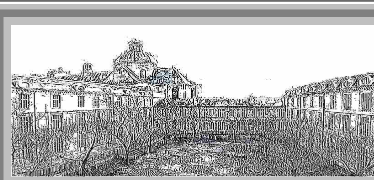
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 15 janvier
M.P.S.I.2



2023 2024

TD15

∘0∘

On va faire de l'arithmétique *(diviseurs, p.g.c.d., Euclide)* sur un ensemble plus gros que $\mathbb{Z}$, contenant $\sqrt{2}$.

I∼0) On commence par redémontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, mais en évitant le raisonnement que tout le monde fait [a].
On pose $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n.\sqrt{2} \in \mathbb{N}\}$. Montrez : $\forall n \in A,\ n.\sqrt{2} - n \in A$. Concluez que A est vide. Concluez pour $\sqrt{2}$.

a. le site CutTheJKnot a référencé trente preuves, pourquoi tout le monde donne la même et fait semblant de croire qu'il faut retenir la même pour tous et pas une autre...

On suppose *(peut être à tort)* que n est dans A.
On regarde alors $\sqrt{2}.n - n$. Comme n est dans A, c'est la différence de deux entiers. C'est un entier.
Il est non nul, puisque $\sqrt{2}$ ne vaut pas 1 et n est non nul.
On le multiplie par $\sqrt{2}$: $\sqrt{2}.(\sqrt{2}.n - n) = 2.n - \sqrt{2}.n$. C'est encore la différence de deux entiers, c'est un entier.
On a bien tout pour dire : $\sqrt{2}.n - n$ est dans A.

Mais ce nouvel entier est strictement plus petit que n *(c'est $(\sqrt{2}-1).n$ avec $\sqrt{2}-1$ plus petit que 1)*.

On est parti pour avoir dans A une suite strictement décroissante d'entiers naturels. C'est étrange.

Plus simplement, on arrive à : « A est vide ».
S'il ne l'était pas, on noterait a son plus petit élément *(toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément)*. Et $\sqrt{2}.a - a$ serait encore dans A, ce qui contredirait la « minimalité » de a.

Il n'existe pas d'entier non nul n vérifiant $n.\sqrt{2} \in \mathbb{N}$.
Il n'existe pas de couple d'entiers non nuls $(n,\ m)$ vérifiant $n.\sqrt{2} = m$.
Il n'existe pas de couple d'entiers non nuls $(n,\ m)$ vérifiant $\dfrac{m}{n} = \sqrt{2}$. C'est bon, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Déduisez que si un réel x s'écrit $a + b.\sqrt{2}$ avec a et b entiers, alors a et b sont uniques.

C'est l'irrationalité de $\sqrt{2}$ qui sert ensuite à garantir l'unicité d'écriture des éléments de E qui sert mine de rien dans la suite.

Vous n'avez peut être pas conscience qu'on en a besoin pour dire « on prend $x = a + b.\sqrt{2}$ on pose $(\!|x|\!) = |a^2 - 2.b^2|$ ».
Il faut en effet qu'on sache pour x donné qui sont a et b. Si un élément pouvait avoir plusieurs écritures $x = a + b.\sqrt{2} = a' + b'.\sqrt{2}$, que poserait on ? $(\!|x|\!) = |a^2 - 2.b^2|$ ou $(\!|x|\!) = |a'^2 - 2.b'^2|$?
Je ne vous en veux pas de n'avoir pas vu cette subtilité.

On prend donc deux écritures d'un élément de E : $x = a + b.\sqrt{2} = a' + b'.\sqrt{2}$. On fait passer de l'autre côté : $(a - a') = \sqrt{2}.(b' - b)$.
Si $b' - b$ est non nul, par quotient, $\sqrt{2}$ est rationnel.
Forcément $b' - b$ est nul, et en reportant $a' - a$ aussi.
On a bien obtenu $a = a'$ et $b = b'$.

On pose $E = \mathbb{Z} + \sqrt{2}.\mathbb{Z} = \{a + b.\sqrt{2} \mid (a,\ b) \in \mathbb{Z}^2\}$, $\alpha_n = (\sqrt{2}+1)^n$ et $\beta_n = (\sqrt{2}-1)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
Montrez la suite d'inégalités pour les éléments suivants de E :
$0 < 17 - 12.\sqrt{2} < 53 - 37.\sqrt{2} < -19 + 14.\sqrt{2} < 97 - 68.\sqrt{2} < 8 - 5.\sqrt{2} < 42 - 29.\sqrt{2} < 1$ [a]

a. Au fait, on est en maths. Il est donc hors de question que votre preuve passe par $\sqrt{2} \simeq 1,4142135623...$ (mnémotechnique : J'AIME L'ŒIL DE L'AMI NICOLAS, GARÇON DE SUP). S'il vous plait : aucun symbole $\simeq$, de l'intelligence...

Pour le tri, on va montrer par exemple $97 - 68.\sqrt{2} < 8 - 5.\sqrt{2}$ en étudiant la différence $-89 + 63.\sqrt{3}$ et en prouvant $63.\sqrt{2} > 89$ en élevant au carré : $63^2.2 = 7938 > 7921 = 89^2$. Oui, tout se ramène à des calculs dans $\mathbb{N}$.

$0 < 17 - 12.\sqrt{2}$	$< 53 - 37.\sqrt{2}$	$< -19 + 14.\sqrt{2}$	$< 97 - 68.\sqrt{2}$	$< 8 - 5.\sqrt{2}$	$< 42 - 29.\sqrt{2}$	< 1
$12.\sqrt{2} < 17$	$25.\sqrt{2} < 36$	$72 < 51.\sqrt{2}$	$82.\sqrt{2} < 116$	$89 < 63.\sqrt{2}$	$24.\sqrt{2} < 34$	$41 < 29.\sqrt{2}$
$17^2 = 289$	$36^2 = 1296$	$51^2.2 = 5202$	$116^2 = 13456$	$63^2.2 = 7938$	$34^2 = 1156$	$29^2.2 = 1682$
$12^2.2 = 288$	$25^2.2 = 1250$	$72^2 = 5184$	$82^2.2 = 13448$	$89^2 = 1921$	$24^2.2 = 1152$	$41^2 = 1681$

Ah qu'il est agréable de savoir faire des calculs sans se ridiculiser à appuyer sur des touches.

D'accord, il y a des calculatrices.
De même qu'il y a des taxis pour traverser le bois de Vincennes, alors pourquoi tant de gens font le tour du Bois de Vincennes en courant ? Pour le plaisir de l'effort physique. Avec la récompense du muscle qui dit merci.

I~0) Montrez l'existence de deux suites d'entiers naturels (r_n) et (i_n) vérifiant $\alpha_n = r_n + \sqrt{2}.i_n$ pour tout n. Exprimez r_{n+1} et i_{n+1} à l'aide de $r_n$et i_n et exprimez β_n à l'aide de r_n et i_n.

On va aborder la question par l'astuce de l'algèbre. En montrant qu'on a une structure stable, ce qui permettra ensuite de mettre en boucle cette stabilité pour tout avoir directement.

Donc, le point de départ : $\boxed{(E, +) \text{ est un groupe commutatif.}}$

On a la stabilité en écrivant des $(a + b.\sqrt{2}) + (c + d.\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d).\sqrt{2}$ avec a, b, c et d entiers et aussi $a + c$ et $b + d$.
Pour le neutre, la question est : 0 est il dans E ? Oui : $0 = 0 + 0.\sqrt{2}$.

Si vous affirmez juste « 0 est le neutre », vous n'avez pas répondu à la question.

Pour l'opposé, il faut dire non seulement « c'est $-a - b.\sqrt{2}$ », mais surtout « et il est dans E ».

Si vous écrivez juste des formules et ne vérifiez pas où l'élément est, vous faites de la chimie, pas des maths.

Et l'associativité est acquise sans emplir la page de formules, puisque c'est l'addition dans $\mathbb{R}$!

Mille et mille fois, je vous le redis : je me fiche de savoir si vous savez tartiner des formules sur des pages. Je dois surveiller si vous savez raisonner. Et ça, ça demande un cerveau !

Allons plus loin : $\boxed{(E, +, .) \text{ est un anneau.}}$
On montre la stabilité par multiplication : $(a + b.\sqrt{2}).(c + d.\sqrt{2}) = (a.c + 2.b.d) + (a.d + b.c).\sqrt{2}$.
Ensuite, la multiplication est associative, et distributive sur l'addition, on est dans $\mathbb{R}$!

Qui a perdu à la fois son temps et sa crédibilité auprès de moi en développant $(a + b.\sqrt{2}).(c + d.\sqrt{2}).(e + f.\sqrt{2})$ sur trois ou quatre lignes ? Bref, qui a le nez collé dans le guidon au lieu de regarder la route ?

On a un anneau. Commutatif évidemment. Avec un neutre : $1 = 1 + 0.\sqrt{2}$.

Reprenons : $(E, +, .)$ est un anneau.
Les deux éléments $1 + \sqrt{2}$ et $\sqrt{2} - 1$ sont dans E. Par produits successifs, chaque $(1 + \sqrt{2})^n$ et $(\sqrt{2} - 1)^n$ est dans E *(récurrence évidente)*.
C'est tout.

Mais on peut aussi développer $(1 + \sqrt{2})^n$ par la formule du binôme et séparer les termes en fonction de leur parité :

$$(1 + \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.1^{n-k}.\sqrt{2}^k = \quad {\scriptstyle k = 2.p} \quad \sum_{p=0}^{[n/2]} \binom{n}{2.p}.2^p \quad \text{c'est } r_n$$

$$\quad {\scriptstyle k = 2.p+1} \quad +\Big(\sum_{p=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2.p+1}.2^p\Big).\sqrt{2} \quad \text{et } i_n$$

On a séparé sous la forme $r_n + \sqrt{2}.i_n$.

Si on développe cette fois $(\sqrt{2}-1)^n$ on a

$$(\sqrt{2}-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.(-1)^{n-k}.\sqrt{2}^k \quad \begin{array}{ll} k=2.p & = \displaystyle\sum_{p=0}^{[n/2]} (-1)^{n-2.p}\binom{n}{2.p}.2^p \quad \text{c'est } (-1)^n.r_n \\ k=2.p+1 & + \Big(\displaystyle\sum_{p=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2.p+1}.(-1)^{n-2.p-1}2^p\Big).\sqrt{2} \quad \text{et } (-1)^{n+1}.i_n \end{array}$$

C'est gagné aussi pour β_n et on a $\boxed{\beta_n = (-1)^n.(r_n - \sqrt{2}.i_n)}$ pour tout n.

Mais on peut aussi se lancer dans une récurrence.

Oui, c'est en variant les points de vue qu'on avance en maths. Il n'y a pas un chemin et une méthode à appliquer à chaque fois. Pas de recette systématique à appliquer comme un automate. Au contraire, il faut apprendre à « penser de travers », « pas comme les autres », « pas comme la fois précédente ». Pour certains c'est la grande difficulté des maths. Pour d'autres, c'est leur grande richesse. Si vous mangez toujours les mêmes saveurs, c'est fade. Alors que c'est si génial de manger un plat épicé le lundi, une soupe le mardi, du sucré-salé le mercredi, de l'aigre doux le jeudi, un poisson le vendredi, un falafel à shabbat et de jeûner un peu le dimanche.

On initialise

α_n	1	$1+\sqrt{2}$	$3+2.\sqrt{2}$	$7+5.\sqrt{2}$
r_n	1	1	3	7
i_n	0	1	2	5

Prenons un entier naturel n et supposons qu'il existe r_n et i_n vérifiant $\alpha_n = r_n. + i_n.\sqrt{2}$. L'objectif est de prouver l'existence de r_n et i_n.
On multiplie : $\alpha_{n+1} = \alpha_n.(1+\sqrt{2}) = (r_n + i_n.\sqrt{2}).(1+\sqrt{2}) = (r_n + 2.i_n) + (r_n + i_n)$.
On pose alors : $\boxed{r_{n+1} = r_n + 2.i_n \text{ et } i_{n+1} = r_n + i_n}$
On constate qu'ils existent et que ce sont deux entiers. La récurrence s'achève.

Attention. la récurrence prouve l'existence des deux suites. Et la formule $r_{n+1} = r_n + 2.i_n$ et $i_{n+1} = r_n + i_n$ est donnée dans la récurrence. Mais ce n'est pas elle que l'on prouve par récurrence. Elle est morceau de la récurrence et sert à d'autres récurrences après. Ne mélangez pas tout, et cessez de ne vouloir que prouver des formules.

$\sim$0) Complétez d'ailleurs $\begin{pmatrix} r_n \\ i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ◐ & ◑ \\ ◖ & ◗ \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ i_{n+1} \end{pmatrix}$ *(oui, je l'ai posé dans le mauvais sens).*

On écrit $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ i_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} r_n \\ i_n \end{pmatrix}$ et $\boxed{\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ i_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} r_n \\ i_n \end{pmatrix}}$ en inversant la matrice ou en résolvant un système *(c'est la même chose !).*
On note qu'on a alors $\begin{pmatrix} r_n \\ i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec le mot « suite géométrique de raison matricielle ».

$\sim$0) Montrez que r_n et i_n sont toujours premiers entre eux.

Pour prouver que r_n et $i_n$sont premiers entre eux, le bon réflexe en sortant de Terminale est de faire une récurrence.
On montre que c'est vrai pour les premiers *(par exemple* 1 *et* 0 *ou même* 1 *et* 1*).*
Ensuite, on se donne un entier n et on suppose que $r_n$et $i_n$sont premiers entre eux.
On cherche qui sont alors les entiers qui divisent r_{n+1} et i_{n+1} *(objectif : il n'y a que* 1*).*
Soit d qui divise à la fois r_{n+1} et i_{n+1}. Il divise alors leur différence : d divise $r_{n+1} - i_{n+1} = i_n$. Mais si d divise i_{n+1} et i_n, il divise leur différence r_n. A présent, d divise $r_n$et i_n. Par hypothèse de récurrence, le seul d possible est 1.
r_{n+1} et i_{n+1} ont peur seul diviseur commun 1, ils sont premiers entre eux.
Le résultat est initialisé et héréditaire, il est vrai pour tout n.

Mais en fait, il y a plus simple : $\alpha_n.\beta_n = (1+\sqrt{2})^n.(\sqrt{2}-1)^n = \Big((1+\sqrt{2}).(\sqrt{2}-1)\Big)^n = 1^n = 1$.
Or, $\alpha_n = r_n + \sqrt{2}.i_n$ et $\beta_n = (-1)^n.(r_n - \sqrt{2}.i_n)$. On a donc $\alpha_n.\beta_n = (r_n)^2 - 2.(i_n)^2$.
On écrit tout ceci $\boxed{r_n.r_n - 2.i_n.i_n = \pm 1}$ et on a une identité de Bézout entre r_n et i_n. Ils sont premiers entre eux.

C'est là que les maths sont plus esthétiques que calculatoires.
Pour certains, c'est flippant.
Pour d'autres, c'est enthousiasmant.

On peut aussi prouver : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} r_n & 2.i_n \\ i_n & r_n \end{pmatrix}$ par récurrence sur n, passer au déterminant : $(-1)^n = (r_n)^2 - 2.(i_n)^2$. On a encore une identité de Bézout *(la même)*.

∼0) Écrivez un script **Python** qui prend en entrée **n** et retourne les deux entiers r_n et i_n [a].

[a]. quand on dit prend un entrée **n** et retourne **rn** et **in**, on attend

```
def Fonction(n) :
.....
....return(rn, in)
```

et pas des trucs avec des **n = int(input('Donnez l'entier n : '))** jusqu'à **print(rn, in)** qui est juste du dialogue gentillet avec l'ordinateur et pas de la programmation

Pour la procédure **Python**, on a faire une boucle, avec des valeurs qu'on modifie au fur et à mesure, et qu'on appelle justement r et i.
C'est facile la programmation. Il suffit d'écrire ce que l'on ferait à la main. Sans aller imaginer des trucs dans tous les sens.

```
def DS2(n) :
....r, i = 1, 0
....for k in range(n) :
........r, i = r+2*i, r+i
....return(r, i)
```

∼0) Que pensez vous de l'idée de l'élève Regercées-Iféfroi : on identifie $a + b.\sqrt{2}$ à la matrice $\begin{pmatrix} a & 2.b \\ b & a \end{pmatrix}$, et on regarde addition, multiplication, division.

Profitons tout de suite de la belle idée :

$(a + b.\sqrt{2}) + (c + d.\sqrt{2}) = (a + c) + (b + c).\sqrt{2}$	$\begin{pmatrix} a & 2.b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 2.d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+c) & 2.(b+d) \\ (b+d) & (a+c) \end{pmatrix}$
$(a + b.\sqrt{2}).(c + d.\sqrt{2}) = (a.c + 2.b.d) + (a.d + b.c).\sqrt{2}$	$\begin{pmatrix} a & 2.b \\ b & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c & 2.d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a.c+2.b.d) & 2.(b+d) \\ (b.c+a.d) & (a+c) \end{pmatrix}$
$0 = 0 + 0.\sqrt{2}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est neutre additif
$1 = 1 + 0.\sqrt{2}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est neutre multiplicatif
$a + b.\sqrt{2}$ a pour module $a^2 - 2.b^2$	$\begin{pmatrix} a & 2.b \\ b & a \end{pmatrix}$ a pour déterminant $a^2 - 2.b^2$

La dernière avec la deuxième permet de passer de « le déterminant du produit des matrices est le produit des déterminants » (oui : $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$)
à « le module du produit est le produit des modules ».

I∼0) Pour tout élément $a + b.\sqrt{2}$ de E, on définit son module $(\!|x|\!) = |a^2 - 2.b^2|$. Montrez que le module d'un élément de E est toujours un entier. Combien d'éléments de E ont un module nul ?
I∼1) Montrez que $(E, +, .)$ est un anneau dans lequel le module du produit est le produit des modules.

S'il s'agit de démontrer que $(E, +.)$ est un anneau, c'est fait plus haut. Mais il reste à prouver que le module d'un élément de E est toujours un entier naturel. C'est évident.

Et il reste à prouver que le module du produit est le produit des modules. Une question gentille et juste calculatoire.
On se donne a, b, c et d.
On doit comparer $|a^2 - 2.b^2|.|c^2 - 2.d^2|$ et $|(a.c + 2.b.d)^2 - 2.(a.d + b.c)^2|$.
Les deux valent $|a^2.c^2 - 2.a^2.d^2 - 2.b^2.c^2 + 4.b^2.d^2|$, et les $4.a.b.c.d$ se sont simplifiés.
. *On l'obtient facilement avec les déterminants...*

Est il possible que le module soit nul ? Il faut avoir, avec les notations déjà prises : $a^2 - 2.b^2 = 0$.
Mais si b est non nul, ceci revient à avoir $\sqrt{2}$ rationnel égal à $\dfrac{b}{a}$ (au signe près).
La seule solution est donc $a = b = 0$.

Le seul élément de module nul est 0.

$\sim$0) Montrez que chaque α_n et chaque β_n est dans E et a pour module 1 *(pensez à calculer $\alpha_n.\beta_n$)*.

Le module de α_n est $(r_n)^2 - 2.(i_n)^2$ ce qui ne semble pas très pratique.
Calculons néanmoins : $\alpha_n.\beta_n = (1+\sqrt{2})^n.(\sqrt{2}-1)^n = \Big((\sqrt{2}+1).(\sqrt{2}-1)\Big)^n = 1^n = 1$.
On passe aux modules : $(\!|\alpha_n.\beta_n|\!) = 1$. Et par propriété $(\!|\alpha_n|\!).(\!|\beta_n|\!) = 1$.
Comme les deux nombres sont des entiers naturels, on a forcément $(\!|\alpha_n|\!) = 1$ et $(\!|\beta_n|\!) = 1$.

I$\sim$0) Soient u et v deux réels distincts *($u < v$)* ; montrez que $p.\beta_n$ est dans E et est entre u et v pour $n = \Big[\dfrac{\ln(v-u)}{\ln(\sqrt{2}-1)}\Big] + 1$ et $p = \Big[\dfrac{u}{\beta_n}\Big] + 1$ *(on commencera par montrer : $0 \leqslant \beta_n \leqslant v-u$)*.

On va montrer que tout intervalle non réduit à un point contient une infinité d'éléments de E.

On se donne donc u et v avec $u < v$.
On définit $n = \Big[\dfrac{\ln(v-u)}{\ln(\sqrt{2}-1)}\Big] + 1$. Par construction de « partie entière plus 1 », on a $n \geqslant \dfrac{\ln(v-u)}{\ln(\sqrt{2}-1)}$ et donc par produit en croix : $n.\ln(\sqrt{2}-1) \leqslant \ln(v-u)$.

Non, je ne me suis pas trompé sur le sens ! En effet, $\ln(\sqrt{2}-1)$ est négatif, en tant que logarithme d'un réel de $]0,\ 1[$. On croisera souvent cette histoire.

On passe à l'exponentielle, croissante : $(\sqrt{2}-1)^n \leqslant (v-u)$. C'est bien $\beta_n \leqslant v-u$.

On va avancer à petits pas, plus petits que la longueur de l'intervalle $v-u$.

Ensuite, on choisit p avec encore une partie entière : $p = \Big[\dfrac{u}{\beta_n}\Big] + 1$.
On a donc deux inégalités : $\dfrac{u}{\beta_n} \leqslant p \leqslant \dfrac{u}{\beta_n} + 1$.
On multiplie par le réel positif β_n : $u \leqslant p.\beta_n \leqslant u + \beta_n$.
On exploite ce que l'on a fait avant : $u \leqslant p.\beta_n \leqslant u + \beta_n < u + (v-u) = v$.
Le réel $p.\beta_n$ est bien entre u et v.

Par petit pas, quand on a atteint u on ne peut pas avoir dépassé v.

Le réel $p.\beta_n$ est dans E car c'est $\beta_n + \beta_n + \ldots + \beta_n$, somme d'éléments de E.

Et même si p est négatif, on commence par dire que $-\beta_n$ est dans le groupe $(E, ++)$.

L'ensemble E est à l'image de $\mathbb{Q}$: très morcelé, mais quand même présent partout.

I$\sim$0) Montrez qu'un élément x de E est inversible d'inverse dans E si et seulement si son module vaut 1 *(attention, il y a deux sens, pour l'un, pensez à $(\!|x.x^{-1}|\!)$)*.
On notera U l'ensemble des élément de E de module 1.
I$\sim$1) Soit x un élément de U, d'écriture $a + b.\sqrt{2}$. On suppose $1 \leqslant x < 1+\sqrt{2}$. Montrez alors $-1 \leqslant a - b.\sqrt{2} \leqslant 1$ et $0 \leqslant 2.a \leqslant 2+\sqrt{2}$. Déduisez la valeur de a puis de b.
I$\sim$2) Soit x un élément de U plus grand que 1. Montrez qu'il existe un entier k vérifiant $\alpha_k \leqslant x < \alpha_{k+1}$. Déduisez alors $1 \leqslant x.\beta_k < \alpha_1$ puis $x = \alpha_k$.
I$\sim$3) Montrez que les seuls éléments de U sont les α_n, les β_n, les $-\alpha_n$ et les $-\beta_n$.

I$\sim$0) Un élément x de E est dit premier si $\forall (u,\ v) \in E^2,\ x = u.v \Rightarrow (u \in U \textit{ ou } v \in U)$ *(les nombres premiers dans $\mathbb{Z}$ sont caractérisés par $\forall (u,\ v) \in E^2,\ p = u.v \Rightarrow (|u| = 1 \textit{ ou } |v| = 1)$)*. Montrez que les α_n sont dans P *(ensemble des nombres premiers)*. Montrez que $3+\sqrt{2}$, $9+5.\sqrt{2}$, $5-13.\sqrt{2}$ sont dans P *(calculez leur module)*.

On donne quelques nombres, on calcule la norme de chacun

nombre	$3+\sqrt{2}$	$9+5.\sqrt{2}$	$5-13.\sqrt{2}$
norme	7	31	313

On part de $9+5.\sqrt{2} = u.v$ avec u et v dans E. On doit montrer que u ou v est dans U.
On passe au module : $31 = \llparenthesis u \rrparenthesis.\llparenthesis v \rrparenthesis$ *(propriété du module)*.
Comme 31 est premier, on déduit $\llparenthesis u \rrparenthesis = 1$ et $\llparenthesis v \rrparenthesis = 31$ *(ou le contraire)*.
Mais on a montré $\llparenthesis u \rrparenthesis = 1 \Rightarrow u \in U$. C'est donc que u *(ou v)* est dans U.

Ce raisonnement s'étend à tout élément de E dont le module est un entier premier. C'est le cas des trois ici étudiés.

Montrez que $8+3.\sqrt{2}$ n'est pas dans P.

Passons à $8+3.\sqrt{2}$, de module 46.
Et alors ? On n'invente pas une réciproque idiote. Ce n'est pas parce que le module se factorise que l'élément de E se factorise.
Mais ça nous donne une piste. Si on veut avoir $8+3.\sqrt{2} = u.v$ il faut avoir $\llparenthesis u \rrparenthesis.\llparenthesis v \rrparenthesis = 46$ sans qu'aucun ne vaille 1.
On peut tenter d'avoir $\llparenthesis u \rrparenthesis = 23$ et $\llparenthesis v \rrparenthesis = 2$ par exemple.

On tente $v = \sqrt{2}$. Et on devine ce à quoi on pouvait penser tout de suite : $\boxed{8+3.\sqrt{2} = (0+1.\sqrt{2}).(3+4.\sqrt{2})}$

$\sim$0) Donnez des éléments de module 7. Déduisez que 7 n'est pas dans P.

L'entier 7 a pour module 49.
On tente donc de factoriser $7 = u.v$ avec $\llparenthesis u \rrparenthesis = 7$ et $\llparenthesis v \rrparenthesis = 7$, puisque ce sera la seule façon de faire.
Par exemple $3+\sqrt{2}$. On met en face $3-\sqrt{2}$ et on vérifie : $(3+\sqrt{2}).(3-\sqrt{2}) = 9-2 = 7$.
C'est un peu étonnant, mais 7 n'est donc plus premier quand on passe à E.
Et aussi $7 = (1+2.\sqrt{2}).(2.\sqrt{2}-1)$.

$\sim$0) Montrez : $\forall (u,\ v) \in \mathbb{Z}^2,\ u^2 - 2.v^2 = 5 \Rightarrow (5|u \textit{ et } 5|v)$. Déduisez que 5 est dans P.

On doit établir un lemme : $\forall (u,\ v) \in \mathbb{Z}^2,\ u^2 - 2.v^2 = 5 \Rightarrow (5|u \textit{ et } 5|v)$.
Il faut montrer que si $u^2 - 5.v^2$ vaut 5, alors u et v sont multiples de 5.

On dresse la liste des carrés modulo 5 :

u modulo 5	0	1	2	3	4
u^2 modulo 5	0	1	4	4	1

On dresse la liste des $u^2 - 2.v^2$ modulo 5

$u^2 - 2.v^2$	0	1	2	3	4	u modulo 5
0	0	1	4	4	1	
1	$-2=3$	$-1=4$	2	2	4	
2	$-3=2$	$-2=3$	1	1	3	
3	$-3=2$	$-2=3$	1	1	3	
4	$-2=3$	$-1=4$	2	2	4	
v modulo 2						

On voit qu'effectivement, la somme $u^2 - 2.v^2$ n'est congrue à 0 modulo 5 que pour u et v multiples de 5.

Passons à la primalité de 5. On suppose que 5 est produit de deux éléments de E : $5 = u.v$.
On passe au module : $25 = \llparenthesis u \rrparenthesis.\llparenthesis v \rrparenthesis$.
Si on refuse que l'un des modules vaille 1 (puisque ceci permet alors de conclure $u \in U$ ou $v \in U$), on est obligé d'avoir $\llparenthesis u \rrparenthesis = 5$ et $\llparenthesis v \rrparenthesis = 5$.
Mais alors, en écrivant u sous la forme $r + \sqrt{2}.s$, le résultat préliminaire donne r et i sont multiples de 5. On les écrit $5.r'$ et $5.i'$. On reporte $u = 5.(r' + i'.\sqrt{2})$. On vérifie son module : $\llparenthesis u \rrparenthesis = (5.r')^2 - 2.(5.i')^2 = 25.(r'^2 - 2.i'^2)$. Il vaut au moins 25, c'est une contradiction.

En fait, avec notre résultat préliminaire et ses modulo 5, on a montré que la norme d'un élément de E ne pouvait pas valoir 5.

I∼0) Passons à l'existence d'une division euclidienne dans E. On se donne x et y dans E avec y non nul ($x = a + i.b$ et $y = c + i.d$). Il faut prouver l'existence de q et r dans E vérifiant $x = q.y + r$ et r plus petit que b. Quel sens donner à « r plus petit que b » : $(\!|r|\!) < (\!|y|\!)$.
Voici des exemples de l'algorithme :

x	y	$\frac{x}{y}$	q	r
$5+\sqrt{2}$	$3+\sqrt{2}$	$\frac{5+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{13-2.\sqrt{2}}{(3+\sqrt{2}).(3-\sqrt{2})} = (2) + \left(-\frac{1}{7} - \frac{2.\sqrt{2}}{7}\right)$	2	$-1-\sqrt{2}$
$7+\sqrt{2}$	$3-\sqrt{2}$	$\frac{7+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{23+10.\sqrt{2}}{7} = (3+\sqrt{2}) + \left(\frac{2}{7} + \frac{3.\sqrt{2}}{7}\right)$	$3+\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
23	$6+5.\sqrt{2}$	$\frac{23}{6+5.\sqrt{2}} = \frac{-138+115.\sqrt{2}}{14} = -10+8.\sqrt{2} + \left(\frac{2+3.\sqrt{2}}{14}\right)$	$-10+8.\sqrt{2}$	$3+2.\sqrt{2}$

Divisez $11 + 7.\sqrt{2}$ par $5 + 2.\sqrt{2}$. Divisez $2020 + 2019.\sqrt{2}$ par $7 + 5.\sqrt{2}$. Divisez $2019 + \sqrt{2}$ par $17 + 8.\sqrt{2}$.
Expliquez l'algorithme général, et justifiez.

On décrypte l'algorithme général :

- On part de $x = a + \sqrt{2}.b$ et $y = c + \sqrt{2}.d$ non nul.
- On calcule le quotient en utilisant la quantité conjuguée : $\frac{a+b.\sqrt{2}}{c+d.\sqrt{2}} = \frac{(a+b.\sqrt{2}).(c-d.\sqrt{2})}{(c+d.\sqrt{2}).(c-d.\sqrt{2})}$.
- On sépare : $\frac{x}{y} = \frac{a.c-2.b.d}{c^2-2.d^2} + \sqrt{2}.\frac{b.c-a.d}{c^2-2.d^2}$ avec $c^2 - 2.d^2$ non nul.
- Les deux rationnels $\frac{a.c-2.b.d}{c^2-2.d^2}$ et $\frac{b.c-a.d}{c^2-2.d^2}$ ne sont pas forcément entiers, mais on peut les approximer par un entier.

En pratique, on arrondit un réel r à l'entier le plus proche :
○ si r est entre $[r]$ et $[r] + 0,5$, on prend $[r]$
○ si r est entre $[r] + 0,5$ et $[r] + 1$, on prend $[r] + 1$.
L'entier choisi n vérifie $|r - n| \leqslant \frac{1}{2}$.

- On a donc n et m vérifiant $\left|\frac{a.c-2.b.d}{c^2-2.d^2} - n\right| \leqslant \frac{1}{2}$ et $\left|\frac{b.c-a.d}{c^2-2.d^2} - m\right| \leqslant \frac{1}{2}$.
- On sépare : $\frac{x}{y} = n + m.\sqrt{2} + \left(\frac{a.c-2.b.d}{c^2-2.d^2} - n\right) + \sqrt{2}.\left(\frac{b.c-a.d}{c^2-2.d^2} - m\right)$.

Le terme du bout est plutôt « petit »...

- On pose donc $q = n + m.\sqrt{2}$ et on remultiplie par y : $x = y.q + \left(\left(\frac{a.c-2.b.d}{c^2-2.d^2} - n\right) + \sqrt{2}.\left(\frac{b.c-a.d}{c^2-2.d^2} - m\right)\right).(c + d.\sqrt{2})$.
- Le terme $\left(\left(\frac{a.c-2.b.d}{c^2-2.d^2} - n\right) + \sqrt{2}.\left(\frac{b.c-a.d}{c^2-2.d^2} - m\right)\right).(c + d.\sqrt{2})$ est il bien le reste ?
  - Déjà, est il dans E ? Sous cette forme, ce n'est pas gagné, mais sous la forme $x - y.q$, c'est normal, car on a un anneau.
  - On calcule sa norme : $(\!|\left(\left(\frac{a.c-2.b.d}{c^2-2.d^2} - n\right) + \sqrt{2}.\left(\frac{b.c-a.d}{c^2-2.d^2} - m\right)\right).(c + d.\sqrt{2})|\!)$ en rappelant que la norme du produit est le produit des normes :
  $(\!|\left(\left(\frac{a.c-2.b.d}{c^2-2.d^2} - n\right) + \sqrt{2}.\left(\frac{b.c-a.d}{c^2-2.d^2} - m\right)\right).(c + d.\sqrt{2})|\!) = (\!|u + v.\sqrt{2}|\!).(\!|c + d.\sqrt{2}|\!) = (\!|u + v.\sqrt{2}|\!).(\!|y|\!)$
  avec $|u| = \left|\frac{a.c-2.b.d}{c^2-2.d^2} - n\right| \leqslant \frac{1}{2}$ et $|v| = \left|\frac{a.d-b.c}{c^2-2.d^2} - m\right| \leqslant \frac{1}{2}$.
  - On élève au carré $-\frac{1}{4} \leqslant u^2 \leqslant \frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{2} \leqslant 2.v^2 \leqslant \frac{1}{2}$ puis $-\frac{1}{2} \leqslant -2.v^2 \leqslant \frac{1}{2}$.
  - On somme : $-\frac{3}{4} \leqslant u^2 - 2.v^2 \leqslant \frac{3}{4}$.
  - On revient au module : $(\!|\left(\left(\frac{a.c-2.b.d}{c^2-2.d^2} - n\right) + \sqrt{2}.\left(\frac{b.c-a.d}{c^2-2.d^2} - m\right)\right).(c + d.\sqrt{2})|\!) \leqslant \frac{3}{4}.(\!|y|\!) < (\!|y|\!)$.

C'est ce que l'on voulait.

On applique l'algorithme :

x	y	$\dfrac{x}{y}$	$n+...$	$m+...$	q	r
11 $+7.\sqrt{2}$	$5+2.\sqrt{2}$	$\dfrac{11+7.\sqrt{2}}{5+2.\sqrt{2}}=\dfrac{27+13.\sqrt{2}}{17}$	$2-\dfrac{7}{17}$	$1-\dfrac{4}{17}$	$2+\sqrt{2}$	$-3-2.\sqrt{2}$
2020 $+2019.\sqrt{2}$	$7+5.\sqrt{2}$	$\dfrac{2020+2019.\sqrt{2}}{7+5.\sqrt{2}}=6050-4033.\sqrt{2}$	6050	-4033	6050 $-4033.\sqrt{2}$	0
2019 $+\sqrt{2}$	$17+8.\sqrt{2}$	$\dfrac{2019+\sqrt{2}}{17+8.\sqrt{2}}=\dfrac{4901-2305.\sqrt{2}}{23}$	$213+\dfrac{2}{23}$	$-100-\dfrac{5}{23}$	213 $213-100.\sqrt{2}$ $-100.\sqrt{2}$	$-2-3.\sqrt{2}$

Il manque un détail : l'unicité de la division euclidienne.
On part de $x = y.q + r$ et $x = y.q' + r'$ avec r et r' de module plus petit que celui de y.
On va prouver : $q = q'$ et $r = r'$.
On fait passer d'un côté : $y.(q' - q) = r - r'$.
On passe au module : $(\!|y|\!).(\!|q'-q|\!) = (\!|r-r'|\!)$.
Or, le membre de droite a un module strictement plus petit que celui de y. C'est donc que $q' - q$ a un module plus petit que 1.
C'est donc que son module est nul. On déduit $q = q'$. On reporte : $r = r'$.

Donnez le p.g.c.d. de $91 + 49.\sqrt{2}$ et $37 - 4.\sqrt{2}$.

On part de deux nombres et on applique l'algorithme d'Euclide *(divisions euclidiennes successives)* jusqu'au dernier reste non nul

$$\begin{array}{ccccc}
(91+49.\sqrt{2}) & = & (3+2.\sqrt{2})\times & (37-4.\sqrt{2}) & +(-4-13.\sqrt{2}) \\
(37-4.\sqrt{2}) & = & (1-2.\sqrt{2})\times & (-4-13.\sqrt{2}) & +(15+5.\sqrt{2}) \\
(-4-13.\sqrt{2}) & = & (0-1.\sqrt{2})\times & (15+5.\sqrt{2}) & +(6+2.\sqrt{2}) \\
(15+5.\sqrt{2}) & = & (2+0.\sqrt{2})\times & (6+2.\sqrt{2}) & +(3+\sqrt{2}) \\
6+2.\sqrt{3} & = & (2+0.\sqrt{2}) & (3+\sqrt{2}) & +0
\end{array}$$

Le dernier reste non nul est $3 + \sqrt{2}$. C'est lui le $p.g.c.d$.

On vérifie : $\dfrac{91+49.\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = 25 + 8.\sqrt{2}$ et $\dfrac{37+4.\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = 17 - 7.\sqrt{2}$.

On peut vérifier que $25 + 8.\sqrt{2}$ et $17 - 7.\sqrt{2}$ *(de modules 497 et 191)* sont premiers entre eux.

On peut ensuite écrire une identité de Bézout. Mais on n'a pas que ça à faire.

∘1∘

♡ Un élève n'a retenu que la formule de Leibniz $(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.u^{(k)}.v^{(n-k)}$, et n'a pas retenu la formule du binôme. Aidez le en lui demandant la dérivée d'ordre k de $x \longmapsto e^{a.x}$, puis la dérivée d'ordre n de $x \longmapsto e^{a.x}.e^{b.x}$.

Pour tout x, on a $(u.v)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.u^{(k)}(x).v^{(n-k)}(x)$.

Or, pour tout k, $u^{(k)}(x) = a^k.e^{a.x}$, $v^{(n-k)}(x) = b^{n-k}.e^{b.x}$.

D'autre part, $(u.v)(x) = e^{(a+b).x}$ et $(u.v)^{(n)}(x) = (a+b)^n.e^{(a+b).x}$.

La formule $(u.v)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.u^{(k)}(x).v^{(n-k)}(x)$ devient

$$(a+b)^{(n)}.e^{(a+b).x} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^k.e^{a.x}.b^{n-k}.e^{b.x}$$

On simplifie par $e^{a+b).x}$ (non nul) et on obtient $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^k.b^{n-k}$.

Il existe aussi une méthode pour passer de la formule de Newton à celle de Leibniz, en étudiant deux opérateurs qui commutent.

∘2∘

♡ A est une matrice carrée de taille 2 de trace 7 et de déterminant 10. Montrez alors : $A^2 = 7.A - 10.I_2$.
On pose $B = A - 2.I_2$ et $C = A - 5.I_2$. Montrez : $B.C = C.B$ et exprimez B^2 comme multiple de B et C^2 comme multiple de C.
Exprimez A comme combinaison de B et C.

Une bonne fois pour toutes : $A^2 - Tr(A).A + \det(A).I_2 = 0_{2,2}$. C'est toujours vrai.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a^2+b.c & b.(a+d) \\ c.(a+d) & b.c+d^2 \end{pmatrix} = (a+d).\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a.d-b.c).\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est la formule de Hamilton et Cayley. Et elle admet une généralisation en taille n sur n, mais évidemment avec n termes, et c'est le polynôme caractéristique qui revient.

On développe $B.C = (A - 2.I_2).(A - 5.I_2) = A^2 - 2.A - 5.A + 10.I_2 = 0_{2,2}$ et de même $C.B = 0_{2,2}$.
B et C sont permutables mais en plus, les produits seront nuls.

$B^2 = A^2 - 4.A + 4.I_2$ car A et I_2 commutent.
$B^2 = (7.A - 10.I_2) - 4.A + 4.I_2$
$B^2 = 3.A - 6.I_2$
$B^2 = 3.B$

De même $C^2 = A^2 - 10.A + 25.I_2$
$C^2 = (7.A - 10.I_2) - 10.A + 25.I_2$
$C^2 = -3.A + 15.I_2$
$C^2 = (-3).C$

On combine ensuite $B = A - 2.I_2$ avec $C = A - 5.I_2$ pour arriver à $A = \dfrac{5.B - 2.C}{3}$.

On peut appliquer la formule du binôme car B et C sont permutables (de même que $\dfrac{5}{3}.B$ et $\dfrac{-2}{3}.C$).

On obtient a priori $n+1$ termes : $A^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\Big(\frac{5}{3}.B\Big)^{n-k}.\Big(\frac{-2}{3}.C\Big)^{n-k}$.

Mais il n'en reste que deux car $B.C$ et $C.B$ donnent la matrice nulle : $A^n = \Big(\dfrac{5}{3}.B\Big)^n + \Big(\dfrac{-2}{3}.C\Big)^n$ ($k = 0$ et $k = n$).

De plus, en mettant en boucle $B^2 = 3.B$, on obtient $B^n = 3^{n-1}.B$. Et de même $C^n = (-3)^{n-1}.C$.

Il reste cette fois $A^n = \dfrac{5^n}{3}.B + \dfrac{2^n}{3}.C$.

Et de fait, c'est encore la diagonalisation de A présentée d'une autre façon...

∘3∘

Dans l'espace vectoriel $(E, +, .)$, on a trois sous-espaces vectoriels A, B et C vérifiant $A \subset B \cup C$ (oui, réunion, pas somme).
Montrez $A \subset B$ ou $A \subset C$.

Ceci rappelle « la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est un espace vectoriel que quand l'un est inclus dans l'autre ».

On suppose que A est inclus dans la réunion $B \cup C$.

Imaginez une droite incluse dans la réunion d'une droite et d'un plan. C'est donc qu'elle est incluse dans le plan ou dans la droite.

Si en revanche elle est incluse dans la somme de la droite et du plan, elle est incluse dans l'espace $\mathbb{R}^3$, et on ne peut rien dire de plus.

En algèbre linéaire, il faut voir les choses et non pas voir des formules (toujours la même chose, les maths ne sont pas des formules, mais des objets... mais le secondaire et les matières secondaires vous ont vraiment abruti dans ce mauvais sens.
On va raisonner par l'absurde.
La négation de $A \subset B$ ou $A \subset C$ est $A \not\subset B$ et $A \not\subset C$. On va essayer d'en tirer une contradiction.

On traduit cette hypothèse : • il existe un élément $\overrightarrow{u}$ de A qui n'est pas dans B (argument $A \not\subset B$).
Comme il est dans A mais pas dans B, il est dans C (argument $A = B \cup C$).
• il existe un élément $\overrightarrow{v}$ de A (égal à $B \cup C$) qui n'est pas dans C.
Il est donc dans B.

Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs de A, leur somme est encore dans a.
Comme on a supposé que A est inclus dans $B \cup C$, c'est donc que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est soit dans B, soit dans C.
Mais si $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est dans B alors $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v}$ est dans B, ce qui est contradictoire.
Et si $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est dans C alors par stabilité $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - \overrightarrow{u}$ est dans C, ce qui est aussi contradictoire.

Tous les cas conduisent à une contradiction, le raisonnement par l'absurde se termine bien.

∘4∘

♡ L'une ce ces équations a pour réponse $S = \emptyset$, l'autre a pour réponse $S = \{\emptyset\}$, laquelle :
$X\Delta\{Jules,\ Ines,\ William\}\Delta\{Elodie,\ William\} = X\Delta\{Jules\}$
$X\Delta\{Jules,\ William\}\Delta X = X\Delta\{Jules,\ William\}$

La première donne déjà $X\Delta\{Jules,\ Ines,\ Elodie\} = X\Delta\{Jules\}$ par associativité.
Mais en simplifiant de chaque côté par X (ou en composant par X), elle donne une absurdité.
Il n'y a pas de solution : $S = \emptyset$.

La seconde se simplifie : $X\Delta X = \emptyset$ et $\emptyset$ est neutre. Elle devient $\{J,\ W\} = X\Delta\{J,\ W\}$. La seule solution est $X = \emptyset$.
Et c'est bien une solution (un ensemble certes vide, mais un ensemble). $S = \{a\}$ avec $a = \emptyset$. Bref : $\boxed{S = \{\emptyset\}}$

∘5∘

♡ Montrez que si $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{\alpha}{\beta}$ sont des rationnels positif vérifiant $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{\alpha}{\beta}$, alors on a aussi $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{a+\alpha}{b+\beta} \leqslant \dfrac{\alpha}{\beta}$.
La loi définie par $\dfrac{a}{b} \oplus \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{a+\alpha}{b+\beta}$ sur les fractions irréductibles positives est-elle une loi interne ? commutative ? associative ? "neutralisable" ?

On suppose $\dfrac{\alpha.b - \beta.a}{b.\beta} > 0$ et on calcule $\dfrac{\alpha}{\beta} - \dfrac{a+\alpha}{b+\beta}$ (ou même juste son numérateur) et $\dfrac{a+\alpha}{b+\beta} - \dfrac{a}{b}$. On les trouve positifs.

Exemple : entre $\dfrac{4}{7}$ et $\dfrac{3}{5}$ on peut insérer $\dfrac{7}{12}$.

Remarque :	C'est un petit résultat qu'on enseignait en quatrième. Il me semblait ne servir à rien. Mais en fait, c'est un résultat qui sert pour les suites de Farey, qui donnent des algorithmes d'approximation des réels par des rationnels.

Interne : la $\oplus$ de deux rationnels est un rationnel ; mais plus forcément irréductible : $\dfrac{1}{2} \oplus \dfrac{3}{4} = \dfrac{4}{6}$ qu'il faut réduire.

Remarque :	Avec les suites de Farey, on ne l'appliquera que dans le cas $\begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix} = 1$, l'élément inséré sera irréductible.

Commutative : oui.

Associative : oui.

Neutre : comment peut on choisir $\dfrac{\alpha}{\beta}$ avoir $\dfrac{a+\alpha}{b+\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta}$?
On demanderait $a.\beta = \alpha.b$ pour tout couple $(a,\ b)$, en particulier pour $(0,\ 1)$ et $(1,\ 1)$.
La seule possibilité serait $\dfrac{a+0}{b+0} = \dfrac{a}{b}$. Mais $\dfrac{0}{0}$ n'est pas un rationnel.

∘6∘

♡ On définit : $A * B = \overline{A}\Delta\overline{B}$. Cette loi est elle commutative ? Est elle associative ? Dispose-t-elle d'un neutre ?
Mêmes questions avec $A \star B = \overline{A}\Delta B$.
Rappel : $\overline{A}$ est le complémentaire de A (les éléments qui ne sont pas dans A).
$C\Delta D$ est la différence symétrique de C et D (les éléments qui sont dans C ou dans D, mais pas dans les deux, le "ou" exclusif).

C'est idiot, mais $A * B = \overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta B$...
C'est la loi Δ. On la sait commutative, associative, avec un neutre *(l'ensemble vide)* et un symétrique pour chaque élément *(lui même)*...

L'autre loi est plus originale. Elle est interne sur $P(E)$.
Elle est commutative : $A \star B = \overline{A}\Delta B = A\Delta\overline{B} = B * A$ et c'est $\overline{A\Delta B}$.
Il suffit de passer par la fonction indicatrice : $1_{A*B} = 1_A + 1_B + 1$ modulo 2.

On se donne trois parties A, B et c.
On étudie : $(A * B) * C = (\overline{A}\Delta B) * C = (\overline{\overline{A}\Delta B})\Delta\overline{C}$
$A * (B * C) = A * (B\Delta\overline{C}) = \overline{A}\Delta(\overline{B\Delta\overline{C}})$
Et comme Δ est associative, il y a égalité.

Elle n'est pas associative : $(\emptyset * E) * E = \emptyset * E = \emptyset$ et $\emptyset * (E * E) = \emptyset * E = \emptyset$. Raté, ça marche ici.
$(\emptyset * \emptyset) * E = E * E = E$ et $\emptyset * (\emptyset * E) = \emptyset * \emptyset = E$. Raté encore !

Elle a un neutre.
En notant ce neutre N il doit déjà vérifier $N * N = N$.
Or, $N * N = \overline{N\Delta N} = \overline{\emptyset}$ =E .
S'il y a un neutre, c'est l'univers entier E.
On vérifie ensuite pour toute partie X, $X * E = X\Delta\emptyset = X$.

Le symétrique d'une partie X est elle même.
En effet, pour tout X, on a $X * X = \overline{X\Delta X} = \overline{\emptyset} = E$ *(le neutre)*.

◦7◦

♡ La loi $\cap$ est distributive sur Δ (dans l'ensemble des parties d'un ensemble). Mais la loi $\cap$ est elle distributive sur $\cap$?
Et Δ est elle distributive sur $\cap$?
Et Δ est elle distributive sur Δ ?

$\cap$ est distributive sur elle même : $\begin{array}{ccccccccc} (a & + & b) & \times c & = & a & \times c & + & b & \times c \\ (A & \cap & B) & \cap C & = & A & \cap C & \cap & B & \cap C \end{array}$
Comme $C \cap C$ est gal à C, il y a égalité.

Δ n'est pas distributive sur elle même : $\begin{array}{ccccccccc} (a & + & b) & \times c & = & a & \times c & + & b & \times c \\ (A & \Delta & B) & \Delta C & \neq & A & \Delta C & \Delta & B & \Delta C \end{array}$
Dans le second membre, C s'en va. On donne un contre-exemple.

◦8◦

♡ On définit $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{H} = \{t.U + x.I + y.J + z.K \mid (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4\}$.
Calculez les seize produits des éléments U, I, J et K deux à deux.
Montrez que $\mathbb{H}$ est stable par multiplication. Montrez que l'inverse de $t.U + x.I + y.J + z.K$ existe et est un multiple de $t.U - x.I - y.J - z.K$ (sauf si x, y, z et t sont tous les quatre nuls).
(comme on vous offre presque l'inverse, pensez plutôt à proposer/vérifier).

C'est la présentation matricielle des quaternions de Hamilton.

	$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$
$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$U.U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$U.I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$U.J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$U.K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$
$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$I.U = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$I.I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$I.J = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$	$I.K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$J.U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$J.I = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$J.J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$J.K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
$K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$	$K.U = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$	$K.I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$K.J = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	$K.K = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

On remet ça au propre, avec une loi non commutative :

	U	I	J	K
U	U	I	J	K
I	I	−U	K	−J
J	J	−K	−U	I
K	K	J	−I	−U

U c'est pour unité, et tant pis si on met un I qui rappelle I_2 pour un élément qui vérifie (comme par hasard $I^2 = -U$).

La multiplication est associative, puisque c'est le produit matriciel.
Et elle est distributive sur l'addition, puisque c'est le produit matriciel.

Pour le calcul de $(t.U + x.I + y.J + z.K) \times (t.U - x.I - y.J - z.K)$ (dans cet ordre déjà, puisque la loi n'est pas commutative),

le professeur attend un calcul par distributivité : $\begin{array}{cccc} (t.U).(t.U) & +(t.U).(-x.I) & +(t.U).(-y.J) & +(t.U).(-z.K) \\ +(x.I).(t.U) & +(x.I).(-x.I) & +(x.I).(-y.J) & +(x.I).(-z.K) \\ +(y.J).(t.U) & +(y.J).(-x.I) & +(y.J).(-y.J) & +(y.J).(-z.K) \\ +(z.K).(t.U) & +(z.K).(-x.I) & +(z.K).(-y.J) & +(z.K).(-z.K) \end{array}$

Dans ce calcul (disposé ci dessus pour que le lecteur saisisse bien, et non pas en spaghetti avec des renvois à la ligne en milieu de n'importe quoi), on voit des termes se simplifier, et d'autres s'ajouter.
Les termes tels que $-x.y.I.J$ et $-x.y.J.I$ se simplifient.
Il reste $(t^2 + x^2 + y^2 + z^2).U$.

On résume : $(t.U + x.I + y.J + z.K) \times (t.U - x.I - y.J - z.K) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2).I_2$.
On trouve aussi, en inversant les rôles : $(t.U - x.I - y.J - z.K) \times (t.U + x.I + y.J + z.K) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2).I_2$.
Cette relation de la forme $A.B = B.A = \lambda.I_2$ donne $A.\dfrac{B}{\lambda} = \dfrac{B}{\lambda}.A = I_2$ puis $A^{-1} = \frac{B}{\lambda}$.
L'inverse de $t.U + x.I + y.J + z.K$ est $\dfrac{t.U - x.I - y.J - z.K}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}$.

L'inverse d'un quaternion (autre que 0) est un quaternion.

L'élève descend une fois encore jusqu'aux coefficients : $t.U + x.I + y.J + z.K = \begin{pmatrix} t + i.x & -y - i.z \\ y - i.z & t - i.x \end{pmatrix}$.
Il calcule le déterminant et trouve $(t + i.x).(t - i.x) - (y - i.z).(-y - i.z)$.
Il simplifie en $(t + i.x).(t - i.x) + (y - i.z).(y + i.z)$ et même $t^2 + x^2 + y^2 + z^2$.
Il applique les formules pour inverser : $\dfrac{1}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}.\begin{pmatrix} t - i.x & y + i.z \\ -y + i.z & t + i.x \end{pmatrix}$
Pour une fois, ce n'est pas idiot de redescendre jusqu'aux coefficients.

Je dis bien « pour une fois ». *Mais bien souvent, c'est très très très lourd de vouloir à tout prix écrire la matrice sous la forme de coefficients partout plutôt que sous un simple nom A.*

◦9◦ **Simplifiez $(A\Delta B) \cap (\overline{A}\Delta B) \cap (\overline{A}\Delta\overline{B}) \cap (A\Delta\overline{B})$ pour A et B parties d'un ensemble E.**

Déjà, $(A\Delta B) \cap (\overline{A}\Delta B)$ est vide. L'ensemble est vide.
Pour simplifiez $(A\Delta B) \cap (\overline{A}\Delta B) \cap (\overline{A}\Delta\overline{B}) \cap (A\Delta\overline{B})$, on peut tracer des "patates", même si ce n'est pas rigoureux.
Déjà, $(A\Delta B) \cap (\overline{A}\Delta B)$ est vide. Inutile d'aller plus loin. On intersecte encore, il ne reste rien.
Proprement, on peut passer par les indicatrices :
$1_{(A\Delta B)\cap(\overline{A}\Delta B)} = 1_{A\Delta B}.1_{\overline{A}\Delta B} = |1_A - 1_B|.|1 - 1_A - 1_B| = |(1_A - 1_B).(1 - 1_A - 1_B)|$

Le contenu de la parenthèse se développe en

	1	-1_A	-1_B
1_A	$+1_A$	-1_A	$-1_A.1_B$
-1_B	-1_B	$+1_A.1_B$	$+1_B$

il ne reste rien :
$1_{(A\Delta B)\cap(\overline{A}\Delta B)} = 1 = 1_\emptyset$ et les produits suivants sont nuls.

Maintenant, qui est $(A\Delta B) \cup (\overline{A}\Delta B)$? Je regarde en algèbre propositionnelle, avec α pour l'appartenance à A et β pour celle à B :

α	β	$\overline{\alpha}$	α ou_e β	$\overline{\alpha}$ ou_e β	$(\alpha$ ou_e $\beta)$ ou $(\overline{\alpha}$ ou_e $\beta)$
Vrai	*Vrai*	*Faux*	*Faux*	*Vrai*	*Vrai*
Vrai	*Faux*	*Faux*	*Vrai*	*Faux*	*Vrai*
Faux	*Faux*	*Vrai*	*Faux*	*Vrai*	*Vrai*
Faux	*Vrai*	*Vrai*	*Vrai*	*Faux*	*Vrai*

On trouve $(A\Delta B) \cup (\overline{A}\Delta B) = E$. Les réunions suivantes ne servent plus à rien :

$$(A\Delta B) \cup (\overline{A}\Delta B) \cup (\overline{A}\Delta\overline{B}) \cup (A\Delta\overline{B}) = E$$

On pouvait aussi tenir ces réponses par "une chose et son contraire ou...".

Le plus simple est aussi d'écrire : $\overline{A}\Delta B = (\emptyset\Delta A)\Delta B = \emptyset\Delta(A\Delta B) = \overline{A\Delta B}$.
On a alors pour notre exercice des choses comme $(A\Delta B) \cap \overline{(A\Delta B)}$ *et* $(A\Delta B) \cup \overline{(A\Delta B)}$.
C'est peut être sous cette forme synthétique et intelligente que vous trouverez l'exercice résolu dans les livres. Et vous vous demanderez peut être "aurais je dû y penser ?".

∘10∘

Explicitez $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)}$ *(notée σ)* ainsi que $\overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$.
Résolvez l'équation $\sigma^n = Id$ d'inconnue n dans $\mathbb{N}$.

	$\overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)}$		$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$	
a	$\longrightarrow$	a	$\longrightarrow$	b
b	$\longrightarrow$	b	$\longrightarrow$	c
c	$\longrightarrow$	c	$\longrightarrow$	d
d	$\longrightarrow$	e	$\longrightarrow$	e
e	$\longrightarrow$	f	$\longrightarrow$	f
f	$\longrightarrow$	g	$\longrightarrow$	g
g	$\longrightarrow$	h	$\longrightarrow$	h
h	$\longrightarrow$	d	$\longrightarrow$	a

et

	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$		$\overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)}$	
a	$\longrightarrow$	b	$\longrightarrow$	b
b	$\longrightarrow$	c	$\longrightarrow$	c
c	$\longrightarrow$	d	$\longrightarrow$	e
d	$\longrightarrow$	a	$\longrightarrow$	a
e	$\longrightarrow$	e	$\longrightarrow$	f
f	$\longrightarrow$	f	$\longrightarrow$	g
g	$\longrightarrow$	g	$\longrightarrow$	h
h	$\longrightarrow$	h	$\longrightarrow$	d

On déroule en $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)} = \overrightarrow{(a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h)}$.

Mais aussi $\overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} = \overrightarrow{(a\ b\ c\ e\ f\ g\ h\ d)}$.
En recollant les deux quadricycles par un élément, on a crée un octocycle !

Les solutions de l'équation $\sigma^n = Id$ sont les multiples de 8. Pour faire des tours complets.

∘11∘

On se place dans $\mathbb{N}$ où, conformément à l'axiomatique de Peano, on a juste défini 0 et l'application inc qui incrémente un entier d'une unité (c'est $n \longmapsto n+1$). Le but est de définir l'addition et d'en vérifier les propriétés.
On pose $\forall n,\ n+0 = n$ et $\forall (a,\ b) \in \mathbb{N}^2,\ a + inc(b) = inc(a+b)$. Ou si vous préférez $a + (b+1) = (a+b)+1$.
On a donc par exemple $5+3 = 5+(2+1) = (5+2)+1 = (5+(1+1))+1 = (((5+1)+1)+1)$.
Rien ne dit que l'addition soit commutative pour l'instant, ni même que 0 soit neutre à gauche aussi. Attention, n'allez pas trop vite.
Montrez par récurrence sur b : $\forall (a,\ b) \in \mathbb{N}^2,\ a+b \in \mathbb{N}$.

Pour l'hérédité des récurrences, afin de respecter l'esprit de Peano, on passera de b à $inc(b)$.
Et pour la lecture, on notera $\boxed{\text{N}}$ la propriété $\forall n,\ n+0 = n$ (0 est neutre à droite)
et $\boxed{\text{A}}$ la propriété $\forall (a,\ b) \in \mathbb{N}^2,\ a + inc(b) = inc(a+b)$
a donné, on prouve $\forall b,\ a+b \in \mathbb{N}$ par récurrence sur b.
Initialisation avec $b = 0$: $a + 0 = a \in \mathbb{N}$.
Si la propriété est vraie pour un b fixé ($a+b$ est dans $\mathbb{N}$), alors on calcule $a + inc(b) = inc(a+b)$. En tant que suivant d'un entier, ce nombre est un entier.

Montrez par récurrence sur b : $\forall b \in \mathbb{N},\ 0 + b = b$.

Pour $b = 0$, il suffit d'utiliser $\boxed{\text{N}}$
On se donne b et on suppose $0 + b = b$. On calcule alors $0 + inc(b)$ avec l'espoir de trouver $inc(b)$.
On utilise $\boxed{\text{A}}$ avec $a = 0$ (puis l'hypothèse au rang b) : $0 + inc(b) = inc(0+b) = in(b)$.

0 *est maintenant neutre aussi à gauche.*

J'ai croisé ça :
$$\begin{array}{rcl} (a+b)\quad +(c+1) & = & ((a+b)+c)+1 \\ & = & (a+(b+c))+1 \\ & = & a+((b+c)+1) \\ & = & \dots \end{array}$$
. Complétez, et dites ce qu'on est en train de prouver.

On va prouver l'associativité (la vraie) : $(a+b)+c = a+(b+c)$, par récurrence sur c, avec a et b fixés.
On se donne donc a et b, et on montre : $(a+b)+0 = a+(b+0)$. Il suffit d'utiliser $\boxed{\text{N}}$

On se donne c et on suppose $(a+b)+c = a+(b+c)$.
On veut montrer alors $(a+b) + inc(c) = a + (b + inc(c))$.
On part du membre de gauche et on applique $\boxed{\text{A}}$: $(a+b) + inc(c) = inc((a+b)+c)$
Par hypothèse de récurrence au rang c : $(a+b) + inc(c) = inc((a+b)+c) = inc(a+(b+c))$.

Par $\boxed{\text{A}}$ appliqué « en sens inverse » : $(a+b)+inc(c) = inc((a+b)+c) = a+inc(b+c)$.
Par $\boxed{\text{A}}$ encore :

$$(a+b)+inc(c) = inc((a+b)+c) = a+inc(b+c) = a+(b+inc(c))$$

C'est ce qu'on voulait.

Montrez par récurrence sur b : $\forall (a,\ b) \in \mathbb{N}^2,\ a+b = b+a$.

On va faire une récurrence. Sur b.
On se donne a et on commence par $b=0$: $a+0 = a = 0+a$ (en utilisant $\boxed{\text{N}}$ et la neutralité établie à gauche au début.

On suppose que pour un certain b, on a $a+b = b+a$.
On calcule $a+inc(b) = inc(a+b) = inc(b+a) = b+inc(a)$. Raté.

On va commencer par un lemme que j'aurais dû vous proposer dans l'énoncé :
$\forall a,\ inc(a) = inc(0)+a$ (ce qui revient à écrire $a+1 = 1+a$).

On initialise avec $a=0$: $inc(0) = inc(0)+0$ par $\boxed{\text{N}}$
On se donne a et on suppose $inc(a) = inc(0)+a$.
On veut comparer $inc(inc(a))$ et $inc(0)+inc(a)$.
Par hypothèse de récurrence : $inc(inc(a)) = inc(inc(0)+a)$.
Par $\boxed{\text{A}}$: $inc(inc(a)) = inc(inc(0)+a) = inc(0)+inc(a)$. C'est ce qu'on voulait.

Revenons alors à notre hérédité raté ci dessus, le passage de $a+b = b+a$ à $a+inc(b) = inc(b)+a$.
$a+inc(b) = inc(a+b)$ par $\boxed{\text{A}}$
$a+inc(b) = inc(a+b) = inc(b+a)$ par hypothèse de rang b
$a+inc(b) = inc(a+b) = inc(b+a) = b+inc(a)$ par $\boxed{\text{A}}$
$a+inc(b) = inc(a+b) = inc(b+a) = b+inc(a) = b+(inc(0)+a)$ par le lemme
$a+inc(b) = inc(a+b) = inc(b+a) = b+inc(a) = b+(inc(0)+a) = (b+inc(0))+a$ par associativité ci dessus
$a+inc(b) = inc(a+b) = inc(b+a) = b+inc(a) = b+(inc(0)+a) = (b+inc(0))+a = (inc(b+0))+a$ par $\boxed{\text{A}}$
$a+inc(b) = inc(a+b) = inc(b+a) = b+inc(a) = b+(inc(0)+a) = (b+inc(0))+a = (inc(b+0))+a = inc(b)+a$ $\boxed{\text{N}}$

On l'a eue !

Montrez : $\forall (a,\ b) \in \mathbb{N}^2,\ (a+b=0) \Rightarrow (a=b=0)$.

Pas besoin de récurrence.
On va contraposer.
On se donne a et b et on suppose $\overline{a=b=0}$. C'est donc que a ou b est non nul.
Comme l'addition est maintenant commutative, on va supposer b non nul.
Il s'écrit donc $b = inc(\beta)$ pour un certain β de $\mathbb{N}$.
On a alors $a+b = a+inc(\beta) = inc(a+\beta)$.
En tant que suivant d'un élément, cet entier ne peut pas être nul (0 n'est le suivant de personne).

Montrez : $\forall (a,\ b) \in \mathbb{N},\ (a+b=a) \Rightarrow b=0$.

On fait une récurrence sur a.
Pour a égal à 0, on montre $(0+b=0) \Rightarrow b=0$.

On se donne a et on suppose $(a+b=a) \Rightarrow b=0$.
On regarde pour $inc(a)$.
On suppose $inc(a)+b = inc(a)$.
Par commutativité et propriété $\boxed{\text{A}}$: $(inc(a)+b = inc(a)) \Rightarrow (inc(a+b) = inc(a))$.
Par injectivité de inc : $(inc(a)+b = inc(a)) \Rightarrow (inc(a+b) = inc(a)) \Rightarrow (a+b=a)$.
Par hypothèse de rang a :

$$(inc(a)+b = inc(a)) \Rightarrow (inc(a+b) = inc(a)) \Rightarrow (a+b=a) \Rightarrow b=0$$

Le tout sans utiliser d'histoire d'opposé.

◦12◦ Quel est le plus petit sous groupe de $(range(2019), +_{mod\ 2019})$ contenant 51 ?

Raisonnons déjà par conditions nécessaires pour commencer.

Si un sous-groupe de $(range(2019), +_{mod\ 2019})$ contient 51, il contient $51 + 51$, $51 + 51 + 51$ et ainsi de suite.
Il contient tous les multiples de 51. Jusqu'à 2040. On réduit : 21 est dans le sous-groupe.

Le sous-groupe contient 51 et 21, il contient leur différence : 30.

Il contient 30 et 21, il contient leur différence : 9.

Il contient 9, 18 et 21, il contient 3.Et l'algorithme d'Euclide s'arrête ici (car c'est bien lui !).

Le sous groupe contient 3, il contient tous ses multiples.

Et si on s'arrêtait là ? Et si on passait à la condition suffisante ?

L'ensemble $\{3.k \mid k\ in\ range(673)\}$ est une partie de 2019, contenant 0.
Elle est stable par addition. La somme de deux multiples de 3 reste un multiple de 3, même quand on la réduit modulo 3×673.
Et l'opposé de $3.k$ est $(673 - k).3$, c'est encore un multiple de 3.

Remarque : puis-je sanctionner l'élève qui se contentera de répondre $\{(51.k)\ mod\ 2019 \mid k\ in\ range(2019)\}$

◦13◦ On pose $A = \{a + b.\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$, $B = \{a + b.\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2,\ a^2 + b^2 \neq 0\}$ et $C = \{a + b.\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2,\ a.b \neq 0\}$.
La loi est la multiplication. Montrez qu'un de ces ensembles et un seul est un groupe.

Pour les ensembles comme $\{a + b.\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$, la multiplication est toujours commutative et associative, puisque l'on est sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.
On trouve le neutre : $1 = 1 + 0.\sqrt{2}$. Il est dans A. Mais pas dans C *($C = \{a + b.\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2,\ a.b \neq 0\}$, ici b est nul).*
Pour la stabilité on prend $a + \sqrt{2}.b$ et $c + \sqrt{2}.d$ et on les multiplie : $(a.c + 2.b.d) + \sqrt{2}.(a.d + b.c)$.
Les deux nombres $(a.c + 2.b.d)$ et $(a.d + b.c)$ sont des rationnels *($(\mathbb{Q}, +, .)$ est un corps).*
A est stable par multiplication. On se demande si C l'est aussi.
A priori, comme $a + b.\sqrt{2}$ est dans C, il est interdit à a et b d'être nuls tous deux en même temps. Et de même c et d ne sont pas nuls tous deux en même temps.
Mais on ne peut pas déduire comme ça que $a.c + 2.b.d$ est non nul. On n'a pas de stabilités de $\mathbb{Q}^*$ par addition. Par exemple, $1.3 + 3.(-1)$ est nul, avec quatre rationnels non nuls.

Que vous ne sachiez pas alors traiter la question, je peux le comprendre, tout le monde n'ira pas à Centrale,Mines,X...
Que vous n'ayez pas vu la difficulté, je ne peux pas le comprendre, vous voulez être ingénieurs.
Que vous ayez vu la difficulté mais l'ayez mise sous le tapis, je refuse de le comprendre, c'est pas Dauphine, c'est MPSI !

Est il possible que $a.c + 2.b.d$ et $a.d + b.c$ soient tous les deux nuls ?

Il faudrait alors que la somme $(a.c + 2.b.d) + \sqrt{2}.(a.d + b.c)$ soit nulle. Mais cette somme est $(a + \sqrt{2}.b).(c + \sqrt{2}.d)$ et par intégrité de la célèbre multiplication dans $\mathbb{R}$, elle n'est nulle que pour $a + \sqrt{2}.b = 0$ ou $c + \sqrt{2}.d = 0$. Mais alors on aurait $\sqrt{2} = \dfrac{-a}{b}$ *(quotient de deux rationnels, donc rationnel, contradiction)* ou $\sqrt{2} = \dfrac{-c}{d}$ *(même contradiction).*
C est stable par multiplication.

Reste l'affaire des inverses. L'inverse de $a + \sqrt{2}.b$ est $\dfrac{1}{a + \sqrt{2}.b} = \dfrac{a - \sqrt{2}.b}{(a + \sqrt{2}.b).(a - \sqrt{2}.b)}$.
On l'écrit $\dfrac{a}{a^2 - 2.b^2} - \sqrt{2}.\dfrac{b}{a^2 - 2.b^2}$ *($a^2 + 2.b^2$ ne peut pas être nul, sans avoir $a = 0$ puis $b = 0$ sinon, $\sqrt{2}$ serait rationnel, égal à $\pm\frac{a}{b}$).* Les deux quotients $\dfrac{a}{a^2 - 2.b^2}$ et $\dfrac{-b}{a^2 - 2.b^2}$ existent et sont rationnels. Sauf si $a = b = 0$. L'ensemble A contient un élément non inversible. $(A, \times)$ n'est pas un groupe.

En revanche, si ni a ni b n'est nul, aucun des deux rationnels ne peut être nul.
Bref, $\boxed{\text{le groupe est } (B, \times)}$

Mon rôle est certes de voir si vous savez apprendre un cours (exemple : interne, associative, neutre, symétrique...). *Mais surtout de voir si vous savez vous poser les bonnes questions. Le premier est question de travail personnel. Le second est question de cerveau.*

∘14∘ Est il possible que les trois droites d'équations $x + y = a$, $a.x + y = 1$ et $x + a.y = 1$ aient un seul point d'intersection ?

Pour a égal à 1, c'est trois fois la même droite.
Elles n'ont pas un point d'intersection, mais une infinité.
Mais sinon ?

Pour a égal à -1, les deux équations $-x + y = 1$ et $x - y = 1$ sont incompatibles *(droites parallèles, sans point d'intersection)*.
On intersecte avec $x + y = -1$, on a deux points d'intersection au total.

On espère que dans le cas général on a trois droites, elles ont deux à deux un point d'intersection, et au total trois points *(un triangle)*.
Serait il possible que ces trois droites soient concourantes ?

Le système $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ a.x & + & y & = & 1 \\ x & + & a.y & = & 1 \end{array}\right|$ se résout directement.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ a.x & + & y & = & 1 \\ x & + & a.y & = & 1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ a.x & + & y & = & 1 \\ (1-a).x & + & (a-1).y & = & 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ a.x & + & y & = & 1 \\ & & y & = & x \end{array}\right|$$

(puisque $a \neq 1$, le cas $a = 1$ est traité à part).

On reporte et on trouve : $x = y = \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{1+a}$ (on a traité le cas $a = -1$ à part).
Si a est mal choisi, c'est impossible. Sinon, on a effectivement trois droites concourantes (cas $a = -2$).

$a = -2$	$a = -1$	$a = 1$	autres cas
trois droites co-sécantes en un point	deux droites parallèles et une droite qui les coupe	une seule droite	un triangle

---

∘15∘ ♡ Montrez que l'ensemble des polynômes nuls en 1 est un groupe pour l'addition.

Le polynôme nul est nul en 1.
La somme de deux polynômes nuls en 1 est nulle en 1.
L'opposé d'un polynôme nul en 1 est nul en 1.
C'est tout.
On a montré qu'on avait un sous groupe du groupe de tous les polynômes.

Attention, ne pas se contenter de « l'opposé du polynôme P est le polynôme $-P$ ».
On doit montrer que le symétrique existe, certes, mais aussi et surtout « existe dans l'ensemble ».
Pareil pour le neutre. Si vous vous contentez de donner le neutre mais ne vérifiez pas qu'il est dans l'ensemble, vous n'avez rien fait...

∘16∘ Comment s'appelle un anneau $(A, \oplus, \otimes)$ vérifiant $\forall (a,\ b) \in A^2,\ a \otimes b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \textit{ et } b = 0)$?

Un anneau intègre ? Sauf que intègre c'est $\forall (a,\ b) \in A^2,\ a \otimes b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \textit{ ou } b = 0)$.
Ici, les deux sont nuls. C'est louche.

L'anneau peut il contenir autre chose que l'élément nul (neutre de la première loi) ?
On prend un élément a quelconque. Les résultats classiques dans un anneau donnent alors $a \otimes 0 = 0$.
En appliquant alors la quantification au couple $(a,\ 0)$, on a $a \otimes b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \textit{ et } 0 = 0)$.
L'essentiel est $a = 0$.
L'anneau est réduit au seule élément nul de sa première loi.
Et est ce bien un anneau : $(\{0\}, \oplus, \otimes)$?

∘17∘ Donnez une primitive de $x \longmapsto Arctan(\sqrt{x})$.
Donnez une primitive de $x \longmapsto \sqrt{x}.Arctan(\sqrt{x})$.
Donnez une primitive de $x \longmapsto \dfrac{Arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

Par parties

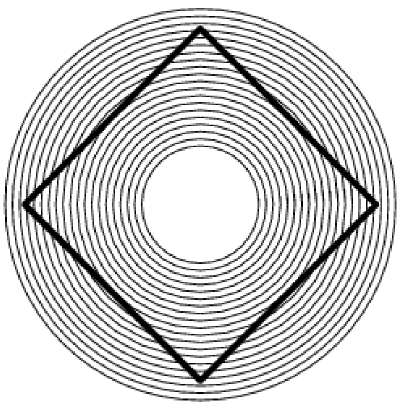
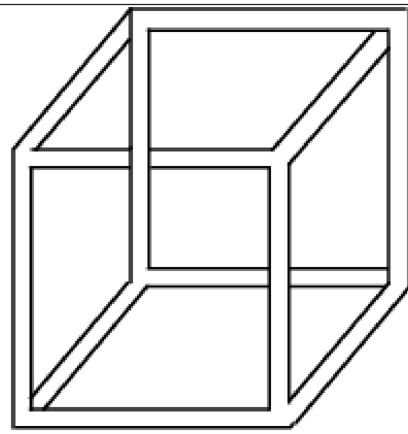
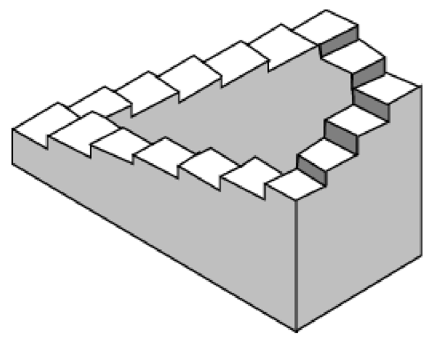
1	$\hookleftarrow$	$1+x$
$Arcsin(\sqrt{x})$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{1}{2.\sqrt{x}.(1+x)}$

toute l'idée est dans $1 = x$ au lieu du x habituel.

$Arctan(\sqrt{x})$ a pour primitive $x \longmapsto (x+1).Arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x}$

Comment allez vous arriver à la primitive suivante : $x \longmapsto \dfrac{2}{3}.x^{3/2}.Arctan(\sqrt{x}) - \dfrac{x}{3} + \dfrac{\ln(x+1)}{3}$?

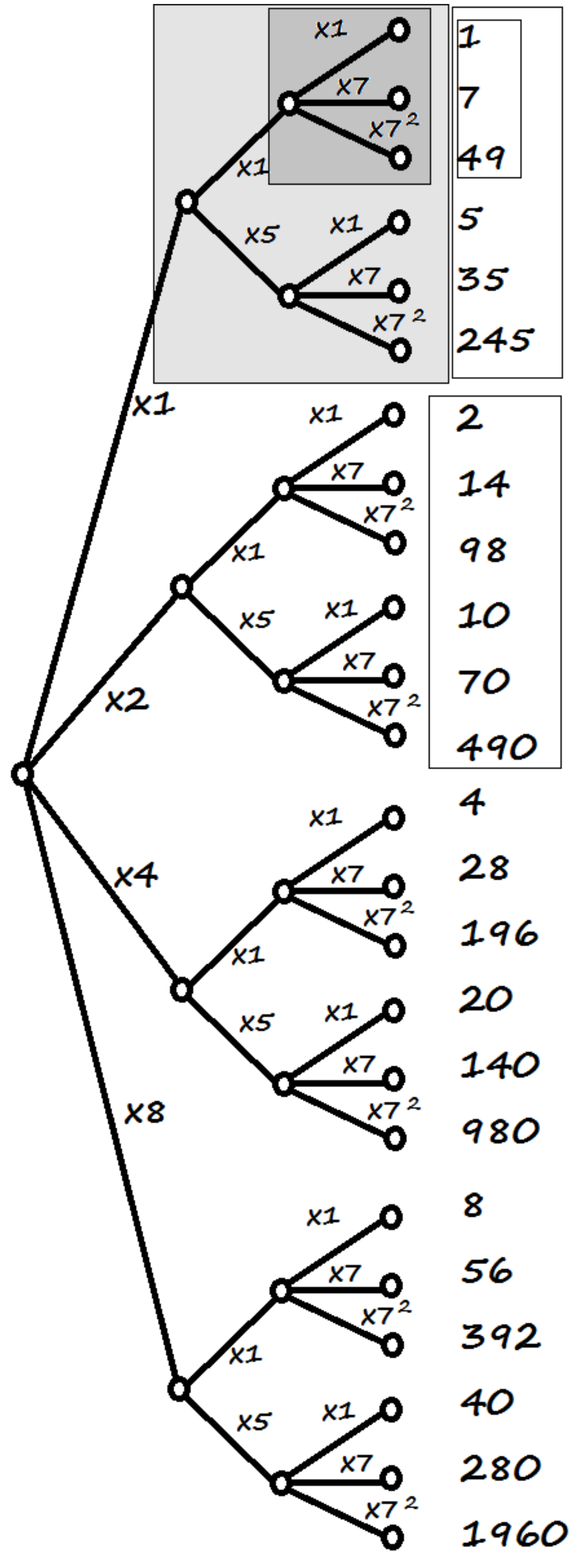
Pour $x \longmapsto \dfrac{Arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ on va changer de variable. On a une forme en $u'.Arctan(u)$. On intègre avec une primitive de $Arctan$ déjà connue.
On trouve $x \longmapsto 2.\sqrt{x}.Arctan(\sqrt{x}) - \ln(x+1)$.

♡ Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k-1}{k!}$ en y trouvant la somme télescopique cachée.

Cette fois, c'est $\dfrac{1}{(k-1)!} - \dfrac{1}{k!}$. Et la somme vaut $-1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$. On trouve $\boxed{\dfrac{-1}{n!}}$ *(et le signe s'explique par le premier terme négatif, à traiter à part).*

∘18∘ Montrez que la somme des diviseurs de $2^3.5.7^2$ vaut 5130. Existe-t-il un entier dont la somme des diviseurs vaut 2021 ?



Les diviseurs de $2^3.5.7^2$ sont à écrire sous forme de produit de facteurs premiers eux aussi :
$2^a.5^b.7^c$ avec • $0 \leqslant a \leqslant 3$
• $0 \leqslant b \leqslant 1$
• $0 \leqslant c \leqslant 2$
On peut faire un arbre pour lister ces diviseurs.

Ceci permet de se convaincre qu'il y a 4.2.3 diviseurs.

Pour aussi se convaincre :

```
Div = [ ]
for a in range(4) :
...for b in range(2) :
......for c in range(3) :
.........d = (2**a)*(5**b)*(7**c)
.........Div.append(d)
.........S += d
```

Et pour la somme ?
La première zone grisée a pour somme $1+7+7^2$.
Elle est suivie juste au dessous d'une zone où les diviseurs sont cinq fois plus grands.
La zone grisée un peu plus grande a pour somme $(1+7+7^2)+5.(1+7+7^2)$ soit $(1+5).(1+7+7^2)$.

La zone suivante juste encadrée a la même somme, multipliée par 2.

Puis multipliée par 4.

Puis multipliée par 8.

On arrive au total $(1+2+2^2+2^3).(1+5).(1+7+7^2)$.

Et d'ailleurs, en développant $\Big(\sum_{a=0}^{3} 2^a\Big).\Big(\sum_{b=0}^{1} 5^b\Big).\Big(\sum_{c=0}^{2} 3^c\Big)$ on a bien la somme des $2^a.5^b.7^c$.

On a donc une formule pour la somme des diviseurs d'un entier connu sous forme de produit de facteurs premiers.

$2^a.3^b.5^c.7^d.11^e\dots$ a $(a+1).(b+1).(c+1).(d+1)\dots$ diviseurs a pour somme des diviseurs $(1+2+\dots+2^a).(1+3+\dots+3^b).(1+5+\dots+5^c)\dots$ (formule valable même si des exposants valent 0)

Peut on alors atteindre 2021 avec une telle formule ?
Sachant que 2021 vaut 43.47 il faudrait avoir $(1+2+4+\dots+2^a)=43$ ou $(1+2+4+\dots+2^a)=47$ ou avec d'autres nombres premiers.

Il suffit sinon d'attaquer les entiers plus petits que 2020 puisque la somme des diviseurs de n dépasse n.

D'ailleurs, un cadeau :

```
def SommeDiv(n) : #int -> int, somme des diviseurs
....S = 0 #initialisation d'un accumulateur
....for k in range(1, n+1) : #attention, k=0 est refusé, mais k=n doit être inclus
........if n%k == 0 : #test « k divise n », c'est à dire « n modulo k vaut 0 »
............S += k #on ajoute à la somme
....return S #la somme est calculée
```

Euh, non, on ne lance pas celui là, il risque de ne jamais s'arrêter.

```
n = 0
while Somme Div(n) != 2021 and n < 2021 :
....n += 1
```

	D		A		B	
C	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	B
	.	.	.	.	.	
			C	C		

	A		B		C	
	.	.	.	.	.	D
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
A	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
		D	D			

Joël Martin (la Comtesse du Canard) à Paris :
Paris aux prestigieuses scènes est la capitale mondiale capitale du luxe. On y rencontre plein de titis qui rusent et bisent des copines à l'air cool. On voit plein de péniches à la Seine et plein de bus faciles à citer. On entend parfois soupirer des touristes subjugués par l'abîme dans la Tour : "Ah que j'aurais aimé connaître vos motivations, Eiffel !"

Et Joël Martin en Haute-Savoie (ah le goût de Mont-Blanc) :
Les amateurs de pentes collectionnent les faces, épatés par les faces et les pentes effilées. Une grimpeuse qui apprécie la Verte quand elle est jolie, et surtout la Verte enneigée, parcourt le mont sans craindre le vide. Une autre luge sous la Verte. Mais gare à l'excès de glisse quand se déchaîne le vent... détresse sur les faces !

Règle du jeu : sur chaque ligne, les lettres de A à D et une case transparente. Et au bout, l'indication de « qui on voit depuis ce bord ».

	A	C		A		
	A	C	D		B	
D	D	B	C	A		A
A		A	B	D	C	
C	C		A	B	D	D
	B	D		C	A	

∘19∘ Télescopez la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k+1)!}$.

$$\frac{k^2+k-1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

On télescope $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k)!} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k)!}$

Il reste plusieurs termes (on a déjà isolé celui d'indice 0) :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k+1)!} = \frac{-1}{1!} + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}}$$

∘20∘

♡ Calculez $\sum\limits_{\substack{0\leq i\leq n\\0\leq j\leq n}}(i-j)$
et calculez aussi $\sum\limits_{\substack{0\leq i\leq n\\0\leq j\leq n}}|i-j|$ (là, c'est plus ♠).

Quand il y a un terme positif dans la première, il y a le même avec un signe moins.
Et de toutes façons, $\sum\limits_{\substack{0\leq i\leq n\\0\leq j\leq n}} i$ et $\sum\limits_{\substack{0\leq i\leq n\\0\leq j\leq n}} j$ sont égales par « symétrie des rôles ».
La première somme est nulle.

La somme $\sum\limits_{\substack{0\leq i\leq n\\0\leq j\leq n}}|i-j|$ est faite de variables indépendantes (pour l'instant) : i et j.
Elle est faite de $(n+1)^2$ termes. On va sommer en lignes :

$$\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\0\leq j\leq n}}|i-j|=\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{n}|i-j|\Big)$$

Maintenant, pour chaque i, on découpe en deux par relation de Chasles, pour distinguer les signes.

$$\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\0\leq j\leq n}}|i-j|=\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{i-1}|i-j|+0+\sum_{j=i+1}^{n}|i-j|\Big)$$

On efface alors la valeur absolue (sommes $i+(i-1)+(-i-2)+\ldots+2+1+0+1+2+3+4+\ldots+(n-i)$) :

$$\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\0\leq j\leq n}}|i-j|=\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{i-1}(i-j)+0+\sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\Big)$$

On calcule chacune de ces sommes arithmétiques $\sum\limits_{j=0}^{i-1}(i-j)=i.\dfrac{i+1}{2}$ (nombre de termes, moyenne, ou même renversement et $\sum\limits_{k=1}^{i}$)
$\sum_{j=i+1}^{n}(j-i)=(n-i).\frac{1+n-i}{2}$ (même travail)

On remplace :

$$\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\0\leq j\leq n}}|i-j|=\sum_{i=0}^{n}\Big(\frac{i^2+i}{2}+\frac{(n-i).(n-i+1)}{2}\Big)$$

On sépare en deux sommes et on réindexe la seconde :

$$\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\0\leq j\leq n}}|i-j|=\sum_{i=0}^{n}\Big(\frac{i^2+i}{2}\Big)+\sum_{i=0}^{n}\Big(\frac{(n-i).(n-i+1)}{2}\Big)$$

$$\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\0\leq j\leq n}}|i-j|=\sum_{i=0}^{n}\Big(\frac{i^2+i}{2}\Big)+\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{k^2+k}{2}\Big)$$

[1]

Il ne reste qu'à sommer $\dfrac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$ et $\dfrac{n.(n+1)}{2}$ (et diviser par 2).

On trouve $\boxed{\sum\limits_{\substack{0\leq i\leq n\\0\leq j\leq n}}|i-j|=\dfrac{n.(n+1).(n+2)}{6}}$ et ça doit cacher quelquechose, non ?

---

1. c'est deux fois la même somme, est-ce normal selon vous ?

Sinon, on peut déjà dédoubler la somme et s'intéresser à un découpage « en diagonale » :

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$		
$i=0$	0	1	2	3	4	5	6		
$i=1$	1	0	1	2	3	4	5	$\searrow$	
$i=2$	2	1	0	1	2	3	4	$\searrow$	$n.1$
$i=3$	3	2	1	0	1	2	3	$\searrow$	
$i=4$	4	3	2	1	0	1	2	$\searrow$	$4.(n-3)$
$i=5$	5	4	3	2	1	0	1	$\searrow$	$3.(n-2)$
$i=6$	6	5	4	3	2	1	0	$\searrow$	$2.(n-1)$
									$1.n$

La somme est le double de $\sum_{d=1}^{n} d.(n-d)$.

Et après calcul, le résultat est le même...

∘21∘

♡ Encadrez $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2}$ par $\frac{1}{2.n}$ et $\frac{1}{n}$. Déduisez la limite de cette suite.

Écrivez un script Python qui calcule *(approximation réelle)* cette somme pour n donné.

♣ Conjecturez à la calculatrice la limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$ quand n tend vers l'infini *(la démonstration viendra plus tard)*.

Le plus simple pour encadrer une somme ? On compte le nombre de termes, et on encadre chaque terme.

comme k^2 est entre 0 et n^2, chaque $\frac{1}{k^2+n^2}$ est entre $\frac{1}{2.n^2}$ et $\frac{1}{n^2}$.

On somme de 1 à n car il y a n termes : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2}$ est entre $\frac{n}{2.n^2}$ et $\frac{n}{n^2}$.

Avec $\frac{1}{2.n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n}$ et le théorème d'encadrement, la suite du milieu tend vers 0.

La chose à ne pas dire : chaque terme de la somme tend vers 0, donc la somme tend vers 0.
Mais ce n'est pas une somme de suites. Car le nombre de termes tend lui même vers $+\infty$.

Piège : *Tenez, dans* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$*, chaque* $\frac{1}{n}$ *tend vers* 0.

Mais la somme $\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}$ *(n termes) vaut* 1 *et ne tend pas vers* 0.

```
def Somme(n) :
....S, n2 = 0, n*n
....for k in range(1,n+1) :
........S += 1/(k*k+n2)
....return n*S
```

Vous devinez que ça va faire $\frac{\pi}{4}$? On le prouvera plus tard, avec les « somme de Riemann ».

∘22∘

Complétez : $\sum_{k=0}^{?} x^{2.[\sqrt{k}]} = \sum_{p=0}^{n-1} (2.p+1).x^{2.p}$ (découpage en tranches).

On découpe par tranches en fonction de la valeur de l'exposant, qui est un entier, mais qui augmente de 1 chaque fois qu'on passe par un carré parfait.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		24	25
x^0	x^1	x^1	x^1	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^3	x^3	x^3	x^3	x^3	x^3	x^3	x^4		x^4	x^4
$1.x^2$	$3.x^1$			$5.x^2$					$7.x^3$							$9.x^4$			

$$\sum_{k=0}^{n^2-1} x^{2.[\sqrt{k}]} = \sum_{p=0}^{n-1} (2.p+1).x^{2.p}$$

Il y a n^2 termes dans la première somme qu'on regroupe en $\sum_{p=0}^{n-1} \Big(\sum_{k=p^2}^{p^2+2.p} x^{2.[\sqrt{k}]} \Big)$ puis $\sum_{p=0}^{n-1} \Big(\sum_{k=p^2}^{p^2+2.p} x^{2.p} \Big)$ et il ne reste qu'à compter.

∘23∘

On définit une autre multiplication matricielle, dite *multiplication industrielle*, car elle intervient dans les enchainements et mises en parallèle de processus dans les chaines de fabrication et production. On y remplace les additions par des Max et les multiplication par des additions ; $c_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.b_j^k$ devient donc $c_i^k = Max(a_i^j + b_j^k \mid j \leq n)$.

Calculez $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculez $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et même $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\boxtimes n}$ *(puissance n matricielle)*.

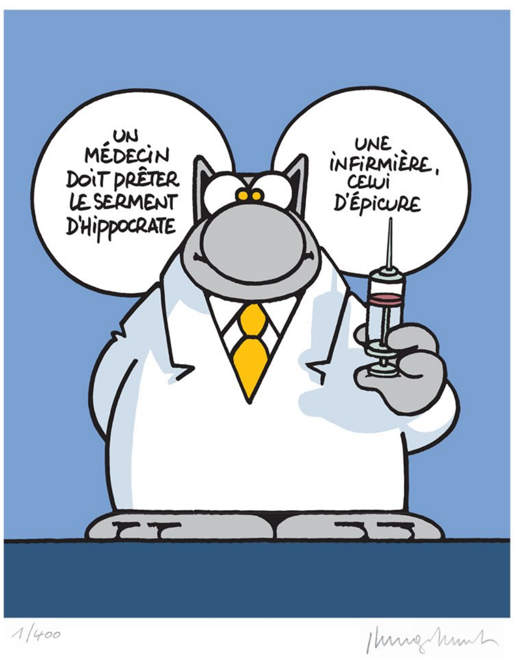
Écrivez une procédure ***Python*** qui prend en entrée deux matrices carrées de même taille et rend leur produit industriel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 4+1 & 2+2 \\ 2+3 & 3+3 & 2+3 \\ 3+2 & 3+4 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+1 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ (mais au fait, elle es associative ou pas, cette loi ?)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$ et par récurrence $\begin{pmatrix} n & n-1 & n-1 \\ n-1 & n & n-1 \\ n-1 & n-1 & n \end{pmatrix}$.



Les dures luttes sont pénibles quand on n'a que vingt ans.
Le prof de français trouve les jeux de Queneau un peu ridicules.
La latiniste n'apprécie pas les bottes antiques.
On a besoin de l'été pour se dépasser.
Il est arrivé officier en peinant.
Agités dans le Vexin, ils séduisent dans le Perche.
Elle n'apprécie pas les cakes de mimolette (translation).
Des trombones gênent votre Pise.

Règle du jeu : sur chaque ligne, les lettres de A à D et une case transparente. Et au bout, l'indication de « qui on voit depuis ce bord ».

	A	C		A		
	A	C	D		B	
D	D	B	C	A		A
A		A	B	D	C	
C	C		A	B	D	D
	B	D		C	A	

	D	B		D		
	.	.	.	.	.	
A	.	.	.	.	.	D
D	.	.	.	.	.	
B	.	.	.	.	.	A
	.	.	.	.	.	
					D	

		C		B		
C	.	.	.	.	.	
B	.	.	.	.	.	D
	.	.	.	.	.	A
D	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
			B			

	C		A			
B	.	.	.	.	.	D
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	D
	.	.	.	.	.	C
	.	.	.	.	.	
	B					

∘24∘

On rappelle que $(S_5, \circ)$ est un groupe, de cardinal 120. Je n'en demande ni la liste des éléments ni le tableau de la loi de composition. Je vous demande de me donner un sous-groupe de cardinal 1, un sous-groupe de cardinal 2, un sous-groupe de cardinal 3, un sous-groupe de cardinal 4, un sous-groupe de cardinal 5, un sous-groupe de cardinal 6.

DansS_5, il y a l'identité, des cycles de taille 2 (comme $\overrightarrow{(1\ 3)}$), des cycles de taille 3 (comme $\overrightarrow{(1\ 4\ 3)}$), des cycles de taille 4 (comme $\overrightarrow{(1\,3\,2\,4)}$), des cycles de taille 5 (comme $\overrightarrow{(1\,3\,2\,5\,4)}$), mais aussi des objets composites faits de deux bicycles (comme $\overrightarrow{(1\,3)} \circ \overrightarrow{(2\,5)}$) ou un bicycle et un tricycle.

• Le sous groupe le plus simple est $\{Id\}$.

• Vous en voulez un de cardinal 2 : prenez un bicycle $\{Id,\ \overrightarrow{(1\,2)}\}$.

• Vous en voulez un de cardinal 3 : prenez un tricycle et son inverse : $\{Id,\ \overrightarrow{(1\,2\,3)},\ \overrightarrow{(3\,2\,1)}\}$.

• Et de cardinal 4 ? On ne s'en douterait pas : $\{Id,\ \sigma,\ \sigma^2,\ \sigma^3\}$ avec $\sigma = \overrightarrow{(1\,2\,3\,5)}$, et $\sigma^{-1} = \sigma^3$.

• Allez, on pose $\varsigma = \overrightarrow{(1\,2\,3\,4\,5)}$ vérifiant $\varsigma^{-1} = \varsigma^4$ et on prend le groupe $\{Id,\ \varsigma,\ \varsigma^2,\ \varsigma^3,\ \varsigma^4\}$.

Pour le cardinal 6, on ne peut pas prendre un cycle de taille 6, on n'a pas ça en magasin. Alors quoi ? Un bicycle et un tricycle :
$\varphi = \overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4\,5)}$, et on a la liste de ses puissances

$\varphi^0 = Id$	$\varphi = \overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4\,5)}$	$\varphi^2 = \overrightarrow{(5\,4\,3)}$	$\varphi^3 = \overrightarrow{(1\,2)}$	$\varphi^4 = \overrightarrow{(3\,4\,5)}$	$\varphi = \overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(5\,4\,3)}$

Quand on compose ces éléments entre eux, on obtient toujours un d'entre eux. On a un sous-groupe de $(S_5,\ \circ)$, et son cardinal est 6.
Ah oui, pour les inverses : $\varphi^6 = Id$, donc φ^k a pour inverse φ^{6-k}.

∘25∘ ♣ Combien de permutations de S_6 sont des carrés *(c'est à dire peuvent s'écrire $\sigma \circ \sigma$ pour au moins une permutation σ)* ?
Combien sont des cubes ?
Combien le cycle $\overrightarrow{1\,3\,5}$ a-t-il de racines carrées ?

Il y a 120 permutations, ce serait long de tenter de traiter toute la liste.
Mais on en élimine la moitié directement : si φ s'écrit $\varphi = \sigma \circ \sigma$ alors on a $Sgn(\varphi) = Sgn(\sigma)^2 = 1$ (la signature).
Ce ne peuvent être que des permutations de signature 1.
Par exemple $Id = Id^2$ (facile)
$\overrightarrow{(a\ b\ c)} = \overrightarrow{(a\ c\ b)} \circ \overrightarrow{(a\ c\ b)}$ (plus joli)
$\overrightarrow{(a\ c)} \circ \overrightarrow{(b\ d)} = \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$
mais $\overrightarrow{(a\ b)}$ ne peut êttre le carré de personne, sans rien essayer, jusqte parce que -1 n'est le carré de personne.

On dresse une taxonomie [2] des permutations et on élimine celles de signature -1,

signature -1	$\overrightarrow{(a\ b)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(d\ e)}$
	$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d,\ e\ f)}$	
signature 1	Id	$\overrightarrow{(a\ b\ c)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(d\ e\ f)}$
	$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(c\ d)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d,\ e)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f)}$

et pour celles de signature 1, on trouve des racines carrées, en regardant déjà à quoi ressemble le carré de ces permutations :

permutation	$\overrightarrow{(a\ b)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(d\ e)}$	$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d,\ e\ f)}$
carré	Id	$\overrightarrow{(a\ c)} \circ \overrightarrow{(b\ d)}$	$\overrightarrow{(a\ c\ b)}$	Id	$\overrightarrow{(a\ c\ e)} \circ \overrightarrow{(b\ d\ f)}$
	Id a beaucoup de racines				
Id	$\overrightarrow{(a\ b\ c)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(d\ e\ f)}$	$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(c\ d)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d,\ e)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f)}$
Id	$\overrightarrow{(a\ c\ b)}$	$\overrightarrow{(a\ c\ b)} \circ \overrightarrow{(d\ f\ e)}$	Id	$\overrightarrow{(a\ c\ e\ b'd)}$	$\overrightarrow{(a\ c)} \circ \overrightarrow{(b\ e)}$

Les cycles de taille impaire s'élèvent au carré en cycles de même taille.
Les cycles de taille paire s'élèvent au carré en se cassant en deux cycles plus petits.

Un objet tel que $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f)}$ malgré sa signature 1 n'a pas de racine carrée.

$\overrightarrow{(1\,2\,3)}$ a pour racine carré $\overrightarrow{(1\,3\,2)}$ (ne pas citer $\overrightarrow{(3\,2\,1)}$ c'est la même),
mais aussi des choses comme $\overrightarrow{(1\,3\,2)} \circ \overrightarrow{(4\,5)}$.
Il suffit de mettre à côté du tricycle un bicycle fait de deux éléments parmi les trois qui restent.

---

2. La taxonomie ou taxinomie est une branche des sciences naturelles qui a pour objet l'étude de la diversité du monde vivant. Cette activité consiste à décrire et circonscrire en termes d'espèces les organismes vivants et à les organiser en catégories hiérarchisées... bref, tout ça pour ne pas dire qu'on fait une classification

Il y a donc une racine en simple tricycle et trois du type « tricycle rond bicycle ».

◦26◦ Complétez la permutation suivante pour que sa signature vaille -1 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & * & 4 & * \end{pmatrix}$. Pouvez vous alors la décomposer à l'aide de $\overrightarrow{1\,2\,3}$ et $\overrightarrow{2\,3\,4}$?
Et si on impose "signature égale à 1" ?
Rappel : la signature d'une permutation est $(-1)^k$ où k est le nombre de bicycles d'une décomposition de σ.

pour que ce soit une permutation, on n'a guère le choix			
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	ou	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
décomposition	$\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}$		$\overrightarrow{(1\,2\,3\,4)}$
signature	$(-1) \times (-1)$		$(-1)^3$
			c'est elle

Mais on ne peut pas la décomposer avec les tricycles.
$\overrightarrow{(1\,2\,3)}$ et $\overrightarrow{(2\,3\,4)}$ ont pour signature 1. En les composant de multiples façons, on n'aura que des permutations de signature 1 et jamais le quadricycle de signature -1.

En revanche, le double bicycle $\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}$ peut peut-être se décomposer avec $\overrightarrow{(1\,2\,3)}$ et $\overrightarrow{(2\,3\,4)}$.

Mais on n'en a aucune garantie. Au mieux, la signature ne donne pas de contradiction.
Et alors ? Il peut y en avoir une ailleurs sur un autre invariant que la signature !
Il n'y a que deux façons de prouver qu'une décomposition existe :
- en donner une
- ou raisonner comme un chimiste

Bref, il n'y a qu'une façon de faire : en donner une.

Par exemple $\boxed{\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)} = \overrightarrow{(1\,2\,3)} \circ \overrightarrow{(2\,3\,4)}}$

(le premier essai fut le bon, j'ai de la chance !).

◦27◦ Par combien de 0 se termine l'écriture décimale de $\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant 5} 2^i.3^j.5^k$? [a]

[a] par « écriture décimale, je veux dire écriture en base 10 (car il existe des écritures en base 2, 16 ou même -2), et pas écriture avec des chiffres derrière la virgule, car là vous pouvez mettre plein de 0

Visiblement, i, j et k vont bouger. Et seul l'exposant de 2 et de 5 va servir.
$2^{70}.3^{105}.5^{140}$. On va avoir 70 fois le chiffre 0 à la fin.

◦28◦ ♡ Calculez $\prod_{k=3}^{n} \frac{k^2}{k^2-4}$ *(si possible évidemment sans récurrence, vous êtes en MPSI2, non ?)*

On note A_n cette quantité lui donner un nom est déjà preuve d'intelligence
penser à ce que ce nom dépende de la n est preuve d'intelligence mathématique [a]

[a] pléonasme

$$A_n = \frac{\left(\prod_{k=3}^{n} k\right)^2}{\prod_{k=3}^{n}(k-2).(k+2)}$$

$$A_n = \frac{\left(\prod_{k=3}^{n} k\right)}{\prod_{k=3}^{n}(k-2)}.\frac{\left(\prod_{k=3}^{n} k\right)}{\prod_{k=3}^{n}(k-2)}$$

$$A_n = \frac{\prod_{k=3}^{n} k}{\prod_{k=1}^{n-2} k}.\frac{\prod_{k=3}^{n} k}{\prod_{k=5}^{n+2} k}$$

$$A_n = \frac{(n-1).n}{1.2}.\frac{3.4}{(n+1).(n+2)}$$

On peut simplifier un peu... si on y tient.

∘29∘

On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 10 & 5 & 4 & 6 & 14 & 11 & 1 & 8 & 15 & 2 & 7 & 9 & 13 & 12 \end{pmatrix}$. Déterminez sa signature, son ordre.
Résolvez $\sigma^n(1) = 13$ d'inconnue n dans $\mathbb{N}$.
Indiquez suivant la valeur de n le nombre de vrais cycles[a] que contient σ^n.

a. un cycle de taille 1 n'est pas compté comme cycle

A faire.

∘30∘

♣ A partir de quelle valeur de n existe-t-il dans S_n une permutation σqui contienne au moins un cycle de taille 4 et soit de signature 1.
Même question en exigeant de plus qu'il existe au moins une permutation φ vérifiant $\varphi \circ \varphi = \sigma$.

Pour un cycle de taille 4, il faut au moins 4 éléments.
Mais si on n'en a que quatre, la permutation a pour signature -1.
Il faut donc ajouter un bicycle et on a par exemple $\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4)} \circ \overrightarrow{(5\ 6)}$.

Mais cette permutation peut elle être le carré de quelqu'un ?
La réponse est non.
Si on élève au carré une permutation faite de cycles, on retrouve des cycles de même taille, ou des cycles qui se cassent en plusieurs cycles de même taille.

Par exemple $\overrightarrow{(1\ 2\ 3)}^2 = \overrightarrow{(1\ 3\ 2)}$
$\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4)}^2 = \overrightarrow{(1\ 3)} \circ \overrightarrow{(2\ 4)}$
$\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)}^2 = \overrightarrow{(1\ 3\ 5\ 2\ 4)}$
$\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)}^2 = \overrightarrow{(1\ 3\ 5)} \circ \overrightarrow{(2\ 4\ 6)}$

Ici, ni $\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4)}$ ni $\overrightarrow{(5\ 6)}$ ne peut être le carré de quelqu'un.
Et ils ne peuvent être issus ensemble d'un même cycle qui se serait rompu.

Finalement, il faut prendre $n = 8$: $\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4)} \circ \overrightarrow{(5\ 6\ 7\ 8)}$ contient un quadricycle
a pour signature 1
est le carré de $\overrightarrow{(1\ 5\ 2\ 6\ 3\ 7\ 4\ 8)}$

∘31∘

Décomposez les premières puissances de $\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)} \circ \overrightarrow{(10\ 11\ 12\ 13)}$ *(notée σ)* en produit de cycles de supports disjoints. Indiquez suivant l'exposant n le nombre de cycles de σ^n.
Existe-t-il une permutation φ vérifiant $\varphi \circ \varphi = \sigma$?
Existe-t-il une permutation φ vérifiant $\varphi \circ \varphi \circ \varphi = \sigma$?

Les deux cycles ont des supports disjoints. Chacun tourne donc dans son coin : $\sigma^n = \overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)}^n \circ \overrightarrow{(10\ 11\ 12\ 13)}^n$.
Mais chaque cycle de taille 9 ou 4 se casse en cycles plus petit suivant l'exposant.

	$\overrightarrow{(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9)}^n$	$\overrightarrow{(10\,11\,12\,13)}^n$
$n=0$	Id	Id
$n=1$	$\overrightarrow{(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9)}$	$\overrightarrow{(10\,11\,12\,13)}$
$n=2$	$\overrightarrow{(1\,3\,5\,7\,9\,2\,4\,6\,8)}$	$\overrightarrow{(10\,12)}\circ\overrightarrow{(11\,13)}$
$n=3$	$\overrightarrow{(1\,4\,7)}\circ\overrightarrow{(3\,6\,9)}\circ\overrightarrow{(2\,5\,8)}$	$\overrightarrow{(10\,13\,12\,11)}$
$n=4$	$\overrightarrow{(1\,5\,9\,4\,8\,3\,7\,2\,6)}$	Id
$n=5$	$\overrightarrow{(1\,6\,2\,7\,3\,8\,4\,9\,5)}$	$\overrightarrow{(10\,11\,12\,13)}$
$n=6$	$\overrightarrow{(1\,7\,4)}\circ\overrightarrow{(3\,9\,6)}\circ\overrightarrow{(2\,8\,5)}$	$\overrightarrow{(10\,12)}\circ\overrightarrow{(11\,13)}$
$n=7$	$\overrightarrow{(1\,8\,6\,4\,2\,9\,7\,5\,3)}$	$\overrightarrow{(10\,13\,12\,11)}$
$n=8$	$\overrightarrow{(1\,9\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,2)}$	Id
$n=9$	Id	$\overrightarrow{(10\,11\,12\,13)}$
$n=10$	$\overrightarrow{(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9)}$	$\overrightarrow{(10\,12)}\circ\overrightarrow{(11\,13)}$
$n=11$	$\overrightarrow{(1\,3\,5\,7\,9\,2\,4\,6\,8)}$	$\overrightarrow{(10\,13\,12\,11)}$
$n=12$	$\overrightarrow{(1\,4\,7)}\circ\overrightarrow{(3\,6\,9)}\circ\overrightarrow{(2\,5\,8)}$	Id

Je ne poursuis pas, la période est de 4 pour l'un et 9 pour l'autre, d'où 36 au final.

On peut au moins indiquer combien de cycles on a

$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$	$n=12$				
0	2	3	4	1	2	4	2	1	1	3	2	3				

σ a pour signature $(-1)^8.(-1)^3$,ce qui fait -1.
Comment voudriez vous qu'il y ait φ vérifiant $\varphi\circ\varphi=\sigma$ (auquel cas on aurait $Sgn(\varphi)^2=-1$).

Il n'y a pas de contradiction pour la signature à demander $\varphi^3=\sigma$. Mais il y en a peut être ailleurs.
En effet, si φ se décompose en produit de cycles, il faut
soit que ceux ci se conservent (mais ils seraient de longueur 9 et 4, or, un cycle de longfueur 9 élevé au cube se casse en trois tricycles)
soit que ceux ci se cassent, mais alors ils se cassent en cycles de même taille.
Il n'y a pas de φ possible.

◦32◦ Complétez $\begin{pmatrix} & -5 \\ 2 & \end{pmatrix}$ pour qu'elle se diagonalise en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a & -5 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ a pour trace $a+b$ et pour déterminant $a.b+10$.
On veut qu'elle ait pour trace 5 et déterminant 4.
a et b vérifient $a+b=5$ et $a.b=-6$.
On trouve tout de suite le couple $(-1,\ 6)$ et son « symétrique ».

Mais on ne s'arrête pas là. Pour l'instant, on a juste raisonné par conditions nécessaires.
Reste à être sûr qu'elle se diagonalise bien. C'est à dire à trouver effectivement P et à vérifier que P est inversible...

$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

S'arrêter à $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *n'est pas répondre à la question.*
C'est n'avoir raisonné que par conditions nécessaire, comme douze fois sur dix au lycée et au collège.
Mais raisonner juste par implications (conditions nécessaires), ce n'est pas raisonner.
C'est agir en automate (facile, tu apprends quarante trois règles, et tu ne te poses quasiment aucune question...).
Mais ensuite, se demander « ai je répondu à la question ? »,
c'est faire des maths
des sciences
de l'ingénierie
En arrivant à $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *vous avez juste prouvé que « si il y a des solutions, ce ne peut être que ».*

Mais avez vous prouvé qu'elles se diagonalisaient vraiment ainsi ? Non. pas tant que vous n'avez pas trouvé P [3].
Dans un devoir de maths, si vous résolvez mal l'équation du second degré conduisant à -1 et 6, vous perdrez un petit quart des points.
Si vous ne prouvez pas que P existe, vous perdez la moitié des points.
Faites votre choix.

◦33◦

Explicitez $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)}$ *(notée σ)* ainsi que $\overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$.
Résolvez l'équation $\sigma^n = Id$ d'inconnue n dans $\mathbb{N}$.

	$\overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)}$		$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$	
a	$\longrightarrow$	a	$\longrightarrow$	b
b	$\longrightarrow$	b	$\longrightarrow$	c
c	$\longrightarrow$	c	$\longrightarrow$	d
d	$\longrightarrow$	e	$\longrightarrow$	e
e	$\longrightarrow$	f	$\longrightarrow$	f
f	$\longrightarrow$	g	$\longrightarrow$	g
g	$\longrightarrow$	h	$\longrightarrow$	h
h	$\longrightarrow$	d	$\longrightarrow$	a

et

	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$		$\overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)}$	
a	$\longrightarrow$	b	$\longrightarrow$	b
b	$\longrightarrow$	c	$\longrightarrow$	c
c	$\longrightarrow$	d	$\longrightarrow$	e
d	$\longrightarrow$	a	$\longrightarrow$	a
e	$\longrightarrow$	e	$\longrightarrow$	f
f	$\longrightarrow$	f	$\longrightarrow$	g
g	$\longrightarrow$	g	$\longrightarrow$	h
h	$\longrightarrow$	h	$\longrightarrow$	d

On déroule en $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)} = \overrightarrow{(a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h)}$.

Mais aussi $\overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} = \overrightarrow{(a\ b\ c\ e\ f\ g\ h\ d)}$.
En recollant les deux quadricycles par un élément, on a crée un octocycle !

Les solutions de l'equation $\sigma^n = Id$ sont les multiples de 8. Pour faire des tours complets.

◦34◦

Soit $(G, .)$ un groupe où tout élément vérifie $x * x = 1$ (le neutre). Montrez que $(G, *)$ est commutatif.
(pensez à calculer $(a * b) * (a * b)$).

On se donne a et b. On veut montrer $a * b = b * a$.
On va appliquer la proprieté non seulement à a, mais aussi à b et à $a * b$.

On a $(a * b) * (a * b) = 1$.
On efface les parenthèses par associativité (et elle seule) : $a * (b * a) * b = 1$.
On compose à droite par b : $a * (b * a) * b * b = 1 * b$
$a * (b * a) = b$ car $b * b = 1$
On compose à gauche par a et il reste $(b * a) = a * b$. C'est fini.

◦35◦

♡ Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k.k!$ en y trouvant la somme télescopique cachée.

On écrit $k.k! = (k+1)! - k!$. On télescope en $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}((k+1)! - k!)$ en $\boxed{(n+1)! - 1}$

◦36◦

♡ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini du quotient de $\displaystyle\sum_{\substack{k\leqslant 2.n \\ k \text{ pair}}} k$ par $\displaystyle\sum_{\substack{k\leqslant 2.n \\ k \text{ impair}}} k$.

Le numérateur $\displaystyle\sum_{\substack{k\leqslant 2.n \\ k \text{ pair}}} k$ est $\displaystyle\sum_{p\leqslant n} 2.p$ et se simplifie donc en $2.\dfrac{n.(n+1)}{2}$.

Le dénominateur $\displaystyle\sum_{\substack{k\leqslant 2.n \\ k \text{ impair}}} k$ s'écrit $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}(2.p+1)$ et il vaut n^2.

Le quotient $\dfrac{n^2+n}{n^2}$ vaut $1 + \dfrac{1}{n}$ et converge vers 1.

---

3. *ou cité un théorème qui dit qu'« avec autant de valeurs propres distinctes que le format de la matrice c'est bon »*

∘37∘

	Q.C.M. de Roger Mansuy prof à Saint Louis	Vrai	Faux
a	Pour n dans $\mathbb{N}$, $\sum_{k=-n}^{n}(-1)^k = 0$		
b	$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_i^j\right) = \sum_{j=i}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i^j\right)$		
c	$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\equiv 1\ mod 2}} a_k = \sum_{p=0}^{[n/2]} a_{2.p+1}$		
d	$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$		
e	$\sum_{k=1}^{n} (a_k)^p = \sum_{p=1}^{n} (a_p)^k$		

a	Faux	il y a $2.n+1$ termes ! comment avoir 0 ?
b	Faux	le second membre n'a aucun sens
c	Presque vrai mais faux	k impair s'écrit $2.p+1$ et la condition donne $p \leqslant \frac{n-1}{2}$ prenez $n=2$ le second membre contient a_3
d	Vrai	évidemment
e	Faux	C'est quoi cette salade ?

∘38∘

Démontrez $\sum_{k=0}^{n} k^5 = \dfrac{n^2.(n+1)^2.(2.n^2+2.n-1)}{12}$ puis calculez $\sum_{\substack{k\leqslant 100\\ k\ impair}} k^5$ notée S.

Vous n'avez pas confiance ? Écrivez un script **Python** qui va calculer cette somme S.
♯ Vous avez confiance en vous pour la programmation : ajoutez le script qui va décomposer S *(ou tout autre nombre)* en produit de facteurs premiers.

Une récurrence et c'est gagné.

Ensuite $\sum_{\substack{k\leqslant 100\\ k\ impair}} k^5 = \sum_{k\leqslant 100} k^5 - \sum_{\substack{k\leqslant 100\\ k\ pair}} k^5$

$$\sum_{\substack{k\leqslant 100\\ k\ impair}} k^5 = \sum_{k\leqslant 100} k^5 - \sum_{p\leqslant 50} (2.p)^5$$

$$\sum_{\substack{k\leqslant 100\\ k\ impair}} k^5 = \sum_{k\leqslant 100} k^5 - 2^5.\sum_{p\leqslant 50} p^5$$

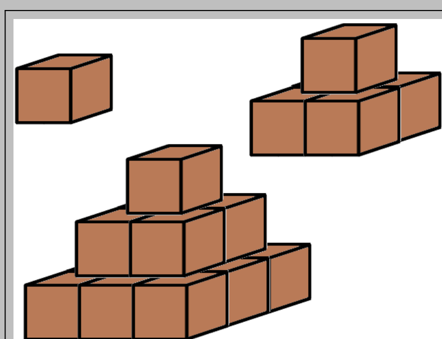
$$\sum_{\substack{k\leqslant 100\\ k\ impair}} k^5 = S_{100} - 2^5.S_{50}$$

$\sum_{\substack{k\leqslant 100\\ k\ impair}} k^5 = 83291672500$ et on s'en fout.

∘39∘

Le programme prend en entrée[a] un nombre de cubes n et indique la hauteur de la plus grande pyramide qu'il peut construire avec ces cubes. Les pyramides de taille 1, 2 et 3 sont visibles ci-contre.
Variante : les pyramides sont creuses.

La suite a est périodique de période 7 de premiers termes $(0, 7, 6, 5, 3, 2, 0)$, écrivez un script Python qui prend n en entrée et retourne a.



a. « prend en entrée **n** » ça veut dire **def Programme(n) :** et pas des **n = int(input('Donnez un entier n : '))** ; on fait de la programmation, pas de la discussion avec le chat Scratch ; et sinon, prend en entrée, ça ne veut pas dire « commande avant son plat principal une salade niçoise »

Les pyramides obtenues utilisent de plus en plus de cubes :

hauteur (=taille du carré de base aussi)	1	2	3	4
nombre de cubes utilisés	1	5	14	30

Mais le bon tableau est

hauteur (=taille du carré de base aussi)	1	2	3	4	5
couche complémentaire de base	1	4	9	16	25
nombre de cubes utilisés	1	5	14	30	55

Chaque couche représente k^2 cubes, et la pyramide de hauteur h a besoin de $\sum_{k=1}^{h} k^2$ cubes, c'est à dire $P_h = \frac{h.(h+1).(2.h+1)}{6}$.

La question est donc : pour n donné, quelle valeur peut atteindre h vérifiant $P_h = \frac{h.(h+1).(2.h+1)}{6} \leqslant n$.

Pour le physicien : on approxime : $P_h = \frac{h.(h+1).(2.h+1)}{6} \simeq \frac{h^3}{3}$ doit être de l'ordre de n : $h = \sqrt[3]{3.n}$.

Et pour la physicienne (plus rigoureuse que le physicien) : $h = \left\lfloor \sqrt[3]{3.n} \right\rfloor$ *(on arrondit à l'entier inférieur, par sécurité)*.

Mais c'est du travail à la louche, et ce n'est pas celui attendu de la part de l'informaticien.

Tant que P_h est plus petit que n, on passe au h suivant. On va utiliser une boucle conditionnelle avec incrémentation de h et calcul des P_h.

```
def Pyramide(n) :
....h=0
....while h*(h+1)*(2*h+1)/6 <= n :
........h += 1
....return h-1
```

On retourne h-1 car on est allé trop loin.
Mais le test est « inférieur ou égal » pour valider le cas où on arrive à bâtir une pyramide sans rien laisser de côté.

```
def Pyramide(n) :
....h, S = 0, 0
...while S <= n :
........h += 1
........S += h*h
....return h-1
```

Ce programme est plus dans l'esprit de l'informatique, en calculant la somme de manière cumulée. En plus, il correspond exactement à ce que ferait l'enfant, ajouter un étage tant qu'il a assez de briques. Mais le système scolaire va parfois pervertir l'approche naturelle en faisant mettre des équations partout. Ah, vite, des maths...

Ensuite, que se passe-t-il si la pyramide est creuse ? Il faut beaucoup moins de cubes pour chaque étage. On a juste besoin du tour du carré de côté n :

hauteur (=taille du carré de base aussi)	1	2	3	4	5	6	7
bordure complémentaire de base	1	4	8	12	16	20	24
nombre de cubes utilisés	1	5	13	25	41	61	

Pour chaque étage de plus, le nombre de cubes nécessaire augmente de 4 (chaque côté s'allonge de 1).
La bordure au rang n nécessite $4.n - 4$ cubes sauf au rang 0 qui nécessite quand même un cube.

Le nombre de cubes utiles est donc $1 + \sum_{k=2}^{n} (4.n - 4)$ et on trouve $2.n^2 - 2.n + 1$.

On notera que c'est aussi $\frac{h.(h+1).(2.h+1)}{6} - \frac{(h-2).(h-1).(2.h-3)}{6}$ puisqu'il faut prendre une pyramide plein de hauteur h et la creuser d'une autre, de hauteur $h-2$.

```
def PyramideCreuse(n) :
....h, S = 1, 1
...while S <= n :
........S += 4*h
........h +=1
....return h-1
```

Enfin, pour la suite :

```
def Suite(n) :
....L = [0, 7, 6, 5, 3, 2, 0]
....return L[n%7]
```

◦40◦ Démontrez par récurrence : $\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$ pour tout n. Et sans récurrence ?

On note P_n la propriété $\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$.

On initialise avec P_0 : d'un côté un produit vide et de l'autre $(0!)^1$: il y a égalité.
Et même avec P_1 : d'un côté le produit vaut juste 1 et de l'autre $(1!)^2$ n'en est pas loin non plus.

Supposons, pour un entier n donné, qu'on a bien $\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$.

On passe au rang $n+1$ dans le membre de gauche, puisque c'est lui le plus compliqué :

$$\prod_{k=1}^{n+1} k^k.k! = \Big(\prod_{k=1}^{n+1} k^k.k!\Big).(n+1)^{n+1}.(n+1)!$$

On remplace par hypothèse de rang n : $\prod_{k=1}^{n+1} k^k.k! = \Big((n!)^{n+1}\Big).(n+1)^{n+1}.(n+1)!$

On fait entrer $(n+1)^{n+1}$ dans la grande parenthèse :

$$\prod_{k=1}^{n+1} k^k.k! = \Big((n!).(n+1)\Big)^{n+1}.(n+1)! = \Big((n+1)!\Big)^{n+1}.(n+1)!$$

et on retrouve bien $\Big((n+1)!\Big)^{n+1+1}$.

Sinon, je vous laisse réfléchir à l'explication ci dessous

					5
				4	4
			3	3	2
		2	2	2	2
.	1	1	1	1	1

5	5	5	5	5	.
4	4	4	4		
3	3	3			
2	2				
1					

5	**5**	**5**	**5**	**5**	5
4	**4**	**4**	**4**	4	4
3	**3**	**3**	3	3	2
2	**2**	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1

là, c'est $\prod_{k=1}^{n} k!$ en colonnes	et là $\prod_{k=1}^{n} k^k$ en lignes	et là, finalement $(n!)^{n+1}$

◦41◦ Justifiez $\sum_{k=0}^{2019} (2)^{(-1)^k}.k = 2\ 548\ 230$ (attention, combien de termes ?).

Dans la somme $\sum_{k=0}^{2019}(2)^{(-1)^k}.k$, on a des $2.k$ et des $2^{-1}.k$, c'est à dire des $2.k$ et des $\dfrac{k}{2}$.

On va séparer suivant la parité de k :

k pair	k impair
$\sum_{p=0}^{1009}(2)^{(-1)^{2.p}}.(2.p)$	$\sum_{p=0}^{1009}(2)^{(-1)^{2.p+1}}.(2.p+1)$
$4.\sum_{p=0}^{1009} p$	$\dfrac{1}{2}.\sum_{p=0}^{1009}(2.p+1)$

La première somme vaut $4.\dfrac{1009.1010}{2}$. La seconde vaut $\dfrac{(1010)^2}{2}$ *(somme classique des premiers impairs)*.

◦42◦ Calculez

$A = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^k$	$B = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^n$
$C = \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{i}.a^i$	$D = \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}.a^i$

$A = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^k = (1+a)^n$	$B = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^n = 2^n.a^n$
$C = \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{i}.a^i = \dfrac{(1+a)^{n+1}-1}{a}$	$D = \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}.a^i = \dfrac{2^n - a.(1+a)^n}{1-a}$

Pour C, on sépare $C = \sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}.a^i\Big) = \sum_{k=0}^{n}(1+a)^k$.

On trouve $\dfrac{1-(1+a)^{n+1}}{1-(1+a)}$.

Pour D : $D = \sum_{k=0}^{n}\Big(\binom{n}{k}.\Big(\sum_{i=0}^{k} a^i\Big)\Big) = \dfrac{1}{1-a}.\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.1 - \dfrac{1}{1-a}.\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^{k+1}$.

◦43◦ Calculez $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant k\leqslant n}} k.2^i$ et $\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^i.3^j$.

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant k\leqslant n}} k.2^i = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} k.\sum_{0\leqslant i\leqslant n} 2^i = \frac{n.(2.n+1).(n+1)}{6}.(2^{n+1}-1)$$

◦44◦ Une enseigne de vente de vêtements *(fabriqués sans doutes au Bangladesh pour l'équivalent de cinquante euros par mois dans des conditions de non-sécurité bien connues)* propose actuellement une offre « le prix c'est votre pourcentage de réduction. Ainsi, un article acheté dix euros ne vous en coutera que neuf et un article acheté cinquante euros ne vous en coutera que vingt cinq *(et un article de cent dix euros ?)*. Si je paye finalement vingt et un euros, quel était le prix initial de l'article. J'ai acheté deux articles, il m'en a couté quarante euros. Sachant que l'un d'entre eux affichait comme prix le double de l'autre, combien coutaient chacun ? Et si j'ai payé vingt sept euros, sachant que l'un m'a couté le double de l'autre ?

◦45◦ Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose

$c_n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$	$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$	$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Montrez que (C_n) est croissante, majorée. Sa limite est notée γ et s'appelle la constante d'Euler *(et de Mascheroni, qui pour sa part en a calculé plusieurs décimales)*.
En étudiant $C_{2.n} - C_n$, montrez que $H_{2.n} - H_n$ converge vers $\ln(2)$ quand n tend vers l'infini.
Tant qu'on est là, montrez par récurrence sur n $H_{2.n} - H_n = A_{2.n}$ pour tout n.

♣♠ Essayez de démontrer

$\gamma = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{E(x)} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$	$\gamma = 1 - \int_1^{\infty} \frac{x - E(x)}{x^2} \mathrm{d}x$	$\gamma = -\int_0^1 \ln\ln\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$	$\gamma = \int_0^1 \left(\frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{1-x}\right) \mathrm{d}x$

(où E est la fonction partie entière)

L'encadrement $\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$ est un cadeau par comparaison série/intégrale, avec finalement un seul terme.
Pour tout t de $[n,\ n+1]$, on a $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{n}$. On intègre de n à $n+1$ *(intervalle pris dans le sens croissant)*. Le minorant est l'aire d'un rectangle. Le terme du milieu est une intégrale. le terme de droite est aussi l'aire d'un rectangle.

Mot clef : somme de Riemann.

On effectue le calcul de l'intégrale au milieu : $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$.
On passe à l'opposé : $-\frac{1}{n+1} \geqslant -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \geqslant -\frac{1}{n}$. On ajoute $\frac{1}{n}$: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geqslant c_n \geqslant 0$.

L'inégalité de droite donne la croissance de C : $C_{n+1} - C_n = c_{n+1} \geqslant$ par définition des sommes [4].

Pour majorer, on se dit que l'autre inégalité doit servir en sommant pour k de 1 à n :

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Cette fois, le majorant est une somme télescopique, de valeur $1 - \frac{1}{n+1}$.
On ne parle pas de limite, puisqu'on veut une majoration pour tout n et pas un comportement à l'infini :

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1$$

Mot clef : convergence des suites croissantes majorées, sommes télescopiques.

Le majorant ne dépend plus de n, la suite C est bien croissante, majorée. Elle converge vers son plus petit majorant.

4. c'est Chasles, arrêtez de m'emm... en prétendant que c'est un télescopage

Rien ne donne la valeur de ce majorant. On l'appelle γ, et on ne sait même pas si c'est un rationnel. Cela dit, si c'est un rationnel, l'écriture décimale son dénominateur a au moins 240 000 chiffres (source Wikipedia).

C'est Euler qui a croisé en premier cette constante. Et Mascheroni (abbé, enseignant en lettres, député, mathématicien de 1750 à 1800) a trouvé des méthodes de réarrangement de termes pour calculer γ avec une belle précision (pour l'époque). Il a étudié la géométrie des figures qu'on peut construire à la règle et au compas ; et même au compas tout seul. Le saviez vous, on peut avec un compas (et c'est tout) retrouver le centre d'un cercle qui a déjà été tracé... et pas juste en disant comme le physicien "*je regarde où il y a un trou dans la feuille*" ou comme l'ingénieur "*je mets un point au centre du cercle en visant bien*".

On a donc

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

Dans la somme de droite, on télescope $\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)$ en $\ln(n+1)$ *(ou alors on recolle par relation de Chasles les intégrales d'où ceci vient)*. On a donc $\boxed{C_n = H_n - \ln(n+1)}$

On remplace $C_{2.n} = H_{2.n} - \ln(2.n+1)$ et on effectue

$$C_{2.n} - C_n = H_{2.n} - H_n - \ln\left(\frac{2.n+1}{n+1}\right)$$

On isole

$$H_{2.n} - H_n = C_{2.n} - C_n + \ln\left(\frac{2.n+1}{n+1}\right)$$

On fait tendre n vers l'infini. La différence $C_{2.n} - C_n$ tend vers $\gamma - \gamma$ c'est à dire 0. Le logarithme tend vers $\ln(2)$ par continuité de l'application logarithme *(quitte à écrire* $\ln\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)$ *une dernière fois)*.

Le premier membre $H_{2n} - H_n$ a une limite, égale à $\boxed{\ln(2)}$ *(comme vu dans le cours et en T.D.)*.

On doit montrer $H_{2n} - H_n = A_{2.n}$ pour tout n, c'est à dire $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2.n}$ *(un paquet de la série harmonique contre la série harmonique alternée)*.

On initialise avec n égal à 1 : $\boxed{H_2 - H_1 = \frac{1}{2}}\boxed{A_2 = 1 - \frac{1}{2}}$, il y a égalité.

On suppose pour un n quelconque donné $H_{2.n} - H_n = A_{2.n}$.

On calcule :

$$H_{2.n+2} - H_{n+1} = H_{2.n} + \frac{1}{2.n+1} + \frac{1}{2.n+2} - \left(H_n + \frac{1}{n+1}\right)$$

On simplifie :

$$H_{2.n+2} - H_{n+1} = H_{2.n} - H_n + \frac{1}{2.n+1} - \frac{1}{2.n+2}$$

On calcule aussi :

$$A_{2.n+2} = A_{2.n} + \frac{1}{2.n+1} - \frac{1}{2.n+2}$$

En utilisant l'hypothèse $H_{2.n} - H_n = A_{2.n}$, on a alors $H_{2.n+2} - H_{n+1} = A_{2.n+2}$.

La propriété est bien héréditaire. C'est fini.

∘46∘ ♡ Simplifiez cette somme double $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant i\leqslant n}} \binom{n}{i}.2^{i+j}$.

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant i\leqslant n}} \binom{n}{i}.2^{i+j} = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.2^{i}\right).\left(\sum_{j=0}^{n} 2^{j}\right) = (1+2)^n.\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = (2^{n+1}-1).3^n$$

∘47∘ La moyenne d'âge de cette famille (deux parents et les enfants) est de 20 ans. Mais si on ne compte pas la mère (qui a 40 ans), la moyenne d'âge est de 15 ans. Combien d'enfants ?

Notons S la somme de tous les âges *(enfants et parents)*, et e le nombre d'enfants.
On nous dit alors : $\dfrac{S}{e+2} = 20$ et $\dfrac{S-40}{e+1} = 15$.
C'est un système à résoudre. On trouve trois enfants. Et une somme des âges égale à 100.

On peut imaginer que le père a aussi quarante ans, et les enfants vingt à eux trois. Ce n'est pas incohérent.
Qui sera arrivé à un total de $2,73$ enfants et l'aura encadré. Ou même $-7,21$. Ou pourquoi pas $12+5.i$?

∘48∘ ♡ Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ (ayez le bon réflexe oublié de Terminale).

On conjugue, et on télescope :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{1} = \sqrt{n+1}-1$$

∘49∘ Un élève s'est trompé et a écrit la définition suivante pour un anneau intègre $(A,+,\times)$:
$\boxed{\forall (a,\ b) \in A^2,\ (a \times b = 0) \Rightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)}$ Trouvez l'erreur et montrez qu'un seul anneau vérifie ceci.

Normalement : $\boxed{\forall (a,\ b) \in A^2,\ (a \times b = 0) \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)}$
Ici, dès qu'un produit est nul, les deux facteurs le sont.
Dans un anneau, le neutre de la première loi (noté 0) est absorbant pour la seconde.
On a donc $0.a = 0$ pour tout a.
Et avec notre propriété, ceci donne $0 = 0$ et $a = 0$.
Le seule élément de l'anneau est donc le neutre additif 0.
C'est l'anneau $(\{0\},\ +,\ \times)$.[5]

∘50∘ Pour tout entier naturel n, on pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, et $Q_n = \dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ puis $R_n = \frac{Q_{n+1}}{Q_n}$.
Toutes les preuves pourront se faire par manipulations sur les produits (ou les sommes si vous passez au logarithme), sans récurrence.
Prouvez : $P_n = \dfrac{(n!)^{n+1}}{\left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2} = \prod_{j=1}^{n} j^{2.j-n-1}$.
Prouvez $Q_n = \dfrac{(n+1)^n}{n!}$ puis $R_{n-1} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.
Déduisez que $\dfrac{P_{n+1}.P_{n-1}}{(P_n)^2}$ converge vers e.

Utilisons, une fois n'est pas forcément coutume, la formule $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$.
Dans le produit des $n+1$ coefficients binomiaux sur la ligne, on a donc $n+1$ fois $n!$ au numérateur.
Passons au dénominateur, fait de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} k!.(n-k)!$ qu'on sépare en $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} k!.\prod_{k=0}^{n}(n-k)!$.
En ré-indexant par renversement le second terme, on a à nouveau $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} i!$.
Les variables étant muettes, le dénominateur est bien $\left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2$.
On a bien établi $P_n = \dfrac{(n!)^{n+1}}{\left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2}$.

Dans ce quotient, on voit les entiers de 1 à n intervenir plus ou moins souvent.
Prenons le numérateur $\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{n} j\right)^{n+1}$. On peut l'écrire $\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{n} j^{n+1}\right)$ (distributivité de l'exposant).

5. c'est l'addition et la multiplication modulo 1

Passons au dénominateur, et permutons les variables : $\prod_{k=1}^{n} k! = \prod_{k=1}^{n} \Big(\prod_{j=1}^{k} j\Big)$

$\prod_{k=1}^{n} k! = \prod_{1\leqslant j\leqslant k}^{n} j$ forme compacte

$\prod_{k=1}^{n} k! = \prod_{j=1}^{n} \Big(\prod_{k=j}^{n} j\Big)$ interversion des priorités

$\prod_{k=1}^{n} k! = \prod_{j=1}^{n} j^{n+1-j}$ (k est juste un compteur)

On élève au carré et on effectue le quotient :

$$P_n = \frac{\prod_{j=1}^{n} j^{n+1}}{\Big(\prod_{j=1}^{n} j^{n+1-j}\Big)^2}$$

Chaque j est là avec exposant $(n+1) - 2.(n+1-j)$, ce qui fait bien $2.j - n - 1$.

Visuellement, le dénominateur était de la forme, par exemple pour n égal à 7 :

0!.7!			7	6	5	4	3	2	1
1!.6!		1		6	5	4	3	2	1
2!.5!		1	2		5	4	3	2	1
3!.4!		1	2	3		4	3	2	1
4!.3!		1	2	3	4		3	2	1
5!.2!		1	2	3	4	5		2	1
6!.1!		1	2	3	4	5	6		1
7!.0!		1	2	3	4	5	6	7	

Il reste à compter les occurrences de chaque entier, ne serait ce que dans un triangle.

On a trouvé $P_n = \prod_{j=1}^{n} j^{2.j-n-1}$ et par la même$P_{n+1} = \prod_{j=1}^{n+1} j^{2.j-(n+1)-1}$.

Pour le quotient $\frac{P_{n+1}}{P_n}$, on met de côté un terme de P_{n+1} :

$$Q_n = \frac{\prod_{j=1}^{n+1} j^{2.j-n-2}}{\prod_{j=1}^{n} j^{2.j-n-1}} = (n+1)^{2.(n+1)-n-2}.\frac{\prod_{j=1}^{n} j^{2.j-n-2}}{\prod_{j=1}^{n} j^{2.j-n-1}}$$

On a bien $Q_n = (n+1)^n.\prod_{j=1}^{n} j^{(2.j-n-2)-(2.j-n-1)}$

puis $Q_n = (n+1)^n.\prod_{j=1}^{n} j^{-1}$.

Le produit avec exposant « -1 » est juste une factorielle au dénominateur.

On a donc $Q_n = \frac{(n+1)^n}{n!}$.

On parvient aussi à ce résultat en écrivant $Q_n = \frac{P_{n+1}}{P_n} = \prod_{k=0}^{n} \frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}}$ *sachant qu'on a juste perdu le terme* $\binom{n+1}{n+1}$ *qui était solitaire au numérateur, mais qui vaut* 1.

On simplifie ensuite par argument de dénombrement ou par calcul brutal :

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n+1)!}{k!.(n+1-k)!}.\frac{1}{\frac{n!}{k!.(n-k)!}} = \frac{(n+1)!}{n!}.\frac{(n-k)!}{(n+1-k)!} = \frac{n+1}{(n+1-k)}$$

Le numérateur devient immédiatement $(n+1)^{n+1}$ *et le dénominateur se ré-indexe en* $(n+1)!$.

Pour finir, on fait un quotient de quotients, mais sans y réfléchir :

$R_{n-1} = \dfrac{Q_n}{Q_{n-1}} = \dfrac{(n+1)^n}{n!}.\dfrac{(n-1)!}{n^{n-1}}$ *(sachez écrire spontanément* $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a.d}{b.c}$*).*

On simplifie $R_{n-1} = \dfrac{(n+1)^n}{n.n^{n-1}} = \dfrac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$.

En prenant le logarithme de R_{n-1} *(classique)*, on trouve $\ln(R_{n-1}) = n.\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

On l'écrit même $\ln(R_{n-1}) = \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x}$ avec $x_n = \dfrac{1}{n}$.

Ceci tend vers la dérivée du logarithme en 1 *(limite des taux d'accroissements)*, ce qui fait 1.

Par continuité, puisque $\ln(R_{n-1})$ tend vers 1, on déduit que R_{n-1} tend vers e^1 *(et R_n aussi bien sûr).*

Quelques valeurs ? $\dfrac{P_6.P_4}{(P_5)^2} \simeq 2,48832$ à 10^{-5} près

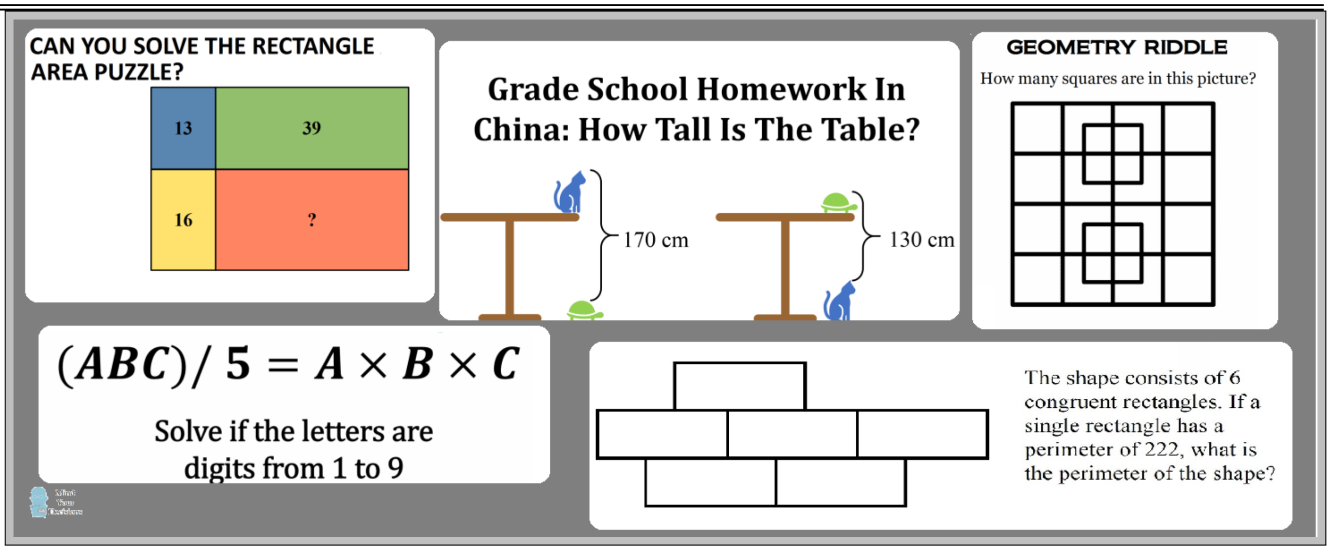
$\dfrac{P_{11}.P_9}{(P_{10})^2} \simeq 2,59374$

$\dfrac{P_{16}.P_{149}}{(P_{15})^2} \simeq 2.70927$

$\dfrac{P_{151}.P_{149}}{(P_{150})^2} \simeq 2.70927$

C'est quand même un peu lent...

◦51◦



On note dans l'ordre a et α les longueurs des rectangles (« horizontales »).

On note b et β les hauteurs des rectangles (« verticales »).

On traduit les données : $a.b = 13$, $\alpha.b = 39$, $a.\beta = 16$.

trop d'inconnues et pas assez d'équations. On ne trouvera pas les quatre longueurs.

Mais qu'importe. Que cherche-t-on ? L'aire $\alpha.\beta$ et c'est tout.

$$\alpha.\beta = \frac{(b.\alpha).(a.\beta)}{a.b} = \frac{39\times 16}{13} = 48$$

On a $\boxed{\text{Table+Chat-Tortue=170}}$ et $\boxed{\text{Table+Tortue-Chat=130}}$

On somme : $2.Table + 0 = 170 + 130$. La table mesure 150 centimètres.

Et je ne cherche pas à savoir si c'est logique.

On peut aussi empiler deux tables et voir partir les chats et tortues.

On peut visualiser la moyenne des deux hauteurs.

L'entier $100.a + 10.b + c$ est un multiple de 5, c'est $5.a.b.c$.

Le chiffre des unités de abc est donc 0 ou 5. Mais si c'est 0, le produit $a.b.c$ est nul et on a une contradiction (sauf à tout prendre nul).

C'est donc que c vaut 5. $\overline{ab5} = 5 \times a \times b \times c$.

On reprend :$100.a + 10.b + 5 = 5.a.b.5$ et on simplifie : $20.a + 2.b + 1 = 5.a.b$.

On réduit modulo 2 : $5.a.b$ est impair, a et b sont impairs.

On réduit modulo 5 : $2.b + 1$ est nul. b vaut 2 ou 7. Mais comme il est impair, il vaut 7.

On trouve a par calcul direct. Il vaut 1.

$$175 = 5 \times 1 \times 7 \times 5$$

On note a la largeur d'une brique et b sa hauteur.
Les données disent $2.(a + b) = 222$.
Les trois morceaux verticaux de périmètre à gauche valent $3.b$.
Les trois morceaux verticaux de périmètre à droite valent $3.b$ aussi.
Les morceaux horizontaux valent $3.a$ aussi (découpés en trois morceaux).
Il en va de même pour le bas.

Le périmètre total est $3.b + 3.b + 3.a + 3.a$ ce qui fait $6.(a + b)$. Le chiffre de la bête : 666 centimètres.

One approach is to remove the 2 off-center squares in the middle, which leaves a 4×4 grid.
In the 4×4 grid, these are the number of squares of each size :
1square of size 4×4
4 squares of size 3×3
9 squares of size 2×2
16 squares of size 1×1

This makes for a total of 30 squares.

Now count the number of squares created by the 2 middle squares.
Inside of each square is 4 squares, so there are :
2 big middle squares
8 small middle squares

This gives 10 more squares, so in total there are $30 + 10 = 40$ squares in the picture.

Incidentally, there is a formula to count the number of squares in an nxn grid.
In our example of 4×4, remember we had:
$1 = 1^2$ square of size 4×4
$4 = 2^2$ squares of size 3×3
$9 = 3^2$ squares of size 2×2
$16 = 4^2$ squares of size 1×1

The 1×1 squares could be counted since there were 4 in a row, and there were 4 rows, so the total is $16 = 4^2$. Similarly, the 2×2 squares could be counted since there can be 3 in a row, and there are 3 rows, so the total is $9 = 3^2$. The 3×3 and 4×4 squares could be counted similarly.
Generalizing the pattern, in an nxn grid, the number of squares is equal to:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

∘52∘ On définit le produit de convolution sur les suites : $a * b$ a pour terme d'indice n la somme $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}.b_k$.

Montrez que cette loi est commutative, associative. Donnez son élément neutre.

En estimant que a, b et c sont quantifiées, de même que n quelconque :
$(a * b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}.b_k = \sum_{p=0}^{n} a_p.b_{n-p} = (b * a)_n$ en ayant posé $p = n - k$.

On continue : $((a * b) * c)_n = \sum_{p=0}^{n} (a * b)_p.c_{n-p}$

$$((a * b) * c)_n = \sum_{p=0}^{n} \Big(\sum_{i=0}^{p} a_i * b_{p-i} \Big).c_{n-p}$$

$((a*b)*c)_n = \sum_{p=0}^{n} \Big(\sum_{i=0}^{p} a_i * b_{p-i}.c_{n-p} \Big)$

et $(a*(b*c))_n = \sum_{q=0}^{n} a_q * (b*c)_{n-p}$

$((a*b)*c)_n = \sum_{q=0}^{n} a_p.\Big(\sum_{k=0}^{n-p} b_i.c_{n-p-i} \Big)$

$((a*b)*c)_n = \sum_{p=0}^{n} \Big(\sum_{i=0}^{p} a_i * b_{p-i}.c_{n-p} \Big)$

On change ensuite les indices.

L'élément neutre est la suite de premier terme 1 et dont tous les suivants sont nuls (malpropre : $(1,0,0,0\ldots)$ propre : $(1_{n=0})_{n\in\mathbb{N}}$. On la note N ($N_0 = 1$ et $N_n = 0$ sinon).
On convole : $(a*N)_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}.N_k$
Seul n_0 est non nul, et il vaut 1. Il reste a_n.
C'est vrai pour tout n, donc $(a*N) = a$.

∘53∘

♣ Trouvez toutes les séries géométriques réelles *(puis complexes)* vérifiant $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2.k} = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \Big)^2$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{3.k} = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \Big)^3$.

Le terme général d'une suite géométrique de raison r et de premier terme a_0 est $a_0.r^n$.

La somme partielle de la série $\sum_{k=0}^{n} a_k$ est alors $a_0.\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

On veut sommer jusqu'à l'infini ? On fait tendre n vers l'infini.

On a alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = a_0.\dfrac{1}{1-r}$ si $|r| < 1$
et rien sinon.

Pour que tout ait un sens, on va donc imposer $|r| < 1$ (et on éliminera les résolutions conduisant à des r hors de $]-1,\ 1[$.

La première question de l'exercice devient $a_0.\dfrac{1}{1-r^2} = \Big(\dfrac{a_0}{1-r}\Big)^2$.
Il y a évidemment une solution avec $a_0 = 0$ (la suite nulle, les deux membres de la formule sont nuls).
Par produit en croix : $a_0.(1-r).(1-r) = (a_0)^2.(1-r).(1+r)$.
On met de côté $a_0 = 0$.
On élimine $r = 1$.
Il reste $a_0 = \dfrac{1-r}{1+r}$ avec r entre -1 et 1 (ou dans le disque de centre 0 et de rayon 1).
Par exemple : $r = \dfrac{1}{2}$ et $a_0 = \dfrac{1}{3}$.

D'un coté $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{48} + \ldots$ de somme $\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{4}}$

De l'autre $\Big(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{24}\ldots\Big)^2$ de somme $\Bigg(\dfrac{1}{3.\Big(1-\frac{1}{2}\Big)}\Bigg)^2$

Les deux valent $\dfrac{4}{9}$

Pour l'autre équation : $\dfrac{a_0}{1-r^3} = \dfrac{(a_0)^3}{(1-r)^3}$.
On met encore de côté $a_0 = 0$ trop facile. On refuse $r = 1$.
On a alors la relation $(a_0)^2 = \dfrac{(1-r)^2}{1+r+r^2}$.

∘54∘

A et B sont deux matrices de Su-Do-Ku convenablement remplies. U est le vecteur colonne formé de neuf 1. Entre quelle et quelle valeur peut varier le réel ${}^tU.A.B.U$ *(au fait pour un demi point déjà, c'est bien un réel ? sachant que la notation ${}^tM$ indique la matrice M où on a échangé le rôle des lignes et des colonnes :* ${}^t\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$ *)* ?

$B.U$ ça fait quoi ?

Facile, regardons en taille 4 sur 4 : $\begin{pmatrix} a & a' & a'' & a''' \\ b & b' & b'' & b''' \\ c & c' & c'' & c''' \\ d & d' & d'' & d''' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & +a' & +a'' & +a''' \\ b & +b' & +b'' & +b''' \\ c & +c' & +c'' & +c''' \\ d & +d' & +d'' & +d''' \end{pmatrix}$.

On a la somme de tous les termes de chaque ligne.
Or, sur chaque ligne, on a les entiers de 1 à 9 dans je ne sais quel ordre.
La somme vaut toujours $1+2+3+4+5+6+7+8+9$.

Le vecteur $A.U$ est un vecteur fait de neuf entiers valant tous 45.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Certes, ma grille est ici un peu spéciale, mais testez sur la grille que vous voulez...

Et c'est pareil avec : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 45 & \dots & 45 \end{pmatrix}$

Et si maintenant on colle ${}^tU.A.B.U$, on a $({}^tU.A).(B.U)$, et c'est le produit d'un vecteur ligne et vecteur colonne :

$$\begin{pmatrix} 45 & 45 & 45 & 45 & 45 & 45 & 45 & 45 & 45 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \end{pmatrix}$$

C'est un simple réel, égal à $45 \times 45 + 45 \times 45 + \ldots + 45 \times 45$.
Et on pourra changer de matrices comme on veut, ${}^tU.A.B.U$ vaut $9.45.45$.
Maximum et minimum sont égaux.

∘55∘

♡ (a_n) et (b_n) sont les suites $\forall n,\ a_n = 4^n - 3.(-1)^n$ et $\forall n,\ b_n = -4^{n+1} + 5.(-1)^n$.
Trouvez la matrice M vérifiant $M.\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.
Vérifiez qu'on a alors $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ (sans calculer M^n).

On veut : $M.\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -21 & -59 \end{pmatrix}$.

Il suffit de multiplier à droite par l'inverse de $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -21 \end{pmatrix}$:

$M.\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -21 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -21 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -21 & -59 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -21 \end{pmatrix}^{-1}$

donc $M = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -21 & -59 \end{pmatrix}.\frac{1}{35}.\begin{pmatrix} -21 & -7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}.\begin{pmatrix} -32 & -15 \\ 100 & 53 \end{pmatrix}$

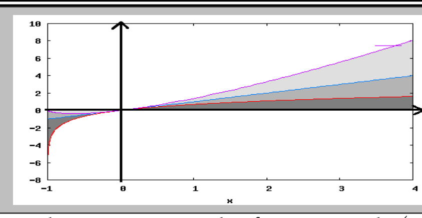
Cette matrices carrée de format 2 sur 2 permet de calculer des choses comme $M.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Comme le résultat $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ sent la récurrence sur n
la suite géométrique de raison à gauche M,
on va calculer justement
$M.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{7}.\begin{pmatrix} -32 & -15 \\ 100 & 53 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4^n & -3.(-1)^n \\ -4^{n+1} & +5.(-1)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{7}.\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
avec $u = -32.4^n + 32.3.(-1)^n + 15.4^{n+1} - 5.15.(-1)^n = 28.4^n + 21.(-1)^n = 7.a_{n+1}$
$v = 100.4^n - 300.(-1)^n - 53.4^{n+1} + 5.53.(-1)^n = 7.b_{n+1}$
On a donc $M.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$.
On avait aussi $M.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ en lisant juste la première colonne de $M.\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.[6]
On met bout à bout pour une récurrence : initialisation faite
hérédité : si l'on a $M^n.U_0 = U_n$ (hypothèse de rang n)
et aussi $U_{n+1} = M.U_n$
alors on a $U_{n+1} = M.M^n.U_0 = M^{n+1}.U_0$
Mais sinon, autant parler de suite géométrique de raison à gauche M et de premier terme U_0.

∘56∘ ♡ Exprimez $Tr(A^2)$, $\det(A^2)$ et $Tr(A^3)$ à l'aide de $Tr(A)$ et $\det(A)$ pour toute matrice carrée A de taille 2.

Exercice de manipulations algébriques. On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $T = Tr(A) = a + b$ et $D = \det(A) = a.d - b.c$.
On calcule A^2 et on somme : $Tr(A^2) = a^2 + d^2 + 2.b.c = (a+d)^2 - 2.(a.d - b.c) = T^2 - 2.D$.
On poursuit : $Tr(A^3) = a^3 + d^3 + 3.a.b.c + 3.b.c.d = (a+d)^3 - 3.a^2.d - 3.a.d^2 + 3.a.b.c + 3.b.c.d$
$Tr(A^3) = T^3 - 3.(a+d).(a.d - b.c)$
$Tr(A^3) = T^3 - 3.T.D$
Et bien sûr $\det(A^2) = D^2$ par la propriété « déterminant du produit égale produit des déterminants ».

Montrez pour tout x positif : $\ln(1+x) \leqslant x \leqslant (1+x).\ln(1+x)$.
Déduisez : $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leqslant e^n \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$.
∘57∘ Déduisez $\sqrt[n]{n!} \sim_{n\mapsto+\infty} \frac{n}{e}$.



$\ln(1+x) \leqslant x \leqslant (1+x).\ln(1+x)$ se démontre par exemple en étudiant les variations de $f = x \longmapsto \ln(1+x) - x$ et $g = x \longmapsto (x+1).\ln(1+x) - x$.
On trouve $f' = x \longmapsto \frac{-x}{1+x}$. Elle croit sur $]-1,\ 0]$ et décroit sur $[0,\ +\infty[$. Elle a donc un maximum en 0. Et ce maximum est $f(0) = 0$. f est donc négative ou nulle.
De même $g' = x \longmapsto \ln(1+x)$ est négative puis positive. g admet en 0 un minimum égal à 0. g est positive sur $]-1,\ +\infty[$.

On applique ce résultat à $x = \frac{1}{k}$: $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \left(1+\frac{1}{k}\right).\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.
On multiplie par k positif :

$$k.\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant 1 \leqslant (k+1).\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

On passe à l'exponentielle :

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leqslant e \leqslant \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

On multiplie ces n inégalités pour k de 1 à n (tout est positif, on n'oublie pas l'argument) :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leqslant e^n \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

---

6. ici, déception du professeur qui voit ses eleves lui dire « on ne m'avait pas dit ue j'avais le droit de faire ça, donc je pensais ue c'etait interdit », alors u'il suffit de lire ce ueon fait dans le produit !

Que donne le premier membre exactement ?
Et proprement

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{k}}{k^{k}}=\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+1)^{k}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k^{k}}=\frac{\displaystyle\prod_{p=2}^{n+1}p^{p-1}}{\displaystyle\prod_{k=2}^{n}k^{k}}$$

En bas, on peut commencer à *é*, le terme 1^1 vaut 1. Et en haut, on a translaté la somme.

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=\frac{(n+1)^{n}.\displaystyle\prod_{p=2}^{n}p^{p-1}}{\displaystyle\prod_{p=2}^{n}p^{p}}=\frac{(n+1)^{n}}{\displaystyle\prod_{p=2}^{n}p}=\frac{(n+1)^{n}}{n!}$$

Et sans cette « virtuosité » qu'on vous demande d'avoir sur des produits :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k}=\left(\frac{2}{1}\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2}.\left(\frac{4}{3}\right)^{3}.\left(\frac{5}{4}\right)^{'}\ldots\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}.\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$$

Le $(n+1)^n$ reste seul, nul ne l'effacera. Et sinon, chaque terme s'efface presque entre haut et bas..

On traite de même le majorant :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}=\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right).\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$$

On retrouve le précédent, et un produit télescopique :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}=\left(\frac{(n+1)^{n}}{n!}\right).\left(\frac{n+1}{1}\right)=\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

Après ces simplifications : $\dfrac{(n+1)^n}{n!}\leqslant e^n\leqslant\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}$.
Croisons en multipliant par $n!$ et divisant par e^n :

$$\frac{(n+1)^{n}}{e^{n}}\leqslant n!\leqslant\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n}}=\frac{(n+1)^{n}}{e^{n}}.(n+1)$$

c'est naturel vu ce à quoi on veut arriver.
Passons même à la racine n^{ieme} (application croissante) : $\dfrac{n+1}{e}\leqslant\sqrt[n]{n!}\leqslant\dfrac{n+1}{c}.(n+1)^{\frac{1}{n}}$.
Sachant que $(n+1)^{\frac{1}{n}}$converge vers 1 (c'est $e^{\frac{\ln(n+1)}{n}}$), on peut conclure par théorème d'encadrement sur les équivalents.
Ou par prudence, on écrit $1\leqslant\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{\dfrac{n+1}{e}}\leqslant(n+1)^{\frac{1}{n}}$ et là, on utilise le théorème d'encadrement.