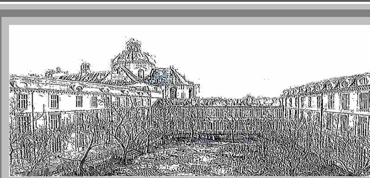
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 22 janvier
M.P.S.I.2



2023 2024

TD16

∘0∘ ♡ On définit $f = x \longmapsto \dfrac{15.x^4 - 166.x^3 + 621.x^2 - 902.x + 480}{24}$. Vérifiez que c'est *(en dépit des apparences)* un élément de S_5 (permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$), et calculez sa signature.

∘1∘ **La vraie définition de la signature.** On se donne un entier naturel n. On note S_n l'ensemble des $n!$ permutations de la liste $[1, \dots n]$ notée L.

Pour toute permutation σ (bijection de L dans L), on pose $Sgn(\sigma) = \dfrac{\prod\limits_{i<j\leq n} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod\limits_{i<j\leq n} (j-i)}$.

♠1 Vérifiez l'existence de cette quantité. Calculez $Sgn(Id)$.

♠2 Calculez la signature du cycle $\overrightarrow{1\ 2\ 3}$ dans le cas $n = 3$ *(ce cycle est défini par $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$ et $\sigma(3) = 1$)*. Calculez la signature de ce cycle dans le cas $n = 4$. Dans le cas $n = 4$ calculez la signature de $\overrightarrow{1\ 2\ 3\ 4}$.

♠3 Montrez pour toute permutation σ :

$$\Big(Sgn(\sigma)\Big)^2 = \frac{\prod\limits_{i<j}(\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod\limits_{i<j}(j-i)} . \frac{\prod\limits_{j<i}(\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod\limits_{j<i}(j-i)} = \frac{\prod\limits_{i\neq j}(\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod\limits_{i\neq j}(j-i)} = 1.$$

♠4 Déduisez que la signature ne peut valoir que 1 ou -1.

♠5 On se donne deux permutations σ et φ. Montrez :

$$Sgn(\sigma \circ \varphi) = \frac{\prod\limits_{i<j}(\sigma(\varphi(j)) - \sigma(\varphi(i)))}{\prod\limits_{i<j}(\varphi(j) - \varphi(i))} . \frac{\prod\limits_{j<i}(\varphi(j) - \varphi(i))}{\prod\limits_{j<i}(j-i)} = Sgn(\sigma).Sgn(\varphi).$$

♠6 Montrez : $Sgn(\sigma^{-1}) = \dfrac{1}{Sgn(\sigma)}$ pour toute permutation σ. Comparez $Sgn(\sigma^{-1} \circ \varphi \circ \sigma)$ et $Sgn(\varphi)$ *(ce qu'on appelle conjugaison)*.

♠7 On note $\tau_{i,j}$ la transposition qui échange i et j et laisse les autres éléments invariants *($\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ et $\sigma(k) = k$ pour $k \notin \{i,\ j\}$)*. Montrez $Sgn(\tau_{1,2}) = -1$.

♠8 Qui est $\tau_{2,i} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{2,i}$? Qui est $\tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i}$? Déduisez que les transpositions $\tau_{i,j}$ ont toutes pour signature -1.

♠9 Retrouvez : la signature d'une permutation dépend de la parité du nombre de transpositions dans la décomposition de σ en produit de transpositions.

♠10 Simplifiez $\tau_{a,e} \circ \tau_{a,d} \circ \tau_{a,c} \circ \tau_{a,b}$. Calculez en fonction de k la signature d'un cycle $\overrightarrow{a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \dots a_k}$.

∘2∘ Donnez la signature de $x \longmapsto x^5\ mod\ 7$ sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ après avoir vérifié que c'est bien une permutation.

∘3∘ On écrit les uns derrière les autres les entiers de 1 à 100 : 123456789101112131415 … 979899100. Vous obtenez un grand entier N. Combien a-t-il de chiffres ? Vous avez maintenant le droit de barrer quarante chiffres de cet entier N. Le gagnant est celui dont le « N raccourci » est l'entier le plus grand possible. Que barrez vous ?
Informaticiens : écrivez un script qui prend en entrée n et retourne l'entier fait des n premiers entiers écrits les uns derrière les autres. Suivant votre niveau : vous avez le droit ou non aux fonctions `int` et str, ou alors vous ne travaillez qu'avec des entiers et des puissances de 10.

∘4∘ Combien y a-t-il dans S_6 de cycles de taille 4 ?

Combien y a-t-il dans S_6 de cycles σ de taille 4 vérifiant $\sigma(1) = 1$?
Combien y a-t-il dans S_6 de cycles σ de taille 4 vérifiant $\sigma(1) = 2$?
Combien y a-t-il dans S_6 de permutations σ de signature 1 ?
Combien y a-t-il dans S_6 de permutations σ de signature 1, vérifiant $\sigma(1) = 2$?

∘5∘ ♡ On note S_n l'ensemble des $n!$ permutations de la liste $[1, 2, \ldots n]$. Montrez $\sum_{\sigma \in S_n} \sigma(1) = \frac{(n+1)!}{2}$. Que vaut $\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ k \leq n}} \sigma(k)$? *(attention au nombre de termes)*

Que vaut $\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \varphi \in S_n}} \sigma(\varphi((1))$ *(attention au nombre de termes)*.

∘6∘ L'univers est fait des 720 permutations de la liste [0, 1, 2, 3, 4, 5]. On tire une permutation avec probabilité uniforme. Quelle est la probabilité que ce soit un cycle de taille 4 ?

Quelle est la probabilité qu'elle commute avec $\overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)}$?

∘7∘ On veut montrer le résultat suivant : si deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables en tant que matrices à coefficients complexes *(c'est à dire par l'intermédiaire d'une matrice P à coefficients complexes)* alors elles le sont aussi en tant que matrices à coefficients réels *(c'est à dire par l'intermédiaire d'une matrice R à coefficients réels)*.

Regardons un exemple $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1+2.i & -3.i \\ -1-i & 2+2.i & -2-2.i \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Arrangez vous pour que A ait la même trace et le même déterminant que B.

Vérifiez que A est semblable à B via la matrice P. Trouvez une matrice réelle R telle que A soit semblable à B via R.

Dans le cas général, un élève propose la démonstration suivante :

on part de $A = P^{-1}.B.P$, on écrit $P = R + i.S$, on obtient $(R + i.S).A = B.(R + i.S)$ d'où $R.A = B.R$ et on a trouvé R ;

Complétez les étapes qui manquent dans son raisonnement *(il y a des notations à rendre rigoureuses et il y a une grosse lacune sur la fin)*.

∘8∘ Un élève prétend que dans S_{10} *(permutations de la liste* $[0, \ldots 9]$*)*, il y a 10.9.8.7 cycles de taille 4 *(de la forme* $\overrightarrow{a\ b\ c\ d}$*)*. Il s'explique : 10 choix pour a, 9 pour b *(puisque différent de a)* et ainsi de suite. Expliquez pourquoi il a tort.

Un autre dit qu'il y en a $\binom{10}{4}.6$ *(choisir les éléments du cycle, et choisir l'ordre pour les citer de abcd à cdba en passant par cabd)*.

Qui a raison ?

Combien y a-t-il de cycles de taille k ?

♣ Combien y a-t-il dans S_{10} de permutations faites de deux quadricycles de supports disjoints ?

∘9∘ u_0 est entre 0 et 1. On définit $u_{n+1} = u_n - (u_n)^2$. Montrez que la suite converge, vers 0 (en décroissant). [1]

Étudiez la convergence de la série de terme général $(u_n)^2$ et du produit infini de terme général $(1 - u_n)$ (il y a du télescopage dans l'air).

∘10∘ Montrez que toute matrice carrée de taille 2 de trace et déterminant nuls est nilpotente.

Montrez que $\begin{pmatrix} 10 & -9 & -1 \\ 11 & -10 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ a une trace nulle et un déterminant nul, mais n'est pas nilpotente.

∘11∘ ♡ Dans le développement du déterminant d'une matrice de taille 6 et de terme général a_i^k, que est le signe devant $a_3^1.a_4^2.a_3^3.a_1^4.a_6^5.a_2^6$? Même question avec $a_4^1.a_5^2.a_3^3.a_1^4.a_6^5.a_2^6$. De même pour $a_6^1.a_4^2.a_3^3.a_5^4.a_2^5.a_1^6$.

Complétez $a_*^1.a_1^2.a_3^3.a_5^4.a_4^5.a_.^6$ pour qu'il ait un signe moins.

∘12∘ ♡ Calculez $\sum_{k=0}^{n} \cos^k(\theta).\cos(k.\theta)$.

---

1. dans l'ordre : existence, encadrement par 0 et 1, positivité, décroissance, convergence, limite

∘13∘ ♡ Montrez que $\cos(x).\cos\left(\dfrac{x}{2}\right).\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)\dots\cos\left(\dfrac{x}{2^{n,}}\right)$ converge vers $\dfrac{\sin(2.x)}{2.x}$ quand n tend vers l'infini (en multipliant pas $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$).

∘14∘ x est un entier au moins égal à 2. Quelle est la limite du produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{x^{(2^k)}}\right)$ quand n tend vers l'infini *(indication : multipliez par $1-\dfrac{1}{x}$).*

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24
.	Produits infinis	.

I∼0) Déterminez la limite quand N tend vers l'infini de

$\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right)$	$\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)$	$\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$	$\displaystyle\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$	$\displaystyle\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)$

I∼1) Montrez pour tout t de $]0,\ 1[$: $t-\dfrac{t^2}{2}\leqslant\ln(1+t)\leqslant t$.

I∼2) x est un réel dans $]0,\ 1[$, le produit $\displaystyle\prod_{n=1}^{N}\left(1+x^n\right)$ converge-t-il quand N tend vers l'infini ?

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24
.	Euler et Fourier	.

II∼0) x est un réel dans $]0,\ 1[$. Montrez que la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{2.x}{n^2-x^2}\right)$ notée (C_N) est croissante,

la suite $\left(x^2+\displaystyle\sum_{n=2}^{N}\frac{x^2}{n.(n-1)}\right)$ notée (σ_N) est croissante,

la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{x^2}{n^2}\right)$ notée (S_N) est croissante,

la suite $\left(\displaystyle\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right)$ notée (P_N) est décroissante.

II∼1) Montrez que (σ_N) est majorée. Déduisez que (S_N) et (P_N) convergent. Montrez : $P_N\geqslant(1-x^2).\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et déduisez : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}P_N\neq 0$.

III∼0) On définit $f=t\longmapsto\cos(x.t)$. Calculez pour tout n $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(u).e^{-i.n.u}.du$ noté c_n

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(u).\cos(n.u).du$ noté a_n

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(u).\sin(n.u).du$ noté b_n

Ces intégrales vont servir dans les questions suivantes, vous pouvez donc valider vos calculs en lisant la suite de l'énoncé...

III∼1) On pose $\phi_N=t\longmapsto\displaystyle\sum_{n=-N}^{N}c_n.e^{i.n.t}$.

Montrez pour tout t : $\phi_N(t)=2.\sin(\pi.x).\left(\dfrac{1}{x}+\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.\cos(n.t)\right)$.

III∼2) Prolongez par continuité $u\longmapsto\dfrac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}$ et $u\longmapsto\dfrac{f(t)-f(u)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}$ *(notée γ_t)* en $u=t$ *(t est fixé entre $-\pi$ et π, sens large)*. Pensez à $\cos(a)-\cos(b)=$ *produit*, ça peut servir ici.

III∼3) Montrez $\phi_N(t)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(u).\frac{\sin\left((2.N+1).\frac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-u}{2}\right)}.du$ et $2.\pi.f(t)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t).\frac{\sin\left((2.N+1).\frac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-u}{2}\right)}.du$.

III∼4) En intégrant par parties montrez que $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(p.u).\gamma_t(u).du$ converge vers 0 quand p tend vers l'infini.

III∼5) Déduisez $f(t) = \dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi}.\Big(\dfrac{1}{x} + \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.\cos(n.t)\Big)$ pour tout t entre $-\pi$ et π.

III∼6) Déduisez $\pi.\cot(\pi.x) = \dfrac{1}{x} - \lim\limits_{N\to+\infty} C_N$.

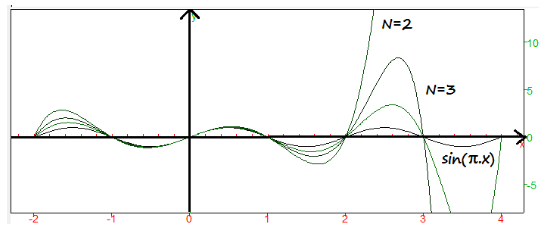
Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24
.	Euler	.

III∼7) On définit $\varphi = \theta \longmapsto \theta.\cos(\theta) - \sin(\theta)$. Calculez $\varphi^{(k)}$ et $\varphi^{(k)}(0)$ pour k de 0 à 4.

Déduisez $\varphi(\theta) \sim_{\theta\to 0} \dfrac{-\theta^3}{3}$.

Déduisez que $x \longmapsto \pi.\cot(\pi.x) - \dfrac{1}{x}$ se prolonge par continuité en 0 (valeur ?)..

Expliquez comment Euler a pû obtenir : $\dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi.x} = \prod\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\Big)$..



Approximation de sin(π.x) par les produits infinis d'Euler $\pi.x.\prod\limits_{n=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$

∘15∘ ♣ Soit p un nombre premier. On note $(F_p, +, .)$ le corps des entiers de 0 à $p-1$ pour l'addition et la multiplication modulo p. Montrez que les polynômes $\prod\limits_{k=1}^{p-1}(X-k)$ et $X^{p-1}-1$ ont le même degré, le même coefficient dominant et les mêmes racines. Déduisez qu'ils sont égaux. Que donnent les formules de Viète pour la somme et pour le produit des racines *(théorème de Wilson)* ? Que donnent elles pour la somme des inverses des racines. Montrez que le numérateur de $\sum\limits_{k=1}^{p-1}\dfrac{1}{k}$ (série harmonique) est un multiple de p *(théorème de Wolstenholme)*.

∘16∘ On a croisé le « joli » résultat : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} k\Big)^2$. On se demande si il existe p et q ainsi que r vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} k^p = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} k^q\Big)^r$.

En considérant le degré et le terme dominant montrez : $p+1 = r.(q+1)$ et $\dfrac{1}{p+1} = \Big(\dfrac{1}{q+1}\Big)^r$. Déduisez que la formule obtenue plus haut est le seul cas où on a une formule aussi agréable.

∘17∘ A est la matrice d'un Su-Do-Ku convenablement rempli. Quelle est la valeur maximale de ${}^tU.A.V$ si U est le vecteur colonne formé de neuf 1 et V le vecteur colonne formé des entiers de 0 à 8 ?
A et B sont deux matrices de Su-Do-Ku convenablement remplies. U est le vecteur colonne formé de un 1 suivi de huit 0. Entre quelle et quelle valeur peut varier le réel ${}^tU.A.B.U$ *(au fait pour un demi point déjà, c'est bien un réel ?)* ?

∘18∘ La relation définie sur $M_2(\mathbb{R})$ par "*il existe P inversible vérifiant $A.P = P.B$*" est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?
La relation définie sur $M_2(\mathbb{R})$ par "*il existe P vérifiant $A.P = P.B$*" est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?
La relation définie sur $M_2(\mathbb{R})$ par "*il existe P inversible vérifiant $A.P = B.P$*" est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?

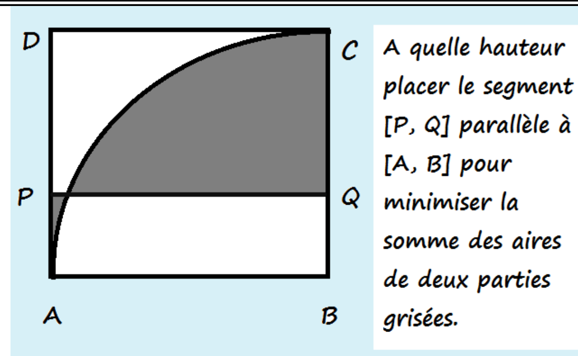
∘19∘ A says "*B is a liar or C is a liar*". B says "*A is a liar*". C says "*A is a liar and B is a liar*".Who is telling the truth ?

∘20∘ Calculez à 10^{-3} près $\sqrt{220+30.\sqrt{35}}$.

∘21∘ Résolvez $x^2 - x + 6 = 2.\sqrt{x^3+8}$.

∘22∘ Un élève a affirmé : "*dans l'anneau* $(A,+,.)$ *l'élément* a *est absorbant pour la seconde loi, c'est donc le neutre de la première*". A-t-il inventé une réciproque farfelue ?

∘23∘ Un carré. Un quart de cercle inscrit dans ce carré.
Un segment parallèle à un côté du carré.
Deux aires grisées.
Il faut placer le segment à la bonne hauteur pour minimiser l'aire grisée.
Des points si vous trouvez.



∘24∘ Rappel des règles :
Mettre dans le grille tous les entiers de 1 à 9 (certains sont déjà placés) pour que les trois additions en ligne et en colonne soient correctes :

		7	=	24
			=	11
4			=	10
=	=	=		
15	20	10		

et

			=	20
			=	10
	1		=	15
=	=	=		
22	.7	16		

∘25∘ Le polynôme complexe P de degré 4 a pour racines a, b, c et d. P' a pour racines α, βet γ.
Montrez pour z dans $\mathbb{C}-\{a,b,c,d\}$: $\overline{\dfrac{P'(z)}{P(z)}} = \overline{\left(\dfrac{1}{z-a}+\dfrac{1}{z-b}+\dfrac{1}{z-c}+\dfrac{1}{z-d}\right)} = \dfrac{z-a}{|z-a|^2}+\dfrac{z-d}{|z-b|^2}+\dfrac{z-c}{|z-c|^2}+\dfrac{z-d}{|z-a|^2}$.
Déduisez qu'il existe quatre réels positifs λ_1 à λ_4 vérifiant $\alpha = \dfrac{\lambda_1.a+\lambda_2.b+\lambda_3.c+\lambda_4.d}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}$.
Déduisez que le triangle de sommets α,β et γ est inscrit dans le quadrilatère de sommets a, b, c et d.
Montrez que les deux racines de P'' et la racine de $P^{(3)}$ est aussi dans ce triangle.

∘26∘ Dans le développement du déterminant d'une matrice de taille 8 sur 8, quel est le signe de chacun des termes suivants :
$a_1^3.a_2^5.a_3^6.a_4^7.a_5^1.a_6^2.a_7^8.a_8^4$ et $a_1^3.a_2^7.a_3^5.a_4^6.a_5^1.a_6^2.a_7^8.a_8^4$ et $a_1^8.a_2^7.a_3^6.a_4^5.a_5^4.a_6^3.a_7^2.a_8^1$.

∘27∘ Dans $\begin{vmatrix} 20 & 8 & 12 & 34 \\ 15 & 3 & 9 & 27 \\ 35 & 44 & 71 & 17 \\ 70 & 9 & 0 & 41 \end{vmatrix}$ quel est le coefficient de 35.9.12.27 ?

∘28∘ Calculez $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x^x}.dx$ (ça a l'air compliqué, mais pourtant...).

∘29∘ Qui est ce nombre dont l'écriture binaire est $\overline{0.0\overline{0011}00110011\ldots}_2$ *(pour ceux qui ne l'ont pas compris, la barre au dessus de 0011 c'est pour dire qui est le motif périodique, et la grande barre au dessus, c'est pour préciser qu'on n'est pas en base 10)*.

∘30∘ Montrez pour tout x réel positif : $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}$. Déduisez : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{e}}$.

François a posé l'addition suivante *(il a fait vite, il y a une infinité de termes, mais il a tout calculé)* : pouvez vous me dire quel sera le deux mille quinzième chiffre de la somme ?

0.	1													
+	0	2												
+	0	0	3											
+	0	0	0	4										
+	0	0	0	0	5									
+	0	0	0	0	0	6								
+	0	0	0	0	0	0	7							
+	0	0	0	0	0	0	0	8						
+	0	0	0	0	0	0	0	0	9					
+	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0				
+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1			
+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2		
+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	
+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4

∘31∘ Vous avez un joli Rubik's Cube en Apéricubes de la Vache qui Rit. Un ver a décidé d'en goûter chacun des vingt sept petits cubes. Il se déplace en passant d'un cube à son voisin ayant une face commune *(pas de passage en diagonale)*. Il a commencé par le cube central. Pourra-t-il visiter tous les petits cubes ? Indication : coloriez les cubes en deux couleurs.

∘32∘ Vous m'avez tellement embêté avec « mais la multiplication dans un anneau, c'est quelle multiplication » que je décide de construire un anneau un peu n'importe comment. On prend $\mathbb{Z}$ mais on ne pren pas les lois usuelles. Comme addition, je prends $x \oplus y = x + y - 7$.
Vérifiez que $(\mathbb{Z}, \oplus)$ est quand même un groupe (quel est le neutre, qui est le symétrique de n ?).
Puis, je décide de définir une multiplication, avec comme seule condition « interne, associaitive et distributive sur $\oplus$ ».
Vérifiez que c'est le cas si je pose $a \otimes b = 7$ pour tout couple $(a,\ b)$.
L'anneau est il alors intègre ?

Je cherche quand même à définir autre chose. Juste associatif et distributif sur $\oplus$.
Montrez pour tout n : $7 \otimes n = n \otimes 7 = 7$.
Montrez pour tout a et tout p : $a \otimes (14 - p) = 14 - (a \otimes p)$ (pensez à $a \otimes ((14 - p) \oplus p)$).
Montrez $(14 - p) \otimes (14 - n) = p \otimes n$.
On pose $a = 8 \otimes 8$. Montrez pour tout n supérieur ou égal à 7 : $8 \otimes n = (a - 7).n + 56 - 7.a$ (vous initialiserez pour $n = 7$ et pour l'hérédité, vous penserez à démontrer : $n + 1 = n \oplus 8$).
Montrez que ce résultat est encore valable pour n plus petit que 7 (vous pourrez écrire $n = 14 - p$).
Montrez alors par récurrence sur k : $k \otimes n =$
Finalement, pour l'addition $\oplus$ fixée, il y a plusieurs multiplication $\otimes$ qui conviennent, mais pas tant que ça.

∘33∘ On définit $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Généralisez en donnant une formule pour le terme général de chacune de ces matrices en taille n *(du type $a_i^k = N + 1 - k$ si $i + k \leqslant n + 1$)*.

Montrez que la somme des coefficients de A_n vaut $\sum_{k=0}^{n} k^2$. Même question avec B_n et C_n.

Donnez le du terme général de $A_n + B_n + C_n$ *(combien y a-t-il de coefficients non nuls ?)*.
Calculez la somme des coefficients de $A_n + B_n + C_n$. Quel résultat avez vous retrouvé ?

∘34∘ ♡ Une série géométrique a pour somme (tous les termes de 0 à l'infini) 1, et la somme de ses carrés vaut 2. Retrouvez la raison.
Et la valeur du premier terme.

∘35∘ Montrez que $\prod_{k=0}^{n} 2^{(k/2^k)}$ converge vers 4 quand n tend vers l'infini (on pourra dériver $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$).

∘36∘ On rappelle $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)} \ldots a_n^{\sigma(n)}$. Montrez que si A est une matrice triangulaire ($a_i^k = 0$ si $k < i$) alors son déterminant est le produit des termes diagonaux.

Montrez : $\det \begin{pmatrix} a & b & \beta \\ c & d & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha.(a.d - b.c)$.

∘37∘ a, b, c, d et e sont cinq complexes non nuls. Le polynôme $(X - a).(X - b).(X - c).(X - d).(X - e)$ est noté P, et sous forme développée, on l'écrit $X^5 - \sigma_1.X^4 + \sigma_2.X^3 - \sigma_3.X^2 + \sigma_4.X - \sigma_5$. Pour tout k, on pose aussi $S_k = a^k + b^k + c^k + d^k + e^k$. Exprimez S_2 à l'aide des σ_i. *Le but est d'écrire simplement les relations donnant les S_k à l'aide des σ_i et vice versa.*

Montrez : $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \dfrac{1}{X-a} + \dfrac{1}{X-b} + \dfrac{1}{X-c} + \dfrac{1}{X-d} + \dfrac{1}{X-e}$ *(partez du côté qui vous semble le plus pratique).*

Justifiez pour α non nul : $\dfrac{1}{t-\alpha} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{t^{k+1}} + o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$ quand t tend vers l'infini *(on rappelle : « $f(t) = o(g(t))$ quand t tend vers un truc » signifie « la forme surement indéterminée $\dfrac{f(t)}{g(t)}$ tend vers 0 quand t tend vers le truc en question »).*

Déduisez $\dfrac{P'(t)}{P(t)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{S_k}{t^{k+1}} + o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$, puis déduisez par produit en croix les formules de Newton (par exemple $S_4 - \sigma_1.S_3 + \sigma_2.S_2 - \sigma_3.S_1 + \sigma_4.S_0 = \sigma_4$).

Déduisez et généralisez $S_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & -4.\sigma_1 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & 3.\sigma_2 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & -2.\sigma_3 \\ \sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_4 \end{vmatrix}$.

∘38∘ Décomposez la suite périodique $(a,\ b,\ a,\ b,\ a,\ b, \ldots)$ comme combinaison de (1^n) et $((-1)^n)$.
Décomposez la suite périodique $(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0, \ldots)$ comme combinaison de (1^n) et (j^n) et $(j^{2.n})$.
Se décompose-t-elle à l'aide de (1^n) et (j^n) et $((-j)^n)$?

∘39∘ Calculez $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos((2.k+1).\theta)$ pour n donné dans $\mathbb{N}$ et θ dans $\mathbb{R}$.

∘40∘ ♡ Calculez $\sum\limits_{n=0}^{2014} \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k\Big)$ puis $\sum\limits_{n=0}^{2014} \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} 2^n\Big)$ et enfin $\sum\limits_{k=0}^{2014} \Big(\sum\limits_{n=k}^{2014} 2^n\Big)$ (changez l'année si vous y tenez).

∘41∘ ♡ Cet élève Izeurahai-Cranpla affirme $\sum\limits_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} (i+j) = \sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} (i+j)$ puisque de toutes façons, pour i et j nuls, $i+j$ ne compte pas. Prouvez lui qu'il a tort.

∘42∘ Calculez $\sum\limits_{i=0}^{n} \Big(\sum\limits_{j=i}^{n} j\Big)$ de deux façons. Retrouvez $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2$.

∘43∘ ♡ Augustin-Louis, Hermann-Amandus ! Montrez que $a.\cos(\theta) + b.\sin(\theta)$ est toujours entre $-\sqrt{a^2+b^2}$ et $\sqrt{a^2+b^2}$.

∘44∘ ♡ Calculez $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\cos(k.\theta)}{\cos^k(\theta)}$ (on supposera que θ n'est pas un multiple de π).

∘45∘ Les suites (a_n) et (b_n) sont liées par $\forall n,\ b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k}.a_k$.

Montrez alors $\forall p,\ a_p = \sum\limits_{i=0}^{p} \dbinom{p}{i}.(-1)^{i+p}.b_i$.

Qui est la suite (b_n) si (a_n) est constante ?
Qui est la suite (b_n) si (a_n) est géométrique de raison r ?

∘46∘ Démontrez la formule d'intégration par parties *(dite aussi formule d'Abel, mais c'est tellement plus parlant quand on la rapproche de $\int a.b = [a.B] - \int a'.B$ avec $B' = b$ que vous connaissez !).*

Si l'on pose $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n.b_n$ et $B_m = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k$. Alors : $S_N = a_N.B_N - \sum\limits_{n=0}^{N-1} B_n.(a_{n+1} - a_n)$.

∘47∘ Calculez la somme $\sum\limits_{q=0}^{n} (-1)^{n-q}.q^2$ pour n de 0 à 6 puis pour tout n de $\mathbb{N}$.

∘48∘ ♡ Calculez pour n donné ces trois sommes là

$A_n = \sum\limits_{0\leqslant j<i\leqslant n} \dfrac{j}{i}$	$B_n = \sum\limits_{i+j=n} i.j$	$C_n = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} Max(i,\ j)$

∘49∘ ♡ Dans le développement du déterminant d'une matrice A de taille 8 et de terme général a_i^k, combien de termes de la forme $a_1^1.a_3^2.a_.^3.a_!^4.a_:^5.a_4^6.a_2^7.a_,^8$ ont un signe + ?

◦50◦ ♡ Montrez : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+4.n+3} = \frac{3}{4}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+4.n+3} = \frac{1}{4}$ *(la notation* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *signifie* $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$*).*

◦51◦ n est un entier naturel donné. Montrez : $\displaystyle\prod_{0\leq i<j\leqslant n} (j-i) = \prod_{k=1}^{n} k^{(n+1-k)}$.

Calculez aussi $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j} (j-i)$ et $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} (j-i)$.

Combien de fois $j-i$ prend la valeur k (positif ou négatif d'ailleurs).

◦52◦ Combien y a-t-il de termes non nuls dans la somme $\displaystyle\sum_{i+j+k=20} \binom{23}{i}.\binom{21}{j}.\binom{13}{k}$? Montrez que cette somme vaut $\dbinom{57}{20}$. Quel est l'exposant de 13 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de ce nombre ?

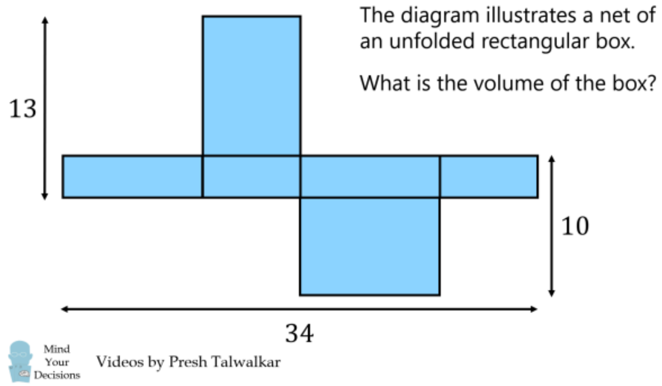
Indication $(1+X)^{23}.(1+X)^{21}.(1+X)^{13}$.

◦53◦ ♣ On sait additionner les binomiaux en lignes *(2^n)*, en colonne *(Zou-Shi-Zhi)*. Mais que se passe-t-il si on les additionne en diagonale *(évidemment de direction Sud-Ouest vers Nord-Est, comme ci contre)* ? Écrivez la formule rigoureuse $\displaystyle\sum_{k=\triangle}^{\oslash} \binom{\otimes}{\odot}$. Émettez une conjecture. Prouvez la.

Et pour la somme alternée ?

0	1	0	0	0	***0***	0
1	1	1	0	***0***	0	0
1	1	2	***1***	0	0	0
2	1	***3***	3	1	0	0
3	***1***	4	6	4	1	0
↗	1	5	10	10	5	1
1+4+3	1	6	15	20	15	6

◦54◦



Donnez un polynôme P vérifiant $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$ et $P(4) = -4$. Que vaut il en 0 ?

Quel est le minimum sur $]0, +\infty[$ de $t \longmapsto t^{(t^2)}$?

◦55◦ Complétez :

$P(X)$	$\dfrac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$	$\dfrac{(x-a).(x-b)}{?}$	$\dfrac{(x-a).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$
$P(a)$	?	?	?
$P\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$	?	1	?
$P(b)$	?	?	?
$\int_a^b P(t).dt$	$\dfrac{b-a}{6}$	?	$\dfrac{b-a}{6}$

Un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifie $P(a) = \alpha, P(b) = \beta$ et $P(\dfrac{a+b}{2}) = \gamma$. Montrez : $\dfrac{1}{b-a}.\int_a^b P(t).dt = \dfrac{\alpha+4.\gamma+\beta}{6}$ (valeur moyenne donnée par la formule dite des trois niveaux).

◦56◦ ♡Combien existe-t-il de polynômes de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant $P(1) = 2$, $P(2) = 2$ et $P(3) = 6$?
Combien existe-t-il de polynômes de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant $P(1) = 2$, $P(2) = 2$ et $P(3) = 6$?

◦57◦ ♣ Montrez que $n \longmapsto 2^n$ de $\mathbb{F}_7$ dans lui même peut s'écrire sous forme d'un polynôme.
La notation $\mathbb{F}_7$ c'est le corps modulo 7.