_{k \leqslant 47} 2^k.1_{e_k \in A}$ (on rappelle que le booléen $1_{condition}$ vaut 1 si la condition est réalisée, et 1 sinon).
Calculez l'image de votre trinôme.
Montrez que f est injective. Est elle surjective ? Trouvez l'antécédent par f de 2019.

∘42∘

On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout n de $\mathbb{Z}$ (et pas seulement $\mathbb{N}$).
Indiquez pour chacune des propriété ci dessous si vous la démontrez par récurrence simple, récurrence double, récurrence à forte hérédité, preuve directe.

		simple	double	forte	directe
a	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \in \mathbb{N}$				
b	$\forall n \in \mathbb{N},\ \sin(F_n.\pi) = 0$				
c	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{-2.n} \in \mathbb{N}$				
d	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{-2.n+1} \in \mathbb{Z}$				
e	chaque $F_{3.n+2}$ est pair				
f	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{2.n-1} + F_{-2.n-1} = 0$				
g	F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux				
h	$\forall n,\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$				
i	$\forall n \in \mathbb{N},\ (F_n)^2 + (F_{n+1})^2 = F_{2.n+2}$				
j	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n.(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_{2.n+1}$				

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

		simple	double	forte	directe
a	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \in \mathbb{N}$		X	x	

Les deux premiers termes sont entiers.
Si pour un n donné, F_n et F_{n+1} sont entiers, alors leur somme l'est aussi.

Une récurrence forte convient aussi bien sût (à condition de l'avoir initialisée pour deux termes afin de pouvoir utiliser deux indices lors de l'éhérédité.

Une récurrence simple ne suffit pas. Si $F_n$est entier, rien ne permet de dire que $F_n + F_{n-1}$ le soit aussi.

Je pourrais alors ajouter un résultat direct, issu de celui ci : $\boxed{\text{la suite } (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{est croissante.}}$
En effet, $F_{n+1} - F = F_{n-1} \geqslant 0$ pour tout n.

		simple	double	forte	directe
a'	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1} \geqslant F_n$				X

On note qu'une fois la récurrence double du a effectuée, ce résultat est direct.

En revanche, une récurrence n'est pas l'instrument utile pour prouver la croissance de (F_n) .
Comment prétendrez vous en effet passer de $F_{n+1} \geqslant F_n$ à $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \geqslant F_{n+1}$ si vous n'avez pas déjà prouvé que les $F_n$sont tous positifs.

Ceci signifie que l'élève qui écrit sur sa copie par réflexe attavique « la suite (F_n) est croissante, par récurrence sur n » passe pour un sombre crétin qui a des reflexes acquis (idiots) mais ne vérifie même pas que sa preuve tient la route.
Une fois encore, la pire attitude pour un futur ingénieur.

Qu'un ingénieur ne sache pas calculer, pourqoi pas.
Qu'un ingénieur ne sache pas apprendre des tonnes d'informations, pourquoi pas.
Qu'un ingénieur affirme des choses sans preuves, et c'est la porte ouverte aux pires dérives.

		simple	double	forte	directe
b	$\forall n \in \mathbb{N},\ \sin(F_n.\pi) = 0$				

C'est le m^me résultat que la question précédente.
Si on considére que le résultat précédent a été établi, alors c'est une preuve directe.

Sinon, il faut une récurrence forte, avec une formule aussi lorde que $\sin(F_{n+1}.\pi) = \sin(F_n.\pi).\cos(F_{n+1}.\pi) + \cos(F_n.\pi).\sin(F_{n+1}.\pi)$ dans laquelle les deux sinus sont nuls par hypothèse de rang n.

On étend la suite aux négatifs.
Et pour remonter en arrière, on écrit par exemple
- $F_{-1} + F_0 = F_1$ donc $F_{-1} + 1 = 1$
- $F_{-2} + F_{-1} = F_0$ donc $F_{-2} + 0 = 1$
- $F_{-3} + F_{-2} = F_{-1}$ donc $F_{-3} + 1 = 0$
- $F_{-4} + F_{-3} = F_{-2}$ donc $F_{-4} + (-1) = 1$

et ainsi de suite

n	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	-21	13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

On devine des choses, avec les mêmes termes mais des signes moins. Et encore, pas toujours...
La formule utile pour remonter dans le temps sera $\boxed{F_{n-1} = F_{n+1} - F_n}$

		simple	double	forte	directe
c	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{-2.n} \in \mathbb{N}$				

Tant qu'on n'a pas de formule reliant $F_{-2.n}$ à un F_p avec p positif, on ne peut pas espérer une preuve directe.

Si on veut mener une récurrence (simple ou double), il faut relier $F_{-2.(n+1)}$ à $F_{-2.n}$ et peut être $F_{-2.(n-1)}$.
$F_{-2.(n-2)} = F_{-2.n-2} = F_{-2.n} - F_{-2.n-1}$ et on est bien embête, car on ignore le signe de $F_{-2.n-1}$.
Et si pour prouver $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{-2.n} \in \mathbb{N}$ on doit déjà prouver $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{-2.n-1} \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ (je veux dire « est négatof »), on ne va pas s'en sortir.
Mais comment faire autrement ?

En fait, on prouve $F_{-p}.(-1)^p \in \mathbb{N}$ par récurrence double sur p.

---

		simple	double	forte	directe
d	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{-2.n+1} \in \mathbb{Z}$		X		

On prouve en fait $\forall p \in \mathbb{N},\ F_{-p} \in \mathbb{Z}$ par récurrence double.
Et ensuite, on applique au cas particulier de $n = 2.p - 1$.

		simple	double	forte	directe
e	chaque $F_{3.n+2}$ est pair	X	inutile	inutile	

F_2 est pair, il vaut 2.
On se donne n et on suppose $F_{3.n+2}$ pait.
Il faut accéder à $F_{3.(n+1)+2}$ c'est à dire à $F_{3.n+5}$.

On voit mal comment faire sans utiliser les intermédiaires sur lesquels aucune hypothèse ne porte.

Et pourtant :
$$\begin{array}{rcll} F_{3.n+5} & = & F_{3.n+4} & +F_{3.n+3} \\ F_{3.n+5} & = & F_{3.n+3}+F_{3.n+2} & +F_{3.n+3} \\ F_{3.n+5} & = & & 2.F_{3.n+3} \quad +F_{3.n+2} \end{array}$$

Or, $2.F_{3.n+3}$ est pair (entier fois 2) et $F_{3.n+2}$ est pair (hypothèse de récurrence).
Il s'ensuit que $F_{3.n+5}$ est pair.

Et c'est bien une récurrence simple.

		simple	double	forte	directe
f	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{2.n-1} + F_{-2.n-1} = 0$				

		simple	double	forte	directe
g	F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux	X			

F_0 et F_1 n'ont qu'un diviseur commun, et c'est 1.

Prenons n fixé et supposons que le seul diviseur commun de F_n et F_{n+1} est 1.
Il faut montrer que F_{n+1} et F_{n+2} n'ont pas de diviseur commun à part 1.
Soit donc d un diviseur commun de F_{n+2} et F_{n+1}.
Alors d divise aussi leur différence $F_{n+2} - F_{n+1}$ (qui vaut F_n).
d divise donc à la fois F_{n+1} et F_n, il ne peut valoir que 1 (hypothèse d erécurrence).
Le seul diviseur commun de F_{n+1} et F_n est 1, ils sont premiers entre eux.

Variante. On suppose que pour n donné, on a une relation de Bézout liant F_n et F_{n+1} de la forme $a.F_n + b.F_{n+1} = 1$ avec a et b entiers (condition nécessaire et suffisante pour qu'ils soient premiers entre eux).
On cherche à obtenir une relation $\alpha.F_{n+1} + \beta.F_{n+1} = 1$.
Mais si on remplace F_n par $F_{n+2} - F_{n-1}$ dans $a.F_n + b.F_{n+1} = 1$, on a $a.(F_{n+1} - F_{n+1}) + b.F_{n+1} = 1$ c'est à dire $(b-a).F_{n+1} + a.F_{n+2} = 1$. les deux entiers α et β existent bien.

Autre variante : la relation $F_n.(F_{n+2)} - F_{n+1}.(F_{n+1}) = \pm 1$ est tout de suite une relation de Bézout entre F_n et F_{n+1}.
Mais comment la prouver facilement ?
Moi je sais, mais il faut utiliser la suite.

		simple	double	forte	directe
h	$\forall n,\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$	X	x	x	

Oui, quand je mets récurrence simple, il va de soi que le résultat peut aussi être prouvé par récurrence double,
puisque si on démontre $(P_{n+1} \Rightarrow P_{n+2})$
on a aussi $(P_n$ et $P_{n+1)}) \Rightarrow (P_{n+2})$

Pour n égal à 0, on a bien $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{-2} & F_{-1} \\ F_{-1} & F_0 \end{pmatrix}$

Pour n égal à 1, on a bien $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{-1} & F_0 \\ F_0 & F_1 \end{pmatrix}$

Pour n égal à 2, on a bien $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 \\ F_1 & F_2 \end{pmatrix}$

J'en initialise trop, mais son n'est jamais assez prudent.

Pour un n quelconque donné, supposons $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$ et multiplions par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_{n-2}+F_{n-1} \\ F_n & F_{n-1}+F_n \end{pmatrix}$$

On reconnaît bien $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$.

Comme quoi même avec la suite de Fibonacci, définie par « double hérédité », il peut y avoir des récurrences simples.

Une fois ce résultat établi, on a des conséquences énormes.
Par exemple, si on passe au déterminant :

$$\det(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n) = \det(\begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix})$$

Mais la formule de Terminale $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$ répétée plusieurs fois donne $\det(M^n) = (\det(M))^n = (-1)^n$.
On a donc $\boxed{F_n.F_{n-2} - (F_n)^2 = (-1)^n}$ preuve directe !

		simple	double	forte	directe
i	$\forall n \in \mathbb{N},\ (F_n)^2 + (F_{n+1})^2 = F_{2.n+2}$				X

Si si, directe une fois qu'on a prouvé le $\boxed{\text{h}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2.n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

tout est dit !

		simple	double	forte	directe
j	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n.(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_{2.n+1}$				

∘43∘

L'ordre d'une permutation σ est le plus petit indice p non nul vérifiant $\sigma^p = Id$. Donnez dans S_{15} puis dans S_{16} une permutation d'ordre le plus grand possible.
Combien y a-t-il dans S_9 de permutations d'ordre 7 ?
Combien y a-t-il dans S_9 de permutations d'ordre 8 ?
Combien y a-t-il dans S_9 de permutations d'ordre 6 ?

Pour calculer l'ordre d'un cycle, c'est facile, c'est sa taille : $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$ doit être appliqué quatre fois pour redonner l'identité.
Et pour une permutation décomposée en « produit de cycles de support disjoints », il faut et il suffit que chaque cycle ait fait un nombre entier de tours. On trouve le plus petit multiple commun de la taille des cycles.
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f\ g)}$ est d'ordre 12. Et $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f\ g)} \circ \overrightarrow{(h\ i)}$ aussi.
En revanche $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f\ g\ h\ i)}$ est d'ordre 20.

On va donc chercher à découper $[0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots 14]$ en cycles dont le p.p.c.m. soit le plus grand possible.
Solution ordre 105 : $[0,\ 1,\ 2] + [3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7] + [8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14]$
Ou si vous préférez : $\boxed{(3,\ 5,\ 7) \text{ avec } p.p.c.m.(3,\ 5,\ 7) = 105 \text{ et } 3+5+7 = 15}$

C'est à dire : un tri-cylcle, un pentacycle et un heptacycle.

Pour seize éléments : $\boxed{(4,\ 5,\ 7) \text{ avec } p.p.c.m.(4,\ 5,\ 7) = 140 \text{ et } 4+5+7 = 15}$

C'est à dire : un quadri-cylcle, un pentacycle et un heptacycle.

Petit programme un peu brutal, pas optimisé :

```
#recherche d'une permutation d'ordre maximum
```

```
def gcd(a, b) : #pgcd de deux entiers
....#algorithme d'Euclide
....#int x int -> int
....if b == 0 :
.......return a
....return gcd(b, a%b)
```

```
def lcm(a, b) : #ppcm de deux entiers
....#utitlse a*b = pgcd(a,b)*ppcm(a,b)
....#int x int -> int
....return (a*b)//gcd(a,b)
```

```
def lcmL(L) : #ppcm d'une liste
....#par associativite du p.p.c.m.
....#list of int -> int
....if len(L) == 1 :
.......return L[0]
....return lcm(L[0], lcmL(L[1 : ]))
```

```
def decomp(n) : #decompositions d'un entier en somme d'entiers non nuls
....#procedure recursive
....#int -> list of list of int
....if n == 0 :
.......return [[ ]]
....L = [ ]
....for k in range(n) :
.......Lk = decomp(k)
.......for li in Lk :
...........L.append(li+[n-k])
....return(L)
```

Et une version pour éviter les doubles :

```
def decomp(n) : #decompositions d'un entier en somme d'entiers non nuls
....#procedure recursive
....#int -> list of list of int
....if n == 0 :
.......return [[ ]]
....L = [ ]
....for k in range(n) :
.......Lk = decomp(k)
.......for li in Lk :
...........lii = sorted(li+[n-k])
...........if not lli in L :
...............L.append(lii)
....return(L)
```

Et une version pour éviter de solliciter trop de fois des calculs déjà faits :

```
D = {0 : [ ]} #un dictionnaire pour memoriser les listes deja trouvees

def decomp(n) : #decompositions d'un entier en somme d'entiers non nuls
....#procedure recursive
....#int -> list of list of int
....if n in D.keys() : #si on l'a deja calculee
.......return D[n] #on la lit dans le dictionnaire
....L = [ ]
....for k in range(n) :
........Lk = decomp(k)
........for li in Lk :
............lii = sorted(li+[n-k])
............if not lli in L :
................L.append(lii)
....D[n] = L #on l'ajoute maintenant au dictionnaire
....return L
```

```
def maxordre(n) : #recherche classique de maximum
....#int -> int x list of int
....LD = decomp(n)
....maxi, Lm = 0, [ ]
....for L in LD :
........ordre = lcmL(L)
........if ordre > maxi :
............maxi = ordre
............Lm = L[ : ]
....return maxi, Lm
```

Résultats :

n	ordre maxiumum	décomposition
0	1	
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	6	2+3
6	6	6 ou 2+6
7	12	3+4
8	15	3+5
9	20	4+5
10	30	2+3+5
11	30	5+6 ou 5+2+3
12	60	3+4+5
13	60	1+3+4+5
14	84	3+4+7
15	105	3+5+7
16	140	4+5+7
17	210	2+3+5+7
18	210	5+6+7 ou 1+2+3+5+7
19	420	3+4+5+7
20	420	1+3+4+5+7
21	420	2+3+4+5+7 et autres
22	420	4+5+6+7 par exemple encore
23	840	3+5+7+8
24	840	1+3+5+7+8
25	1260	4+5+7+9
26	1260	1+4+5+7+9
27	1540	4+5+7+11
28	2310	2+3+5+7+11
29	2520	5+7+8+9
30	4620	3+4+5+7+11
31	4320	1+3+4+5+7+11
32	5460	3+4+5+7+13
33	5460	1+3+4+5+7+11
34	9240	3+5+7+8+11
35	9240	1+3+4+7+8+11
36	13860	4+5+7+9+11

Je vous laisse trouver les suivants et essayer de trouver une formule générale.

◦44◦

Décomposez $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d\ e)} \circ \tau_{a,f} \circ \overrightarrow{(f\ g\ h\ i)}$ en produit de cycles de supports disjoints, et donnez son ordre (première puissance donnant Id).

La notation $\tau_{a,b}$ désigne le "bicycle" $\overrightarrow{(a\ b)}$.

	$\overrightarrow{(f\ g\ h\ i)}$		$\overrightarrow{(a\ f)}$		$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d\ e)}$	
a	$\to$	a	$\to$	f	$\to$	f
b	$\to$	b	$\to$	b	$\to$	c
c	$\to$	c	$\to$	c	$\to$	d
d	$\to$	d	$\to$	d	$\to$	e
e	$\to$	e	$\to$	e	$\to$	a
f	$\to$	g	$\to$	g	$\to$	g
g	$\to$	h	$\to$	h	$\to$	h
h	$\to$	i	$\to$	i	$\to$	i
i	$\to$	f	$\to$	a	$\to$	b

On déroule alors les images jusqu'à refermer pour avoir chaque cycle

a	$\to$	f	$\to$	g	$\to$	h	$\to$	i	$\to$	b	$\to$	c	$\to$	d	$\to$	e	

On a un unique cycle finalement $\overrightarrow{(a\ f\ g\ h\ i\ b\ c\ d\ e)}$.

Ce n'est qu'en l'élevant à la puissance 9 qu'on ramène les éléments à leur position initiale.
Son ordre vaut 9.

◦45◦ On appelle *ordre* d'une permutation σ de S_n le plus petit entier naturel non nul d vérifiant $\sigma^d = Id$. Montrez que toute permutation a effectivement un ordre. Les questions 1 à 5 sont ♡ et on passe ensuite à ♠/♣.

1– Déterminez l'ordre d'un cycle.

2– Déterminez l'ordre de $\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 8 & 2 & 15 & 11 & 3 & 5 & 13 & 4 & 12 & 1 & 10 & 6 & 14 & 9 \end{array}$.

3– Montrez que σ et $\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$ ont le même ordre.

4– Pouvez donner l'ordre de $\sigma \circ \sigma'$ en fonction de l'ordre de σ et de l'ordre de σ' quand σ et σ' commutent.

5– Déterminez l'ordre de $i \longmapsto 3.i \quad mod \quad 19$ dans S_{19}.

6– Combien y a-t-il de permutations d'ordre 8 dans S_8 ?

7– Combien l'équation $ordre(\sigma) = 3$ a-t-elle de solutions dans S_6 ?

8– Combien l'équation $ordre(\sigma) = 4$ a-t-elle de solutions dans S_7 ?

9– Pour quelles valeurs de n existe-t-il dans S_n une permutation d'ordre 120 ?

10– Déterminez pour tout n de 1 à 15 le maximum de l'application "ordre" sur S_n.

◦46◦ Combien y a-t-il dans S_6 de cycles de taille 4 ?
Combien y a-t-il dans S_6 de cycles σ de taille 4 vérifiant $\sigma(1) = 1$?
Combien y a-t-il dans S_6 de cycles σ de taille 4 vérifiant $\sigma(1) = 2$?
Combien y a-t-il dans S_6 de permutations σ de signature 1 ?
Combien y a-t-il dans S_6 de permutations σ de signature 1, vérifiant $\sigma(1) = 2$?

Rappel : la signature d'une permutation est 1 *si elle se décompose en un nombre pair de bicycles,* -1 *sinon.*
Exemple : $Sgn(\overrightarrow{(a\ b)}) = -1$, $Sgn(\overrightarrow{(a\ b\ c)}) = 1$ *car* $\overrightarrow{(a\ b\ c)} = \overrightarrow{(a\ c)} \circ \overrightarrow{(a\ b)}$, $Sgn(Id) = (-1)^0 = 1$.
La signature d'un $k-$*cycle est* $(-1)^{k-1}$. *La signature d'une permutation générale est le produit des signatures des cycles qui la composent.*

Pour construire un cycle de taille 4 dans S_6, il suffit de choisir les quatre éléments qu'on va faire bouger : $\binom{6}{4}$ choix, comme par exemple $\{1,\ 4,\ 5,\ 6\}$.
Ensuite, reste à savoir dans quel sens les faire tourner. Comme on sait que 1 va bouger, il suffit de savoir dans quel ordre les trois autres suivront :

$\overrightarrow{(1\,3\,5\,6)}$	$\overrightarrow{(1\,5\,3\,6)}$	$\overrightarrow{(1\,6\,3\,5)}$
$\overrightarrow{(1\,3\,6\,5)}$	$\overrightarrow{(1\,5\,6\,3)}$	$\overrightarrow{(1\,6\,5\,3)}$

Total : 90.

Si $\sigma(1)$ vaut 1, c'est que 1 ne bouge pas. Les éléments qui bougent sont donc 4 parmi 5.
Nouveau total : $\binom{5}{4}.3!$.

Si $\sigma(1) = 2$, c'est que 1 bouge. Et 2 aussi. Pour qu'ensuite on finisse par revenir sur 1.
Il reste à compléter le cycle avec deux éléments. A choisir parmi 4 : $\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Par exemple 4 et 5.
Et on complète le cycle : $\overrightarrow{(1\,2\,4\,5)}$ ou $\overrightarrow{(1\,2\,5\,4)}$.
Total : $\binom{4}{2}.2$.

La moitié des permutations a pour signature 1 et l'autre moitié a pour signature -1. Donc $\dfrac{6!}{2}$.

Argument :
chaque fois qu'on a une permutation σ *de signature* $+1$, *on a la permutation* $\sigma \circ \overrightarrow{(1\,2)}$ *de signature* -1.
chaque fois qu'on a une permutation σ' *de signature* -1, *on a la permutation* $\sigma' \circ \overrightarrow{(1\,2)}$ *de signature* $+1$.
Il y en a donc autant de chaque type.

Si une permutation vérifie $\sigma(1) = 2$, alors c'est une bijection de $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ dans $\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.
Il va donc y en avoir 5!.

Cinq choix pour $\sigma(2)$, *puis quatre pour* $\sigma(3)$ *et ainsi de suite.*

Maintenant, il y en a qui vont avoir pour signature -1. Par exemple $\overrightarrow{(1\ 2)}$.
Et d'autres qui vont avoir pour signature $+1$. Par exemple $\overrightarrow{(1\ 2\ 3)}$.
Lesquelles sont les plus nombreuses ?

On va dire qu'il y en a autant de chaque.

Mais comment le prouver ? En reprenant l'idée de tout à l'heure.

A chaque permutation σ de signature $+1$ vérifiant $\sigma(1) = 2$, on associe $\overrightarrow{(4\ 5)} \circ \sigma$ qui vérifie encore $(\overrightarrow{(4\ 5)} \circ \sigma)(1) = 2$, mais dont la signature vaut -1.

A chaque permutation σ' de signature $+1$ vérifiant $\sigma'(1) = 2$, on associe $\overrightarrow{(4\ 5)} \circ \sigma'$ qui vérifie encore $(\overrightarrow{(4\ 5)} \circ \sigma')(1) = 2$, mais dont la signature vaut $+1$.

On a donc $\dfrac{5!}{2}$ permutations σ vérifiant $\sigma(1) = 2$ et $Sgn(\sigma) = 1$.

> *On peut d'ailleurs en donner la liste si on y tient.*
> *Mais ça en fait quand même* 60.

∘47∘ L'opérateur $^{\omega}$ est défini sur l'espace vectoriel des applications C^{∞} de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : « il est linéaire », $p^{\omega} = p'$ si p est paire et $i^{\omega} = -i'$ si i est impaire. Calculez $\exp^{\omega}$. Calculez $(x \longmapsto Arctan(x+1))^{\omega}$. Qu'est ce qui est vrai : $\boxed{\forall f,\ (f^{\omega})^{\omega} = -f''}$ $\boxed{\forall f,\ (f^{\omega})^{\omega} = f''}$ $\boxed{\text{ni l'un ni l'autre}}$ On pose $s_a = x \longmapsto \sin(x+a)$ et $c_a = x \longmapsto \cos(x+a)$. Exprimez $(c_a)^{\omega}$ et $(s_a)^{\omega}$. Pourquoi la formule $(\cos(x+a))^{\omega}$ est elle idiote ?
On demande de résoudre $f^{\omega} = f$ d'inconnue f. L'élève cherche : « il n'y a pas de solution f paire à part la fonction nulle, il n'y a pas de solution impaire, à part la fonction nulle, donc la seule solution est la fonction nulle ». Montrez qu'il a tort.

Rappel : transformation linéaire : $\phi(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.\phi(u) + \mu.\phi(v)$, par exemple $(\lambda.u + \mu.v)' = .u' + \mu.v'$.

Comme on sait dériver les applications paires et les applications impaires, on sait, par addition, calculer l'image de toute application. il suffit de la décomposer en somme d'une application paire et d'une application impaire : $f^{\omega} = (p+i)^{\omega} = p^{\omega} + i^{\omega} = p' - i'$.

$$\boxed{\exp^{\omega} = (ch + sh)^{\omega} = ch' - sh' = sh - ch = (t \longmapsto -e^{-t})}$$

On pose $f = (x \longmapsto Arctan(x+1))$. On extrait sa partie paire et sa partie impaire :
$p = x \longmapsto \dfrac{Arctan(x+1)}{2} + \dfrac{Arctan(1-x)}{2}$ et $i = x \longmapsto \dfrac{Arctan(x+1)}{2} - \dfrac{Arctan(1-x)}{2}$

On les dérive : $p' = x \longmapsto \dfrac{1}{2.(1+(x+1)^2)} - \dfrac{1}{2.(1+(1-x)^2)}$ et $i' = x \longmapsto \dfrac{1}{2.(1+(x+1)^2)} + \dfrac{1}{2.(1+(1-x)^2)}$.

On applique la définition : $f^{\omega} = p' - i'$. Les termes en $\dfrac{1}{2.(1+(x+1)^2)}$ se simplifient. Les autres s'additionnent, mais avec signe moins :

$f^{\omega} = x \longmapsto \dfrac{-1}{1+(x-1)^2}$.

On décompose aussi : $t \longmapsto \cos(t+a) = (t \longmapsto \cos(a).\cos(t) - \sin(a).\sin(t))$. La décomposition est en place, on dérive

$(c_a)^{\omega} = (\cos(a).\cos - \sin(a).\sin)^{\omega} = \cos(a).\cos' - \sin(a).(-\sin') = -\cos(a).\sin + \sin(a).\cos$. On reconnaît $(c_a)^{\omega} = (t \longmapsto \sin(a).\cos(t) - \cos(a).\sin(t)) = (\longmapsto \sin(a-t))$.

On résume : $\boxed{(c_a)^{\omega} = -s_{(-a)}}$

De même, on applique ω à $x \longmapsto \sin(a).\cos(x) + \cos(a).\sin(x)$, on trouve $x \longmapsto -\sin(a).\sin(x) - \cos(a).\cos(x)$.

On reconnaît $\boxed{(s_a)^{\omega} = -c_{(-a)}}$

> *Sur cette question, je surveillerai les étages.* $\cos(x)^{\omega}$ *par exemple n'a pas de sens. On parle de fonctions, on a donc soit des* $(x \longmapsto \ldots)$, *soit des* $\cos'$ *directement.*

L'équation $p^{\omega} = p$ donne $p' = p$, donc p est de la forme $t \longmapsto \lambda.e^{t}$. mais cette application n'est pas paire. Sauf pour λ nul.

L'équation $i^{\omega} = i$ donne $i' = -i$, donc i est de la forme $t \longmapsto \lambda.e^{-t}$. mais cette application n'est pas impaire. Sauf pour λ nul.

L'élève a raison sur la phase « *il n'y a pas de solution paire à part la fonction nulle* », et « *il n'y a pas de solution impaire à* *part la fonction nulle ».*

Mais il peut y avoir des solutions faites d'une partie paire et d'une partie impaire.

Écrivons $f = p + i$ avec des notations naturelles.
Omegatisons : $f^\omega = p^\omega + i^\omega = p' - i'$. L'équation devient $p + i = p' - i'$. Or, la dérivée d'une application paire est impaire et la dérivée d'une application impaire est paire. On reformule l'équation $f^\omega = f$ en $i + p = p' - i'$. On identifie les parties paires et les parties impaires (argument d'identification par somme directe) : $p' = i$ et $-i' = p$.
On reporte l'une dans l'autre : $p'' = i' = -p$ et $i'' = -p' = -i$. On a des solutions d'équation du type $y'' = -y$. p et i sont des combinaisons de sin et cos.
On a donc quatre constantes vérifiant $p = a.\cos + b.\sin$et $i = c.\cos + d.\sin$. Mais p doit être paire et i impaire. Il reste $p = a.\cos$ et $i = c.\sin$ .Et comme on doit reporter dans l'équation : $-a.\sin = p' = i = d.\sin$. On a donc $d = -a$.
On récapitule : $f = a.(\cos - \sin)$. On vérifie : $f^\omega = a.(\cos^\omega - \sin^\omega) = a.(\cos' + \sin') = a.(-\sin + \cos) = f$.
L'application $t \longmapsto \cos(t) - \sin(t)$ et ses multiples sont solutions.

On a raisonné par équivalences, on a toutes les solutions. mais pour contredire l'élève, il suffit de dire que $\cos - \sin$ *est solution de* $f^\omega = f$.

Un lemme dont a a eu besoin : la dérivée d'une fonction paire est impaire (exemple : $ch' = sh$), et la dérivée d'une application impaire est paire(exemple $(t \longmapsto t^{2.k+1}) = (t \longmapsto (2.k+1).t^{2.k})$).

On prend p paire : $p(t) = p(-t)$ pour tout t. On dérive de chaque côté (et d côté droit, c'est une composée) : $p'(t) = -p'(-t)$. On reconnaît que p' est impaire.
On prend i impaire : $i(-t) = -i(t)$ pour tout t. Par dérivation, un signe moins sort : $-i'(-t) = -i'(t)$: i' est paire.

Fort de ces lemmes, on écrit $f = p + i$ et on passe à ω : $f^\omega = p^\omega + i^\omega = p' - i'$. On ré-applique ω sachant que la partie paire est -i et la partie impaire p' : $(f^\omega)^\omega = (-i')^\omega + (p')^\omega = (-i')' - (p')' = -i'' - p''$. Par linéarité de la dérivation : $\boxed{(f^\omega)^\omega = -f''}$

Si on a des doutes : $(\exp^\omega)^\omega = ((ch + sh)^\omega)^\omega = (ch' - sh')^\omega = (sh - ch)^\omega = sh^\omega - ch^\omega = -ch - sh = -\exp$.
On peut le voir aussi pour une application en $f = (t \longmapsto a.t^4 + b.t^3 + c.t^2)$: $f^\omega = (t \longmapsto 4.a.t^3 - 3.b.t^2 + 2.c.t)$ *et* $(f^\omega)^\omega = (t \longmapsto -12.a.t^2 - 6.b.t - 2.c)$.

∘48∘

a - Vrai ou faux : si f est dérivable, alors p et i sont dérivables.
b - Vrai ou faux : si f est périodique, alors p et i sont périodiques.
c - Vrai ou faux : si f est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors p et i le sont aussi.
d - Vrai ou faux : si f est monotone, alors p ou i est monotone.
Ici, pour f donnée, p et i sont les fonctions paire et impaire de somme f.

a

- Si f est dérivable, alors par composition $x \longmapsto f(-x)$ l'est aussi, et par combinaison, p et i le sont aussi.

Rappel : $p = x \longmapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ *et* $i = x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

On notera que si p et i sont dérivables, la somme l'est aussi.
On a finalement une équivalence.

---

b - On suppose f périodique de période T. On a donc $f(x+T) = f(x)$ mais aussi $f(x-T) = f(x)$ pour tout x (en écrivant $f(x) = f(x - T + T)$ par exemple).
On a alors $p(x+T) = \dfrac{f(x+T) + f(-x-T)}{2} = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ pour tout x.
p est aussi périodique, et par soustraction, i l'est aussi.

Mais rien ne garantit que T soit la plus petite période de p par exemple.
Prenons $f = \sin$ *(période* $2.\pi$*). Sa partie paire est constante et admet pour pérode* 1, $4/3$, $\sqrt{2}$ *et tout ce qu'on veut.*

---

c - L'injectivité ne se transmet pas forcément. La somme de deux applications injectives ne l'est plus forcément.
Un contre-exemple ? On prend $f = Id$ (injective évidemment).
Sa partie paire est $x \longmapsto 0$, pas injective du tout.

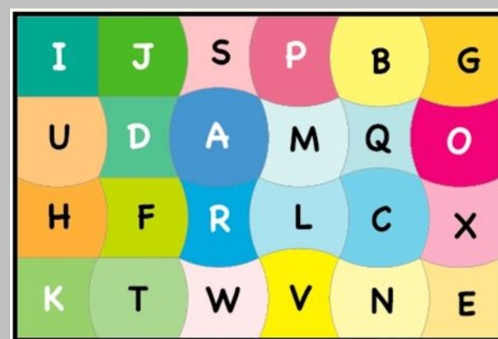
D'ailleurs, en tant que fonction paire, p ne sra jjamais injective !

---

d - Si f est monotone, p ne peut pas l'être, car p est paire.
On note que si p est croissante sur un intervalle $[a,\ b]$, elle sera décroissante sur $[-b,\ -a]$.
Mais l'énoncé propose que la croissance de f se transmette à p ou i.
Peut être donc qu'elle se transmet à i.

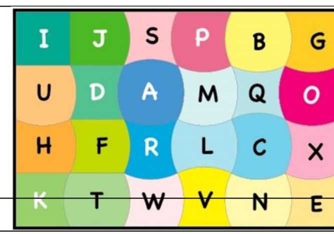
On suppose p croissante (on traitera l'autre cas en regardant $-f$).
On se donne a et b avec $a \leqslant b$.
On a tout de suite $f(a) \leqslant f(b)$.
Mais on a aussi $-b \leqslant -a$ et donc $f(-b) \leqslant f(-a)$.
On change le signe : $-f(-a) \leqslant -f(-b)$.
On somme et on divise par 2 : $i(a) = \frac{f(a)-f(-a)}{2} \leqslant \frac{f(b)-f(-b)}{2} = i(b)$
La croissance de f s'est transmise à i. On a gagné.

∘49∘ Voici les pièces du jeu de Curvica.
Déterminez les classes d'équivalence pour chacune des relations suivantes
« avoir le même périmètre que »
« avoir la même aire que »
« avoir le même périmètre et la même aire que ».
Assemblez quatre pièces de même périmètre pour en faire un rectangle.
Trouvez deux pièces de même périmètre, possédant chacune deux axes de symétrie.
Assemblez quatre pièces formant un carré. Même question avec neuf pièces.



Pour le périmètre, il y a à chaque fois quatre segments ou arcs de cercle. Il suffit de compter alors pour chacun le nombre de segments et le nombre d'arcs, puis de regrouper. Que les arcs soient « convexes » ou « concaves » ne change rien à leur longueur.

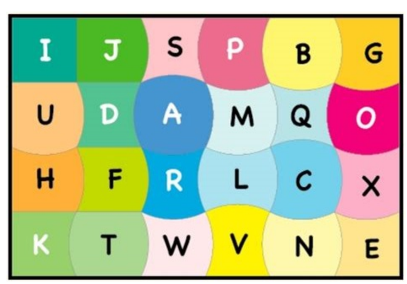
4 segments		I							
3 segments	1 arc	J	K						
2 segments	2 arcs	G	U	D	H	F	T	E	
1 segments	3 arcs	S	P	B	O	X	W	V	N
	4 arcs	A	M	Q	R	L	C		
périmètre		classe							



On a ici cinq d'équivalence (chaque modèle possible est là une fois).

On recommence avec les airs, en partant de l'aire du carré et en ajoutant ou soustrayant des portions de lune.
Par exemple, le I a pour aire « un carré ».
Le J a pour aire « un carré plus une lune », mais le P a la même aire (venant de « un carré plus deux lunes moins une ».

1 carré			I	G	M	H	F	L		
1 carré	moins	1 lune	X	K	W	V				
1 carré	plus	1 lune	J	P	O	W	N			
1 carré	moins	2 lunes	D	R	E					
1 carré	plus	2 lunes	U	C	T					
1 carré	moins	3 lunes	S							
1 carré	plus	3 lunes	B							
1 carré	moins	4 lunes	Q							
1 carré	plus	4 lunes	A							
aire			classe							



On a ici cinq neuf d'équivalence (chaque modèle possible est là une fois).

Et si on définit la relation d'équivalence qui demande les deux à la fois ?
La solution est encore dans un tableau.

	4 segments	3 segments 1 arc	2 segments 2 arcs	1 segment 3 arcs	4 arcs
moins 4 lunes					Q
moins 3 lunes				S	
moins 2 lunes			D E		R
moins 1 lune		K		X W V	
1 carré	I		G H F		M L
plus 1 lune		J		P O W N	
plus 2 lunes			U T		C
plus 3 lunes				B	
plus 4 lunes					A

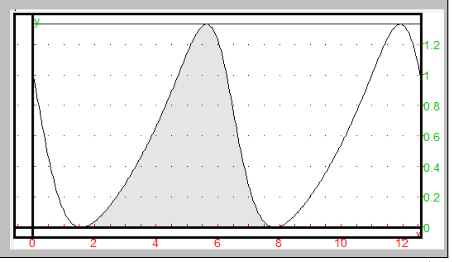
On a cette fois quinze classes d'équivalences dont plusieurs sont des singletons.
On retrouve par projection verticale (ou horizontale) les classes d'équivalence de la première relation (et de la seconde).

◦50◦

Déterminez maximum et minimum de $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)-2}$.

Question plus facile : Montrez $Min\left\{\dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)-2} \mid , x \in \mathbb{R}\right\} = 0$ et $Max\left\{\dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)-2} \mid , x \in \mathbb{R}\right\} = \dfrac{4}{3}$ (cours sur $a.\cos(t) + b.\sin(t)$ après soustraction).

Calculez l'aire de la partie en gris.



Si nul ne nous donne la valeur du maximum et du minimum (dont l'existence est assurée par un argument de continuité et périodicité), le mieux est de dériver et de tracer un tableau de variations.

En utilisant la formule en $\dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$, on constate que la dérivée est du signe du numérateur, c'est à dire de

$$\cos(x).(\cos(x)-1) - (-\sin(x).(\sin(x)-1)$$

On simplifie et on trouve $1 - 2.\cos(x) - \sin(x)$.

Deux possibilités.

• On écrit $2.\cos(x) + \sin(x)$ sous la forme $\sqrt{5}.\cos(x-\varphi)$ avec φ bien choisi ($\cos(\varphi) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$).

On doit alors étudier le signe de $1 - \sqrt{5}.\cos(x-\varphi)$ qui va s'annuler et changer de signe pour $\cos(x-\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

On reconnaît d'ailleurs que ceci nous amène à résoudre $\cos(x-\varphi) = \sin(\varphi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$.

On trouve les deux solutions (modulo $2.\pi$) : $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $x = 2.\varphi$. Il ne reste qu'à calculer f en ces deux points.

• On passe en arc moitié et on étudie le signe de $1 - 2.\dfrac{1-t^2}{1+t^2} - \dfrac{2.t}{1+t^2}$.
On a un trinôme du second degré au numérateur (c'est lui qui dicte le signe) : $3.t^2 - 2.t - 1$.
Il s'annule et change de signe pour $t = 1$ et $t = -1/3$.

On en profite pour exprimer $f(x) = \dfrac{\dfrac{2.t}{1+t^2} - 1}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2} - 2} = \dfrac{t^2 - 2.t + 1}{3.t^2 + 2.t + 1}$

On calcule notre fonction pour chacune de ces deux valeurs :

x	0		$2.Arctan(1)$		$\pi - 2.Arcta$
t	0		1		$-1/3$
signe de $f'(x)$	$-$	$\ominus$		$\oplus$	4/7
		$\searrow$	0	$\nearrow$	

et on répond donc à la question posée.

Maintenant, si on nous donne les valeurs du minimum et du maximum, c'est tout de suite plus facile.
Pour tout x, $1 - \sin(x)$ est positif et $2 - \cos(x)$ est positif (strictement).
Le quotient est donc positif.
Et il nul quand le sinus vaut 1.

Le minimum vaut donc0 (atteint en $\pi/2$).

Pour le maximum, montrer $\dfrac{1-\sin(x)}{2-\cos(x)} \leqslant \dfrac{4}{3}$ revient à montrer : $3 - 3.\sin(x) \leqslant 8 - 4.\cos(x)$ (positivité des multiplicateurs pour le produit en croix). On va donc prouver

$$4.\cos(x) - 3.\sin(x) \leqslant 5$$

pour tout x. Mais le cours nous assure que $4.\cos(x) - 3.\sin(x)$ se met sous la forme $\sqrt{4^2+3^2}.\cos(x+\varphi)$ pour φ bien choisi.
On a donc une majoration par 5 et on sait même que la valeur 5 est atteinte.

> *Comme quoi il plus facile de montrer qu'une solution est valide (en un temps polynomial) que de trouver la solution (en un temps polynomial).*
> *Vous vous en souviendrez quand en option informatique on vous parlera de P et NP et de la conjecture $P = NP$.*

L'aire de la partie en gris, c'est l'intégrale de f entre deux minima, c'est à dire entre $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{5.\pi}{2}$.
Reste à trouver une primitive de f.
Bioche vous dit qu'il faut passer par l'arc moitié : $t = \tan(\theta/2)$. Mais sur quel intervalle ?
Ce serait bête de prendre $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5.\pi}{2}\right]$ car on a un problème en π.

Une solution va consister à couper en deux par relation de Chasles :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1-\sin(x)}{2-\cos(x)}.dx + \int_{\pi}^{5.\pi/2} \frac{1-\sin(x)}{2-\cos(x)}.dx = \int_{t=1}^{+\infty} \frac{1-\dfrac{2.t}{1+t^2}}{2-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}.\frac{2.dt}{1+t^2} + \int_{t=-\infty}^{1} \frac{1-\dfrac{2.t}{1+t^2}}{2-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}.\frac{2.dt}{1+t^2}$$

L'autre solution, plus géométrique, consiste à dire que comme la fonction est $2.\pi$ périodique, il suffit de l'intégrer sur une période

$$\int_{\pi/2}^{5.\pi/2} \frac{1-\sin(x)}{2-\cos(x)}.dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\sin(x)}{2-\cos(x)}.dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\dfrac{2.t}{1+t^2}}{2-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}.\frac{2.dt}{1+t^2}$$

Dans tous les cas, on va croiser $\dfrac{2.t^2-4.t+2}{(1+t^2).((3.t^2+1)}$ qu'on décomposera en $\dfrac{a.t+b}{1+t^2} + \dfrac{c.t+d}{3.t^2+1}$ puis $\dfrac{2.t}{1+t^2} + \dfrac{2-6.t}{3.t^2+1}$ (d'accord, pas de ruse, j'ai réduit au dénominateur commun et résolu [10]). On termine en intégrant en

$$\ln\left(\frac{t^2+1}{3.t^2+1}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}.Arctan(\sqrt{3}.t)$$

Avec les bornes, on trouve $\dfrac{2.\pi}{\sqrt{3}}$.

10. en fait, non, j'ai fait confiance à Xcas