LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 9 janvier
M.P.S.I.2

2023 2024

IS14

$\diamond$ 0 $\diamond$ Soit $(G, *)$ un groupe et a un élément absorbant (c'est à dire : $\forall x \in G,\ a * x = a$). Montrez que G n'a qu'un élément. 2 pt.

$\diamond$ 1 $\diamond$ Rappel : $A + B = \{a + b\ a \in A,\ b \in B\}$. On se place dans l'ensemble E des entiers de 0 à 11 pour l'addition modulo 12. Vérifiez $A + A = E$ pour $A = \{1,\ 2,\ 8,\ 9,\ 11\}$. Complétez $B = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ ?\}$ pour avoir $B + B = E$. 3 pt.

Écrivez un script **Python** qui prend en entrée une liste d'entiers **A** et un entier **n** et vérifie si **A+A** (pour l'addition modulo **n**) donne tous les entiers de `0` à **n-1**. 3 pt.

$\diamond$ 2 $\diamond$ Montrez que $x \longmapsto (4.x + 21)\%47$ (notée σ) est une bijection de $range(47)$ sur lui même, de bijection réciproque $y \longmapsto (12.y + 30)\%47$. 2 pt. Montrez que 40 est point fixe de f. 1 pt. Voici la décomposition de σ en produit de cycles :

$\overrightarrow{(0, 21, 11, 18, 46, 17, 42, 1, 25, 27, 35, 20, 7, 2, 29, 43, 5, 41, 44, 9, 10, 14, 30)} \circ \overrightarrow{(40)} \circ \overrightarrow{(3, 33, 12, 22, 15, 34, 16, 38, 32, 8, 6, 45, 13, 26, 31, 4, 37, 28, 39, 36, 24, 23, 19)}$

Calculez $\sigma^{2024}(5)$. Résolvez $\sigma^n(7) = 12$ d'inconnue n. Résolvez $\sigma^n(7) = 10$ d'inconnue n. 3 pt.

$\diamond$ 3 $\diamond$ Pour x et y dans $]-2/3,\ 0[$ (noté I), on pose $x * y = \dfrac{-x.y}{6.x.y + 3.x + 3.y + 2}$. On admet que c'est une loi de composition interne. Montrez qu'elle est commutative. 1 pt. Trouvez son neutre. 1 pt. Explicitez le symétrique d'un élément x de I et vérifiez qu'il est dans I. 2 pt. Montrez qu'elle est associaitive. 3 pt.

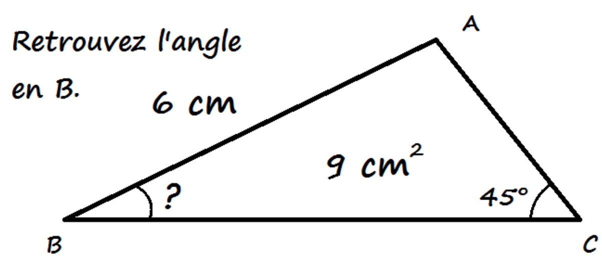
$\diamond$ 4 $\diamond$ Montrez : $\forall A \in M_3(\mathbb{R}),\ \Big((\forall M \in M_3(\mathbb{R}),\ M.A = A.M) \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R},\ A = \lambda.I_3)\Big)$ on raisonnera par double implication et on pourra intervenir des matrices telles que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 3 pt.

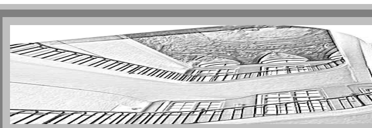
$\diamond$ 5 $\diamond$ On considère l'ensemble (S_5) des permutations de la liste$[0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ (bijections de cette liste dans elle même). On définit la relation $\Re$ par $\forall(\sigma,\ \varphi) \in (S_5)^2,\ \big((\sigma \Re \varphi) \Leftrightarrow (\sigma \circ \varphi = \varphi \circ \sigma)\big)$. Montrez que cette relation est réflexive, symétrique, mais si transitive ni antisymétrique. 4 pt. Combien l'équation $\sigma \Re \sigma^{-1}$ a-t-elle de solutions ? 1 pt. Combien l'équation $\sigma \Re \overrightarrow{(0\ 1\ 2\ 3\ 4)}$ a-t-elle de solutions ? 3 pt.

$\diamond$ 6 $\diamond$ Les suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont de la forme $\forall n,\ \begin{array}{lcllll} a_{n+1} & = & \alpha.a_n & +\beta.b_n & +\gamma.c_n \\ b_{n+1} & = & \alpha'.a_n & +\beta'.b_n & +\gamma'.c_n \\ c_{n+1} & = & \alpha''.a_n & +\beta''.b_n & +\gamma''.c_n \end{array}$ pour un lot de neuf constantes α à γ'' que je ne vous ai pas données. On sait aussi $\begin{array}{llll} a_0 = 0 & a_1 = 3 & a_2 = 1 & a_3 = 3 \\ b_0 = 1 & b_1 = 3 & b_2 = 1 & b_3 = 3 \\ c_0 = 1 & c_1 = 2 & c_2 = 2 & c_3 = 2 \end{array}$. Calculez alors $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. 2 pt.

$\diamond$ 7 $\diamond$ Je vous donne $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \in \{\frac{1}{4}.\begin{pmatrix} -4 & 4 & \\ -1 & & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix},\ \frac{1}{4}.\begin{pmatrix} -4 & 4 & \\ 1 & & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ \frac{1}{4}.\begin{pmatrix} -4 & 4 & \\ 1 & & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\}$, Retrouvez M. 2 pt. Rappel : $\det \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = a. \begin{vmatrix} & & \\ & b' & b'' \\ & c' & c'' \end{vmatrix} - b. \begin{vmatrix} & a' & a'' \\ & & \\ & c' & c'' \end{vmatrix} + c. \begin{vmatrix} & a' & a'' \\ & b' & b'' \\ & & \end{vmatrix}$.

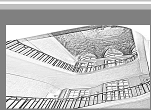
Calculez $Tr(M)$, $Tr(M^2)$ et $\det(M)$. 2 pt.
Trouvez le polynôme de degré 3 dont les trois racines sont les valeurs propres de M. 2 pt.
Vérifiez que M n'est pas inversible, mais est diagonalisable. 2 pt.
Calculez a_n pour tout n. 2 pt.





LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 9 janvier
M.P.S.I.2

2023 2024
IS14
CORRECTION



Questions rapides. IS14

Supposons que a soit absorbant dans le groupe $(G, *)$ de neutre n et où les inverses se notent avec un $^{-1}$.
Il l'est vis à vis de lui même : $a * a = a$.
On multiplie à droit par a^{-1} (symétrique de a) : $a * a * a^{-1} = a * a^{-1}$. Il reste $a = n$.

Déjà, le seul élément absorbant possible est le neutre.

Mais alors pour tout x de G on a $x * e = x$ car n est neutre, mais aussi $x * n = n$ car n est absorbant.
Et ceci donne $\forall x \in G,\ x = n$. Notre groupe n'a qu'un élément. Déception (et soulagement, c'est le neutre).

Somme de deux sous-ensembles. On nous donne $A = \{1,\ 2,\ 8,\ 9,\ 11\}$. On va calculer toutes les sommes possibles (réduites modulo 12) :

	1	2	8	9	11
1	2	3	9	10	0
2		4	10	11	1
8			4	5	7
9				6	8
11					10

ils y sont tous au moins une fois.

	2	3	5	7	?
2	4	5	7	9	
3		6	8	10	
5			10	0	
7				2	
?					

Il nous manque 1, 3, et 11. Moi j'ai une solution avec le 8. mais il y en a d'autres.

Pour la généralisation, on peut créer la liste des valeurs de `A+A` (avec deux boucles `for`), éliminer les valeurs en double et regarder si la longueur de la liste est bonne.

```
L = [ ]
for a in A :
....for b in A :
........L.append((a+b)%n)
```

Mais là, on a trop d'éléments en double.

```
L = [ ]
for a in A :
....for b in A :
........if (a+b)%n not in L :
............L.append((a+b)%n)
```

Le test est alors `len(L) == n`.

```
def test(A, n) : #list of int x int -> boolean
....L = [ ]
....for a in A :
........for b in A :
............s = (a+b)%n
............if s not in L :
................L.append(s)
....return len(L) == n
```

On peut aussi créer un histogramme et voir si tous les compteurs de l'histogramme sont sortis du 0.

```
def test(A, n) : #list of int x int -> boolean
....H = [0 for k in range(n)]
....for a in A :
........for b in A :
............H[(a+b)%n] += 1
....return not(0 in H)
```

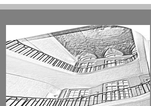
On prendra l'habitude de retourner un booléen directement évalué plutôt que le

```
if 0 in H :
....return False
else :
....return True
```

certes correct mais lourd.
Pour la complexité, il y a une double boucle. donc on a $len(A)^2$.
Mais on aussi un test avec un s in L. Et là, on parcourt (dans le pire des cas) en entier à chaque fois. On peut donc craindre une complexité en $lan(A)^2 \times n$.

On peut alléger car le tableau est symétrique (et revenir aux trucs lourdingues avec des
`for i in range(len(liste)) :`

```
for i in range(len(A)) :
....for j in range(i, len(A)) :
........s = A[i]+A[j]
```



Une permutation sur 47 éléments. IS14

Déjà, à cause du modulo 47, $x \longmapsto (4.x+21)\%47$ va bien de $[0,\ 1, \ldots 46]$ dans lui même.
Pour vérifier la bijectivité, autant profiter de la réciproque proposée. Si on a $\sigma \circ \sigma' = Id$ et $\sigma' \circ \sigma = Id$, on aura bien les deux affirmations en une : bijection, et réciproque σ'.

Or, cette composée est $x \longmapsto (12.(4.x+21)+30)\%47$.
On distribue et on ne réduit qu'à la fin : $x \longmapsto 48.x+282$. Et justement : 48 vaut 1 modulo 47 et 282 est nul (6×47).

De même $y \longmapsto (4.(12.y+30)+21)$ a le même coefficient directeur (48 c'est à dire 1) et $4.30+21$ est nul aussi).

Vous avez le droit d'aller plus vite qu'en terminale où vous trainiez des $+k.47$ partout).

Pour montrer que 40 est point fixe, on calcule $\boxed{4.40+21 = 181 = 40+141 = 40+3.47 = 40 \ mod\ 47}$

La décomposition en produit de cycles semble bien cohérente. Les deux cycles sont de longueur 23.

On a donc $\sigma^{23} = Id$ et plus généralement $\sigma^{23.p} = Id$. Et les autres entiers ne sont pas solution.
L'ordre de σ est 23 et les solutions de $\sigma^n = Id$ sont les multiples de 23 (positifs ou négatifs).

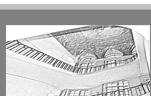
$\sigma^{2024} = \sigma^{88.23} = Id$ et donc $\boxed{\sigma^{2024}(5) = 5}$

Il est impossible d'avoir $\sigma^n(7) = 12$ car 7 et 12 sont dans des orbites distinctes. $\boxed{S = \emptyset}$

On peut avoir $\sigma^n(7) = 10$. On l'a pour $n = 8$ dans le cycle

$$\overrightarrow{(0, 21, 11, 18, 46, 17, 42, 1, 25, 27, 35, 20, 7, 2, 29, 43, 5, 41, 44, 9, 10, 14, 30)}$$

Et en tenant compte de l'ordre (ou de la périodicité) $\boxed{S = \{10+23.k \mid k \in \mathbb{Z}\}}$



Loi de composition interne. IS14

On se donne x et y entre $\dfrac{-2}{3}$ et 0. Se peut il déjà que $\dfrac{-x.y}{6.x.y+3.x+3.y+2}$ n'existe pas ? Quel est le signe de $6.x.y+3.x+3.y+2$ peut il s'annuler pour x et y entre $-2/3$ et 0 ?

On nous dit de l'admettre.

Et c'est un peu lourd et juste calculatoire.

Ensuite, $\dfrac{-x.y}{6.x.y+3.x+3.y+2}$ est il entre $-\dfrac{2}{3}$ et 0 ?
On nous dit de l'admettre.

Ces questions lourdes étant passées, vérifions la commutativité pour un point vite offert :

$$x*y=\frac{-x.y}{6.x.y+3.x+3.y+2}=\frac{-y.x}{6.y.x+3.y+3.x+2}=y*x$$

Pour le neutre, c'est plus joli. On veut $\dfrac{-x.n}{6.x.n+3.x+3.n+2}=x$ pour tout x.
Ceci revient à demander $(6.n+3).x^2+(4.n+2).x=0$ (produit en croix...) pour tous les x de notre intervalle. C'est impossible, sauf si $6.n+3$ et $4.n+2$ sont nuls.
On a nécessairement $n=\dfrac{-1}{2}$. Mais raisonner par conditions nécessaire n'est pas ce qui est demandé ici. On se contente de proposer

$$x*\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{\frac{x}{2}}{-\frac{6}{2}.x+3.x-\frac{3}{2}+2}=\frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}=x$$

Maintenant, pour x donné, on cherche y vérifiant

$$\frac{-x.y}{6.x.y+3.x+3.y+2}=-\frac{1}{2}$$

Quitte à multiplier en croix : $4.x.y+3.x+3.y+2=0$. On explicite :

$$y=\frac{-3.x-2}{4.x+3}$$

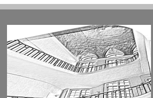
Il faut ensuite vérifier que pour x entre $-\dfrac{2}{3}$ et 0, ceci existe (le dénominateur ne va pas s'annuler il est positif), et reste entre $-\dfrac{2}{3}$ et 0.
Le numérateur est négatif $-2<-3.x-2<0$ et le dénominateur positif, l'ensemble est négatif.
La différence $\dfrac{-3.x-2}{4.x+3}+\dfrac{2}{3}$ vaut $\dfrac{-x}{3.(4.x+3)}$ (numérateur positif et dénominateur positif).

Il est aussi simple de tracer le tableau de variations de $x\longmapsto\dfrac{-3.x-2}{4.x+3}$ *sur* $\left]-\dfrac{2}{3},\,0\right[$.

L'associaitivité impose de calculer $(x*y)*z$. J'ai trouvé

$$\frac{x.y.z}{12.x.y.z+9.x.y+9.x.z+9.y.z+6.x+6.y+6.z+4}$$

et ensuite les rôles sont symétriques.



Matrices permutables avec toutes les autres dans $M_3(\mathbb{R})$. IS14

On prend A dans $M_3(\mathbb{R})$. Pour l'instant, pas besoin de nommer ses coefficients.

On suppose que A est de la forme $\lambda.I_3$.
On montre alors sans effort : $\forall M\in M_3(\mathbb{R}),\ A.M=M.A$ (égale à $\lambda.M$).

On suppose maintenant que A vérifie $\forall M\in M_3(\mathbb{R}),\ A.M=M.A$.
Comme c'est une hypothèse valable pour tout M, on peut l'appliquer à des cas particuliers. Et tant mieux si ça permet de conclure.

On nomme les coefficients de A et on écrit $A.M = M.A$ pour les matrices proposées :

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ b' & 0 & 0 \\ b'' & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

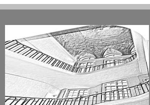
$$\boxed{b = 0, c = 0, b'' = 0, a = b'}$$

Déjà la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ a' & a & c' \\ a'' & 0 & c'' \end{pmatrix}$.
On recommence avec une matrice du même genre

$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ a' & a & c' \\ a'' & 0 & c'' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ c' & 0 & 0 \\ c'' & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ a' & a' & c' \\ a'' & 0 & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & c \end{pmatrix}$

$$\boxed{c = 0, c' = 0, a = c''}$$

A ce stade la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a' & a & 0 \\ a'' & 0 & a \end{pmatrix}$.
Avec un 1 en ligne 1 colonne 2 on finit par obtenir la matrice $a.I_3$, et c'était notre souhait.
Inutile d'en demander plus.



Diagonalisation. IS14

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

En effet, à chaque fois qu'on « fait tomber une colonne sur la matrice M, on calcule des termes comme $\alpha.a_1 + \beta.b_1 + \gamma.c_1$ (ce qui donne a_2) et ainsi de suite.

On peut le voir aussi comme le collage de trois formules du type $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ pour n de 0 à 2.

Dans la liste des inverses proposée, un simple calcul assure : $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{4}.\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.
On multiplie alors à droite par cet inverse la relation écrite plus haut

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.\frac{1}{4}$$

On effectue le calcul et on tient M : $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qu'on pouvait obtenir aussi par résolution de système.

On calcule les trois termes diagonaux de M^2 puis on développe le déterminant de M par rapport à sa première colonne.

$Tr(M) = 0$	$Tr(M^2) = 2$	$\det(M) = 0$

M n'est pas inversible, car son déterminant est nul.

En effet, si elle était inversible, on aurait $M.M^{-1} = I_3$ *puis* $\det(M.M^{-1}) = \det(I_3)$ *et donc* $\det(M).\det(M^{-1}) = 1$. *Le réel* $\det(M)$ *ne peut donc pas valoir* 0.

Comme M et D seront semblables :

$Tr(D) = 0$	$Tr(D^2) = 2$	$\det(D) = 0$

Comme D sera diagonale, en nommant λ_1 à λ_3 les trois valeurs propres

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$	$(\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 + \lambda_3)^2 = 2$	$\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = 0$

Sans même passer par les formules de Viète : l'une d'entre elles est nulle.
Les deux autres ont alors une somme nulle. Elles ne diffèrent que par le signe.
Et la relation $(\lambda_1)^2 + (-\lambda_1)^2 + (0)^2 = 2$ donne la liste directement : 0, 1 et -1.

On dispose de la matrice D, on cherche P avec une première ligne de 1 , vérifiant donc

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

J'ai trouvé $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et c'est assez soulageant.

On a donc $M^n = P.D^n.P^{-1}$ et

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut terminer le calcul.
On peut aussi dire que a_n est de la forme $A.1^n + B.(-1)^n + C.0^n$. Les conditions initiales donnent alors $A + B + C = 0$, $A - B = 3$ et $A + B = 1$.

Mais alors, dès qu'on a dépassé $n = 0$, la suite est périodique de période 2 puisqu'elle est de la forme $1 + B.(-1)^n$.

Et on connaît deux valeurs ! Donc $a_n = \left\{ \begin{array}{llll} 0 & si & n = 0 & \\ 3 & si & n & impair \\ 1 & si & n & pair \end{array} \right|$

Relation sur les permutations. IS14

La relation définie par « commutent » est réflexive.
Pour tout σ on a $\sigma \circ \sigma = \sigma \circ \sigma$ et donc $\sigma \Re \sigma$.

Elle est symétrique. On se donne σ et φ. On suppose $\sigma \Re \varphi$.On traduit :$\sigma \circ \varphi = \varphi \circ \sigma$. On reconnaît $\varphi \circ \sigma$.

Elle n'est pas antisymétrique. On a sans effort $\overrightarrow{(0\ 1)} \Re Id$ et $Id \Re \overrightarrow{(0\ 1)}$ et pourtant on n'a pas $\overrightarrow{(0\ 1)} = Id$.

Elle n'est pas transivite. On a $\overrightarrow{(0\ 1)} \Re Id$ et $Id \Re \overrightarrow{(1\ 2)}$ et pourtant on n'a pas $\overrightarrow{(0\ 1)} \Re \overrightarrow{(1\ 2)}$.

Les solutions de $\sigma \Re \sigma^{-1}$ sont les bijections vérifiant $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma$. Ce sont donc toutes les permutations. Et il y en a 120 (factorielle !).

Les solutions de $\sigma \Re \overrightarrow{(0\ 1\ 2\ 3\ 4)}$ sont les bijections vérifiant $\sigma \circ \overrightarrow{(0\ 1\ 2\ 3\ 4)} = \overrightarrow{(0\ 1\ 2\ 3\ 4)} \circ \sigma$.
Déjà, une solution évidente : Id.
Mais une autre aussi évidente : $\overrightarrow{(0\ 1\ 2\ 3\ 4)}$ elle même !
Et même son carré : $\rho^2 \circ \rho = \rho \circ \rho^2$.
Et les autres puissances aussi. Il y en a cinq, en commençant par Id.

Et ce sont les seules solutions.
En effet, si on connaît $\sigma(0)$ alors on connait tous les autres, par décallage.
$\left(\sigma \circ \overrightarrow{(0\ 1\ 2\ 3\ 4)}\right)(0) = \left(\overrightarrow{(0\ 1\ 2\ 3\ 4)} \circ \sigma\right)(0)$ donne $\sigma(1) = (\sigma(0) + 1)\%5$.
$\left(\sigma \circ \overrightarrow{(0\ 1\ 2\ 3\ 4)}\right)(1) = \left(\overrightarrow{(0\ 1\ 2\ 3\ 4)} \circ \sigma\right)(1)$ donne $\sigma(2) = (\sigma(1) + 1)\%5$ et ainsi de suite.