

◦◦

On va faire de l'arithmétique (*diviseurs, p.g.c.d., Euclide*) sur un ensemble plus gros que $\mathbb{Z}$, contenant $\sqrt{2}$.

I~0) On commence par redémontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, mais en évitant le raisonnement que tout le monde fait¹.

On pose $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n\sqrt{2} \in \mathbb{N}\}$. Montrez : $\forall n \in A, n\sqrt{2} - n \in A$. Concluez que A est vide. Concluez pour $\sqrt{2}$.

Déduisez que si un réel x s'écrit $a + b\sqrt{2}$ avec a et b entiers, alors a et b sont uniques.

On pose $E = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$, $\alpha_n = (\sqrt{2} + 1)^n$ et $\beta_n = (\sqrt{2} - 1)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Montrez la suite d'inégalités pour les éléments suivants de E :

$$0 < 17 - 12\sqrt{2} < 53 - 37\sqrt{2} < -19 + 14\sqrt{2} < 97 - 68\sqrt{2} < 8 - 5\sqrt{2} < 42 - 29\sqrt{2} < 1^2$$

II~0) Montrez l'existence de deux suites d'entiers naturels (r_n) et (i_n) vérifiant $\alpha_n = r_n + \sqrt{2}i_n$ pour tout n . Exprimez r_{n+1} et i_{n+1} à l'aide de r_n et i_n et exprimez β_n à l'aide de r_n et i_n .

II~1) Complétez d'ailleurs $\begin{pmatrix} r_n \\ i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ i_{n+1} \end{pmatrix}$ (oui, je l'ai posé dans le mauvais sens).

II~2) Montrez que r_n et i_n sont toujours premiers entre eux.

II~3) Écrivez un script **Python** qui prend en entrée **n** et retourne les deux entiers r_n et i_n ³.

II~4) Que pensez vous de l'idée de l'élève Regercées-Iféroi : on identifie $a + b\sqrt{2}$ à la matrice $\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$, et on regarde addition, multiplication, division.

III~0) Pour tout élément $a + b\sqrt{2}$ de E , on définit son module $\|x\| = |a^2 - 2b^2|$. Montrez que le module d'un élément de E est toujours un entier. Combien d'éléments de E ont un module nul ?

III~1) Montrez que $(E, +, \cdot)$ est un anneau dans lequel le module du produit est le produit des modules.

III~2) Montrez que chaque α_n et chaque β_n est dans E et a pour module 1 (pensez à calculer $\alpha_n \beta_n$).

IV~0) Soient u et v deux réels distincts ($u < v$) ; montrez que $p\beta_n$ est dans E et est entre u et v pour $n = \left\lfloor \frac{\ln(v-u)}{\ln(\sqrt{2}-1)} \right\rfloor + 1$ et $p = \left\lfloor \frac{u}{\beta_n} \right\rfloor + 1$ (on commencera par montrer : $0 \leq \beta_n \leq v-u$).

V~0) Montrez qu'un élément x de E est inversible d'inverse dans E si et seulement si son module vaut 1 (attention, il y a deux sens, pour l'un, pensez à $\|x \cdot x^{-1}\|$).

On notera U l'ensemble des éléments de E de module 1.

V~1) Soit x un élément de U , d'écriture $a + b\sqrt{2}$. On suppose $1 \leq x < 1 + \sqrt{2}$. Montrez alors $-1 \leq a - b\sqrt{2} \leq 1$ et $0 \leq 2a \leq 2 + \sqrt{2}$. Déduisez la valeur de a puis de b .

V~2) Soit x un élément de U plus grand que 1. Montrez qu'il existe un entier k vérifiant $\alpha_k \leq x < \alpha_{k+1}$. Déduisez alors $1 \leq x\beta_k < \alpha_1$ puis $x = \alpha_k$.

V~3) Montrez que les seuls éléments de U sont les α_n , les β_n , les $-\alpha_n$ et les $-\beta_n$.

VI~0) Un élément x de E est dit premier si $\forall (u, v) \in E^2, x = u.v \Rightarrow (u \in U \text{ ou } v \in U)$ (les nombres premiers dans $\mathbb{Z}$ sont caractérisés par $\forall (u, v) \in E^2, p = u.v \Rightarrow (|u| = 1 \text{ ou } |v| = 1)$). Montrez que les α_n sont dans P (ensemble des nombres premiers). Montrez que $3 + \sqrt{2}, 9 + 5\sqrt{2}, 5 - 13\sqrt{2}$ sont dans P (calculez leur module).

Montrez que $8 + 3\sqrt{2}$ n'est pas dans P .

1. le site CutTheKnot a référencé trente preuves, pourquoi tout le monde donne la même et fait semblant de croire qu'il faut retenir la même pour tous et pas une autre...

2. Au fait, on est en maths. Il est donc hors de question que votre preuve passe par $\sqrt{2} \simeq 1,4142135623...$ (mnémotechnique : J'AI ME L'ŒIL DE L'AMI NICOLAS, GARÇON DE SUP). S'il vous plaît : aucun symbole $\simeq$, de l'intelligence...

```
def Fonction(n) :
    ....
    ....return(rn, in)
```

3. quand on dit prend un entrée **n** et retourne **rn** et **in**, on attend `int(input('Donnez l'entier n : '))` jusqu'à `print(rn, in)` qui est juste du dialogue gentillet avec l'ordinateur et pas de la programmation

VI~1) Donnez des éléments de module 7. Déduisez que 7 n'est pas dans P .

VI~2) Montrez : $\forall (u, v) \in \mathbb{Z}^2, u^2 - 2.v^2 = 5 \Rightarrow (5|u \text{ et } 5|v)$. Déduisez que 5 est dans P .

VII~0) Passons à l'existence d'une division euclidienne dans E . On se donne x et y dans E avec y non nul ($x = a + i.b$ et $y = c + i.d$). Il faut prouver l'existence de q et r dans E vérifiant $x = q.y + r$ et r plus petit que b . Quel sens donner à « r plus petit que b » : $(|r|) < (|y|)$.

Voici des exemples de l'algorithme :

x	y	$\frac{x}{y}$	q	r
$5 + \sqrt{2}$	$3 + \sqrt{2}$	$\frac{5 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{13 - 2\sqrt{2}}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} = (2) + \left(-\frac{1}{7} - \frac{2\sqrt{2}}{7}\right)$	2	$-1 - \sqrt{2}$
$7 + \sqrt{2}$	$3 - \sqrt{2}$	$\frac{7 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{23 + 10\sqrt{2}}{7} = (3 + \sqrt{2}) + \left(\frac{2}{7} + \frac{3\sqrt{2}}{7}\right)$	$3 + \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
23	$6 + 5\sqrt{2}$	$\frac{23}{6 + 5\sqrt{2}} = \frac{-138 + 115\sqrt{2}}{14} = -10 + 8\sqrt{2} + \left(\frac{2 + 3\sqrt{2}}{14}\right)$	$-10 + 8\sqrt{2}$	$3 + 2\sqrt{2}$

Divisez $11 + 7\sqrt{2}$ par $5 + 2\sqrt{2}$. Divisez $2020 + 2019\sqrt{2}$ par $7 + 5\sqrt{2}$. Divisez $2019 + \sqrt{2}$ par $17 + 8\sqrt{2}$.

Expliquez l'algorithme général, et justifiez.

Donnez le p.g.c.d. de $91 + 49\sqrt{2}$ et $37 - 4\sqrt{2}$.

◦1◦ $\heartsuit$ Un élève n'a retenu que la formule de Leibniz $(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} . u^{(k)} . v^{(n-k)}$, et n'a pas retenu la formule du binôme. Aidez le en lui demandant la dérivée d'ordre k de $x \mapsto e^{a.x}$, puis la dérivée d'ordre n de $x \mapsto e^{a.x} . e^{b.x}$.

◦2◦ $\heartsuit$ A est une matrice carrée de taille 2 de trace 7 et de déterminant 10. Montrez alors : $A^2 = 7.A - 10.I_2$.
On pose $B = A - 2.I_2$ et $C = A - 5.I_2$. Montrez : $B.C = C.B$ et exprimez B^2 comme multiple de B et C^2 comme multiple de C .
Exprimez A comme combinaison de B et C .

◦3◦ Dans l'espace vectoriel $(E, +, .)$, on a trois sous-espaces vectoriels A, B et C vérifiant $A \subset B \cup C$ (oui, réunion, pas somme).
Montrez $A \subset B$ ou $A \subset C$.

◦4◦ $\heartsuit$ L'une de ces équations a pour réponse $S = \emptyset$, l'autre a pour réponse $S = \{\emptyset\}$, laquelle :
 $X \Delta \{Jules, Ines, William\} \Delta \{Elodie, William\} = X \Delta \{Jules\}$
 $X \Delta \{Jules, William\} \Delta X = X \Delta \{Jules, William\}$

◦5◦ $\heartsuit$ Montrez que si $\frac{a}{b}$ et $\frac{\alpha}{\beta}$ sont des rationnels positif vérifiant $\frac{a}{b} \leq \frac{\alpha}{\beta}$, alors on a aussi $\frac{a}{b} \leq \frac{a+\alpha}{b+\beta} \leq \frac{\alpha}{\beta}$.
La loi définie par $\frac{a}{b} \oplus \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a+\alpha}{b+\beta}$ sur les fractions irréductibles positives est-elle une loi interne ? commutative ? associative ? "neutralisable" ?

◦6◦ $\heartsuit$ On définit : $A * B = \overline{A} \overline{B}$. Cette loi est elle commutative ? Est elle associative ? Dispose-t-elle d'un neutre ?
Mêmes questions avec $A \star B = \overline{A} B$.
Rappel : $\overline{A}$ est le complémentaire de A (les éléments qui ne sont pas dans A).
 $C \Delta D$ est la différence symétrique de C et D (les éléments qui sont dans C ou dans D , mais pas dans les deux, le "ou" exclusif).

◦7◦ $\heartsuit$ La loi $\cap$ est distributive sur Δ (dans l'ensemble des parties d'un ensemble). Mais la loi $\cap$ est elle distributive sur $\cap$?
Et Δ est elle distributive sur $\cap$?
Et Δ est elle distributive sur Δ ?

◦8◦ $\heartsuit$ On définit $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{H} = \{t.U + x.I + y.J +$

$z.K \mid (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4\}$.

Calculez les seize produits des éléments U, I, J et K deux à deux.

Montrez que $\mathbb{H}$ est stable par multiplication. Montrez que l'inverse de $t.U + x.I + y.J + z.K$ existe et est un multiple de $t.U - x.I - y.J - z.K$ (sauf si x, y, z et t sont tous les quatre nuls).

(comme on vous offre presque l'inverse, pensez plutôt à proposer/vérifier).

◦9◦

Simplifiez $(A \Delta B) \cap (\bar{A} \Delta B) \cap (\bar{A} \Delta \bar{B}) \cap (A \Delta \bar{B})$ pour A et B parties d'un ensemble E .

◦10◦

Explicitez $(a \ b \ c \ d) \circ (d \ e \ f \ g \ h)$ (notée σ) ainsi que $(d \ e \ f \ g \ h) \circ (a \ b \ c \ d)$.
Résolvez l'équation $\sigma^n = Id$ d'inconnue n dans $\mathbb{N}$.

◦11◦

On se place dans $\mathbb{N}$ où, conformément à l'axiomatique de Peano, on a juste défini 0 et l'application inc qui incrémente un entier d'une unité (c'est $n \mapsto n + 1$). Le but est de définir l'addition et d'en vérifier les propriétés.

On pose $\forall n, n + 0 = n$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, a + inc(b) = inc(a + b)$. Ou si vous préférez $a + (b + 1) = (a + b) + 1$.

On a donc par exemple $5 + 3 = 5 + (2 + 1) = (5 + 2) + 1 = (5 + (1 + 1)) + 1 = (((5 + 1) + 1) + 1)$.

Rien ne dit que l'addition soit commutative pour l'instant, ni même que 0 soit neutre à gauche aussi. Attention, n'allez pas trop vite.

Montrez par récurrence sur $b : \forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, a + b \in \mathbb{N}$.

Montrez par récurrence sur $b : \forall b \in \mathbb{N}, 0 + b = b$.

J'ai croisé ça :

$$\begin{aligned} (a + b) + (c + 1) &= ((a + b) + c) + 1 \\ &= (a + (b + c)) + 1 \\ &= a + ((b + c) + 1) \end{aligned}$$

Complétez, et dites ce qu'on est en train de prouver.

Montrez par récurrence sur $b : \forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, a + b = b + a$.

Montrez : $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, (a + b = 0) \Rightarrow (a = b = 0)$.

Montrez : $\forall (a, b) \in \mathbb{N}, (a + b = a) \Rightarrow b = 0$.

◦12◦

Quel est le plus petit sous groupe de $(range(2019), +_{mod \ 2019})$ contenant 51 ?

◦13◦

On pose $A = \{a + b.\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$, $B = \{a + b.\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2, a^2 + b^2 \neq 0\}$ et $C = \{a + b.\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2, a.b \neq 0\}$.

La loi est la multiplication. Montrez qu'un de ces ensembles et un seul est un groupe.

◦14◦

Est il possible que les trois droites d'équations $x + y = a$, $a.x + y = 1$ et $x + a.y = 1$ aient un seul point d'intersection ?

◦15◦

♥ Montrez que l'ensemble des polynômes nuls en 1 est un groupe pour l'addition.

◦16◦

Comment s'appelle un anneau $(A, \oplus, \otimes)$ vérifiant $\forall (a, b) \in A^2, a \otimes b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$?

◦17◦

Donnez une primitive de $x \mapsto \text{Arctan}(\sqrt{x})$.

Donnez une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}.\text{Arctan}(\sqrt{x})$.

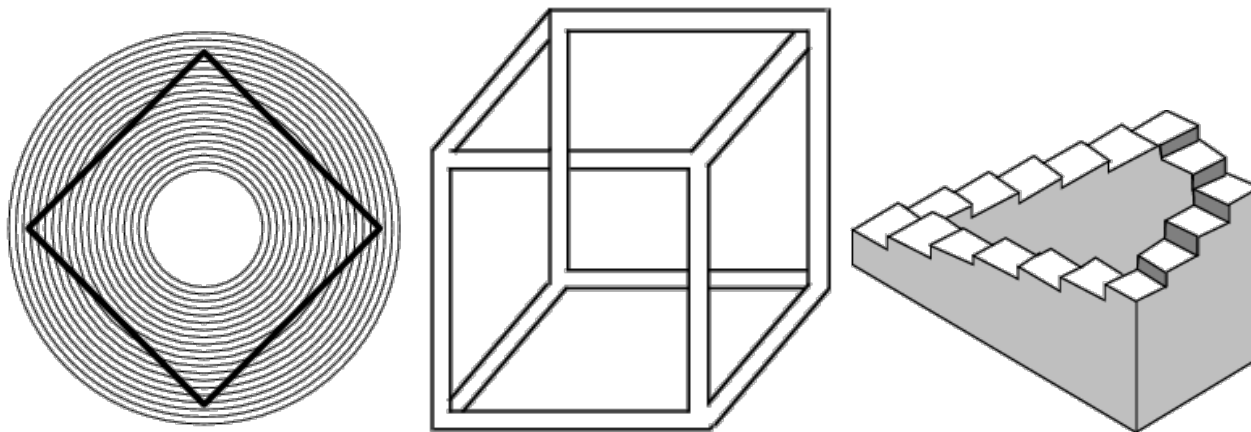
Donnez une primitive de $x \mapsto \frac{\text{Arctan}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

◦18◦

♥ Calculez $\sum_{k=0}^n \frac{k-1}{k!}$ en y trouvant la somme télescopique cachée.

◦19◦

Montrez que la somme des diviseurs de $2^3.5.7^2$ vaut 5130. Existe-t-il un entier dont la somme des diviseurs vaut 2021 ?



	D	A	B	
C	.	.	.	.
	.	.	.	.
	.	.	.	.
	.	.	.	.
	.	.	.	.
	C	C		
	A	B	C	
	.	.	.	.
	.	.	.	.
A	.	.	.	.
	.	.	.	.
	D	D		

Joël Martin (la Comtesse du Canard) à Paris :

Paris aux prestigieuses scènes est la capitale mondiale capitale du luxe. On y rencontre plein de titis qui rusent et bisent des copines à l'air cool. On voit plein de péniches à la Seine et plein de bus faciles à citer. On entend parfois soupirer des touristes subjugués par l'abîme dans la Tour : "Ah que j'aurais aimé connaître vos motivations, Eiffel !"

Et Joël Martin en Haute-Savoie (ah le goût de Mont-Blanc) :

Les amateurs de pentes collectionnent les faces, épatés par les faces et les pentes effilées. Une grimpeuse qui apprécie la Verte quand elle est jolie, et surtout la Verte enneigée, parcourt le mont sans craindre le vide. Une autre luge sous la Verte. Mais gare à l'excès de glisse quand se déchaîne le vent... détresse sur les faces !

Règle du jeu : sur chaque ligne, les lettres de A à D et une case transparente. Et au bout, l'indication de « qui on voit depuis ce bord ».

	A	C	A	
	A	C	D	B
D	D	B	C	A
A		A	B	D
C	C		A	B
	B	D		C
				A

◦20◦ Télescopez la somme $\sum_{k=0}^n \frac{k^2 + k - 1}{(k+1)!}$.

◦21◦ ♡ Calculez $\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} (i - j)$

et calculez aussi $\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} |i - j|$ (là, c'est plus ♠).

◦22◦ ♡ Encadrez $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + n^2}$ par $\frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{n}$. Déduisez la limite de cette suite.

Écrivez un script Python qui calcule (approximation réelle) cette somme pour n donné.

♣ Conjecturez à la calculatrice la limite de $\sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$ quand n tend vers l'infini (la démonstration viendra plus tard).

◦23◦ Complétez : $\sum_{k=0}^? x^{2 \cdot [\sqrt{k}]} = \sum_{p=0}^{n-1} (2 \cdot p + 1) \cdot x^{2 \cdot p}$ (découpage en tranches).

◦24◦

♣ On définit une autre multiplication matricielle, dite *multiplication industrielle*, car elle intervient dans les enchainements et mises en parallèle de processus dans les chaines de fabrication et production. On y remplace les additions par des Max et les multiplication par des additions ; $c_i^k = \sum_{j=1}^n a_i^j \cdot b_j^k$ devient donc $c_i^k = \text{Max}(a_i^j + b_j^k \mid j \leq n)$.

Calculez $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculez $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et même $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\boxtimes n}$ (puissance n matricielle).

Écrivez une procédure *Python* qui prend en entrée deux matrices carrées de même taille et rend leur produit industriel.



1/400

Jung

Les dures luttes sont pénibles quand on n'a que vingt ans.

Le prof de français trouve les jeux de Queneau un peu ridicules.

La latiniste n'apprécie pas les bottes antiques.

On a besoin de l'été pour se dépasser.

Il est arrivé officier en peinant.

Agités dans le Vexin, ils séduisent dans le Perche.

Elle n'apprécie pas les cakes de mimolette (translation).

Des trombones gênent votre Pise.

Règle du jeu : sur chaque ligne, les lettres de A à D et une case transparente. Et au bout, l'indication de « qui on voit depuis ce bord ».

	A	C	A		
	A	C	D		B
D	D	B	C	A	
A		A	B	D	C
C	C		A	B	D
	B	D		C	A

	D	B	D	
A	.	.	.	.
D	.	.	.	.
B	.	.	.	.
	.	.	.	.

	C	B	
C	.	.	.
B	.	.	.
D	.	.	.
	.	.	.

	C	A	
B	.	.	.
	.	.	.
	.	.	.
	.	.	.

◦25◦

On rappelle que $(S_5, \circ)$ est un groupe, de cardinal 120. Je n'en demande ni la liste des éléments ni le tableau de la loi de composition. Je vous demande de me donner un sous-groupe de cardinal 1, un sous-groupe de cardinal 2, un sous-groupe de cardinal 3, un sous-groupe de cardinal 4, un sous-groupe de cardinal 5, un sous-groupe de cardinal 6.

◦26◦

♣ Combien de permutations de S_6 sont des carrés (c'est à dire peuvent s'écrire $\sigma \circ \sigma$ pour au moins une permutation σ) ?

Combien sont des cubes ?

Combien le cycle $1\ 3\ 5$ a-t-il de racines carrées ?

◦27◦

Complétez la permutation suivante pour que sa signature vaille -1 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & * & 4 & * \end{pmatrix}$. Pouvez vous alors la

décomposer à l'aide de $\overrightarrow{1\ 2\ 3}$ et $\overrightarrow{2\ 3\ 4}$?

Et si on impose "signature égale à 1" ?

Rappel : la signature d'une permutation est $(-1)^k$ où k est le nombre de bicycles d'une décomposition de σ .

◦28◦ Par combien de 0 se termine l'écriture décimale de $\prod_{1 \leq i \leq j \leq k \leq 5} 2^i . 3^j . 5^k$?⁴

◦29◦ ♡ Calculez $\prod_{k=3}^n \frac{k^2}{k^2 - 4}$ (si possible évidemment sans récurrence, vous êtes en MPSI2, non ?)

◦30◦ On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 10 & 5 & 4 & 6 & 14 & 11 & 1 & 8 & 15 & 2 & 7 & 9 & 13 & 12 \end{pmatrix}$. Déterminez sa signature, son ordre. Résolvez $\sigma^n(1) = 13$ d'inconnue n dans $\mathbb{N}$.
Indiquez suivant la valeur de n le nombre de vrais cycles⁵ que contient σ^n .

◦31◦ ♣ A partir de quelle valeur de n existe-t-il dans S_n une permutation σ qui contienne au moins un cycle de taille 4 et soit de signature 1.
Même question en exigeant de plus qu'il existe au moins une permutation φ vérifiant $\varphi \circ \varphi = \sigma$.

◦32◦ Décomposez les premières puissances de $\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)} \circ \overrightarrow{(10\ 11\ 12\ 13)}$ (notée σ) en produit de cycles de supports disjoints. Indiquez suivant l'exposant n le nombre de cycles de σ^n .
Existe-t-il une permutation φ vérifiant $\varphi \circ \varphi = \sigma$?
Existe-t-il une permutation φ vérifiant $\varphi \circ \varphi \circ \varphi = \sigma$?

◦33◦ Complétez $\begin{pmatrix} & -5 \\ 2 & \end{pmatrix}$ pour qu'elle se diagonalise en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

◦34◦ Explicitez $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)}$ (notée σ) ainsi que $\overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$.
Résolvez l'équation $\sigma^n = Id$ d'inconnue n dans $\mathbb{N}$.

◦35◦ Soit $(G, .)$ un groupe où tout élément vérifie $x * x = 1$ (le neutre). Montrez que $(G, *)$ est commutatif.
(pensez à calculer $(a * b) * (a * b)$).

◦36◦ ♡ Calculez $\sum_{k=0}^n k.k!$ en y trouvant la somme télescopique cachée.

◦37◦ ♡ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini du quotient de $\sum_{\substack{k \leq 2.n \\ k \text{ pair}}} k$ par $\sum_{\substack{k \leq 2.n \\ k \text{ impair}}} k$.

	Q.C.M. de Roger Mansuy prof à Saint Louis	Vrai	Faux
a	Pour n dans $\mathbb{N}$, $\sum_{k=-n}^n (-1)^k = 0$		
b	$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=i}^n a_j^i \right) = \sum_{j=i}^n \left(\sum_{i=0}^n a_j^i \right)$		
◦38◦ c	$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \equiv 1 \pmod{2}}} a_k = \sum_{p=0}^{[n/2]} a_{2.p+1}$		
d	$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=1}^n a_j$		
e	$\sum_{k=1}^n (a_k)^p = \sum_{p=1}^n (a_p)^k$		

◦39◦ Démontrez $\sum_{k=0}^n k^5 = \frac{n^2.(n+1)^2.(2.n^2 + 2.n - 1)}{12}$ puis calculez $\sum_{\substack{k \leq 100 \\ k \text{ impair}}} k^5$ notée S .

Vous n'avez pas confiance ? Écrivez un script **Python** qui va calculer cette somme S .

‡ Vous avez confiance en vous pour la programmation : ajoutez le script qui va décomposer S (ou tout autre nombre) en produit de facteurs premiers.

4. par « écriture décimale, je veux dire écriture en base 10 (car il existe des écritures en base 2, 16 ou même -2), et pas écriture avec des chiffres derrière la virgule, car là vous pouvez mettre plein de 0

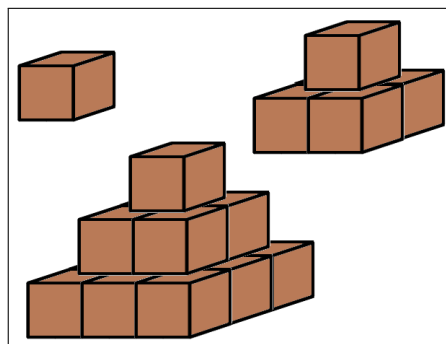
5. un cycle de taille 1 n'est pas compté comme cycle

Le programme prend en entrée^a un nombre de cubes n et indique la hauteur de la plus grande pyramide qu'il peut construire avec ces cubes. Les pyramides de taille 1, 2 et 3 sont visibles ci-contre.

Variante : les pyramides sont creuses.

La suite a est périodique de période 7 de premiers termes (0, 7, 6, 5, 3, 2, 0), écrivez un script Python qui prend n en entrée et retourne a .

^a « prend en entrée n » ça veut dire `def Programme(n) :` et pas des `n = int(input('Donnez un entier n : '))` ; on fait de la programmation, pas de la discussion avec le chat Scratch ; et sinon, prend en entrée, ça ne veut pas dire « commande avant son plat principal une salade niçoise »



◻40◻

◻41◻

Démontrez par récurrence : $\prod_{k=1}^n k.k! = (n!)^{n+1}$ pour tout n . Et sans récurrence ?

◻42◻

Justifiez $\sum_{k=0}^{2019} (2)^{(-1)^k} . k = 2\,548\,230$ (attention, combien de termes ?).

◻43◻

Calculez

$A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} . a^k$	$B = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} . a^n$
$C = \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} \binom{k}{i} . a^i$	$D = \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} \binom{n}{k} . a^i$

◻44◻

Calculez $\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq k \leq n}} k.2^i$ et $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^i . 3^j$.

◻45◻

Une enseigne de vente de vêtements (*fabriqués sans doutes au Bangladesh pour l'équivalent de cinquante euros par mois dans des conditions de non-sécurité bien connues*) propose actuellement une offre « le prix c'est votre pourcentage de réduction. Ainsi, un article acheté dix euros ne vous en coûtera que neuf et un article acheté cinquante euros ne vous en coûtera que vingt cinq (*et un article de cent dix euros ?*). Si je paye finalement vingt et un euros, quel était le prix initial de l'article. J'ai acheté deux articles, il m'en a coûté quarante euros. Sachant que l'un d'entre eux affichait comme prix le double de l'autre, combien coutaient chacun ? Et si j'ai payé vingt sept euros, sachant que l'un m'a coûté le double de l'autre ?

◻46◻

Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose

$c_n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$	$C_n = \sum_{k=1}^n c_k$	$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$
---	--------------------------	----------------------------------	---

Montrez que (C_n) est croissante, majorée. Sa limite est notée γ et s'appelle la constante d'Euler (*et de Mascheroni, qui pour sa part en a calculé plusieurs décimales*).

En étudiant $C_{2,n} - C_n$, montrez que $H_{2,n} - H_n$ converge vers $\ln(2)$ quand n tend vers l'infini.

Tant qu'on est là, montrez par récurrence sur n $H_{2,n} - H_n = A_{2,n}$ pour tout n .

♣♠ Essayez de démontrer

$\gamma = \int_1^\infty \left(\frac{1}{E(x)} - \frac{1}{x} \right) dx$	$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{x - E(x)}{x^2} dx$	$\gamma = - \int_0^1 \ln \ln \left(\frac{1}{x} \right) dx$	$\gamma = \int_0^1 \left(\frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{1-x} \right) dx$
---	--	---	--

(où E est la fonction partie entière)

◻47◻

♥ Simplifiez cette somme double $\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} \binom{n}{i} . 2^{i+j}$.

◻48◻

La moyenne d'âge de cette famille (deux parents et les enfants) est de 20 ans. Mais si on ne compte pas la mère (qui a 40 ans), la moyenne d'âge est de 15 ans. Combien d'enfants ?

◻49◻

♥ Calculez $\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ (ayez le bon réflexe oublié de Terminale).

◻50◻

Un élève s'est trompé et a écrit la définition suivante pour un anneau intègre $(A, +, \times)$:

$\forall (a, b) \in A^2, (a \times b = 0) \Rightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$ Trouvez l'erreur et montrez qu'un seul anneau vérifie ceci.

◦51◦

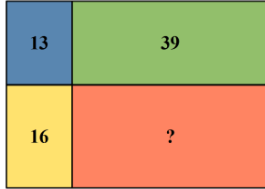
Pour tout entier naturel n , on pose $P_n = \prod_{k=0}^n \binom{n}{k}$, et $Q_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$ puis $R_n = \frac{Q_{n+1}}{Q_n}$.

Toutes les preuves pourront se faire par manipulations sur les produits (ou les sommes si vous passez au logarithme), sans récurrence.

Prouvez : $P_n = \frac{(n!)^{n+1}}{(\prod_{k=0}^n k!)^2} = \prod_{j=1}^n j^{2j-n-1}$.

Prouvez $Q_n = \frac{(n+1)^n}{n!}$ puis $R_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Déduisez que $\frac{P_{n+1} \cdot P_{n-1}}{(P_n)^2}$ converge vers e .

CAN YOU SOLVE THE RECTANGLE AREA PUZZLE?

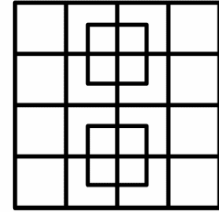


Grade School Homework In China: How Tall Is The Table?



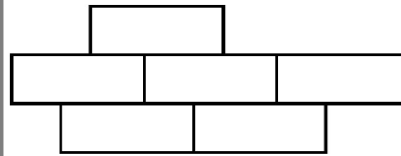
GEOMETRY RIDDLE

How many squares are in this picture?



$$(ABC)/5 = A \times B \times C$$

Solve if the letters are digits from 1 to 9



The shape consists of 6 congruent rectangles. If a single rectangle has a perimeter of 222, what is the perimeter of the shape?

◦52◦

◦53◦

On définit le produit de convolution sur les suites : $a * b$ a pour terme d'indice n la somme $\sum_{k=0}^n a_{n-k} \cdot b_k$.

Montrez que cette loi est commutative, associative. Donnez son élément neutre.

◦54◦

♣ Trouvez toutes les séries géométriques réelles (puis complexes) vérifiant

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2,k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right)^2 \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} a_{3,k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right)^3.$$

◦55◦

A et B sont deux matrices de Su-Do-Ku convenablement remplies. U est le vecteur colonne formé de neuf 1. Entre quelle et quelle valeur peut varier le réel ${}^t U \cdot A \cdot B \cdot U$ (au fait pour un demi point déjà, c'est bien un réel ? sachant que la notation

${}^t M$ indique la matrice M où on a échangé le rôle des lignes et des colonnes : ${}^t \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$?

◦56◦

$\heartsuit (a_n)$ et (b_n) sont les suites $\forall n, a_n = 4^n - 3 \cdot (-1)^n$ et $\forall n, b_n = -4^{n+1} + 5 \cdot (-1)^n$.

Trouvez la matrice M vérifiant $M \cdot \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.

Vérifiez qu'on a alors $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ (sans calculer M^n).

◦57◦

$\heartsuit$ Exprimez $\text{Tr}(A^2)$, $\det(A^2)$ et $\text{Tr}(A^3)$ à l'aide de $\text{Tr}(A)$ et $\det(A)$ pour toute matrice carrée A de taille 2.

Montrez pour tout x positif : $\ln(1+x) \leq x \leq (1+x) \cdot \ln(1+x)$.

Déduisez : $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq e^n \leq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$.

◦58◦

Déduisez $\sqrt[n]{n!} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e}$.

