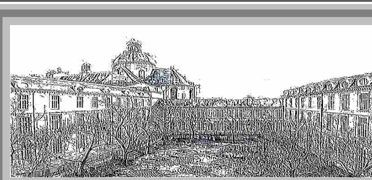
LYCEE CHARLEMAGNE

Vendredi 20 octobre

M.P.S.I.2



2023 2024

DS02

On note $\mathbb{P}$ l'**ensemble des polynômes à coefficients réels dont toutes les racines sont réelles**.

I∼0) Pour quelle valeur de a le polynôme $X^3 - 6.X^2 + 9.X + a$ est il dans $\mathbb{P}$ *(on pourra étudier les variations de $x \longmapsto x^3 - 6.x^2 + 9.x + 1$).* 2 pt.

I∼1) Montrez que le produit de deux éléments de $\mathbb{P}$ est dans $\mathbb{P}$. 2 pt.

I∼2) Montrez que $X^2 - 3.X + 2$ et $X^2 + 3.X + 2$ sont dans $\mathbb{P}$ mais pas leur somme. 2 pt.

I∼3) Pour quelles valeurs de a le polynôme $X^4 + a.X^2 + (a-1)$ est il dans $\mathbb{P}$? Pour quelles valeurs de a le polynôme $X^4 - a.X^2 + (a-1)$ est il dans $\mathbb{P}$? 2 pt.

Dérivation.

II∼0) Soit P dans $\mathbb{P}$ de racines $(a_k)_{k\leqslant n}$ que l'on suppose distinctes pour l'instant, classées par ordre croissant.
Montrez $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{X - a_k}$. 2 pt. En étudiant la fonction rationnelle $x \longmapsto \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ sur chaque intervalle $]a_k,\ a_{k+1}[$ (variations, limites aux bornes), montrez que P' admet une racine et une seule sur $]a_k,\ a_{k+1}[$. Déduisez que P' est aussi dans $\mathbb{P}$. 2 pt.

II∼1) Montrez que le résultat reste valable si l'une des racines de P est une racine double. 1 pt.

II∼2) Déduisez que si P est dans $\mathbb{P}$ alors toutes ses dérivées y sont aussi. 1 pt.

III∼0) Montrez que si $a.X^2 + b.X + c$ est dans $\mathbb{P}$ a lors $3.a.X^2 + 2.b.X + c$ est dans $\mathbb{P}$. Montrez que la réciproque n'est pas valable. 2 pt.

Renversement.

IV∼0) Montrez que si $X^3 - S.X^2 + D.X - P$ est dans $\mathbb{P}$ alors $1 - S.X + D.X^2 - P$ est aussi dans $\mathbb{P}$ (traiter à part le cas $P = 0$). 2 pt.

IV∼1) Montrez que si P est un polynôme de $\mathbb{P}$, de degré d, alors $X^d.P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ est aussi un polynôme, et qu'il est dans $\mathbb{P}$. 2 pt.

Log-concavité

IV∼2) Une suite réelle (n'ayant éventuellement qu'un nombre fini de termes) est dite **unimodulaire** si $\exists j \in \mathbb{N},\ \forall k,\ (k < j \Rightarrow a_k \leqslant a_{k+1})$ *et* $(k \geqslant j \Rightarrow a_k \geqslant a_{k+1})$.
Montrez : toute suite unimodulaire est majorée. 1 pt.

IV∼3) Une suite réelle (a_k) (n'ayant éventuellement qu'un nombre fini de termes) est dite **log-concave** si $\forall k > 0,\ (a_k)^2 \geqslant a_{k-1}.a_{k+1}$.
Un élève propose le script suivant pour tester si une suite numérique a (de type `list of float`) est log-concave. Corrigez ses erreurs. 3 pt.

```
def log_concave(a) : #list of float -> boolean
....for k in range(n) :
........if a[k]**2 < a[k-1]*a[k+1] :
............return False
........else :
............return True
```

IV∼4) Pour quelles valeurs de α les suites géométriques de raison α sont elles log-concaves. 1 pt.

IV∼5) Montrez (pour n fixé) que la suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est unimodulaire (simplifiez $\binom{n}{k+1}-\binom{n}{k}$) et log-concave. 3 pt.

IV∼6) Une suite réelle $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ (n'ayant qu'un nombre fini $n+1$ de termes) est dite **ultra log-concave** si $\left(\dfrac{a_k}{\binom{n}{k}}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est log-concave. Montrez que toute suite (finie) ultra-log-concave est log-concave. 2 pt.

IV∼7) Montrez que si la suite $(a_k)_{k\leqslant n}$ est ultra-log-concave, alors la suite $(k.a_k)_{k\leqslant n}$ l'est aussi. 2 pt.

IV∼8) Montrez que si $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant 5}$ est strictement positive et log-concave alors elle est unimodulaire. 2 pt.

Ultra-log-concavité et Viète

V∼0) On considère trois réels a, b et c. On prend les notations habituelles $S=a+b+c$, $D=a.b+a.c+b.c$ et $P=a.b.c$. Donnez le signe de $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ et déduisez $S^2\geqslant 3.D$ puis $D^2\geqslant 3.S.P$ (pensez aux inverses des racines). 3 pt.

V∼1) Montrez que si $a_0+a_1.X+a_2.X^2+a_3.X^3$ est dans $\mathbb{P}$ alors la suite $[a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3)$ est ultra log-concave. 1 pt.

VI∼0) On prend cette fois quatre réels a, b, c et d. On introduit encore les notations $S=a+b+c+d$, $D=a.b+a.c+a.d+b.c+b.d+c.d$, $T=b.c.d+a.c.d+a.b.d+a.b.c$ et $P=a.b.c.d$. Montrez : $3.S^2\geqslant 8.D$. Montrez : $4.D^2\geqslant 9.S.T$. 3 pt.

VI∼1) Montrez que si $\sum\limits_{k=0}^{4}a_k.X^k$est dans $\mathbb{P}$ alors la suite $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$ est ultra log-concave. 2 pt.

Ultra-log-concavité et $\mathbb{P}$

VII∼0) Soit $P=\sum\limits_{j=0}^{n}a_j.X^j$ dans $\mathbb{P}$ de degré n et k un entier vérifiant $1\leqslant k\leqslant n-1$.

On pose : $Q_1(X)=P^{(k-1)}(X)$, $Q_2(X)=X^{n-k+1}.Q_1\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et $Q(X)=(Q_2)^{(n-k-1)}(X)$.
Montrez que ce sont tous des polynômes. Montrez qu'ils sont tous dans $\mathbb{P}$. 2 pt.
Montrez que $Q(X)$ est de degré inférieur ou égal à 2 et donnez ses coefficients en fonction des a_i. 3 pt.

VII∼1) Exemple. On prend $n=5$ et $P=a_0+a_1.X+a_2.X^2+a_3.X^3+a_4.X^4+a_5.X^5$.
Calculez $Q_1(X)$, $Q_2(X)$ et $Q(X)$ dans le cas $k=3$. Déduisez $(a_3)^2\geqslant 2.a_2.a_4$. Montrez que la suite $(a_k)_{k\leqslant 5}$ est ultra-log-concave. 3 pt.

VII∼2) On revient au cas général. Déduisez que la suite $(a_k)_{k\leqslant n}$ est ultra-log-concave. 2 pt.

Exemple

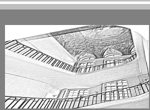
VIII∼0) On définit la suite $(T_n(X))$ par $T_0(X)=1$, $T_1(X)=X$ et $T_{n+1}(X)=2.X.T_n(X)-T_{n-1}(X)$. Calculez $T_n(X)$ pour n de 0 à 5 et montrez qu'ils sont tous dans $\mathbb{P}$. 3 pt.

VIII∼1) Montrez que chaque $T_n(X)$ est un polynôme à coefficients réels de degré n. 1 pt.

VIII∼2) Montrez pour tout n et tout θ : $\cos((n+1).\theta))+\cos((n-1).\theta)=2.\cos(\theta).\cos(n.\theta)$. Déduisez $T_n(\cos(\theta))=\cos(n.\theta)$. 3 pt.

VIII∼3) Montrez que les réels $\cos\left(\dfrac{2.k+1}{2.n}.\pi\right)$ sont tous racines de T_n (k dans $\mathbb{Z}$). 1 pt. Déduisez que chaque $T_n(X)$ est dans $\mathbb{P}$. 1 pt.

VIII∼4) Montrez : $T_n(T_p(X))=T_p(T_n(X))=T_{n.p}(X)$ pour tout couple $(n,\ p)$. 3 pt.



Polynôme $X^3 - 6.X^2 + 9.X + a$. DS02

On étudie l'application $x \longmapsto x^3 - 6.x^2 + 9.x + a$ de dérivée $x \longmapsto 3.x^2 - 12.x + 9$ (qui s'annule et change de signe en 1 et 3).
On calcule alors les extrema $f(1)$ et $f(3)$ pour tracer un tableau de variations

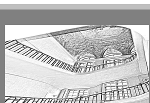
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$3.(x^2 - 4.x + 3)$	positif		0	négatif	0	positif	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a la forme classique d'un polynôme de degré 3. Par stricte monotonie, on a au plus une racine sur chaque intervalle : $]-\infty,\ 1]$, $[1,\ 3]$ et $[3,\ +\infty[$.
On veut exactement trois racines. Il faut donc qu'il y en ait une sur chacun.
Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit : $f(1)$ positif et $f(3)$ négatif.

Et il nous assure alors d'une racine dans la phase ascendante $]-\infty,\ 1]$
une racine dans la phase descendante $[1,\ 3]$
une racine dans la phase ascendante $[3,\ +\infty[$
C'est nécessaire et suffisant.

La condition nécessaire et suffisante est donc $\boxed{4 + a \geqslant 0 \geqslant a}$ ou si vous préférez : $S_a = [-4,\ 0]$

Les inégalités sont larges car par exemple pour a égal à -4, *on a une racine double égale à* 1 *(et l'autre racine réelle est* 4*).*



Produit de deux polynômes de $\mathbb{P}$. DS02

La question est très simple si on la prend par la bonne extrémité : la forme factorisée.

$P(X)$ est dans $\mathbb{P}$ si et seulement il s'écrit $\lambda.\prod_{k=1}^{d}(X - r_k)$ où les r_k sont les racines réelles de P (et λ son coefficient dominant).

$Q(X)$ est dans $\mathbb{P}$ si et seulement il s'écrit $\mu.\prod_{k=1}^{d'}(X - \rho_k)$ où les ρ_k sont les racines réelles de Q.
Mais alors $P(X).Q(X)$ s'écrit $\lambda.\mu.\prod_{k}(X - r_k).\prod_{j}(X - \rho_j)$ et ses racines sont réelles.

Réciproquement, si les racines de $P(X).Q(X)$ sont réelles, celles de P et celles de Q le sont aussi, puisque ce sont certaines des racines de $P.Q$.

Clef : $P(x).Q(x) = 0 \Leftrightarrow (P(x) = 0$ *ou* $Q(x) = 0)$

Rapport du jury : la question a trop souvent été abordée par l'écriture additive $P(X).Q(X) = \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k.X^k\Big).\Big(\sum_{k=0}^{d'} b_k.X^k\Big)$ et n'a pas donné de résultats.

Ce sujet est inspiré du début d'un sujet de Mines-Ponts (Maths 2, filière PC 2021)
Dans le sujet de Mines Ponts, on étudiait le critère de Schur.
On regardait les suites (u_k) telles que

« si $P=\sum_{j=0}^{n} a_j.X^j$ est dans $\mathbb{P}$ alors $P=\sum_{j=0}^{n}(u_j.a_j).X^j$ est aussi dans $\mathbb{P}$ ».

$\mathbb{P}$ n'est pas stable par addition. — DS02

$X^2-3.X+2$	a pour racines 1 et 2	il est dans $\mathbb{P}$
$X^2+3.X+2$	a pour racines -1 et -2	il est dans $\mathbb{P}$
$2.X^2+0.X+4$	a pour racines $i.\sqrt{2}$ et $-i.\sqrt{2}$	il n'est pas dans $\mathbb{P}$

L'ensemble $\mathbb{P}$ n'est pas stable par addition alors qu'il est stable par multiplication.

Polynôme de degré 4. — DS02

Les racines de $X^4+a.X^2+(a-1)$ sont les racines carrées des racines de $Y^2+a.Y+(a-1)$ (en posant malproprement $Y=X^2$).
Il faut que les racines de $Y^2+a.Y+(a-1)$ soient réelles (carrés de réelles).
Et il faut aussi qu'elles soient positives (pour qu'on puisse en extraire les racines).
C'est d'ailleurs nécessaire et suffisant, puisque si α et β vérifient $\alpha^2+a.\alpha+(a-1)=0$ et $\beta^2+a.\beta+(a-1)=0$ et sont positives, alors les quatre racines de $X^4+a.X^2+(a-1)$ sont $\sqrt{\alpha}$, $-\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ et $-\sqrt{\beta}$.

Or, les racines de $Y^2+a.Y+(a-1)$ sont -1 et $1-a$ (somme et produit, sans passer par des $\sqrt{a^2-4.a+4}=\sqrt{(a-2)^2}$).

Et -1 n'a pas de racine carrée dans $\mathbb{R}$. Donc $\boxed{S_a=\emptyset}$

Pour $X^4-a.X+(a-1)$, on a cette fois $x^2=1$ ou $x^2=a-1$.
La condition nécessaire et suffisante est $a-1\geqslant 0$: $\boxed{S_a=[1,\ +\infty[}$ et $S_x=\{1,\ -1,\ \sqrt{a-1},\ -\sqrt{a-1}\}$ pour chaque a convenable.

Décomposition de $\dfrac{P'(X)}{P(X)}$. — DS02

On écrit P sous forme factorisée $P(X)=\lambda.(X-a_1).(X-a_2)\dots(X-a_n)$ (oublier le coefficient dominant λ ne change rien pour la suite, mais c'est une faute).
On dérive avec la formule $(u.v.w)'=u'.v.w+u.v'.w+u.v.w'$ et sa généralisation $\Big(\prod\limits_{k=1}^{n}u_k\Big)'=\sum\limits_{i=1}^{n}\Big((u_i)'.\prod\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}}u_k\Big)$.

$$\begin{aligned}P'(X)=&\ \lambda.1.(X-a_2)\dots(X-a_{n-1}).(X-a_n)+\lambda.(X-a_1).1\dots(X-a_{n-1}).(X-a_n)+\dots\\ &\dots+\lambda.(X-a_1).(X-a_2)\dots1.(X-a_n)+\lambda.(X-a_1).(X-a_2)\dots(X-a_{n-1}).1\end{aligned}$$

$$P(X)=\lambda.(X-a_1).(X-a_2)\dots(X-a_n)$$

A chaque fois, un terme a été dérivé et a donné 1. Il manque donc un terme à chaque fois. Quand on divise par le produit de tous, il reste à chaque fois au dénominateur le terme qu'on avait dérivé. Il reste donc n termes de la forme $\dfrac{1}{X-a_k}$.

Proprement avec de beaux sigmas :

$$\frac{P'(X)}{P(X)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}1.\prod\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}}(X-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(X-a_k)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\prod\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}}(X-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(X-a_k)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X-a_i}$$

Je verrai sur vos copies si les adeptes de la récurrence s'en sortent, avec

$$P_{n+1}(X)=P_n(X).(X-a_{n+1})$$

$$(P_{n+1})'(X) = (P_n)'(X).(X - a_{n+1}) + P_n(X)$$

$$\frac{(P_{n+1})'(X)}{P_{n+1}(X)} = \frac{(P_n)'(X).(X - a_{n+1}) + P_n(X)}{P_n(X).(X - a_{n+1})} = \frac{(P_n)'(X)}{P_n(X)} + \frac{1}{X - a_{n+1}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - a_k}\right) + \frac{1}{X - a_{n+1}}$$

Chaque application $x \longmapsto \dfrac{1}{x - a_k}$ qui constitue $\dfrac{P'}{P}$ est décroissante par intervalle.

La somme $x \longmapsto \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ est donc décroissante sur chaque intervalle de son domaine.

Plaçons nous sur $]a_k,\ a_{k+1}[$. L'application décroit.

Étudions sa limite à droite en a_k : $\dfrac{1}{x - a_k}$ tend vers $+\infty$

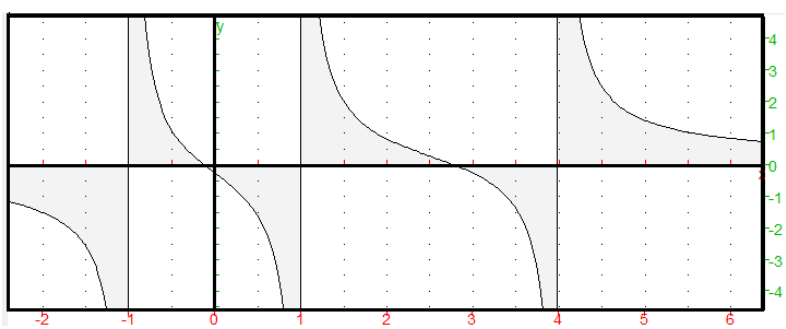
chaque $\dfrac{1}{x - a_i}$ (i différent de k) tend vers une limite finie $\dfrac{1}{a_k - a_i}$

La somme tend vers $+\infty$.

Étudions sa limite à gauche en a_{k+1} : $\dfrac{1}{x - a_{k+1}}$ tend vers $-\infty$

chaque $\dfrac{1}{x - a_i}$ (i différent de k) tend vers une limite finie $\dfrac{1}{a_{k+1} - a_i}$

La somme tend vers $-\infty$.



Par théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\dfrac{P'(x)}{P(x)}$ admet une solution.

Par stricte monotonie, elle en admet une seule.

On a combien d'intervalles de ce type $]fa_k,\ a_{k+1}[$? On en a $n - 1$ (`k in range(1, n)`).

On a donc détecté $n - 1$ racines pour P' . Une par intervalle.
P' étant de degré $n - 1$, il ne peut pas en avoir plus.
On a donc toutes les racines de P'. Et elles sont toutes réelles.

Bilan : si P est dans $\mathbb{P}$ avec que des racines simples, alors sa dérivée y est aussi.

> *On notera que l'on pouvait aussi utiliser le théorème de Rolle. Comme P prend la même valeur en a_k et a_{k+1} alors sa dérivée P' s'annule au moins une fois entre les deux.*

Que se passe-t-il si P admet une racine double ? Supposons $a_k = a_{k+1}$ quelquepart.
La décomposition de $\dfrac{P'}{P}$ reste valable.
L'existence d'une racine sur chaque intervalle reste valable.
Mais il y a moins d'intervalles.

> *Imaginons $a_1 < a_2 < a_3 = a_4 < a_5$. On a alors seulement trois intervalles $]a_1,\ a_2[$, $]a_2,\ a_3[$, et $]a_3,\ a_5[$.*

Mais comme $a_k$est une racine double de P, c'est encore une racine de P'.
On a donc une racine de plus. Et on a toutes les racines de P'.

Sur l'exemple $a_1 < a_2 < a_3 = a_4 < a_5$, on a $P = \lambda.(X-a_1).(X-a_2).(X-a_3)^2.(X-a_5)$,

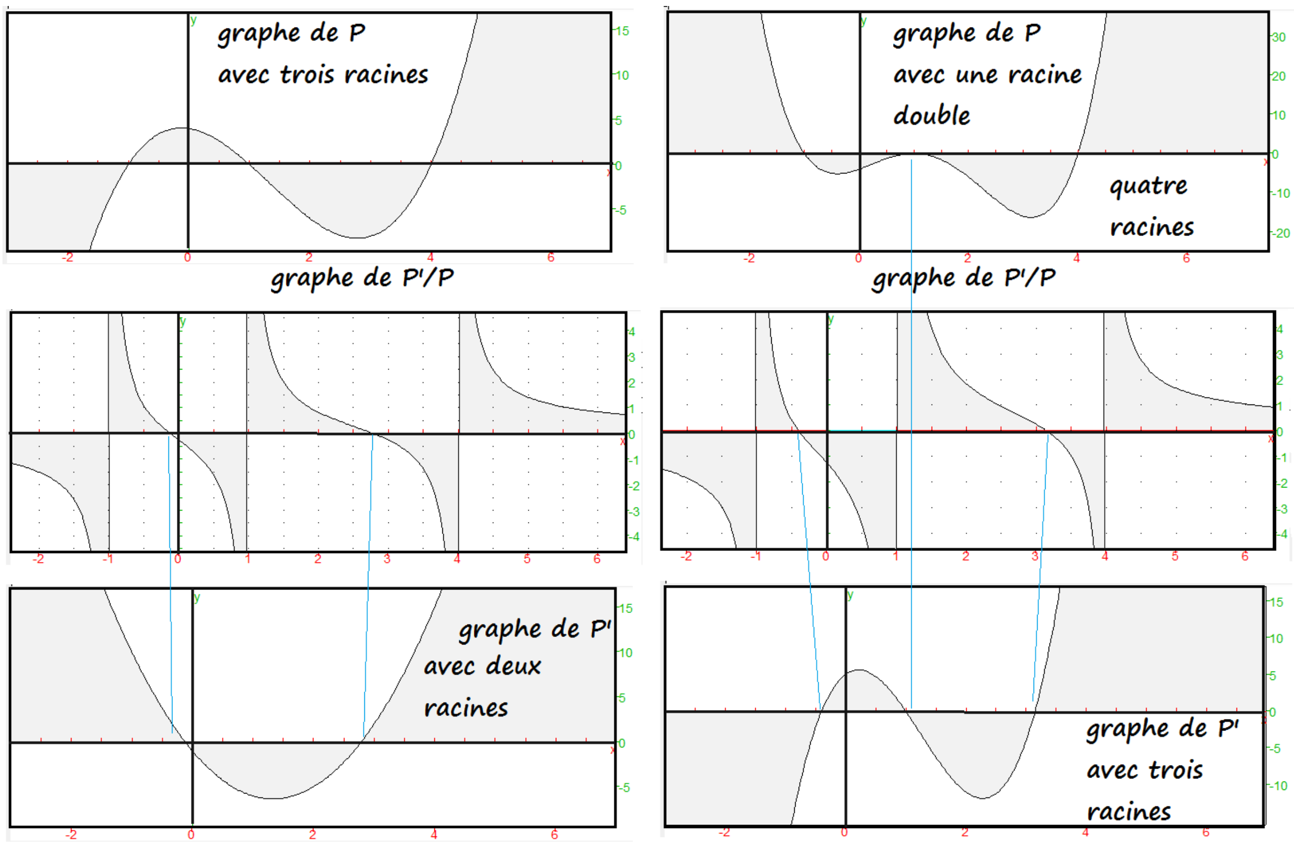
$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{X-a_1} + \frac{1}{X-a_2} + \frac{2}{X-a_3} + \frac{1}{X-a_5}$$

trois racines (entre a_1 et a_2 puis entre a_2 et a_3 et entre a_3 et a_5)
mais en même temps : $P' = \lambda.(X-a_3).\Big((X-a_2).(X-a_3)^2.(X-a_5) + (X-a_1).(X-a_3)^2.(X-a_5) +$

$$(X-a_1).(X-a_2).2.(X-a_5) + (X-a_1).(X-a_2).(X-a_3)\Big)$$

et donc a_3 est aussi racine de P'.

On généralise à plusieurs racines multiples.

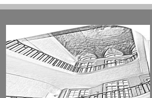


Rapport du jury : Les multiplicités n'ont été étudiées que dans la moitié des copies. Les autres se contentent de construire les racines données par le théorème de Rolle.

Pour moi, c'est là qu'on détecte le matheux (et physicien) : j'applique le théorème de Rolle, je trouve des racines pour P'.
Et qu'on détecte le vrai matheux : oui, mais si il y a des racines multiples, je fais quoi ?
Et le grand pro : je compte en rajoutant ce qu'il faut comme racines à P'.

On a prouvé que si P est dans $\mathbb{P}$ alors P' y est aussi.
On applique alors ce résultat à P' et on déduit que P'' y est aussi.

On met le résultat en boucle : P', P'', $P^{(3)}$ et ainsi de suite (les $P^{(k)}$ sont dans $\mathbb{P}$).



Polynômes du second degré. DS02

On suppose que les racines de $a.X^2 + b.X + c$ sont réelles.
Avec le cours de Terminale et de Sup : $b^2 - 4.a.c$ (noté Δ) est positif ou nul.

On étudie alors $3.a.X^2 + 2.b.X + c$. On calcule son discriminant $\Delta' = 4.b^2 - 12.a.c$.
Est il positif ? Le terme gênant est $12.a.c$ avec son signe moins. Je l'écris $3.(4.a.c)$.

On a alors $\Delta' = 4.b^2 - 3.(b^2 - \Delta) = 3.\Delta + b^2$ (bon, $4.b^2 - 12.a.c = b^2 + 3.(b^2 - 4.a.c)$ c'est évident).
Comme Δ et b^2 sont positifs, le nouveau discriminant est positif.
Les deux racines sont réelles.

Doit on traiter à part le cas $a = 0$ pour lequel la théorie du discriminant s'efface ?
Normalement oui. Il faut penser à tout, c'est ça la démarche des maths.
Mais dans le cas $a = 0$, les polynômes sont de degré 1. Il n'y a qu'une racine (oui, bon, je laisse à part $b = c = 0$) et elle est réelle, qu'il s'agisse de $b.X + c$ ou de $2.b.X + c$.

Mais la réciproque.
La question est « peut on passer de $4.b^2 - 12.a.c \geqslant 0$ à $b^2 - 4.a.c \geqslant 0$.
Mais voilà, l'hypothèse dit $b^2 + 3.(b^2 - 4.a.c) \geqslant 0$.
Et si b^2 est assez grand, $b^2 - 4.a.c$ peut être négatif.

On va donc construire un contre-exemple à partir de cette idée.
On va prendre $b^2 = 4$ et $b^2 - 4.a.c = -1$.
On choisit donc $b = 2$ et $a = 1$ et $c = 5/4$.
On constate alors

$X^2 + 2.X + 5/4$	$\Delta = -1$	pas de racine réelle
$3.X^2 + 4.X + 5/4$	$\Delta = 1$	deux racines réelles $-1/2$ et $-5/6$

Résumé : $(a.X^2 + b.X + c \in \mathbb{P}) \Rightarrow (3.a.X^2 + 2.b.X + c \in \mathbb{P})$ mais $(3.a.X^2 + 2.b.X + c \in \mathbb{P}) \not\Rightarrow (a.X^2 + b.X + c \in \mathbb{P})$.

Renversement de polynôme. DS02

On part de « les racines de $X^3 - S.X^2 + D.X - P$ est dans $\mathbb{P}$ ». On traduit : ses quatre racines sont réelles.

Que dire du polynôme $P.X^3 - D.X^2 + S.X - 1$? Qu'il est aussi de degré 3 et qu'il a trois racines.
L'une est réelle (valeurs intermédiaires). Mais que dire des deux autres ?

On traite à part le cas $P = 0$ qui conduit à un polynôme de degré seulement 2 voire moins.

Si on regarde la suite

Suites unimodales et log-concanves. DS02

Qu'est ce qu'une suite uni modale ? C'est une suite d'abord croissante puis décroissante.

Elle est croissante jusqu'au rang j puisque $(k < j) \Rightarrow (a_k \leqslant a_{k+1})$,
puis décroissante au delà de ce rang.

Conséquence : une suite unimodulaire est majorée par son plus grand terme, là où elle change de sens de variation.

Proprement. On prend une suite unimodulaire, qu'on note (a_n).
On sait qu'il existe un indice j vérifiant une certaine propriété. On montre alors que tous les termes de la suite sont plus petits que a_j.
Soit en effet un indice k quelconque (plus petit que le nombre de termes de la suite si celui ci est fini).
On a alors deux possibilités (disjonction de cas).
k est plus petit que j : $a_k \leqslant a_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant a_{j-1} \leqslant a_j$
k est plus grand que j : $a_j \geqslant a_{j+1} \geqslant \ldots \geqslant a_{k-1} \geqslant a_k$.
On a donc $\forall k,\ a_k \leqslant a_j$. C'est bon.

Pour tester si une suite est unimodulaire, on va regarder ses termes les uns après les autres et obéir à la contrainte.
Le test `a[k]**2 < a[k-1]*a[k+1]` correspond au critère de « non log-concavité ». Il doit donc retourner une erreur.

Mais quelles valeurs peut prendre `k` ? Il ne peut pas commencer à `0`, mais à `1`, sinon l'élément `a[0-1]` est étrange (il existe mais ne correspondant pas à ce qu'on doit tester).
Et où s'arrête `k` ? Qui est ce n du programme proposé ? L'indice du dernier terme de la suite c'est à dire len(L).

Sauf qu'il n'y a pas de terme d'indice **n** . Et même si le dernier **k** testé est **len(L)-1**, on ne doit pas regarder **a[len(L)-1+1]**. On s'arrêtera donc un temps plus tôt.
On attend donc un **range(1, len(L)-1)**.

```
def log_concave(a) : #list of float -> boolean
....n = len(a)
....for k in range(1,n-1) :
........if a[k]**2 < a[k-1]*a[k+1] :
............return False
....return True
```

Attention, la proposition

```
def log_concave(a) : #list of float -> boolean
....n = len(a)+1
....for k in range(n) :
........if a[k]**2 < a[k-1]*a[k+1] :
............return False
........else :
............return True
```

est une erreur. En effet, dès le premier test (**k=1**), on retourne **True** ou **False**, sans même tester les suivants.
Ce qu'il faut, c'est « si il y a une erreur détectée, on sort tout de suite (pas la peine de vérifier si on s'est trompé plusieurs fois, une erreur suffit) » et « si on est allé jusqu'au bout sans erreur alors c'est bon on répond **True** ».

On se donne un réel α et on définit une suite (a_n), géométrique de raison α. Son terme général est donc $a_n = a_0.\alpha^n$ (le réel a_0 n'aura aucun rôle, même si ce n'est pas une évidence).
On veut $(a_0.\alpha^n)^2 \geqslant (a_0.\alpha^{n-1}).(a_0.\alpha^{n+1})$ pour tout n.
Or, ceci est toujours vrai (il y a égalité, donc inégalité).
Toutes les suites géométriques sont log-concaves. Et pour répondre à la question de l'énoncé $\boxed{S_\alpha = \mathbb{R}}$

Irai-je jusqu'à dire que les suites géométriques sont log-constantes ?

On part maintenant d'une suite log-concave (u_k). On traduit pour tout k : $(u_k)^2 \geqslant u_{k-1}.u_{k+1}$.
On multiplie la suite par son index. Le terme général devient $k.u_k$.
On se donne un entier k et on doit prouver $(k.u_k)^2 \geqslant (k-1).u_{k-1}.(k+1).u_{k+1}$.
On sent qu'il va y avoir un $k^2 \geqslant k^2 - 1 = (k-1).(k+1)$.
Mais on calcule une différence, c'est tout

$$(k.u_k)^2 - (k-1).u_{k-1}.(k+1).u_{k+1} = k^2.(u_k)^2 - (k^2-1).u_{k-1}.u_k$$

Si on l'écrit $k^2.((u_k)^2 - u_{k-1}.u_{k+1}) + u_{k-1}.u_{k+1}$ on est embêté car on ignore le signe de $u_{k-1}.u_{k+1}$.

Je m'attends à des raisonnements faux multipliant par $u_{k-1}.u_{k+1}$ la relation $k^2 \geqslant k^2 - 1$ alors même qu'on ignore le signe de $u_{k-1}.u_{k+1}$.

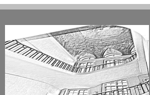
On factorise mieux :

$$(k.u_k)^2 - (k-1).u_{k-1}.(k+1).u_{k+1} = (k^2-1).((u_k)^2 - u_{k-1}.u_k) + (u_k)^2$$

Le produit $(k^2-1).((u_k)^2 - u_{k-1}.u_k)$ est fait de deux termes positifs. Le carré ajouté est positif, la différence $(k.u_k)^2 - (k-1).u_{k-1}.(k+1).u_{k+1}$ est positive.

On a donc prouvé (u_k) est log-convexe implique $(k.u_k)$ est log-convexe.

Rien ne dit que la réciproque soit vraie, d'ailleurs, la question n'est pas posée.



Suite binomiale : elle est log-concave et unimodulaire. DS02

La suite des coefficients le long d'une ligne du triangle de Pascal est bien croissante puis décroissante

1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

On fixe n. On étudie les variations de $k \longmapsto \binom{n}{k}$ en étudiant la différence

$$\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k-1)!.(k+1)!} - \frac{n!}{(n-k)!.k!}$$

Allez, quel est le dénominateur commun ? Si vous y tenez et ne réfléchissez pas : $(n-k-1)!.(k+1)!.(n-k)!.k!$. Mais quand même : $(k+1)! = k!.(k+1)$ et $(n-k)! = (n-k-1)!.(n-k)$. C'est visible non ? C'est la factorielle qui fait ça.

$$\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k-1)!.(k+1)!} - \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \frac{(n-k).n!}{(n-k)!.(k+1)!} - \frac{n!.(k+1)}{(n-k)!.(k+1)!}$$

On factorise et on cherche le signe

$$\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.(k+1)!}.\Big((n-k)-(k+1)\Big)$$

Le signe est donné par $n - 2.k - 1$.

Pour k de 0 à $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ la suite $k \longmapsto \binom{n}{k}$ est croissante.
Pour k de $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ à n la suite $k \longmapsto \binom{n}{k}$ est décroissante.

Pour la log-concavité, n est fixé, et on se donne$k$ entre 1 et $n-1$ pour que les trois termes existent.
On doit comparer $\binom{n}{k}^2$ et $\binom{n}{k-1}.\binom{n}{k+1}$.
On va calculer la différence et factoriser tout ce qu'on peut

$$\binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k+1}.\binom{n}{k-1} = \frac{(n!)^2}{(k!)^2.((n-k)!)^2} - \frac{n!}{(k+1)!.(n-k-1)!}.\frac{n!}{(k-1)!.(n-k+1)!}$$

$$\binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k+1}.\binom{n}{k-1} = \frac{(n!)^2}{k!.(n-k)!.k!.(n-k)!}.\Big(1 - \frac{(n-k)}{(k+1)}.\frac{k}{(n-k+1)}\Big)$$

$$\binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k+1}.\binom{n}{k-1} = \frac{(n!)^2}{(k!)^2.((n-k!)^2}.\Big(\frac{(n-k+1).(k+1)-(n-k).k}{(n-k+1).(k+1)}\Big)$$

$$\binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k+1}.\binom{n}{k-1} = \frac{(n!)^2}{(k!)^2.((n-k!)^2}.\Big(\frac{n+1}{(n-k+1).(k+1)}\Big)$$

Cette différence est positive, c'est bon !

D'autres chemins sont possibles, comme le calcul du quotient :

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}.\binom{n}{k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!.(n-k)!}.\frac{n!}{k!.(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!.(n-k+1)!}.\frac{n!}{(k+1)!.(n-k-1)!}}$$

$$= \frac{(k-1)!.(n-k+1)!.(k+1)!.(n-k-1)!}{k!.(n-k)!.k!.(n-k)!} = \frac{1}{k}.\frac{(n-k+1)}{1}.\frac{k+1}{1}.\frac{1}{(n-k)}$$

et il ne reste qu'à comparer à 1. C'est la même chose, mais c'est moins lourd.

On peut aussi remplacer $\binom{n}{k}$ par $\binom{n}{k-1}.\dfrac{n-k}{k}$ par des formules de dénombrement que vous connaissez peut être.
Ce qu'il ne faut pas faire en tout cas : tenter une récurrence (et sur qui d'ailleurs ? Sur n ou sur k ?).

De log-concave à concave. DS02

On prend une suite finie de n termes qu'on suppose ultra-log-concave. Il faut montrer qu'elle est log-concave.

a_0	a_1	a_2	...	a_{k-1}	a_k	a_{K+1}	...	a_n
1	n	$\dfrac{n.(n-1)}{2}$	...	$\binom{n}{k-1}$	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$	...	1

On écrit l'hypothèse (pour tout k) :

$$\Big(\frac{a_k.k!.(n-k)!}{n!}\Big)^2 \geqslant \Big(\frac{a_{k-1}.(k-1)!.(n-k+1)!}{n!}\Big).\Big(\frac{a_{k+1}.(k+1)!.(n-k-1)!}{n!}\Big)$$

On garde à l'esprit notre objectif pour tout k : $(a_k)^2 \geqslant a_{k-1}.a_{k+1}$.
Simplifions quand même notre hypothèse (par $(n!)^2$ puis par $(k-1)!$) :

$$\Big(a_k\Big)^2.\Big(k!.(n-k)!.k!.(n-k)!\Big) \geqslant \Big(a_{k-1}.(k-1)!.(n-k+1)!\Big).\Big(a_{k+1}.(k+1)!.(n-k-1)!\Big)$$

$$\Big(a_k\Big)^2.\Big(k!.(n-k)!.(n-k)!\Big) \geqslant \Big(a_{k-1}.(k-1)!.(n-k+1)!\Big).\Big(a_{k+1}.(k+1).(n-k-1)!\Big)$$

Simplifions ensuite par $(k-1)!$ et aussi $(n-k-1)!$ et $(n-k)!$, tous positifs, ce qui ne change pas le sens des inégalités

$$\Big(a_k\Big)^2.\Big(k.1.(n-k)\Big) \geqslant \Big(a_{k-1}.1.(n-k+1)\Big).\Big(a_{k+1}.(k+1).1\Big)$$

A ce stade, on a obtenu $(a_k)^2 \geqslant \dfrac{(n-k+1).(k+1)}{k.(n-k)}.a_{k-1}.a_{k+1}$.
Et si on redisait : $\dfrac{(n-k+1).(k+1)}{k.(n-k)} \geqslant 1$ par calcul de la différence $\dfrac{(n-k+1).(k+1)}{k.(n-k)} - 1 = \dfrac{n+1}{k.(n-k)}$?
L'hypothèse d'ultra log-concavité donne (le facteur $a_{k-1}.a_{k+1}$ est positif, l'inégalité $\dfrac{(n-k+1).(k+1)}{k.(n-k)} \geqslant 1$ ne change pas de sens) :

$$(a_k)^2 \geqslant \frac{(n-k+1).(k+1)}{k.(n-k)}.a_{k-1}.a_{k+1} \geqslant 1.a_{k-1}.a_{k+1}$$

pour tout k . Et c'est la log-concavité simple.

Formules de Viète pour le degré 3. DS02

Évidemment la quantité $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ est positive en tant que somme de carrés de réels.

Mais si on étudie ceci c'est sans doutes parce qu'il y a un lien avec la suite.
Calculons $S^2 - 3.D$ pour voir si cette différence est bien positive.

$$S^2 - 3.D = (a+b+c)^2 - 3.(a.b+b.c+c.a) = (a^2+b^2+c^2+2.a.b.2.a.c+2.a.d) - 3.(a.b+b.c+c.a)$$

$$S^2 - 3.D = a^2+b^2+c^2 - (a.b+b.c+c.a)$$

Et là, on prend le temps de revenir au premier calcul :

$$0 \leqslant (a-b)^2 + (b-)^2(c-a)^2 = (a^2 - 2.a.b + b^2) + (b^2 - 2.b.c + c^2) + (c^2 - 2.c.a + c^2)$$

$$0 \leqslant (a-b)^2 + (b-)^2(c-a)^2 = (2.a^2 + 2.b^2 + 2.c^2 - 2.a.b - 2.b.c - 2.c.a)$$

La positivité de cette chose répond exactement à la question osée.

On est moins aidé pour $D^2 \geqslant 3.S.P$.
On calcule quand même

$$D^2 - 3.S.P = (a.b + a.c + b.c)^2 - 3.(a+b+c).(a.b.c) = a^2.b^2 + a^2.c^2 + b^2.c^2 + 2.a^2.b.c + 2.a.b^2.c + 2.a.b.c^2 - 3.(a+b+c).a.b.c$$

$$D^2 - 3.S.P = a^2.b^2 + a^2.c^2 + b^2.c^2 - .a^2.b.c - .a.b^2.c - 2.a.b.c^2$$

Et cette fois, on reconnaît $\dfrac{(a.b - a.c)^2 + (a.c - c.b)^2 + (c.b - b.a)^2}{2}$.

Oui, j'avoue, c'est moins évident. Mais sinon, c'est le résultat précédent applique à $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{c}$:
En effet $(S')^2 \geqslant 3.D'$ pour les inverses donne

$$\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big)^2 \geqslant 3.\Big(\frac{1}{a}.\frac{1}{b} + \frac{1}{b}.\frac{1}{c} + \frac{1}{c}.\frac{1}{a}\Big)$$

et en revenant aux notations S, D et P pour les trois racines :

$$\frac{D^2}{P^2} = \Big(\frac{b.c + c.a + a.b}{a.b.c}\Big)^2 = \Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big)^2 \geqslant 3.\frac{a+b+c}{a.b.c} = 3.\frac{S}{P}$$

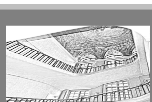
On prend un polynôme $a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + a_3.X^3$ qu'on suppose être dans $\mathbb{P}$. Il a donc trois racines a, b et c et on peut écrire les formules de Viète $a + b + c = -\dfrac{a_2}{a_3}$,$D = \dfrac{a_1}{a_3}$et $P = -\dfrac{a_0}{a_3}$.

On veut étudier l'ultra-log-concavité de la suite :

coefficient	a_0	a_1	a_2	a_3
binomial	1	3	3	1
quotient	a_0	$a_1/3$	$a_2/3$	a_3
test à faire		$\Big(\frac{a_1}{3}\Big)^2 \geqslant \big(a_0.\frac{a_2}{3}\big)$	$\Big(\frac{a_2}{3}\Big)^2 \geqslant \big(\frac{a_1}{3}.a_3\big)$	

Or, le test $\Big(\frac{a_1}{3}\Big)^2 \geqslant \big(a_0.\frac{a_2}{3}\big)$ se ramène à $\Big(\frac{a_3.D}{3}\Big)^2 \geqslant \big(-a_3.P.\frac{-a_3.S}{3}\big)$ c'est à dire $\frac{D^2}{9} \geqslant \frac{P.S}{3}$. Déjà prouvé.
Le second test $\Big(\frac{a_2}{3}\Big)^2 \geqslant \big(\frac{a_1}{3}.a_3\big)$ se ramène à $\Big(\frac{a_0.S}{3}\Big)^2 \geqslant -\frac{a_3.D}{3}.(-a_3)$ c'est à dire $S^2 \geqslant 3.D$. Déjà prouvé.

Il suffit de bien regarder ce qu'on doit prouver. Juste avec les relations coefficients racines.



Formules de Viète pour le degré 4 et ultra-log-concavité. DS02

Le polynôme $a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + a_3.X^3 + a_4.X^4$ va avoir cette fois quatre racines a, b, c et d.
On écrira les relations coefficients racines et on testera l'ultra-log-concavité

coefficient	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
binomial	1	4	6	4	1
quotient	a_4	$\frac{a_3}{4} = -\frac{S.a_4}{4}$	$\frac{a_2}{6} = \frac{D.a_4}{6}$	$\frac{a_1}{4} = -\frac{T.a_4}{4}$	$a_0 = P.a_4$
test à faire		$\Big(-\frac{a_4.S}{4}\Big)^2 \geqslant a_4.\frac{D.a_4}{6}$	$\Big(\frac{a_4.D}{6}\Big)^2 \geqslant \frac{-a_4.S}{4}.\frac{-a_4.T}{4}$	$\Big(-\frac{a_4.T}{4}\Big)^2 \geqslant \frac{D.a_4}{6}.P.a_4$	

On a donc trois tests à faire (`range(1, 4)`) : $3.S^2 \geqslant 8.D$, $4.D^2 \geqslant 9.S.T$ et enfin $3.T^2 \geqslant 8.D.P$. On dirait bien que ce sont celles que l'énoncé demande.

Calculons comme demandé

$$3.S^2 - 8.D = 3.(a+b+c+d)^2 - 8.D = 3.(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2.D) - 8.D = 3.(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2.D$$

Comment prouver que cette différence est positive ?
Calculons comme par hasard

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2=(a^2-2.a.b+b^2)+\dots$$

On a douze carrés, à regrouper trois à trois. Et les double produits.

$(a-b)^2=$	a^2	$+b^2$			$-2.a.b$					
$(a-c)^2=$	a^2		$+c^2$			$-2.a.c$				
$(a-d)^2=$	a^2			$+d^2$			$-2.a.d$			
$(b-c)^2=$		b^2	$+c^2$					$-2.b.c$		
$(b-d)^2=$		b^2		$+d^2$					$-2.b.d$	
$(c-d)^2=$			c^2	$+d^2$						$-2.c.d$

On a bien

$$0\leqslant(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2=3.(a^2+b^2+c^2+d^2)-2.D=3.S^2-8.D$$

C'est une des trois formules attendues.

On applique ce résultat aux inverses des racines : $3.(S')^2-8.D'\geqslant 0$.

$$3.\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\Big)^2\geqslant 8.\Big(\frac{1}{a}.\frac{1}{b}+\frac{1}{a}.\frac{1}{c}+\frac{1}{a}.\frac{1}{d}+\frac{1}{b}.\frac{1}{c}+\frac{1}{b}.\frac{1}{d}+\frac{1}{c}.\frac{1}{d}\Big)$$

On reconnaît $3.\Big(\dfrac{T}{P}\Big)^2\geqslant 8.\dfrac{D}{P}$ puis $3.T^2\geqslant 8.D.P$. Trop fort, c'est la troisième.
Et sans effort !

Il nous manque quand même celle du milieu : $4.D^2\geqslant 9.S.T$ (formule homogène effectivement).
On calcule la différence $4.(a.b+a.c+a.d+b.c+b.d+c.d)^2-9.(a+b+c+d).(b.c.d+a.c.d+a.b.d+a.b.c)$.
Les développement de $(a.b+a.c+a.d+b.c+b.d+c.d)^2$ donne six termes comme $(a.b)^2$
Des double produits totalement panachés comme $(a.b).(c.d)$ (il y en a trois en fonction de qui était marié avec a par exemple).
Des double produits mal équilibrés comme $(a.b).(a.c)$ (il y en a

	$a.b$	$a.c$	$a.d$	$b.c$	$b.d$	$c.d$
$a.b$	$(a.b)^2$	$a^2.b.c$	$a^2.b.d$	$a.b^2.c$	$a.b^2.d$	$a.b.c.d$
$a.c$	$a^2.b.c$	$(a.c)^2$	$a^2.c.d$	$a.b.c^2$	$a.b.c.d$	$a.c^2.d$
$a.d$	$a^2.b.d$	$a^2.c.d$	$(a.d)^2$	$a.b.c.d$	$a.b.d^2$	$a.c.d^2$
$b.c$	$a.b^2.c$	$a.b.c^2$	$a.b.c.d$	$(b.c)^2$	$b^2.c.d$	$b.c^2.d$
$b.d$	$a.b^2.d$	$a.b.c.d$	$a.b.d^2$	$a.b^2.d$	$(b.d)^2$	$b.c.d^2$
$c.d$	$a.b.c.d$	$a.c^2.d$	$a.c.d^2$	$b.c^2.d$	$b.c.d^2$	$(c.d)^2$

à multiplier par 4

et

	$b.c.d$	$a.c.d$	$a.b.d$	$a.b.c$
a	$a.b.c.d$	$a^2.c.d$	$a^2.b.d$	$a^2.b.c$
b	$b^2.c.d$	$a.b.c.d$	$a.b^2.d$	$a.b^2.c$
c	$b.c^2.d$	$a.c^2.d$	$a.b.c.d$	$a.b.c^2$
d	$b.c.d^2$	$a.c.d^2$	$a.b.d^2$	$a.b.c.d$

à multiplier par 9

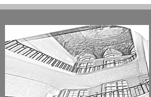
On soustrait et il reste $4.((a.b)^2+(a.c)^2+(a.d)^2+(b.c)^2+(b.d)^2+(c.d)^2)$
mais aussi $-(a^2.b.c+a^2.c.d+a^2.b.d+b^2.a.c+b^2.a.d+b^2.c.d+c^2.a.b+c^2.a.d+c^2.b.d+d^2.a.b+d^2.a.c+d^2.b.c)$
et enfin $-12.a.b.c.d$.

Que faire de ceci ? Comment montrer que c'est positif ?

J'ai envie de développer ce qui suit :

$(a.b-a.c)^2$	$(a.b-a.d)^2$	$(a.b-b.c)^2$	$(a.b-b.d)^2$	$(a.b-c.d)^2$
	$(a.c-a.d)^2$	$(a.c-b.c)^2$	$(a.c-b.d)^2$	$(a.c-c.d)^2$
		$(a.d-b.c)^2$	$(a.d-b.d)^2$	$(a.d-c.d)^2$
			$(b.c-b.d)^2$	$(b.c-c.d)^2$
				$(b.d-c.d)^2$

Mais ça ne permet pas de conclure.
Je continue à chercher et me demande si j'aurais dû poser cette question.



Condition nécessaire sur les coefficients de P. DS02

Si P est un polynôme de degré n, alors ses dérivées successives sont des polynômes.
Et $P^{(k-1)}(X)$ est de degré $n-(k-1)$.

On peut même donner son terme dominant $n.(n-1)\ldots(n-k+2).a_n.X^{n-(k-1)}$.

En tant que dérivée d'un élément de $\mathbb{P}$, il est dans $\mathbb{P}$ (partie « dérivation »).

Il est de degré $n-k+1$. La transformation de $Q(X)$ en $X^{n-k+1}.Q\Big(\dfrac{1}{X}\Big)$ redonne bien un polynôme, et ce polynôme est dans $\mathbb{P}$ (partie « renversement »).

Le polynôme $Q_2(X)$ a gardé le même degré et peut même avoir perdu un ou deux degrés comme déjà mentionné.

On le dérivé $n-k-1$ fois. On a toujours un polynôme, et on reste dans $\mathbb{P}$ (partie « dérivation »).

A ce stade, on a donc un élément de $\mathbb{P}$, de degré $(n-k+1)-(n-k-1)$ ou même moins.

Application numérique : $\big(n-(k-1)\big)-(n-k-1)=2$.

$Q_2(X)$ est au maximum de degré 2 et est dans $\mathbb{P}$. Son discriminant est donc positif.

On traite donc un exemple avec $n=5$ et $k=3$.
On part de $a_0+a_1.X+a_2.X^2+a_3.X^3+a_4.X^4+a_5.X^5$.
On le dérive deux fois : $Q_1(X)=0+0+2.a_2+6.a_3.X+12.a_4.X^2+20.a_5.X^3$.
On calcule $X^3.Q_1\Big(\dfrac{1}{X}\Big)=X^3.\Big(2.a_2+6.a_3.\dfrac{1}{X}+12.a_4.\dfrac{1}{X^2}+20.a_5.\dfrac{1}{X^3}\Big)=2.a_2.X^3+6.a_3.X^2+12.a_4.X+20.a_5)$.
On dérive $5-3-1$ fois : $\boxed{Q_2(X)=6.a_2.X^2+12.a_3.X+12.a_4}$

Comme ce polynôme est dans $\mathbb{P}$, son discriminant est positif ou nul. mais je l'écris déjà $6.(a_2+2.a_3.X+2.a_4.X^2)$.
On a donc $4.(a_3)^2-8.a_2.a_4\geqslant 0$.

Et pour l'ultra log-concavité de la suite $(a_j)_{j\leqslant 5}$? Quel rapport avec ce qu'on a prouvé ?

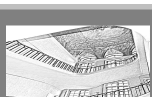
Regardons

coefficient	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
binomial	1	5	10	10	5	1
quotient	a_0	$\dfrac{a_1}{5}$	$\dfrac{a_2}{10}$	$\dfrac{a_3}{10}$	$\dfrac{a_4}{5}$	1
à prouver	$\Big(\dfrac{a_1}{5}\Big)^2\geqslant a_0.\dfrac{a_2}{10}$ $\Big(\dfrac{a_2}{10}\Big)^2\geqslant\dfrac{a_1}{5}.\dfrac{a_3}{5}$ $\Big(\dfrac{a_3}{10}\Big)^2\geqslant\dfrac{a_2}{10}.\dfrac{a_4}{5}$ $\star$ $\Big(\dfrac{a_4}{5}\Big)^2\geqslant\dfrac{a_3}{10}.a_5$					

On reconnaît qu'on a prouvé le résultat de la ligne $*$.
Il faut prouver les autres.
On se doute qu'il va s'agir de travailler pour d'autres valeurs de k.

	$Q_1(X)$	$Q_2(X)$	$Q(X)$	$\Delta\geqslant 0$
$k=1$	$a_0+a_1.X+\ldots+a_4.X^4+a_5.X^5$	$a_0.X^5+a_1.X^4+\ldots+a_4.X+a_5$	$60.a_0.X^2+24.a_1.X+6.a_2$	$16.(a_1)^2-40.a_0.a_2\geqslant 0$
$k=2$	$a_1+2.a_2.X+\ldots+4.a_4.X^3+5.a_5.X^4$	$a_1.X^4+2.a_2.X^3+\ldots+4.a_4.X+5.a_5$	$12.a_1.X^2+12.a_2.X+6.a_3$	$4.(a_2)^2-8.a_1.a_3\geqslant 0$
$k=3$	$2.a_2+6.a_3.X+12.a_4.X^2+20.a_5.X^3$	$2.a_2.X^3+6.a_3.X^2+12.a_4.X+20.a_5$	$6.a_2.X^2+12.a_3.X+12.a_4$	$4.(a_3)^2-8.a_2.a_4\geqslant 0$
$k=4$	$6.a_3+24.a_4.X+60.a_5.X^2$	$6.a_3.X^2+24.a_4.X+60.a_5$	$6.a_3.X^2+24.a_4.X+60.a_5$	$16.(a_4)^2-40.a_3.a_5\geqslant 0$

Chacune de ces lignes correspond à une inégalité à prouver. Trop fort !



Cas général. DS02

On part de $P(X)$ de la forme $\sum\limits_{j=0}^{n}a_j.X^j$ et on la dérive k fois.

Il suffit de dériver chaque X^j k fois. La formule est dans le cours : $(x \longmapsto x^j)^{(k)} = (x \longmapsto \dfrac{j!}{(j-k)}.x^{j-k})$.

Le facteur $\dfrac{j!}{(j-k)!}$ *est en fait* $j.(j-1)\dots(j-k+1)$ *formé de* k *facteurs descendants. On l'écrit aussi* $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(j-i)$.

On ne garde évidemment que les termes qui n'ont pas disparu après k dérivation : $P^{(k)}(X) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \dfrac{j!}{(j-k)!}.X^{j-k}$.

Mais il ne faut dériver que $k-1$ fois :

$$Q_1(X) = \sum_{j=k-1}^{n} \frac{j!}{(j-k+1)!}.X^{j-k+1}$$

On remplace X par $\dfrac{1}{X}$: $Q_1\Big(\dfrac{1}{X}\Big) = \displaystyle\sum_{j=k-1}^{n} \dfrac{j!}{(j-k+1)!}.X^{k-j-1}$.

On multiplie par X^{n-k+1} :

$$Q_2(X) = X^{n-k+1}.Q_1(X) = \sum_{j=k-1}^{n} \frac{j!}{(j-k+1)!}.X^{n-j}$$

On peut ré-indexer si on y tient avec $p = n-j$

$$Q_2(X) = \sum_{p=0}^{n-k+1} \frac{(n-p)!}{(n-p-k+1)!}.X^p$$

et on confirme le degré obtenu avant l'étude de l'exemple.

On dérive maintenant $n-k-1$ fois. Les termes de degré inférieur à $n-k-1$ disparaissent. Il ne reste donc que trois termes : $p = n-k+1$, $p = n-k$ et $p = n-k-1$ (c'est aussi $j = k-1$, $j = k$ et $j = k+1$.
On utilise encore la formule pour la dérivée $(n-k-1)^{eme}$ d'un monôme X^p :

$$Q(X) = (Q_2)^{(n-k-1)}(X) = \sum_{j=k-1}^{k+1} \frac{j!}{(j-k+1)!}.(X^{n-j})^{(n-k-1)}$$

$$Q(X) = \sum_{j=k-1}^{k+1} \frac{j!}{(j-k+1)!}.\frac{(n-j)!}{((n-j)-(n-k-1))!}.X^{n-j-(n-k-1)}$$

On a « simplement » $Q(X) = \displaystyle\sum_{j=k-1}^{k+1} \dfrac{j!}{(j-k+1)!}.\dfrac{(n-j)!}{(k-j+1)!}.X^{k-j+1}$.

Et comme il n'y a que trois termes

$j=k-1$	$j=k$	$j=k+1$
$\dfrac{(k-1)!}{0!}.\dfrac{(n-k+1)!}{2!}.a_{k-1}.X^2$	$\dfrac{k!}{1!}.\dfrac{(n-k)!}{1!}.a_k.X$	$\dfrac{(k+1)!}{2!}.\dfrac{(n-k-1)!}{0!}.a_{k+1}$

On peut encadrer :

$$\boxed{Q(X) = \frac{(k-1)!.(n-k+1)!.a_{k-1}}{2}.X^2 + k!.(n-k)!.a_k.X + \frac{(k+1)!.(n-k-1)!.a_{k+1}}{2}}$$

C'est bien un polynôme de degré 2 *(voire moins si* a_{k+1} *est nul).*

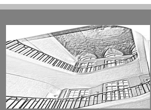
Mais on a montré qu'il était dans $\mathbb{P}$. C'est donc que son discriminant est positif ou nul.

$$0 \leqslant \Delta = (k!.(n-k)!.a_k)^2 - 4.\frac{(k-1)!.(n-k+1)!.a_{k+1}}{2}.\frac{(k+1)!.(n-k-1)!.a_{k+1}}{2}$$

On efface un facteur 4 et il reste $(k!.(n-k)!.a_k)^2 \geqslant (k-1)!.(n-(k-1))!.a_{k-1}.(k+1)!.(n-(k+1))!.a_{k+1}$.
Quitte à diviser par $(n!)^2$ et à écrire $\dfrac{\alpha.\beta}{n!} = \dfrac{\beta}{\dfrac{n!}{\alpha}}$ on aboutit à

$$\frac{(a_k)^2}{\Big(\dfrac{n!}{k!.(n-k)!}\Big)^2} \geqslant (\frac{a_{k-1}}{\dfrac{n!}{(k-1)!.(n-(k-1))!}}.\frac{a_{k+1}}{\dfrac{n!}{(k+1)!.(n-(k+1))!}}$$

et c'est l'ultra-log-concavité de la suite des coefficients du polynôme au rang .
Ce résultat est vrai pour tout k, on a bien l'ultra-log-concavité de la suite $(a_0, \ldots a_n)$.



Polynômes de Tchebitchev (ce sont eux) avec des cosinus. DS02

On calcule les premiers avec la formule $T_{n+1}(X) = 2.X.T_n(X) - T_{n-1}(X)$. En particulier : $P_2(X) = 2.X.X - 1$ puis $P_3(X) = 2.X.(2.X^2 - 1) - X$ et ainsi de suite.

On a la forme explicite des polynômes, pas si moches :

$T_0(X) = 1$
$T_1(X) = X$
$T_2(X) = 2.X^2 - 1$
$T_3(X) = 4.X^3 - 3.X$
$T_4(X) = 8.X^4 - 8.X^2 + 1$
$T_5(X) = 16.X^5 - 20.X^3 + 5.X$

On en veut les racines ? C'est facile pour les premiers. Pour le troisième, 0 est racine, et on a les deux autres.
Pour le polynôme de degré 4, on commence par trouver x^2 si x est racine : $8.(x^2)^2 - 8.x^2 + 1 = 0$. On passe ensuite aux racines.
On fait de même pour celui de degré 5 une fois isolée la racine 0.

$T_0(X) = 1$	aucune				
$T_1(X) = X$			0		
$T_2(X) = 2.X^2 - 1$		$-\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$	
$T_3(X) = 4.X^3 - 3.X$		$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	
$T_4(X) = 8.X^4 - 8.X^2 + 1$	$-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$		$\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
$T_5(X) = 16.X^5 - 20.X^3 + 5.X$	$-\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2.\sqrt{2}}$	$-\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	0	$\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2.\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

Toutes les racines trouvées sont réelles, ces polynômes sont dans $\mathbb{P}$. Y compris le premier puisqu'il n'a pas de racine non réelle. Il n'a pas de racine !

Pour n et θ donnés, la relation $\cos((n+1).\theta)) + \cos((n-1).\theta) = 2.\cos(\theta).\cos(n.\theta)$ vient de la transformation de somme en produit :

$$\cos(p) + \cos(q) = \cos\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\right) + \cos\left(\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}\right) = \cos.\cos - \sin.\sin + \cos.\cos + \sin.\sin = 2.\cos.\cos$$

Ici : $\dfrac{p+q}{2} = \dfrac{(n+1).\theta + (n-1).\theta}{2} = \cos(n.\theta)$ et $\dfrac{p-q}{2} = \dfrac{(n+1).\theta - (n-1).\theta}{2} = \cos(\theta)$.

Cette formule va nous permettre de mener une récurrence forte sur n à θ fixé.

On se fixé θ et pour tout n, on note P_n la propriété $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$.

On initialise avec $\cos(0.\theta) = 1$ et $\cos(1.\theta) = \cos(\theta)$.
Pour faire moins escroc, on rappelle aussi $\cos(2.\theta) = 2.\cos^2(\theta) - 1$.

On se donne n et on suppose les propriétés P_n et P_{n-1} vraies. On a donc $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ et $T_{n-1}(\cos(\theta)) = \cos((n-1).\theta)$.
On a envie de prouver $T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1).\theta)$. Il suffit d'appliquer déjà la définition de T_{n+1}

$$T_{n+1}(\cos(\theta)) = 2.\cos(\theta).T_n(\cos(\theta)) - T_{n-1}(\cos(\theta))$$

en substituant $\cos(\theta)$ à la variable formelle X. Mais avec l'hypothèse de récurrence

$$T_{n+1}(\cos(\theta)) = 2.\cos(\theta).\cos(n.\theta) - \cos((n-1).\theta)$$

On utilise alors la formule démontrée juste avant en toute généralité en faisant passer $\cos((n-1).\theta)$ de l'autre côté :

$$T_{n+1}(\cos(\theta)) = 2.\cos(\theta).\cos(n.\theta) - \cos((n-1).\theta) = \cos((n+1).\theta)$$

On a bien prouvé $(P_0 \textit{ et } P_1) \textit{ et } (\forall n,\ (P_{n-1} \textit{ et } P_n) \Rightarrow (P_{n+1}))$, la propriété est vraie pour tout n.

Les deux premiers $T_n(X)$ sont des polynômes.
Si pour un rang n donné quelconque $T_n(X)$ et $T_{n-1}(X)$ sont des polynômes, alors par construction (produit, somme de polynômes) $T_{n+1}(X)$ est aussi un polynôme.

Et pour le degré ? $T_1(X)$ est de degré 1 et $T_2(X)$ est de degré 2.
Supposons pour un n quelconque donné que $T_n(X)$ est de degré n et $T_{n-1}(X)$ est de degré $n-1$.
Alors par multiplication simple $2.X.T_n(X)$ est de degré $n+1$.
On lui soustrait un polynôme de degré strictement plus petit, on garde un polynôme de degré $n+1$.
Par récurrence à double hérédité, chaque $T_n(X)$ est de degré n (même mT_0 (X) tiens !).

Appartenance des $T_n(X)$ à $\mathbb{P}$. DS02

Ayant $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ on peut l'appliquer à un cas particulier

$$T_n\Big(\cos\Big(\frac{2.k+1}{2.n}.\theta\Big)\Big) = \cos\Big(n.\frac{2.k+1}{2.n}.\theta\Big) = \cos\Big(k.\pi + \frac{\pi}{2}\Big) = (-1)^k.\cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0$$

Même si ça ne sert pas vraiment, j'ai utilisé $\cos(k.\pi+\theta) = (-1)^k.\cos(k.\theta)$ qui fait partie du cours. On la démontre en disjonctant les cas : $k == 2.p$ et $k = 2.p+1$).

Chaque réel $\cos\Big(\frac{2.k+1}{2.n}.\pi\Big)$ est une racine de $T_n(X)$.
Cela veut il dire que toutes les racines de $T_n(X)$ sont réelles.
N'allons pas trop vite. Il se pourrait que le polynôme $T_n(X)$ ait d'autres racines que ces nombres.
Et il se pourrait que certains de ces autres racines ne soient pas réelles.
Soyons logique et rigoureux !

Mais voilà, le polynôme $T_n(X)$ a n racines dans $\mathbb{C}$ puisqu'il est de degré n.
Et on en a donné combien ?
Une infinité vont dire ceux qui prennent $\cos\Big(\frac{2.k+1}{2.n}.\pi\Big)$ avec k dans $\mathbb{Z}$ tout entier.
Mais n'abusons pas ! Le cosinus est périodique. Donc on retrouvera plusieurs fois la même valeur.
Alors combien finalement ?
Faisons varier k de 0 à $n-1$.
L'angle $\frac{2.k+1}{2.n}.\pi$ va de $\frac{\pi}{2.n}$ à $\frac{2.n-1}{2.n}.\pi$ en augmentant peu à peu. On reste entre 0 et π.
On a donc n angles tous distincts entre 0 et π.
Ce qui donne n réels distincts (application cosinus strictement décroissante).

On a donc trouvé n racines.
Toutes réelles. Et comme le polynôme est de degré n on a toutes ses racines.

Tous nos T_n(et leurs dérivées et leurs produits) sont dans $\mathbb{P}$.

Une formule en plus sur les $T_n(X)$. DS02

Elle ne sert pas, et elle n'était pas dans le sujet de Mines Ponts.
D'ailleurs, ces polynômes de Tchebychev n'étaient pas dans le sujet de Mines-Ponts. Mais comme ce sont des classiques, je les ai glissés ici.

On veut montrer $T_n(T_p(X)) = T_{n.p}(X)$ (et on aura aussi $T_p(T_n(X)) = T_{p.n}(X)$ par symétrie des rôles, puis par transitivité on a la grande égalité).

Et la clef est de regarder en remplaçant X par $\cos(\theta)$.
Et là c'est une évidence avec la propriété de nos polynômes (une fois avec p et θ et une fois avec n et $p.\theta$)

$$T_n(T_p(\cos(\theta))) = T_n(\cos(p.\theta)) = \cos(n.(p.\theta)) = \cos((n.p).\theta)$$

Mais si on reprend la définition de $T_{n.p}$ on a même

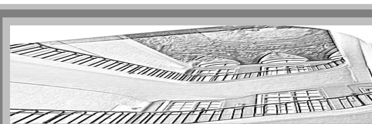
$$T_n(T_p(\cos(\theta))) = T_n(\cos(p.\theta)) = \cos((n.p).\theta) = T_{n.p}(\cos(\theta))$$

La formule $T_p(T_p(X)) = T_{n.p}(X)$ semble vraie. mais seulement pour les X de la forme $\cos(\theta)$.

Est ce une arnaque de passer outre et de dire « donc $T_{n.p}(X) = T_n(T_p(X))$?
Oui, car en fait, on peut dire qu'on ne l'a que pour des X entre -1 et 1 (pardon, on n'a égalité des fonctions polynômes que pur des x entre -1 et 1).

Mais là, on peut avoir recours à une astuce : on étudie la fonction polynôme $x \longmapsto T_n(T_p(x)) - T_{n.p}(x)$ (de degré inférieur ou égal à $n.p$).
Elle est nulle pour tout x de $[-1,\ 1]$ (on l'écrit $x = \cos(\theta)$).
Elle a une infinité de racines. Elle a plus de racines que son degré ! C'est la fonction polynôme nulle.
La différence est nulle, les deux polynômes sont égaux.

LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2023 2024
DS02
65- points