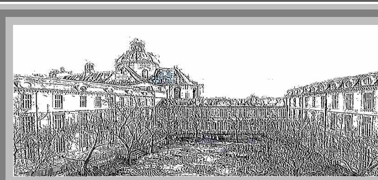
LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 16 janvier
M.P.S.I.2



2023 2024

IS15

♡ 0 ♡ Calculez $\int_2^3 x^{\frac{x+\ln(x)}{\ln(x)}}.dx$. [2 pt.]

♡ 1 ♡ La loi $\otimes$ est distributive sur $\oplus$ si $\forall(a,b,c),\ (a\oplus b)\otimes c = (a\otimes c)\oplus(b\otimes c)$. Montrez que $\cap$ est distributive sur $\cap$; que $\cap$ est distibutive sur Δ ; Δ est elle distributive sur Δ ? [3 pt.]

♡ 2 ♡ Rappelez la définition de « la relation $\Re$ sur l'ensemble E est une relation d'ordre » (pas juste trois adjectifs, les définitions). [2 pt.]

On définit sur $\mathbb{Q}$ la relation $\left(\dfrac{p}{q} \trianglelefteq \dfrac{r}{s}\right) \Leftrightarrow (p+\sqrt{2}.s \leqslant r+\sqrt{2}.q)$. (sous entendu : les rationnels sont écrits sous forme irréductible, et le dénominateur q est strictement positif). Montrez que c'est une relation d'ordre. [3 pt.] Montrez que les entiers relatifs sont dans le même ordre pour $\leqslant$ que pour $\trianglelefteq$. [1 pt.]

♢ 0 ♢ Il y a en MPSI2 vingt filles et vingt sept garçons. Est il vrai que le nombre de parties à 41 éléments de la MPSI2 est un multiple de 41 ? [2 pt.]

Avez vous une démonstration rapide du fait qu'il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair ? [2 pt.]

Démontrez : $\binom{47}{10} = \sum_{k=0}^{10}\binom{20}{k}.\binom{27}{10-k}$. [2 pt.]

♢ 1 ♢ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Montrez que $\{M\in M_2(\mathbb{R}) \mid M.A = A.M\}$ (note C_A) est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ (= non vide et stable par combinaison linéaire). [1 pt.]

♢ 2 ♢ On pose $\mathbb{T} = \{M\in M_2(\mathbb{R}) \mid Tr(M) = 0\}$. Montrez $C_A\cap T = Vect(B)$ pour une matrice B à préciser. [2 pt.]

♢ 3 ♢ Montrez : $\mathbb{T}+C_A = M_2(\mathbb{R})$. [2 pt.]

♢ 4 ♢ Donnez le nombre de solutions de l'équation $M^2 = A$ dans chacun des cas suivants pour le corps de base

$(\mathbb{Q},+,.)$	$(\mathbb{R},+,.)$
$(\mathbb{C},+,.)$	$(\mathbb{Z}/_{11.\mathbb{Z}},+,.)$

[3 pt.] Et si vous donniez la liste de solutions ? [5 pt.] Donnez la somme des solutions dans $(\mathbb{C},+,.)$. [2 pt.]

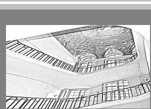
♣ 0 ♣ Dans cet exercice, tout est modulo 11. On pose $B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $E = \{B,\ B^2,\ B^4,\ B^5,\ B^8,\ B^{16}\}$. Montrez : $Card(E) = 5$ et calculez $\sum_{M\in E} Tr(M)$ puis $\prod_{M\in E}\det(M)$. [3 pt.] Montrez que $M \longmapsto M^2$ (notée σ) est une bijection de E dans lui même et donnez sa signature (rappel : $Sgn(g\circ f) = Sgn(g)\times Sgn(f)$ et $Sgn(cycle) = (-1)^{(taille\ du\ cycle)-1}$). [3 pt.] Existe-t-il φ, bijection de E vérifiant $\varphi\circ\varphi = \sigma$? [3 pt.] Existe-t-il φ, bijection de E vérifiant $\varphi\circ\varphi\circ\varphi = \sigma$? [2 pt.]

```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = b, a%b
....return(a)
```

♮ 0 ♮ Le programme ci contre calcule p.g.c.d de deux entiers (a et b (notation $p.g.c.d.(a,b) = a\wedge b$).

Écrivez un script Python qui calcule le réel $\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant n\\ 1\leqslant b\leqslant n\\ a\wedge b=1}} \dfrac{1}{a+2.b}$. [2 pt.]

♣ 1 ♣ J'ai demandé à Python de calculer $\sqrt{1+2023.\sqrt{1+2024.\sqrt{1+2025.\sqrt{1+2026.2028}}}}$ et il m'a trouvé 2024.0. S'agit il d'une satanée coïncidence à 10^{-20} près ou y a-t-il une belle formule cachée. [2 pt.]



Questions de cours. IS15

L'intégrale $\int_2^3 x^{\frac{x+\ln(x)}{\ln(x)}}.dx$ est bien une question de cours. Déjà, l'application est continue. mais si on revient à la définition de $x^a = e^{a.\ln(x)}$ on a déjà

$$x^{\frac{x+\ln(x)}{\ln(x)}} = e^{\ln(x).\frac{x+\ln(x)}{\ln(x)}} = e^{x+\ln(x)} = e^x.e^{\ln(x)} = e^x.x$$

La question se réduit à une intégration par parties

$$\int_2^3 x.e^x.dx = [x.e^x]_2^3 - \int_2^3 1.e^x.dx = 2.e^3 - e^2$$

On se donne trois parties A, B et C d'un ensemble E et on doit prouver

$$(A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C)$$

et c'est vrai, car les deux membres donnent $A \cap B \cap C$. On doit ensuite prouver

$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$$

on le prouve en passant par les fonctions indicatrices $|1_A - 1_B| \times 1_C = |1_A \times 1_C - 1_B \times 1_C|$.

Ensuite, on ne semble pas avoir

$$(A\Delta B)\Delta C = (A\Delta C)\Delta(B\Delta C)$$

Le second membre se simplifie en $A\Delta B\Delta C\Delta C$ par commutativité et associtivité, puis en $A\Delta B\Delta\emptyset$ et même $A\Delta B$.
Le premier donne $A\Delta B\Delta C$.
On prend un contre-exemple avec $A = B = C \neq \emptyset$.

Relations d'ordre :	Réflexive	$\forall(a,\ b,\ c) \in E^3,$	$a\Re a$
	Antisymétrique		$((a\Re b)\ et\ (b\Re a)) \Rightarrow (a = b)$
	Transitive		$((a\Re b)\ et\ (b\Re c)) \Rightarrow (a\Re c)$

On se donne trois rationnels sous forme irréductible $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ et $\frac{u}{v}$.
On a toujours $p + q.\sqrt{2} \leqslant p + q.\sqrt{2}$. La relation est réflexive.

Si on suppose $p + s.\sqrt{2} \leqslant r + q.\sqrt{2}$ et $r + v.\sqrt{2} \leqslant u + s.\sqrt{2}$ alors on a $(p + s.\sqrt{2} + r + v.\sqrt{2}) \leqslant (r + q.\sqrt{2} + u + s.\sqrt{2})$ (en sommant), puis en simplifiant par $r + s.\sqrt{2}$ on obtient $(p + v.\sqrt{2}) \leqslant (u + q.\sqrt{2})$ et on reconnaît $\frac{p}{q} \trianglelefteq \frac{u}{v}$. La relation est transitive.

On suppose maintenant à la fois $p + s.\sqrt{2} \leqslant r + q.\sqrt{2}$ et $r + q.\sqrt{2} \leqslant p + s.\sqrt{2}$. Bien évidemment, on déduit $p + s.\sqrt{2} = r + q.\sqrt{2}$.
Mais ceci ne nous donne pas $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$. Alors même que c'est ça notre objectif.

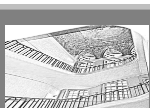
> *Celui qui s'arrête à $p + s.\sqrt{2} = r + q.\sqrt{2}$, persuadé qu'il a fait ce qu'on lui demandait a perdu tous les points. Il ne sait même pas se poser les bonnes questions.*
> *Celui qui s'arrête en disant « je ne sais pas comment passer de $p + s.\sqrt{2} = r + q.\sqrt{2}$ à $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ a 9% des points. C'est ça les maths.*

Reste donc à passer de $p + s.\sqrt{2} = r + q.\sqrt{2}$ à $p = r$ et $q = s$. Une égalité qui en donne deux. C'est de l'arnaque ?
C'est une identification abusive ?
Pas tant que ça, mais tout repose sur $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

On écrit $(p-r) = \sqrt{2}.(q-s)$. Et là, tout se dénoue.
Si $q-s$ est non nul, on obtient $\sqrt{2} = \dfrac{p-r}{q-s}$\in\Q et c'est absurde.
On a donc nécessairement $q = s$ et en reportant : $p = r$.

La relation est donc une relation d'ordre (dont le physicien dira « mais elle n'a aucun intérêt, à quoi ça sert ? ».[1]

Les entiers sont ils classés comme on en avait l'habitude ?
On se donne deux entiers k et n. On suppose $k \leqslant n$ (notion habituelle). On vérifie si on a aussi $\dfrac{k}{1} \trianglelefteq \dfrac{n}{1}$: $k + 1.\sqrt{2} \leqslant n + 1.\sqrt{2}$. C'est bon !



Dénombrement. IS15

Combien de parties à douze éléments parmi 47 : réponse $\dbinom{47}{12}$.
Va-t-on calculer ce nombre puis regarder ensuite si c'est un multiple de 41 ? Ce serait idiot.
On écrit déjà ce nombre par sa définition : 47 choix pour le premier élève, puis 46 pour le suivant. Et ainsi de suite.
On pensera ensuite à diviser par 12! puisque ce sont des ensembles et non des listes. Bref

$$\binom{47}{12} = \frac{47.46.45.44.43.42.41.40.39.38.37.36}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}$$

avec douze termes en haut et douze en bas.
Et au numérateur, on a un multiple de 41, avec ce beau facteur 41 juste au milieu.
Le dénominateur ne contient aucun facteur 41. Le quotient est bien un multiple de 41.

On peut d'ailleurs le simplifier : par exemple un 36 *en haut et un* 12 *en bas, un* 40 *en haut et un* 10 *en bas*

$$\binom{47}{12} = \frac{47.46.45.44.43.42.41.4.39.38.37.3}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.1.11.1}$$

On simplifie le 44 *et le* 11*, le* 42 *avec le* 6 *et le* 7*, le* 45 *avec le* 5 *et le* 9

$$\binom{47}{12} = \frac{47.46.1.4.43.1.41.4.39.38.37.3}{1.2.3.4.1.1.1.8.1.1.1.1}$$

et ainsi de suite. Finalement $\dbinom{47}{12} = 3.13.19.23.37.41.43.47$

On peut certes comptabiliser les parties de cardinal pair : $\displaystyle\sum_{k=0}^{23} \binom{47}{2.k}$ puis celles de cardinal impair : $\displaystyle\sum_{k=0}^{23} \binom{47}{2.k+1}$
et tenter de comparer ces deux nombres. La solution consistera à développer $0 = (1-1)^{47} = \sum_{i=0}^{47} \binom{47}{i}.(-1)^i = \sum_{k=0}^{23} \binom{47}{2.k} - \sum_{k=0}^{23} \binom{47}{2.k+1}$
Mais on peut aussi dire qu'il y a une bijection de $P(MPSI2)$ dans $P(MPSI2)$ qui transforme les parties paires en parties impaires et vice versa. Ceci prouve qu'il y a donc autant de parties paires que de parties impaires.
Et qui est cette bijection ? Mais par exemple $X \longmapsto \overline{X}$; le passage au complémentaire.

$\dbinom{47}{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} \binom{20}{k}.\binom{27}{10-k}$ peut de démontrer comme une brute avec $\sum_{k=0}^{10} \binom{20}{k}.\binom{27}{10-k} = 20!.27!.\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!.(20-k)!}.\frac{1}{(10-k)!.(17-k)!}$
dans lequel on essaye de retrouver 47! et 10! et 37!.
Mais il doit y avoir un argument de dénombrement.
$\dbinom{47}{10}$: on cherche à faire un groupe (mixte ?) de 10 élèves.

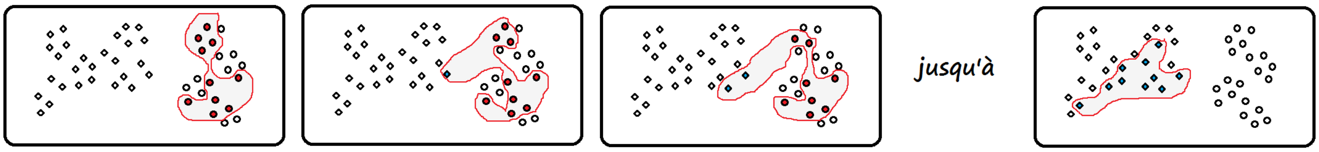
Déjà, si on ne prend que des garçons, on en choisit 10 parmi 27. C'est justement $\dbinom{27}{10}.\dbinom{20}{0}$ puisque $\dbinom{20}{0}$ vaut 1.

Il y a aussi le cas où on ne prend que des filles : $\dbinom{20}{10} = \dbinom{27}{0}.\dbinom{20}{10}$.

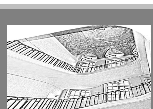
---

1. *moi je dirai qu'elle sert peut être juste à dire au physicien « il faut savoir inventer des choses nouvelles qui ressemblent à celles qu'on connaît, mais qui ne sont pas les mêmes, pour comprendre ce qui sert vraiment dans celles qu'on connaît »*

Et il y a toutes les situations intermédiaires : k garçons (parmi les 20) et $n-k$ filles (parmi les 27).
On somme sur ces possibilités (partition, ou système complet d'événements) pour k de 0 à 10.



(1) fois (10 parmi 20) $k = 0$ — (1 parmi 27) fois (9 parmi 20) $k = 1$ — (2 parmi 27) fois (8 parmi 20) $k = 2$ — (10 parmi 27) fois (1) $k = 10$



Commutatnt et racines carrées d'une matrice. IS15

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

L'ensemble $\{M \mid A.M = M.A\}$ contient plusieurs matrices assez évidentes : I_2, $0_{2,2}$ et A. Ainsi d'ailleurs que tous les polynômes en A comme $a.A^2 + b.A + c.I_2$(rappelons que $a.A^2 + b.A + c$ n'aurait aucun sens !).

Prenons deux matrices dans cet ensemble : M_1 et M_2 (elles vérifient $A.M_i = M_i.A$) et deux réels α_1 et α_2. Par règles de calcul élémentaires

$$A.(\alpha_1.M_1 + \alpha_2.M_2) = \alpha_1.A.M_1 + \alpha_2.A.M_2 = \alpha_1.M_1.A + \alpha_2.M_2.A = (\alpha_1.M_1 + \alpha_2.M_2).A$$

On reconnaît que $\alpha_1.M_1 + \alpha_2.M_2$ est dans C_A.

La question ÉLÉMENTAIRE. Si vous la traitez de travers en ne comprenant pas qui est donné, qui on prend et à qui on s'intéresse, alors vous n'avez pas dépassé le cap de Bac, et vous ne pouvez pas faire d'études supérieures en sciences.

Une autre approche consiste à trouver la forme des éléments de C_A en redescendant pour une fois jusqu'aux coefficients. On demande

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{array}{cc} a+3.b & b+3.a \\ 3.d+c & 3.c+d \end{array} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{cc} a+3.c & b+3.d \\ 3.a+c & 3.b+d \end{array} \end{array}$$

et on arrive à $a = d$ et $b = c$. On déduit

$$C_A = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

Une fois l'ensemble écrit sous la forme $Vect(\dots,\dots)$ c'est un espace vectoriel.

> *Cette réponse est la réponse qualifiée en marge de « Efficace ». Bref, la réponse de matheux.*
> *Il y a aussi « c'est le noyau de l'application linéaire $M \longmapsto A.M - M.A$ et en tant que noyau, c'est un espace vectoriel.*
> *Il suffit, pour être matheux d'être flemmard, et de savoir prendre de haut les questions, sans revenir à chaque fois aux définitions.*

$\mathbb{T}$ est l'ensemble des matrices de trace nulle (lui aussi stable par combinaisons).
Qui sont les matrices à la fois de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ et dont la trace ($2.a$) est nulle ? Ce sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

$$C_A \cap \mathbb{T} = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}\} = Vect(\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix})$$

> *On note au passage que $\mathbb{T}$ est un espace vectoriel de dimension 3. Ce sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ et on l'écrit $Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$.*

Si ensuite je triche avec la formule de Grassmann, je déduis

$$\dim(\mathbb{T}+C_A)=\dim(\mathbb{T})+\dim(C_A)-\dim(\mathbb{T}\cap C_A)=3+2-1=4$$

Et le seul sous-espace de dimension 4 dans $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est $(M_2(\mathbb{R})$. On a donc $C_A+\mathbb{T}=M_2(\mathbb{R})$.

Mais on va le faire à la main. Il faut montrer que toute matrice $M=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ se décompose sous la forme

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

On a très vite les conditions nécessaires : $a+\alpha=x$ et $a-\alpha=t$ qui donnent $a=\dfrac{x+t}{2}$ et $\alpha=\dfrac{x-t}{2}$. Bon début. Ensuite, on flotte un peu avec $b+\beta=y$ et $b+\gamma=z$. L'élève qui ne raisonne que par conditions nécessaires est bloqué. L'élève de Prépas dit que le système est sous-contraint. il choisit une variable comme il veut. Et il ne lui reste plus qu'à proposer des synthèses (car il n'y a pas unicité) :

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{x+t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{x+t}{2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{x-t}{2} & y \\ z & \frac{t-x}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{x+t}{2} & y \\ y & \frac{x+t}{2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{x-t}{2} & 0 \\ z-y & \frac{t-x}{2} \end{pmatrix}$$

Comme $\det(A)$ est négatif, on ne pourra jamais trouver M à coefficients réels vérifiant $(\det(M))^2=\det(A)$.
Et comme il n'y a pas de solutions réelles, il n'y aura pas non plus de solutions rationnelles.

Serait il possible qu'il y ait des solutions réelles, mais pas de solutions rationnelles ?
Oui, je vous pose l'équation $M^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *ou même* $P=P.\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.P^{-1}$ *pour brouiller les pistes.*

En revanche, dans $\mathbb{C}$ on peut espérer trouver des solutions. On peut même en trouver quatre.

our en avoir la liste, on commence par diagonaliser A :
polynôme caractéristique : $X^2-2.X-8$, valeurs propres 4 et -2,
matrice diagonale $D=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et matrice de passage $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

En écrivant $A=P.\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.P^{-1}$ on trouve quatre racines

$P.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i.\sqrt{2} \end{pmatrix}.P^{-1}$	$P.\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & i.\sqrt{2} \end{pmatrix}.P^{-1}$
$P.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -i.\sqrt{2} \end{pmatrix}.P^{-1}$	$P.\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -i.\sqrt{2} \end{pmatrix}.P^{-1}$

Et si vous préférez

$\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 2+i.\sqrt{2} & 2-i.\sqrt{2} \\ 2-i.\sqrt{2} & 2+i.\sqrt{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} -2+i.\sqrt{2} & -2-i.\sqrt{2} \\ -2-i.\sqrt{2} & -2+i.\sqrt{2} \end{pmatrix}$
$\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 2-i.\sqrt{2} & 2+i.\sqrt{2} \\ 2+i.\sqrt{2} & 2-i.\sqrt{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} -2-i.\sqrt{2} & -2+i.\sqrt{2} \\ -2+i.\sqrt{2} & -2-i.\sqrt{2} \end{pmatrix}$

On gagne un point facilement en disant que la somme des solutions est nulle.
Et même sans les avoir trouvées. Chaque fois qu'on a une solution, on a son opposé !

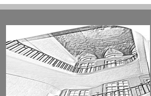
Et si on travaille modul 11 ? On peut prendre la même matrice $P=\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (d'inverse $P^{-1}=\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$).

Et la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ a-t-elle des racines ? Pas sous cette forme, mais sous la forme $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

On a alors des solutions $P.\begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 3 \end{pmatrix}.P^{-1}$. En voici la liste

$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

On pouvait les trouver en les écrivant sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ *puis en élevant au carré en et identifiant.*



Script Python. IS15

On a une somme double, on va imbriquer deux boucles `for`.

On a une condition, on va donc faire appel à un test `if` et n'augmenter l'accumulateur que dans ce cas.

```
def S(n) :
....s = 0
....for a in range(1, n+1) :
........for b in range(1, n+1) :
............if gcd(a, b) == 1 :
................s += 1 / (a + 2*b)
....return s
```

Le retour du modulo 11. IS15

On calcule les puissances de M demandée, en effectuant des multiplications

	$B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$B^2 = \begin{pmatrix} 45 & 81 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$	$B^4 = \begin{pmatrix} 37 & 32 \\ 72 & 85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$	$B^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	$B^4 = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$	$B^8 = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	
$B^4 = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$	$B^8 = \begin{pmatrix} 76 & 120 \\ 72 & 124 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	$B^{16} = \begin{pmatrix} 160 & 130 \\ 78 & 69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$B^{16} = B$

L'écriture $E = \{B,\ B^2,\ B^4,\ B^5,\ B^8,\ B^{16}\}$ semble contenir six éléments, mais l'un est en double. On devrait écrire

$$E = \{B,\ B^2,\ B^4,\ I_2,\ B^8\}$$

Puisque c'est utile, on calcule les traces et déterminants. Cela dit, on a $\det(B) = 9$, et donc on a directement

$$\det(B^2) = (\det(B))^2 = 9^2 = 81 = 4$$

et ainsi de suite.

	$B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$	$B^4 = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$	$B^8 = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	$B^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
trace	9	8	1	2	2
déterminant	9	$81 = 4$	$16 = 5$	$25 = 3$	1
carré	B^2	B^4	B^8	$B^{16} = B$	$B^5 = I_2$

La somme de toutes les traces vaut 0.
Le produit des déterminants vaut 1.

Dans le tableau ci dessus, on a donné le carré de chacun. D'ailleurs, il était prévisible que le carré de B soit B^2, celui de B^2 donne B^4 et ainsi de suite.
Simplement, il fallait écrire $(M^8)^2 = M^{16} = M$.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} B & \rightarrow & B^2 \\ \uparrow & \text{carré} & \downarrow \\ B^8 & \leftarrow & B^4 \end{array}} \quad \boxed{I_2}$$

On reconnaît un quadri-cycle et un monocycle.

En écrivant $\overrightarrow{(I_2)} \circ \overrightarrow{(B\ B^2\ B^4\ B^8)}$, on calcula la signature : $(-1)^{1-1}.(-1)^{4-1}$: elle vaut -1.

Il ne peut pas exister φ vérifiant $\varphi \circ \varphi = \sigma$. En effet, en passant à la signature, on aurait

$$(Sgn(\varphi))^2 = Sgn(\varphi^2) = Sgn(\sigma) = -1$$

alors qu'une signature ne peut valoir que -1 ou 1.

En revanche, les plus rusés écriront $\sigma^4 = Id_E$ (quadricycle) puis $\sigma^8 = Id_E$ et $\sigma^9 = \sigma$. On devine alors $(\sigma^3)^3 = \sigma$.
Sinon, on peut aussi partir de $\sigma^{-1} = \sigma^3$ qui donne ensuite $\sigma = (\sigma^{-1})^3$. Il suffit donc de tourner à l'envers.

Sur cette partie d'exercice, le fait qu'il s'agisse de $\sigma = M \longmapsto M^2$ n'a aucune importance.

Une formule avec plein de racines. IS15

Si on doit prouver $\sqrt{1+2023.\sqrt{1+2024.\sqrt{1+2025.\sqrt{1+2026.2028}}}} = 2024$, autant se dire qu'il doit y avoir un résultat général avec

$$\sqrt{1+(n-1).\sqrt{1+n.\sqrt{1+(n+1).\sqrt{1+(n+2).(n+4)}}}} = n$$

On constate quand même $\sqrt{1+(n+2).(n+4)} = \sqrt{n^2+6.n+9} = \sqrt{(n+3)^2} = (n+3)$.
On poursuit

$$\sqrt{1+(n+1).\sqrt{1+(n+2).(n+4)}} = \sqrt{1+(n+1).(n+3)} = \sqrt{n^2+4.n+4} = \sqrt{(n+2)^2} = (n+2)$$

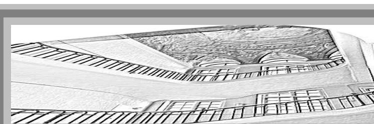
$$\sqrt{1+n.\sqrt{1+(n+1).\sqrt{1+(n+2).(n+4)}}} = \sqrt{1+n.(n+2)} = \sqrt{(n+1)^2} = n+1$$

Partout on suppose n positif pour ne pas trainer de valeurs absolues

$$\sqrt{1+(n-1).\sqrt{1+n.\sqrt{1+(n+1).\sqrt{1+(n+2).(n+4)}}}} = \sqrt{1+(n-1).(n+1)} = \sqrt{n^2} = n$$

Tout notre intérêt était ici de travailler avec une formule générale plutôt qu'avec le millésime de l'année.

LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2023 2024
IS15
45- points