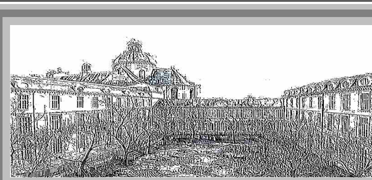
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 22 janvier
M.P.S.I.2



2023 2024

TD16

∘0∘ ♡ On définit $f = x \longmapsto \dfrac{15.x^4 - 166.x^3 + 621.x^2 - 902.x + 480}{24}$. Vérifiez que c'est *(en dépit des apparences)* un élément de S_5 (permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$), et calculez sa signature.

On calcule les images

1	2	3	4	5
↓	↓	↓	↓	↓
2	3	4	1	5

On reconnaît $\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4)} \circ \overrightarrow{(5)}$,de signature -1.

∘1∘ **La vraie définition de la signature.** On se donne un entier naturel n. On note S_n l'ensemble des $n!$ permutations de la liste $[1, \dots n]$ notée L.

Pour toute permutation σ (bijection de L dans L), on pose $Sgn(\sigma) = \dfrac{\displaystyle\prod_{i<j\leq n} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\displaystyle\prod_{i<j\leq n} (j - i)}$.

♠$_1$ Vérifiez l'existence de cette quantité. Calculez $Sgn(Id)$.

Le numérateur est un produit de $\dfrac{n.(n-1)}{2}$ entiers (positifs ou négatifs).
Le dénominateur est un produit de $\dfrac{n.(n-1)}{2}$ entiers strictement positifs : $j - i$.
Le dénominateur est non nul, ce rationnel existe.

Pour l'identité, $Sgn(Id) = \dfrac{\displaystyle\prod_{i<j\leq n} (j - i)}{\displaystyle\prod_{i<j\leq n} (j - i)} = 1$ (numérateur égal au dénominateur).

♠$_2$ Calculez la signature du cycle $\overrightarrow{1\ 2\ 3}$ dans le cas $n = 3$ *(ce cycle est défini par $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$ et $\sigma(3) = 1$)*. Calculez la signature de ce cycle dans le cas $n = 4$. Dans le cas $n = 4$ calculez la signature de $\overrightarrow{1\ 2\ 3\ 4}$.

Pour n égal à 3, il y a trois termes

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$j = 1$			
$j = 2$	oui		
$j = 3$	oui	oui	

On calcule donc $\dfrac{(\sigma(2) - \sigma(1)).(\sigma(3) - \sigma(1)).(\sigma(3) - \sigma(2))}{(2-1).(3-1).(3-2)} = \dfrac{(3-2).(1-2).(1-3)}{(2-1).(3-1).(3-2)} = +1.$

Pour n égal à 4, il y a six termes :

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$j = 1$				
$j = 2$	oui			
$j = 3$	oui	oui		
$j = 4$	oui	oui	oui	

On calcule donc

$$\frac{(\sigma(2) - \sigma(1)).(\sigma(3) - \sigma(1)).(\sigma(4) - \sigma(1)).(\sigma(3) - \sigma(2)).(\sigma(4) - \sigma(2)).(\sigma(4) - \sigma(3))}{(2-1).(3-1).(4-1).(3-2).(4-2).(4-3)}$$

On trouve cette fois

$$\frac{(3-2).(1-2).(4-2).(1-3).(4-3).(4-1)}{(2-1).(3-1).(4-1).(3-2).(4-2).(4-3)}$$

On regarde les termes en $4 - 1$, $4 - 2$ et $4 - 3$. On les trouve en haut et en bas chacun.
On simplifie et il reste le même produit. La signature vaut encore $+1$.

On passe au quadricycle :

$$\frac{(\sigma(2)-\sigma(1)).(\sigma(3)-\sigma(1)).(\sigma(4)-\sigma(1)).(\sigma(3)-\sigma(2)).(\sigma(4)-\sigma(2)).(\sigma(4)-\sigma(3))}{(2-1).(3-1).(4-1).(3-2).(4-2).(4-3)}$$

On trouve

$$\frac{(3-2).(4-2).(1-2).(4-3).(1-3).(1-4)}{(2-1).(3-1).(4-1).(3-2).(4-2).(4-3)}$$

On a six termes en haut, six termes en bas.
Les mêmes ou presque. Tout ce qui change, c'est le signe.
On peut mettre le numérateur dans l'ordre :

$$\frac{(1-2).(1-3).(1-4).(3-2).(4-2).(4-3)}{(2-1).(3-1).(4-1).(3-2).(4-2).(4-3)}$$

On regarde juste les signes :

$$\frac{\ominus.\ominus.\ominus.\oplus.\oplus.\oplus}{\oplus.\oplus.\oplus.\oplus.\oplus.\oplus} = -1$$

♠3 Montrez pour toute permutation σ :

$$\left(Sgn(\sigma)\right)^2 = \frac{\prod_{i<j}(\sigma(j)-\sigma(i))}{\prod_{i<j}(j-i)}.\frac{\prod_{j<i}(\sigma(j)-\sigma(i))}{\prod_{j<i}(j-i)} = \frac{\prod_{i\neq j}(\sigma(j)-\sigma(i))}{\prod_{i\neq j}(j-i)} = 1$$

On va montrer que la signature, définie sous cette forme compliquée, vaut toujours 1 ou -1.
L'idée naturelle : comme on a une bijection, on va retrouver les mêmes termes en haut et en bas, au signe près.
Mais pour rendre ceci rigoureux, on va passer par le carré de la signature, et montrer qu'il vaut 1.

On commence par

$$\left(Sgn(\sigma)\right)^2 = \frac{\prod_{i<j}(\sigma(j)-\sigma(i))}{\prod_{i<j}(j-i)}.\frac{\prod_{i<j}(\sigma(j)-\sigma(i))}{\prod_{i<j}(j-i)}$$

juste en écrivant deux fois le même terme.
Ensuite, on change de variable dans le second produit : $jj = i$ et $ii = j$.

$$\left(Sgn(\sigma)\right)^2 = \frac{\prod_{i<j}(\sigma(j)-\sigma(i))}{\prod_{i<j}(j-i)}.\frac{\prod_{jj<ii}(\sigma(ii)-\sigma(jj))}{\prod_{jj<ii}(ii-jj)}$$

On change le signe de chaque terme du numérateur du second produit, de même pour chaque terme du dénominateur.
Comme il y en a autant en haut qu'en bas (en fait $\frac{n.(n-1)}{2}$), les signes moins se compensent.

$$\left(Sgn(\sigma)\right)^2 = \frac{\prod_{i<j}(\sigma(j)-\sigma(i))}{\prod_{i<j}(j-i)}.\frac{\prod_{jj<ii}(\sigma(jj)-\sigma(ii))}{\prod_{jj<ii}(jj-ii)}$$

On enlève ces doubles lettres, car les variables sont muettes :

$$\left(Sgn(\sigma)\right)^2 = \frac{\prod_{i<j}(\sigma(j)-\sigma(i))}{\prod_{i<j}(j-i)}.\frac{\prod_{j<i}(\sigma(j)-\sigma(i))}{\prod_{j<i}(j-i)}$$

On regroupe les deux termes du numérateur ensemble (on fera de même au dénominateur). On a une fois $i < j$ et la seconde fois $j < i$. Globalement, on a tous les cas, sauf $i = j$.

$$\left(Sgn(\sigma)\right)^2 = \frac{\prod_{i\neq j}(\sigma(j)-\sigma(i))}{\prod_{i\neq j}(j-i)}$$

avec donc $n.(n-1)$ termes en haut comme en bas.
Mais comme σ est une bijection, on a les mêmes terme sen haut et en bas.
Posons en fait $u=\sigma(i)$ et $v=\sigma(j)$. On a alors $\prod_{i\neq j}(\sigma(j)-\sigma(i))=\prod_{v\neq u}(v-u)$.
Et comme les variables sont muettes, ce terme est le même qu'en bas.

$$\Big(Sgn(\sigma)\Big)^2=\frac{\prod_{v\neq u}(v-u)}{\prod_{i\neq j}(j-i)}=1$$

Tout ça pour raconter ce qu'on visualise sur un exemple avec $n=5$ et donc 10 termes.
Prenons $\sigma=\overrightarrow{(1\ 3\ 4)}\circ\overrightarrow{(2\ 5)}$ et calculons numérateur et dénominateur de $\dfrac{\prod_{i<j}(\sigma(j)-\sigma(i))}{\prod_{i<j}(j-i)}$.

dénominateur	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$j=1$					
$j=2$	$2-1$				
$j=3$	$3-1$	$3-2$			
$j=4$	$4-1$	$4-2$	$4-3$		
$j=5$	$5-1$	$5-2$	$5-3$	$5-4$	

et

numérateur	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$j=1$					
$j=2$	$5-3$				
$j=3$	$4-3$	$4-5$			
$j=4$	$1-3$	$1-5$	$1-4$		
$j=5$	$2-3$	$2-5$	$2-4$	$2-1$	

Voyez vous bien les mêmes termes, au signe près, et à l'ordre près ?

♠$_4$ Déduisez que la signature ne peut valoir que 1 ou -1.

Bon, là c'est facile. Un nombre dont le carré vaut 1. ce ne peut être que 1 ou -1.

♠$_5$ On se donne deux permutations σ et φ. Montrez :

$$Sgn(\sigma\circ\varphi)=\frac{\prod_{i<j}(\sigma(\varphi(j))-\sigma(\varphi(i)))}{\prod_{i<j}(\varphi(j)-\varphi(i))}.\frac{\prod_{j<i}(\varphi(j)-\varphi(i))}{\prod_{j<i}(j-i)}=Sgn(\sigma).Sgn(\varphi)$$

Maintenant qu'on sait que la signature vaut 1 ou -1, on va montrer sa propriété fondamentale :
la signature du produit [1] est le produit des signatures.

On part de la définition : $Sgn(\sigma\circ\varphi)=\dfrac{\prod_{i<j}(\sigma(\varphi(j))-\sigma(\varphi(i)))}{1}.\dfrac{1}{\prod_{j<i}(j-i)}$.

On insère un terme (non nul, il faut le dire) en haut et en bas, bien choisi :

$$Sgn(\sigma\circ\varphi)=\frac{\prod_{i<j}(\sigma(\varphi(j))-\sigma(\varphi(i)))}{\prod_{i<j}(\varphi(j)-\varphi(i))}.\frac{\prod_{j<i}(\varphi(j)-\varphi(i))}{\prod_{j<i}(j-i)}$$

On est heureux, on a déjà fait apparaitre la signature de φ.
Reste à montrer que $\dfrac{\prod_{i<j}(\sigma(\varphi(j))-\sigma(\varphi(i)))}{\prod_{i<j}(\varphi(j)-\varphi(i))}$ est bien la signature de σ.
On effectue un changement de variable : $u=\varphi(i)$ et $v=\varphi(j)$ *(encore ces lettres u et v facile à confondre graphiquement !)*.
Si on va un peu vite, c'est facile : $\dfrac{\prod_{i<j}(\sigma(\varphi(j))-\sigma(\varphi(i)))}{\prod_{i<j}(\varphi(j)-\varphi(i))}=\dfrac{\prod_{?}(\sigma(v)-\sigma(u)}{\prod_{?}(v-u)}=Sgn(\sigma)$.
Mais quelle est la condition ? On avait $i<j$, mais on n'a plus $u<v$.
On a juste $u\neq v$.
En fait, il faut être plus rigoureux dans le changement d'indice
- si $\varphi(i)<\varphi(j)$ alors $u=\varphi(i)$ et $v=\varphi(j)$
- si $\varphi(j)<\varphi(i)$ alors $u=\varphi(j)$ et $v=\varphi(i)$

1. je devrais dire « de la composée », mais c'est plus agréable avec produit, puisque composer des permutations, ce sera multiplier des matrices

On a toujours terme à terme $\dfrac{(\sigma(\varphi(j))-\sigma(\varphi(i)))}{(\varphi(j)-\varphi(i))} = \dfrac{(\sigma(v)-\sigma(u)}{(v-u)}$ soit directement, soit avec deux signes moins.
La condition $\prod\limits_{i<j}$ devient bien $\prod\limits_{u<v}$ (avec autant de termes, puisque φ est bijective).

Cette fois, on a bien $\dfrac{\prod\limits_{i<j}(\sigma(\varphi(j))-\sigma(\varphi(i)))}{\prod\limits_{i<j}(\varphi(j)-\varphi(i))} = \dfrac{\prod\limits_{u<v}(\sigma(v)-\sigma(u)}{\prod\limits_{u<v}(v-u)} = Sgn(\sigma)$.

♠6 Montrez : $Sgn(\sigma^{-1}) = \dfrac{1}{Sgn(\sigma)}$ pour toute permutation σ. Comparez $Sgn(\sigma^{-1}\circ\varphi\circ\sigma)$ et $Sgn(\varphi)$ *(ce qu'on appelle conjugaison)*.

On exploite juste le résultat précédent : $Sgn(\sigma)..Sgn(\sigma^{-1}) = Sgn(\sigma\circ\sigma^{-1}) = Sgn(Id) = 1$.
Oui, la signature de l'identité vaut 1, le numérateur est égal au dénominateur...

On a donc, en divisant : $Sgn(\sigma^{-1}) = \dfrac{1}{Sgn(\sigma)} = Sgn(\sigma)$ puisque $Sgn(\sigma)$ vaut 1 ou -1. Je dois vous faire un dessin avec « l'inverse de 1 est 1, et l'inverse de -1 est -1 » ?

On notera que la formule $Sgn(\sigma^{-1}) = \dfrac{1}{Sgn(\sigma)}$ peut aussi s'obtenir par ré-indexation dans $Sgn(\sigma^{-1}) = \dfrac{\prod\limits_{i<j}(\sigma^{-1}(j)-\sigma^{-1}(i))}{\prod_{i<j}(j-i)}$.

On a $Sgn(\sigma^{-1}\circ\varphi\circ\sigma) = Sgn(\sigma)$, et ceci doit vous rappeler $\det(P^{-1}.M.P) = \det(M)$ ainsi que $Tr(P^{-1}.M.P) = Tr(M)$ et de nombreux phénomènes du même type, qu'on appelle effectivement conjugaison : $M \longmapsto P^{-1}.M.P$ avec P fixée.

Le calcul est direct : $Sgn(\sigma^{-1}\circ\varphi\circ\sigma) = Sgn(\sigma^{-1}).Sgn(\varphi).Sgn(\sigma)$ par propriété « image du produit/produit des images »
$Sgn(\sigma^{-1}\circ\varphi\circ\sigma) = Sgn(\sigma^{-1}).Sgn(\sigma).Sgn(\varphi)$ car là, on est dans $\mathbb{R}$ (et même $\mathbb{Z}$, oui, je sais)
$Sgn(\sigma^{-1}\circ\varphi\circ\sigma) = 1.Sgn(\varphi)$ par propriété démontré juste avant

♠7 On note $\tau_{i,j}$ la transposition qui échange i et j et laisse les autres éléments invariants *($\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ et $\sigma(k) = k$ pour $k \notin \{i,\ j\}$)*. Montrez $Sgn(\tau_{1,2}) = -1$.

La notation $\tau_{i,j}$ pour le simple bicycle $\overrightarrow{(i\ j)}$ est celle utilisée dans le programme.
Je ne l'aime que moyennement, car elle introduit une notation de plus pour rien.
Et aussi, ensuite, les élèves confondent les mots permutation (échange bijectif quelconque)
transposition (échange de seulement deux termes)
La transposition (ou bicycle) est la brique élémentaire avec laquelle on décompose ensuite toute permutation, étape par étape.

On va montrer que toutes les transpositions ont pour signature m-1 .
Ceci permettra de valider la « définition » de la signature « décomposer en produit de transpositions,
compter les transpositions
et même juste la parité du nombre de transposition »

Commençons par la transposition la plus simple : juste deux termes.
Et montrons que sa signature vaut effectivement -1.

On calcule donc $Sgn(\sigma) = \dfrac{\prod\limits_{i<j\leq n}(\tau_{1,2}(j)-\tau_{1,2}(i))}{\prod\limits_{i<j\leq n}(j-i)}$ ou même juste le signe de son numérateur $\prod\limits_{i<j\leq n}(\tau_{1,2}(j)-\tau_{1,2}(i))$.

On va séparer en trois paquets de termes : $\prod\limits_{i=1<j=2\leq n}(\tau_{1,2}(j)-\tau_{1,2}(i))$
$\prod\limits_{i=1<2<j\leq n}(\tau_{1,2}(j)-\tau_{1,2}(i))$
$\prod\limits_{1<i<j\leq n}(\tau_{1,2}(j)-\tau_{1,2}(i))$

Le premier n'a qu'un terme : $(\tau_{1,2}(2)-\tau_{1,2}(1)) = (1-2)$: négatif.

Le second a $n-2$ termes : $(\tau_{1,2}(3)-\tau_{1,2}(1)).(\tau_{1,2}(4)-\tau_{1,2}(1))\dots(\tau_{1,2}(n)-\tau_{1,2}(1))$
c'est $(3-2).(4-2)\dots(n-2)$ positif
Le dernier est fait de termes où $\tau_{1,2}$ n'a pas agi (i dépasse 1, donc j dépasse 2) :

$$\prod_{1<i<j\leq n}(\tau_{1,2}(j)-\tau_{1,2}(i)) = \prod_{1<i<j\leq n}(j-i)$$

Lui aussi est positif.

Le numérateur a un signe moins. le quotient vaut -1.

Pour saisir

numérateur	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$j=1$					
$j=2$	$1-2$				
$j=3$	$3-2$	$3-1$			
$j=4$	$4-2$	$4-1$	$4-3$		
$j=5$	$5-2$	$5-1$	$5-3$	$5-4$	

et

numérateur	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$j=1$					
$j=2$	$2-1$				
$j=3$	$3-1$	$3-2$			
$j=4$	$4-1$	$4-2$	$4-3$		
$j=5$	$5-1$	$5-2$	$5-3$	$5-4$	

En regardant bien, on voit un terme qui a changé de signe, et deux colonnes qui se sont échangées.

Pour l'instant, on connaît un bicycle dont la signature vaut -1 : $\overrightarrow{(1\ 2)}$ (pardon, $\tau_{1,2}$).
On va généraliser aux autres.

$\spadesuit_8$ Qui est $\tau_{2,i}\circ\tau_{1,2}\circ\tau_{2,i}$? Qui est $\tau_{1,i}\circ\tau_{1,j}\circ\tau_{1,i}$? Déduisez que les transpositions $\tau_{i,j}$ ont toutes pour signature -1.

$\tau_{2,i}\circ\tau_{1,2}\circ\tau_{2,i}(1)=\tau_{2,i}\circ\tau_{1,2}(1)=\tau_{2,i}(2)=i$
$\tau_{2,i}\circ\tau_{1,2}\circ\tau_{2,i}(2)=\tau_{2,i}\circ\tau_{1,2}(i)=\tau_{2,i}(i)=2$
$\tau_{2,i}\circ\tau_{1,2}\circ\tau_{2,i}(i)=\tau_{2,i}\circ\tau_{1,2}(2)=\tau_{2,i}(1)=1$
$\tau_{2,i}\circ\tau_{1,2}\circ\tau_{2,i}(j)=\tau_{2,i}\circ\tau_{1,2}(j)=\tau_{2,i}(j)=j$ si j n'est ni 1, ni 2 ni i.
On résume : 2 n'a pas bougé, et on a interverti 1 et i : $\tau_{2,i}\circ\tau_{1,2}\circ\tau_{2,i}=\tau_{1,i}$.
Remarque : Pour que cette question ait un sens, il est sous-entendu que iu n'est égal ni à 1, ni à 2.

On calcule alors $Sgn(\tau_{1,i})=Sgn(\tau_{2,i}\circ\tau_{1,2}\circ\tau_{2,i})=Sgn(\tau_{2,i}).Sgn(\tau_{1,2}).Sgn(\tau_{2,i})=Sgn(\tau_{1,2}).\Big(Sgn(\tau_{2,i})\Big)^2=-1.1$

On a progressé, tous les bicycles $\overrightarrow{(1\ i)}$ ont pour signature -1 et pas seulement le premier.

$\tau_{1,i}\circ\tau_{1,j}\circ\tau_{1,i}=\tau_{i,j}$ (suivez à la trace 1, i et j).
Comme on connaît les signatures des trois bicycles du premier membre, on a la signature du bicycle « générique » $\overrightarrow{(i\ j)}$, et elle vaut -1.

C'est bon, tous les bicycles ont pour signature -1. Passons aux tricycles et cycles quelconques.

$\spadesuit_9$ Retrouvez : la signature d'une permutation dépend de la parité du nombre de transpositions dans la décomposition de σ en produit de transpositions.

Que dire de plus ? On décompose en produit de transpositions. Et si il y a en a p, en utilisant la formule « signature du produit égale produit des signatures », on a un produit de n nombres tous égaux à -1, d'où $(-1)^n$.

$\spadesuit_{10}$ Simplifiez $\tau_{a,e}\circ\tau_{a,d}\circ\tau_{a,c}\circ\tau_{a,b}$. Calculez en fonction de k la signature d'un cycle $\overrightarrow{a_1\ a_2\ a_3\ a_4\dots a_k}$.

	a	b	c	d	e
$\tau_{a,b}$	b	a	c	d	e
$\tau_{a,c}$	b	c	a	d	e
$\tau_{a,d}$	b	c	d	a	e
$\tau_{a,e}$	b	c	d	e	a
	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d\ e)}$				

donc $\tau_{a,e}\circ\tau_{a,d}\circ\tau_{a,c}\circ\tau_{a,b}=\overrightarrow{(a\ b\ c\ d\ e)}$

Plus généralement, $\overrightarrow{(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\dots a_k)}=\overrightarrow{(a_1\ a_k)}\circ\dots\circ\overrightarrow{(a_1\ a_3)}\circ\overrightarrow{(a_1\ a_2)}$ (par exemple).
Un $k-$cycle se décompose en $(k-1)$ bicycles, et a donc pour signature $(-1)^{k-1}$.

Suivant vos goûts, vous appliquerez donc l'une des formules suivantes :

• calculer le grand nombre $\dfrac{\displaystyle\prod_{i<j\leq n}(\sigma(j)-\sigma(i))}{\displaystyle\prod_{i<j\leq n}(j-i)}$
• juste regarder le signe du numérateur de ce grand nombre
• calculer le « nombre d'inversions » (nombre de couples (i, j) avec $o < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$, et regarder juste la parité de ce nombre [2]
• décomposer en produit de bicycles et regarder la parité de cette décomposition
• décomposer en produit de cycles, calculer la signature de chaque $k-$cycle ($(-1)^{k-1}$) et effectuer le produit de ces signatures [3].

A part ça, vous n'avez pas besoin de retenir la définition de la signature.
Ce qui a été fait ici est juste pour s'assurer qu'elle existe bien.
Tout ce que devez faire ensuite, c'est savoir calculer des signatures, et appliquer $Sgn(\sigma\circ\varphi) = Sgn(\sigma).Sgn(\varphi)$.

Sinon, le programme propose aussi de définir la signature comme morphisme de groupe de $(S_n, \circ)$ dans $(\{-1,\ 1\}, \times)$.
Oui, $(S_n, \circ)$ est un groupe (non commutatif, fait de $n!$ permutations). Et $(\{-1,\ 1\}, \times)$ est aussi un groupe (avec juste deux éléments).
Et morphisme, c'est « image du produit égale produit des images ». C'est la propriété caractéristique $Sgn(\sigma\circ\varphi) = Sgn(\sigma).Sgn(\varphi)$.

∘2∘ Donnez la signature de $x \longmapsto x^5 \ mod\ 7$ sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ après avoir vérifié que c'est bien une permutation.

x	0	1	2	3	4	5	6
x^5 modulo 7	0	1	4	5	2	3	6

On les a rapidement pour 0 et 1. De même pour 6 égal à -1.
Pour 2, il n'est pas si lourd de regarder $2^4 = 2$ puis donc $2^5 = 4$.
On déduit alors le résultat pour -2. Et $3^2 = 2$ puis $3^4 = 4$ et $3^5 = 12 = 5$.

On a bien une permutation, c'est à dire une bijection de l'ensemble dans lui même.

On la décompose en cycles : $\overrightarrow{(0)}\circ\overrightarrow{(1)}\circ\overrightarrow{(2\ 4)}\circ\overrightarrow{(3\ 5)}\circ\overrightarrow{(6)}$. La signature vaut 1.

Et si vous y tenez avec les $\dfrac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$: $\begin{array}{cccccc} \frac{6-0}{6-0} & \frac{6-1}{6-1} & \frac{6-4}{6-2} & \frac{6-5}{6-3} & \frac{6-2}{6-4} & \frac{6-3}{6-5} \\ \frac{3-0}{5-0} & \frac{3-1}{5-1} & \frac{3-4}{5-2} & \frac{3-5}{5-3} & \frac{3-2}{5-4} & \\ \frac{2-0}{4-0} & \frac{2-1}{4-1} & \frac{2-4}{4-2} & \frac{2-5}{4-3} & & \\ \frac{5-0}{3-0} & \frac{5-1}{3-1} & \frac{5-4}{3-2} & & & \\ \frac{4-0}{2-0} & \frac{4-1}{2-1} & & & & \\ \frac{1-0}{1-0} & & & & & \end{array}$

Multipliez tout et vous aurez 1.
Ou regardez juste le signe !

∘3∘ On écrit les uns derrière les autres les entiers de 1 à 100 : 123456789101112131415...979899100. Vous obtenez un grand entier N. Combien a-t-il de chiffres ? Vous avez maintenant le droit de barrer quarante chiffres de cet entier N. Le gagnant est celui dont le « N raccourci » est l'entier le plus grand possible. Que barrez vous ?
Informaticiens : écrivez un script qui prend en entrée n et retourne l'entier fait des n premiers entiers écrits les uns derrière les autres. Suivant votre niveau : vous avez le droit ou non aux fonctions `int` et str, ou alors vous ne travaillez qu'avec des entiers et des puissances de 10.

Pour créer ce nombre, on peut utiliser **Python** avec toutes ses fonctionnalités :

```
def GrandNombre(n) :
....Mot = "
....for k in range(1,n+1) :
........Mot += str(k)
....return int(Mot)
```

Notre nombre `N` a un certain nombre de chiffres.
Combien ? Les neuf premiers entiers en ont crée neuf
Les entiers de 10 à 99 en ont créé cent quatre vingt
L'entier 100 en ajoute trois.

Total : 192 chiffres.

1234567891011121314151617181920212223242526272829303132333435363738394041424344454647484950515253545556575859606162636465666768697071727374757677787980818283848586878889909192939495969798 99100

1234567891011121314151617181920212223242526272829303132333435363738394041424344454647484950515 25
3545556575859606162636465666768697071727374757677787980818283848586878889909192939495969798 99100

2. c'est la même notion que juste au dessus, non ?
3. en général, c'est la plus rapide

On va en effacer quarante, il va rester un entier à 152 chiffres, quoi qu'on fasse.
Les réponses sont toutes entre 10^{151} et 10^{152}.
Parmi eux, les plus grands sont ceux qui commencent par un 9. On va donc tout effacer jusqu'à tomber sur un 9.
On efface 8 chiffres.
12345678910111213141516171819202122232425262728293031323334353637383940414243444546474849...899100
On a encore le droit d'en effacer 32 chiffres.
Si le chiffre suivant le 9 n'est pas un 9, on aura perdu face à
123456789101112131415161718192021222324252627282930313233343536373839404142434445464748 49...899100
On a effacé encore dix neuf chiffres. On a encore droit à treize chiffres.
Impossible d'atteindre le 9 suivant. On peut avoir des 990 . . ., 991 . . . et jusqu'à un 995 . . . :
1234567891011121314151617181920212223242526272829303132333435363738394041424344454647...899100
On ne pourra pas faire mieux.

Pour créer ce nombre sans utiliser `int` et `str` qui convertissent les entiers en chaînes et vice versa.
Imaginons qu'on en soit à `123456789101112` et qu'il faille lui coller derrière le `13`.
On ne peut pas ajouter `13`, on obtiendrait `123456789101125`.
Mais on peut multiplier par `100` : `12345678910111200` puis ajouter `13` : `12345678910111213`.
Il suffit donc à chaque étape de multiplier par `10`, `100` ou `1000` et d'ajouter le nouveau nombre :

```
def GrandNombre(n) :
....Nombre = 0
....for k in range(n) :
........Nombre *= 10
........Nombre += k
....return Nombre
```

Sauf qu'il faut remplacer `10` par `100` puis par `1000`. Bref, par une puissance de `10` qu'on va appeler `Puissance`, et initialiser à `10`, et qui grandira au bon moment.

Mais quand faut il passer au suivant ? Quand `k` a un chiffre de plus. Et c'est justement quand `k` atteint la valeur `Puissance` !
.
.

```
def GrandNombre(n) :
....Nombre = 0
....Puissance = 10
....for k in range(n) :
........if Nombre = Puissance :
............Puissance *=10
........Nombre *= Puissance
........Nombre += k
....return Nombre
```

◦4◦

Combien y a-t-il dans S_6 de cycles de taille 4 ?
Combien y a-t-il dans S_6 de cycles σ de taille 4 vérifiant $\sigma(1) = 1$?
Combien y a-t-il dans S_6 de cycles σ de taille 4 vérifiant $\sigma(1) = 2$?
Combien y a-t-il dans S_6 de permutations σ de signature 1 ?
Combien y a-t-il dans S_6 de permutations σ de signature 1, vérifiant $\sigma(1) = 2$?

Pour construire un cycle de taille 4 dans S_6, il suffit de choisir les quatre éléments qu'on va faire bouger : $\binom{6}{4}$ choix, comme par exemple $\{1,\ 4,\ 5,\ 6\}$.
Ensuite, reste à savoir dans quel sens les faire tourner. Comme on sait que 1 va bouger, il suffit de savoir dans quel ordre les trois autres suivront :

$\overrightarrow{(1\,3\,5\,6)}$	$\overrightarrow{(1\,5\,3\,6)}$	$\overrightarrow{(1\,6\,3\,5)}$
$\overrightarrow{(1\,3\,6\,5)}$	$\overrightarrow{(1\,5\,6\,3)}$	$\overrightarrow{(1\,6\,5\,3)}$

Total : 90.

Si $\sigma(1)$ vaut 1, c'est que 1 ne bouge pas. Les éléments qui bougent sont donc 4 parmi 5.
Nouveau total : $\binom{5}{4}.3!$.

Si $\sigma(1) = 2$, c'est que 1 bouge. Et 2 aussi. Pour qu'ensuite on finisse par revenir sur 1.
Il reste à compléter le cycle avec deux éléments. A choisir parmi 4 : $\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Par exemple 4 et 5.
Et on complète le cycle : $\overrightarrow{(1\,2\,4\,5)}$ ou $\overrightarrow{(1\,2\,5\,4)}$.
Total : $\binom{4}{2}.2$.

La moiti des permutations a pour signature 1 et l'autre moiti a pour signature -1. Donc $\frac{6!}{}$.

∘5∘

♡ On note S_n l'ensemble des $n!$ permutations de la liste $[1, 2, \dots n]$. Montrez $\sum_{\sigma\in S_n}\sigma(1) = \frac{(n+1)!}{2}$. Que vaut $\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ k\leq n}}\sigma(k)$? *(attention au nombre de termes)*

Que vaut $\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \varphi\in S_n}}\sigma(\varphi((1))$ *(attention au nombre de termes)*.

A faire.

∘6∘

L'univers est fait des 720 permutations de la liste [0, 1, 2, 3, 4, 5]. On tire une permutation avec probabilité uniforme. Quelle est la probabilité que ce soit un cycle de taille 4 ?

Quelle est la probabilité qu'elle commute avec $\overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)}$?

On doit juste dénombrer les cycles de taille 4.

Pour construire un quadricycle, dire qui sont les quatre éléments : $\binom{6}{4}$ choix *(on dit aussi $\binom{6}{2}$ puisqu'il suffit de dire qui sont les deux qu'on laisse de côté)*.

Et une fois choisis les quatre éléments, il y a 3! façons de construire le cycle : on fixe l'un des éléments, il a trois images possibles, puis deux puis une et le cycle est clos.

On a donc 15.6 cycles de taille 4 et la probabilité vaut $\frac{90}{720}$ *(à simplifier si vous y tenez)*.

Une permutation commute avec $\overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)}$ si et seulement elle est de la forme $\overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)}^k\circ\varphi$ où φ est une permutation de ce qu'il reste : 0 et 2.

k peut valoir 1, 2, 3 ou 4 et on double par les permutations de $(1, 2)$.

Probabilité $\frac{4.2}{720}$.

(l'énoncé disait « elle », on repartait donc avec une permutation, et pas un quadricycle).

Justification :

Que dit en effet la condition $\sigma\circ\overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)} = \overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)}\circ\sigma$?

Par exemple, pour 2 elle dit $\sigma(2) = \overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)}\circ\sigma(2)$. Comme $\sigma(2)$ ne bouge pas par le cycle, c'est que $\sigma(2)$ vaut 2 ou 0.

Il ne va de même avec $\sigma(0)$.

Comme $\sigma(0)$ et $\sigma(2)$ ont pris les valeurs 1 et 2, les autres n'ont plus le droit de les prendre.

En revanche, pour 1, on a $\sigma(4) = \overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)}\circ\sigma(1)$.

De même, pour 4 : $\sigma(5) = \overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)}\circ\sigma(4)$

Et enfin : $\sigma(3) = \overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)}\circ\sigma(5)$ et $\sigma(1) = \overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)}\circ\sigma(3)$.

Si l'on choisit par exemple $\sigma(1) = 1$, on trouve $\sigma(4) = 4$ puis $\sigma(5) = 5$ et $\sigma(3) = 3$.

Mais si l'on choisit $\sigma(1) = 5$, on trouve $\sigma(4) = 3$ et ainsi de suite, on a cette fois $\overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)}^2$ sur la liste $[1, 3, 4, 5]$.

∘7∘

On veut montrer le résultat suivant : si deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables en tant que matrices à coefficients complexes *(c'est à dire par l'intermédiaire d'une matrice P à coefficients complexes)* alors elles le sont aussi en tant que matrices à coefficients réels *(c'est à dire par l'intermédiaire d'une matrice R à coefficients réels)*.

Regardons un exemple $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & \\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1+2.i & -3.i\\ -1-i & 2+2.i & -2-2.i\\ i & 1 & -1\end{pmatrix}$

Arrangez vous pour que A ait la même trace et le même déterminant que B.

Vérifiez que A est semblable à B via la matrice P. Trouvez une matrice réelle R telle que A soit semblable à B via R.

Dans le cas général, un élève propose la démonstration suivante :

on part de $A = P^{-1}.B.P$, on écrit $P = R + i.S$, on obtient $(R + i.S).A = B.(R + i.S)$ d'où $R.A = B.R$ et on a trouvé R ;

Complétez les étapes qui manquent dans son raisonnement *(il y a des notations à rendre rigoureuses et il y a une grosse lacune sur la fin)*.

On donne $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ pour avoir même trace et même déterminant.

On vérifie $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1+2.i & -3.i \\ -1-i & 2+2.i & -2-2.i \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1+2.i & -3.i \\ -1-i & 2+2.i & -2-2.i \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Au non, tiens ! C'est $\boxed{P.A = B.P}$ qui est vraie.

Cette question était là pour tester votre faculté à bluffer. Mais j'ai très peur alors de croiser des âneries dans vos copies "on calcule et tout va bien".
Ah, si il y a pire. largement pire. Ce sont les élèves qui remplissent des pages pour calculer P^{-1} et vérifier $A = P^{-1}.B.P$. Ceux là, je ne peux plus rien pour eux. Ils en sont restés à chaque fois à la première formule comme en Terminale et ne veulent pas devenir intelligents. Désolé...

Et après, il y a le détail qui manque. P est elle inversible. Et là, c'est lourd et long : $\det(P) = -2-4.i$.

Séparons quand même P en deux matrices : $P = R + i.S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + i.\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On vérifie $\boxed{R.A = B.R \text{ et aussi } S.A = B.S}$

A et B sont semblables via les deux matrices R et S *(inversibles).*

L'idée n'est pas originale : $P.A = B.P$ donnait $(R+i.S).A = B.(R+i.S)$ et donc $R.A + i.S.A = B.R + i.B.S$.
On identifie, on doit bien avoir $R.A = B.R$ et aussi $S.A = B.S$.

Prenons d'ailleurs le raisonnement général.
On part de $P.A = B.P$ avec P complexe inversible.
On écrit $P = R + i.S$ avec R réelle et S aussi *(le terme général de P est $p_j^k = \Re e(p_j^k) + i.\Im m(p_j^k)$ qu'on sépare).*
On développe $R.A + i.S.A = B.R + i.B.S$.
On identifie partie réelle et partie imaginaire : $R.A = B.R$ et $S.A = B.S$.
On a envie d'écrire $A = R^{-1}.B.R$ et de conclure.
Mais qui dit que R est inversible ? Rien.
L'inversibilité de P ne se transmet pas forcément à sa partie réelle *(pensez à $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$).*
Pas grave, on a aussi $S.A = B.S$. Donc, si R n'est pas inversible, on prend S.
Mais il se peut que S ne soit pas inversible non plus.
Alors, qui ?
C'est là qu'on ruse avec $(a.R + b.S)$.
On a en effet $(a.R + b.S).A = B.(a.R + b.S)$.
Et sur toutes les matrices $(a.R + b.S)$, il doit bien y en avoir une qui est inversible.

L'idée était de dire : si on n'a pas R ou S inversible utilisable, on va prendre $R + S$ ou $R - S$.
Proprement, on prend $R + \lambda.S$. On va détecter qu'il y a au moins un λ réel tel que $R + \lambda.S$ soit inversible.
Sinon, pour tout λ réel, $\det(R + \lambda.S)$ est nul.
Or, $\det(R + \lambda.S)$ est un polynôme en λ.
S'il est nul pour tout λ réel, alors c'est le polynôme nul.
Et il est nul aussi pour tout λ complexe. Et en particulier pour $\lambda = i$. Ce qui est contraire à "P est inversible".

Niveau "Sup bête" : j'attendais de vous que vous alliez jusqu'à $A.R = R.A$ et que vous pensiez conclure.
Niveau "Sup normal" : j'attendais de vous que vous alliez jusqu'à $A.R = R.A$ et que vous disiez "mais il y a un problème car R n'est peut être pas inversible".
Niveau "Sup bien parti vers la Spé" : j'attendais de vous que vous tentiez alors des choses avec S mais aussi $R + S$.
Niveau "Normale Sup" : vous avez deviné la bonne solution, ou même vous en avez trouvé une nouvelle.

∘8∘ Un élève prétend que dans S_{10} *(permutations de la liste $[0, \dots 9]$)*, il y a 10.9.8.7 cycles de taille 4 *(de la forme $\overrightarrow{a\ b\ c\ d}$)*. Il s'explique : 10 choix pour a, 9 pour b *(puisque différent de a)* et ainsi de suite. Expliquez pourquoi il a tort.
Un autre dit qu'il y en a $\binom{10}{4}.6$ *(choisir les éléments du cycle, et choisir l'ordre pour les citer de abcd à cdba en passant par cabd).*
Qui a raison ?
Combien y a-t-il de cycles de taille k ?
♣ Combien y a-t-il dans S_{10} de permutations faites de deux quadricycles de supports disjoints ?

∘9∘ u_0 est entre 0 et 1. On définit $u_{n+1} = u_n - (u_n)^2$. Montrez que la suite converge, vers 0 (en décroissant). [a]
Étudiez la convergence de la série de terme général $(u_n)^2$ et du produit infini de terme général $(1 - u_n)$ (il y a du télescopage dans l'air).

a. dans l'ordre : existence, encadrement par 0 et 1, positivité, décroissance, convergence, limite

On commence l'étude en calculant $u_{n+1} - u_n$.

NON ! On commence en étudiant l'existence de la suite : par récurrence, chaque terme existe.

On calcule ensuite $u_{n+1} - u_n$.

Non, on fait le dessin. Et on encadre.

Enfin on calcule $u_{n+1} - u_n$. Oh, c'est un carré de réel au signe près. C'est $-(u_n)^2$.
La suite est décroissante.

Comme elle est minorée (par 0) elle converge vers son plus grand minorant. Qui a de fortes chances d'être 0.
Mais ça, on ne le sait pas.

Toutefois, la limite λ (dont l'existence vient d'être prouvée) vérifie $\lambda = \lambda - \lambda^2$.
C'est bon, la limite est nulle.

On pose $U_N = \sum_{n=0}^{N} (u_n)^2$.
Le terme général $(u_n)^2$ converge vers 0.
Les différences $U_{N+1} - U_N$ tendent vers 0.
Mais pour la millième fois, ça ne prouve rien (vous connaissez le logarithme ? : $\ln(n+1) - \ln(n)$ tend vers 0 mais $\ln(n)$ tend vers l'infini).

En fait, on télescope : $U_N = \sum_{n=0}^{N} (u_n)^2 = \sum_{n=0}^{N} (u_n - u_{n+1}) = u_0 - u_{N+1}$.
On a non seulement la convergence, mais en une fois aussi la limite : u_0.

On calcule aussi

$$P_N = \prod_{n=0}^{N} (1 - u_n) = \prod_{n=0}^{N} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{N+1}}{u_0}$$

ce produit converge vers 0.
Et on écrira $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 - u_n) = 0$, même si aucun terme n'est nul.

∘10∘

Montrez que toute matrice carrée de taille 2 de trace et déterminant nuls est nilpotente.
Montrez que $\begin{pmatrix} 10 & -9 & -1 \\ 11 & -10 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ a une trace nulle et un déterminant nul, mais n'est pas nilpotente.

On prend $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $-a^2 - b.c = 0$ avec $-a$ en bas (j'ai écrit trace nulle, et j'ajoute ensuite déterminant nul, d'où le s à nuls).
On l'élève au carré ; ça ne traine pas :
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b.c & 0 \\ 0 & a^2 + b.c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque	On peut aussi utiliser $M^2 - Tr(M).M + \det(M).I_2 = 0_{2,2}$ pour arriver à la même conclusion. La relation $M^2 - Tr(M).M + \det(M).I_2 = 0_{2,2}$ (dite « de Cayley Hamilton) est vraie pour toute matrice carrée de taille 2 sur $é$.

Que $\begin{pmatrix} 10 & -9 & -1 \\ 11 & -10 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ait une trace nulle et un déterminant nul, c'est du calcul.
Qu'elle ne soit pas nilpotente nécessite de calculer ses puissances pour voir qu'on ne tombera jamais sur $0_{3,3}$. Mais jamais ? Même à la puissance 132 ?
Oui, car $M^3 = M$ (calcul des premières puissances).

On a donc ensuite en mettant en boucle

$M^{2.n+1} = M$	pour tout n	jamais nul
$M^{2.n} = M^2$	pour tout n non nul	jamais $0_{3,3}$

En fait, je l'avoue, M se diagonalise en $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ d'où sa trace et son déterminant, mais aussi le clignotement de ses puissances.

∘11∘ ♡ Dans le développement du déterminant d'une matrice de taille 6 et de terme général a_i^k, que est le signe devant $a_3^1.a_4^2.a_3^3.a_1^4.a_6^5.a_2^6$? Même question avec $a_4^1.a_5^2.a_3^3.a_1^4.a_6^5.a_2^6$. De même pour $a_6^1.a_4^2.a_3^3.a_5^4.a_2^5.a_1^6$.
Complétez $a_*^1.a_1^2.a_3^3.a_5^4.a_4^5.a_.^6$ pour qu'il ait un signe moins.

$a_3^1.a_4^2.a_3^3.a_1^4.a_6^5.a_2^6$	$a_4^1.a_5^2.a_3^3.a_1^4.a_6^5.a_2^6$	$a_6^1.a_4^2.a_3^3.a_5^4.a_2^5.a_1^6$
pas cohérent	$\begin{array}{cccccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1\leftrightarrow 4 & & 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 2\leftrightarrow 5 & & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ 6\leftrightarrow 2 & & 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{cccccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1\leftrightarrow 6 & & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2\leftrightarrow 4 & & 6 & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2\leftrightarrow 5 & & 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{array}$
0	-1	-1

On a deux façons de compléter « bijectivement » $a_*^1.a_1^2.a_3^3.a_5^4.a_4^5.a_.^6$:

$a_2^1.a_1^2.a_3^3.a_5^4.a_4^5.a_6^6$	$a_6^1.a_1^2.a_3^3.a_5^4.a_4^5.a_2^6$
$\begin{array}{cccccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1\leftrightarrow 2 & & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4\leftrightarrow 5 & & 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{array}$	$\begin{array}{cccccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1\leftrightarrow 2 & & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4\leftrightarrow 5 & & 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \\ 2\leftrightarrow 6 & & 6 & 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{array}$
$+1$	-1

On garde la seconde.

∘12∘ ♡ Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^k(\theta).\cos(k.\theta)$.

On reconnaît une série géométrique, du moins quand on fait usage des formules d'Euler :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos^k(\theta).\cos(k.\theta)=\Re e\Big(\sum_{k=0}^{n}(\cos(\theta).e^{i.\theta})^k\Big)$$

On va supposer que θ n'est pas un multiple de π. La raison de notre suite ne vaut pas 1

$$\sum_{k=0}^{n}\cos^k(\theta).\cos(k.\theta)=\Re e\Big(\frac{1-\cos^{n+1}(\theta).e^{i.(n+1).\theta}}{1-\cos(\theta).(\cos(\theta)+i.\sin(\theta))}\Big)$$

Le dénominateur se développe et refactoriser

$$1-\cos^2(\theta)-i.\sin(\theta).\cos(\theta)=\sin^2(\theta)-i.\sin(\theta).\cos(\theta)=\sin(\theta).(\sin(\theta)-i.\cos(\theta))$$
$$1-\cos^2(\theta)-i.\sin(\theta).\cos(\theta)=\sin(\theta).(-i).(\cos(\theta)+i.\sin(\theta))$$

Grâce à cette simplification

$$\sum_{k=0}^{n}\cos^k(\theta).\cos(k.\theta)=\Re e\Big(\frac{e^{-i.\theta}}{-i.\sin(\theta)}.\Big(1-\cos^{n+1}(\theta).e^{i.(n+1).\theta}\Big)\Big)$$

On simplifie $\dfrac{-1}{i}$ en i et on distribue l'exponentielle

$$\sum_{k=0}^{n}\cos^k(\theta).\cos(k.\theta)=\Re e\Big(\frac{i}{\sin(\theta)}.\Big(e^{-i.\theta}-\cos^{n+1}(\theta).e^{i.n.\theta}\Big)\Big)$$

Le i nous fait prendre la partie imaginaire des exponentielles complexes

$$\sum_{k=0}^{n}\cos^k(\theta).\cos(k.\theta)=\frac{1}{\sin(\theta)}.\Big(\sin(\theta)+\cos^{n+1}(\theta).\sin(n.\theta)$$

On note que lorsque θ tend vers 0 , avec usage des équivalentes, on retrouve $n+1$, et c'est la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\cos(0))^k.\cos(k.0)$.

∘13∘ Montrez que $\cos(x).\cos\left(\dfrac{x}{2}\right).\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)\dots\cos\left(\dfrac{x}{2^{n,}}\right)$ converge vers $\dfrac{\sin(2.x)}{2.x}$ quand n tend vers l'infini (en multipliant pas $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$).

Celui là, il est super joli.

On peut calculer effectivement le produit du premier membre.

$$\begin{array}{llllllll}
& \cos(x) & .\cos\left(\frac{x}{2}\right) & .\cos\left(\frac{x}{4}\right) & \dots & .\cos\left(\frac{x}{2^{n-2},}\right) & .\cos\left(\frac{x}{2^{n-1},}\right) & .\cos\left(\frac{x}{2^{n},}\right) & \times\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\\
= & \cos(x) & .\cos\left(\frac{x}{2}\right) & .\cos\left(\frac{x}{4}\right) & \dots & .\cos\left(\frac{x}{2^{n-2},}\right) & .\cos\left(\frac{x}{2^{n-1},}\right) & .\sin\left(\frac{2.x}{2^{n},}\right) & .\frac{1}{2}\\
= & \cos(x) & .\cos\left(\frac{x}{2}\right) & .\cos\left(\frac{x}{4}\right) & \dots & .\cos\left(\frac{x}{2^{n-2},}\right) & .\cos\left(\frac{x}{2^{n-1},}\right) & .\sin\left(\frac{x}{2^{n-1},}\right) & .\frac{1}{2}\\
= & \cos(x) & .\cos\left(\frac{x}{2}\right) & .\cos\left(\frac{x}{4}\right) & \dots & .\cos\left(\frac{x}{2^{n-2},}\right) & .\sin\left(\frac{x}{2^{n-2},}\right) & & .\frac{1}{4}\\
= & \cos(x) & .\cos\left(\frac{x}{2}\right) & .\cos\left(\frac{x}{4}\right) & \dots & .\sin\left(\frac{x}{2^{n-3},}\right) & & & .\frac{1}{8}\\
= & \cos(x) & .\cos\left(\frac{x}{2}\right) & .\sin\left(\frac{x}{2}\right) & & & & & \frac{1}{2^{n-1}}\\
= & \cos(x) & .\sin\left(x\right) & . & & & & & \frac{1}{2^n}\\
= & \sin(2.x) & & & & & & & \frac{1}{2^{n+1}}
\end{array}$$

en utilisant moult fois la formule $\sin(\theta).\cos(\theta) = \dfrac{\sin(2.\theta)}{2}$.

Il faut quand même bien compter les $\dfrac{1}{2}$.

On refait passer de l'autre côté : $\cos(x).\cos\left(\dfrac{x}{2}\right).\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)\dots\cos\left(\dfrac{x}{2^{n},}\right) = \dfrac{\sin(2.x)}{2^{n+1}.\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$.

Question : Risque-t-on de diviser par 0 ?
Pour x nul, c'est vrai. Mais alors l'exercice n'a aucune intérêt.
Mais sinon, dès que n est assez grand, $\dfrac{x}{2^n}$ est en valeur absolue plus petit que π (et non nul). Son sinus est alors non nul.
Remarquons que l'élève qui pense à soulever ce problème est digne de la classe étoile.

Peut on prouver ceci proprement sans points de suspensions, c'est à dire « comme dans un livre » ?

Oui, bien sûr. En repartant de la même idée de base : $\sin(\theta).\cos(\theta) = \dfrac{\sin(2.\theta)}{2}$, mais en l'écrivant $\cos(\theta) = \dfrac{\sin(2.\theta)}{2.\sin(\theta)}$.

Le produit devient :

$$\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \prod_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(\dfrac{2.x}{2^k}\right)}{2.\sin\left(\dfrac{x}{2^k}\right)}$$

On sort les 2 : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}.\prod_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(\dfrac{x}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2^k}\right)}$ (compteur)

On a alors un produit télescopique $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}.\left(\prod_{k=-1}^{n-1}\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right).\frac{1}{\left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)}$

Il reste bien

$$\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}.\sin\left(\frac{x}{2^{-1}}\right).\frac{1}{\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$$

Ma question : Vu comme ça, c'est beau, c'est propre, sans bavure, esthétique.
Mais est ce naturel ? Vous dites vous « mais oui, j'aurais dû y penser et simplifier ainsi ».
Ou avez vous besoin de la méthode « points de suspensions ».
Question ultime : comment faut il lire une correction d'exercice dans un livre ?

Mais on n'a pas fini. Il faut faire tendre n vers l'infini.

Et dans ce cas, on a une belle indétermination avec un $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ qui tend vers 0 et un 2^{n+1} qui tend vers l'infini.

Niveau terminale, on s'en sort avec $\dfrac{\sin(t)}{t}$ tend vers 1 quand t tend vers 0.[4]

4. en Terminale, on l'apprend par cœur ; en Sup, on le reconnaît et on dit que ça vient de $\dfrac{\sin(t)-\sin(0)}{t-0}$ qui tend vers $\sin'(0)$ c'est à dire $\cos(0)$ et ça devient une évidence et plus une formule « par-cœur ».

$$2^{n+1}.\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)=2.x.\frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$$

(la seule difficulté c'est de compter les x et les puissances de 2).
L'ensemble tend vers $2.x.1$ quand n tend vers l'infini.

Niveau Sup : $\sin(\theta)\sim_{\theta\to 0}\theta$ (c'est la même formule, mais avec des équivalents, plus maniables).
Quand n tend vers l'infini, $\frac{x}{2^n}$ tend vers 0 et peut prendre le rôle de θ :

$$2^{n+1}.\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\sim_{n\to+\infty}2^{n+1}.\frac{x}{2^n}=2.x$$

Être équivalent à un réel non nul *(car $2.x$ est un réel, il ne dépend plus de n)*, c'est tendre vers ce réel.
La forme indéterminée tend vers $2.x$.

Et le quotient $\dfrac{\sin(2.x)}{2^{n+1}.\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$ converge vers $\boxed{\dfrac{\sin(2.x)}{x}}$

∘14∘ x est un entier au moins égal à 2. Quelle est la limite du produit $\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{x^{(2^k)}}\right)$ quand n tend vers l'infini *(indication : multipliez par $1-\frac{1}{x}$).*

On simplifie :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right).\left(1+\frac{1}{x^2}\right).\left(1+\frac{1}{x^4}\right).\left(1+\frac{1}{x^8}\right)\dots\left(1+\frac{1}{x^{2^n}}\right)=\frac{\left(1-\frac{1}{x^{2^{n+1}}}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right).}$$

On l'a par la méthode indiquée.
Ou par récurrence sur n.

Ou par produit télescopique en écrivant chaque $1+\frac{1}{x^{2^k}}$ sous la forme $\dfrac{1-\left(\frac{1}{x^{2^k}}\right)^2}{1-\frac{1}{x^{2^k}}}$.

Il ne reste qu'à faire tendre n vers l'infini. Il reste $\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}$ qu'on écrit $\dfrac{x}{x-1}$.

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24

. Produits infinis .

I∼0) Déterminez la limite quand N tend vers l'infini de

$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right)$	$\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)$	$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$	$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$	$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)$

Dans la liste proposée, plusieurs sont des produits télescopiques.

Je vous en traite un $\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}=\dfrac{\prod_{n=2}^{N}(n-1)}{\prod_{n=2}^{N}n}=\dfrac{(N-1)!}{N!}=\dfrac{1}{N}$.

Et même deux $\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n}=\dfrac{\prod_{n=2}^{N}(n+1)}{\prod_{n=2}^{N}n}=\dfrac{(N+1)!/2}{N!}=\dfrac{N+1}{2}$.

Et aussi $\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\prod_{n=2}^{N}\frac{(n-1).(n+1)}{n^2}=\dfrac{\prod_{n=2}^{N}(n+1).\prod_{n=2}^{N}(n-1)}{\left(\prod_{n=2}^{N}k\right)^2}=\dfrac{N+1}{2.N}$.

$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right)$	$\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)$	$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$	$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$	$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)$
télescopique	télescopique	télescopique	nul	tous égaux
$\frac{1}{N}$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N+1}{2.N}$	0	$\left(1-\frac{1}{N}\right)^N$
0	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{e}$

Pour la dernière, tous les termes sont égaux, on a donc juste à compter les termes. Et pour la limite, on passe par le logarithme $N.\ln\left(1-\frac{1}{N}\right) = -\frac{\ln(1+x)-\ln(x)}{x}$ avec $x = \frac{-1}{N}$ qui tend vers 0. La limite des taux d'accroissement est la dérivée du logarithme en 1 *(et c'est 1)*.

Étrange : *Si j'écris* $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0$*, cela vous choque-t-il ?*
Un produit est nul alors qu'aucun des facteurs ne l'est...
Mais ce n'est pas un produit, mais une limite de produits...

I∼1) Montrez pour tout t de $]0,\ 1[$: $t-\frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.

L'encadrement $t-\frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$ s'obtient par • variation de fonctions $t \longmapsto t-\ln(1+t)$ et $t \longmapsto \ln(1+t)-t+\frac{t^2}{2}$
• formule de Taylor
et surtout pas par développement limité

Un développement limité est une histoire de limite en 0 de formes indéterminées, et jamais au grand jamais il ne peut donner le signe du reste ou des encadrements et inégalités, même dans vos rêves les plus fous [5].

Par tableau de variations :
• $t \longmapsto t-\ln(1+t)$ est décroissante puis croissante (dériver), nulle en 0, donc positive.
• $t \longmapsto \ln(1+t)-t+\frac{t^2}{2}$ est croissante, nulle en 0, donc positive après 0.

Avec formule de Taylor :
• $\ln(1+t) = 0+1.t+\frac{t^2}{1}.\int_{u=0}^{u=1}(1-u).\frac{-1}{(1+t.u)^2}.du$ le reste est négatif
donc $\ln(1+t) \leqslant t$
• $\ln(1+t) = 0+1.t+-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2}.\int_{u=0}^{u=1}(1-u)^2.\frac{2}{(1+t.u)^3}.du$ ce reste est positif pour t positif
donc $\ln(1+t) \geqslant t-\frac{t^2}{2}$

I∼2) x est un réel dans $]0,\ 1[$, le produit $\prod_{n=1}^{N}\left(1+x^n\right)$ converge-t-il quand N tend vers l'infini ?

On regarde le logarithme du réel positif $\prod_{n=1}^{N}\left(1+x^n\right)$: c'est $\sum_{n=1}^{N}\ln(1+x^n)$.
On majore avec la moitié de l'encadrement précédent et des formules usuelles
$$\sum_{n=1}^{N}\ln(1+x^n) \leqslant \sum_{n=1}^{N}x^n = \frac{x-x^{N+1}}{1-x} \leqslant \frac{x}{1-x}$$
La suite $\left(\sum_{n=1}^{N}\ln(1+x^n)\right)_N$ est croissante *(passage de N à N+1 en ajoutant un réel positif* $\ln(1+x^{N+1})$*)* et majorée *(par un réel, ne dépendant pas de N, c'est la moindre des choses)* elle converge donc.
Sa limite n'est pas explicitée ici, et la minoration ne sert à rien pour la conclusion.

Petit extrait quand même du rapport du jury :

> • *Malgré l'utilisation de la calculatrice, on rencontre des erreurs de calculs ou, plus souvent, des incompréhensions sur la signification des calculs (par exemple* $u_N \to_{N\to+\infty} 1$ *qui se transforme en* $u_N = 1$ *ou l'oubli des termes en o lors des développements limités).*

5. *sauf si vos rêves les plus fous sont des calculs approchés en physique, mais alors ce sont des cauchemars, non ?*

> • *Le respect le plus élémentaire pour l'infini semble être devenu une compétence optionnelle, implicitement réservée à la tête de classe ; seuls les meilleurs candidats se rendent compte que le produit infini n'est défini que comme limite et demande à être manipulé avec précaution.*
> • *La longueur et la difficulté du sujet sont tempérées par la présence de nombreuses questions ne nécessitant aucun raisonnement ni aucune rédaction, permettant ainsi de masquer les difficultés, pourtant inquiétantes, d'expression et de compréhension des candidats.*
> • *Le jury rappelle que penser et s'exprimer clairement, plus encore que calculer juste, sont deux qualités essentielles pour un ingénieur.*

Je ne peux qu'être d'accord avec eux sur tous ces points...

Lycee Charlemagne — MPSI2 — Annee 2023/24

. Euler et Fourier .

II∼0) x est un réel dans $]0,\ 1[$. Montrez que la suite $\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{2.x}{n^2-x^2}\right)$ notée (C_N) est croissante,
la suite $\left(x^2+\sum_{n=2}^{N}\frac{x^2}{n.(n-1)}\right)$ notée (σ_N) est croissante,
la suite $\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{x^2}{n^2}\right)$ notée (S_N) est croissante,
la suite $\left(\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right)$ notée (P_N) est décroissante.

Tous les termes existent. On rappelle que x est positif et chaque n^2-x^2 aussi *(x est plus petit que n entier naturel)*, de même que chaque $1-\frac{x^2}{n^2}$ *(égal à* $\frac{n^2-x^2}{n^2}$*)*.

C_N	σ_N	S_N	P_N
$\sum_{n=1}^{N}\frac{2.x}{n^2-x^2}$	$x^2+\sum_{n=2}^{N}\frac{x^2}{n.(n-1)}$	$\sum_{n=1}^{N}\frac{x^2}{n^2}$	$\left(\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right)$
$C_{N+1}-C_N=\frac{2.x}{(N+1)^2-x^2}$	$\sigma_{N+1}-\sigma_N=\frac{x^2}{(N+1).N}$	$S_{N+1}-S_N=\frac{x^2}{(N+1)^2}$	$P_{N+1}-P_N=-P_N.\frac{x^2}{(N+1)^2}$
positif	positif	positif	négatif
suite croissante	suite croissante	croissante	décroissante

Pour la suite (P_N), on peut
- • regarder la position par rapport à 1 du quotient de deux termes consécutifs
- • calculer : $P_{N+1}-P_N=P_N.\left(1-\frac{x^2}{(N+1)^2}\right)-P_N=-\frac{x^2}{(N+1)^2}.P_N$
- • étudier la monotonie de $\ln(P_N)$

II∼1) Montrez que (σ_N) est majorée. Déduisez que (S_N) et (P_N) convergent. Montrez : $P_N\geqslant(1-x^2).\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et déduisez : $\lim_{N\to+\infty}P_N\neq 0$.

Pour majorer σ_N, on voit venir les classiques : éléments simples et télescopage

$$x^2+\sum_{n=2}^{N}\frac{x^2}{n.(n-1)}=x^2+\sum_{n=2}^{N}\frac{x^2}{n-1}-\frac{x^2}{n}=x^2+\frac{x^2}{1}-\frac{x^2}{N}\leqslant 2.x^2$$

On a un majorant.
Il dépend de x *(fixé)* mais pas de N *(celui qui bouge pour décrire la suite)*.

(σ_N) est croissante majorée. Elle converge. Mais de toutes façons, on le savait, puisqu'elle a une limite quand N tend vers l'infini : $x^2+\frac{x^2}{1}-\frac{x^2}{N}\longrightarrow_{N\to+\infty}2.x^2$

Remarque : *« Converge », c'est synonyme de « voir une limite ».*
Combien d'élèves perdent leurs temps à montrer $(u_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ est croissante
(u_n) est majorée
donc (u_n) converge
enfin, la limite de (u_n) vaut...
alors que bien souvent, il suffit de dire « la suite $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ converge vers 1 ».

(S_N) est croissante aussi, majorée.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x^2}{n^2} = x^2 + \sum_{n=2}^{N} \frac{x^2}{n^2} \leqslant x^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{x^2}{n.(n-1)} = 2.x^2 - \frac{1}{N} \leqslant 2.x^2$$

Erreur : *La majoration $\sum_{n=1}^{N} \frac{x^2}{n^2} \leqslant 2.x^2 - \frac{1}{N}$ est une majoration terme à terme, mais pas une majoration de la suite.*
Le terme $2.x^2 - \frac{1}{N}$ dépend encore de N. Ce n'est pas un majorant.
Sinon, toute suite réelle (a_n) est majorée... par elle même...

Imprécision : *Une majoration par une suite convergente permet quand même de conclure.*
En effet, la suite convergente est forcément bornée.
Par transitivité, vous majorer la suite initiale par une constante.

Croissante majorée, (S_N) converge (vers $x^2.\left(1 + \frac{\pi^2}{6}\right)$ d'ailleurs).

Pour la convergence de (P_N), on peut tricher.
Elle est décroissante et positive. C'est fini.

Mais pourrait elle converger vers 0 ? Après tout, le produit $\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)$ converge vers 0.

De même, aucun terme $\frac{1}{n}$ n'est nul, mais la limite est nulle...

On va comparer avec une suite de référence.
x est entre 0 et 1. On a donc $x^2 < 1$ puis $\frac{x^2}{n^2} < \frac{1}{n^2}$ et $1 - \frac{x^2}{n^2} > 1 - \frac{1}{n^2}$.
On multiplie de 2 à N ces inégalités entre réels positifs :

$$\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) > \prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

On multiplie encore :

$$P_N \geqslant (1 - x^2). \prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Le terme de droite a déjà été calculé par télescopage :

$$P_N \geqslant (1 - x^2). \prod_{n=2}^{N} \left(\frac{(n-1).(n+1)}{n^2}\right) = (1 - x^2). \frac{(n-1)!.\frac{(n+1)!}{2}}{(n!)^2}\Bigg)$$

On a donc

$$P_N \geqslant (1 - x^2). \frac{N+1}{2.N} \geqslant \frac{1 - x^2}{2}$$

La suite (P_N) est minorée par le réel $\frac{1-x^2}{2}$.Elle converge vers son plus grand minorant, supérieur ou égal à $\frac{1-x^2}{2}$.
Elle ne peut pas converger vers 0.

III∼0) On définit $f = t \longmapsto \cos(x.t)$. Calculez pour tout n $\int_{-\pi}^{\pi} f(u).e^{-i.n.u}.du$ noté c_n

$\int_{-\pi}^{\pi} f(u).\cos(n.u).du$ noté a_n

$\int_{-\pi}^{\pi} f(u).\sin(n.u).du$ noté b_n

Ces intégrales vont servir dans les questions suivantes, vous pouvez donc valider vos calculs en lisant la suite de l'énoncé...

L'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(u).e^{-i.n.u}.du$ se calcule par parties *(intégrer deux fois, retrouver la même avec un coefficient)*, ou en passant dans $\mathbb{C}$. C'est ce que je vais faire.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(u).e^{-i.n.u}.du = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x.u).e^{-i.n.u}.du = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i.x.u}+e^{-i.x.u}}{2}.e^{-i.n.u}.du$$

On sépare en $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i.(x-n).u}.du = \left[\frac{e^{i.(x-n).u}}{(x-n)}\right]_{-\pi}^{\pi}$ et une autre du même type, sachant que $x-n$ ne peut pas être nul *(x est entre 0 et 1 et n est entier).*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(u).e^{-i.n.u}.du = \frac{e^{i.x.\pi}.e^{i.n.\pi}-e^{-i.x.\pi}.e^{-i.n.\pi}}{2.i.(x-n)} - \frac{e^{-i.x.\pi}.e^{-i.n.\pi}-e^{i.x.\pi}.e^{i.n.\pi}}{2.i.(x+n)}$$

Ayant deux fois le même numérateur, on regroupe en $(e^{i.x.\pi}.e^{i.n.\pi}-e^{i.x.\pi}.e^{-i.n.\pi}).\frac{2.x}{2.i.(x-n).(x+n)}$ *(qui a pris $4.i^2.(x-n).(x+n)$ comme dénominateur commun ?).*

Mais ce n'est pas tout, $e^{i.n.\pi} = (e^{i.\pi})^n = (-1)^n$. On peut factoriser $(e^{i.x.\pi}-e^{i.x.\pi}).(-1)^n.\frac{x}{(x-n).(x+n)}$

On trouve c_n, puis on en extrait la partie réelle et la partie imaginaire :

$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(u).e^{-i.n.u}.du$	$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(u).\cos(n.t).du$	$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(u).\sin(n.t).du$
$\frac{2.x.\sin(\pi.x)}{x^2-n^2}.(-1)^n$	$\frac{2.x.\sin(\pi.x)}{x^2-n^2}.(-1)^n$	0

Question : *Pourquoi la formule $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x.u).e^{-i.n.u}.du = \int_{-\pi}^{\pi} \Re e(e^{i.x.u}).e^{-i.n.u}.du = \Re e\Big(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i.x.u}.e^{-i.n.u}.du\Big)$ qui semble une bonne idée (qu'on utilise d'ailleurs à la fin) est elle une erreur ?*

On peut passer de $f(u).\Re e(e^{-i.n.u})$ à $\Re e(f(u).e^{-i.n.u})$ puis de $\int_{-\pi}^{\pi} f(u).\Re e(e^{-i.n.u}).du$ à $\Re e\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(u).e^{-i.n.u}.du\Big)$.

On ne peut pas passer de $\Re e(e^{i.x.u}).e^{-i.n.u}$ à $\Re e(e^{i.x.u}.e^{-i.n.u})$.

Le problème est que $e^{-i.n.u}$ n'est pas un réel...

Il est normal que b_n soit nulle. Il s'agit de l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x.u).\sin(n.u).du$ d'une application impaire. Les deux intégrales $\int_{-\pi}^{0} \cos(x.u).\sin(n.u).du$ et $\int_{0}^{\pi} \cos(x.u).\sin(n.u).du$ vont donc se compenser.

III∼1) On pose $\phi_N = t \longmapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n.e^{i.n.t}$.

Montrez pour tout t : $\phi_N(t) = 2.\sin(\pi.x).\Big(\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.\cos(n.t)\Big)$.

Quand on calcule $c_n.e^{i.n.t}$, il y a quatre variables : x et t qui sont fixés, u qui sert à calculer l'intégrale, et n qui va servir à calculer une somme.

On doit aboutit à une formule avec des cosinus, c'est donc qu'on va regrouper des exponentielles complexes.

On va découper $\sum_{n=-N}^{N}$ en $\sum_{n=-N}^{-1}$, $\sum_{n=0}^{0}$ et $\sum_{n=1}^{N}$.

On regroupera ensuite les termes d'indices opposés :

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n.e^{i.n.t} = c_0.e^0 + \sum_{n=1}^{N}(c_n.e^{i.n.t}+c_{-n}.e^{-.n.t})$$

Mais chaque c_n est égal à son c_{-n} d'indice opposé *(le $(-1)^n$ et le $(-1)^{-n}$ donnent la même chose)* :

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n.e^{i.n.t} = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n.(e^{i.n.t}+e^{-.n.t})$$

Les cosinus arrivent, de même d'ailleurs que le $\frac{1}{x}$ dans $c_0 = \frac{2.x.\sin(\pi.x)}{x^2-0^2}.(-1)^0$:

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n.e^{i.n.t} = \frac{2.\sin(\pi.x)}{x} + \sum_{n=1}^{N} c_n.2.\cos(n.t)$$

On remplace chaque $c_n$par sa valeur :

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n.e^{i.n.t} = \frac{2.\sin(\pi.x)}{x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2.x.\sin(\pi.x)}{x^2-n^2}.(-1)^n.2.\cos(n.t)$$

On factorise le réel (non nul) $2.\sin(x.\pi)$ et on a bien $\phi_N(t) = 2.\sin(\pi.x).\Big(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.\cos(n.t)\Big)$, qui permet de valider le calcul de chaque c_n.

III$\sim$2) Prolongez par continuité $u \longmapsto \dfrac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}$ et $u \longmapsto \dfrac{f(t)-f(u)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}$ *(notée γ_t)* en $u = t$ *(t est fixé entre $-\pi$ et π, sens large)*. Pensez à $\cos(a) - \cos(b) = produit$, ça peut servir ici.

On veut prolonger par continuité des applications qui voient leur dénominateur s'annuler.
Quand u tend vers t, le réel $u-t$ et ses multiples tendent vers 0. On peut utiliser l'équivalent $\sin(\theta) \sim_{\theta\to 0} \theta$:

$$\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)} \sim_{u\to t} \frac{(2.N+1).\dfrac{t-u}{2}}{\dfrac{t-u}{2}}$$

(les équivalents passent au produit et quotient)

$$\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)} \sim_{u\to t} (2.N+1)$$

(on a simplifié par la variable non nulle $u-t$).
Être équivalent à un réel *(non nul évidemment)* c'est tendre vers ce réel :

$$\boxed{\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)} \longrightarrow_{u\to t} (2.N+1)}$$

Vous observerez que je n'ai écrit nulle part des $\simeq$ ou des $=$. C'est des maths, pas de l'approximation de pacotille.

- *Un physicien vous poussera à écrire* $\dfrac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)} \simeq \dfrac{(2.N+1).\dfrac{t-u}{2}}{\dfrac{t-u}{2}}$*. C'est inepte.*
- *Un camarade de classe (pas un MPSI2 quand même) écrira* $\dfrac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)} = \dfrac{(2.N+1).\dfrac{t-u}{2}}{\dfrac{t-u}{2}}$*. C'est monstrueux.*
- *Un professeur de Terminale vous fera écrire* $\dfrac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)} = \dfrac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{(2.N+1).\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}.\dfrac{\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}.(2.N+1)$

puis passer à la limite avec $\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}$ tend vers 1 quand θ tend vers 0.
C'est parfaitement rigoureux.
Et c'est exactement la même chose que notre raisonnement par équivalents...

Pour l'autre quotient $\dfrac{f(t)-f(u)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}$, on a encore une forme indéterminée.

On fait un peut de trigonométrie[6] : $f(t) - f(u) = \cos(x.t) - \cos(x.u) = -2.\sin\Big(\frac{x.t-x.u}{2}\Big).\sin\Big(\frac{x.t+x.u}{2}\Big)$.
On a donc

$$\frac{f(t)-f(u)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)} = -2.\frac{\sin\Big(\dfrac{x.t-x.u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}.\sin\Big(\frac{x.t+x.u}{2}\Big)$$

6. c'est $(\cos.\cos - \sin.\sin) - (\cos.\cos + \sin.\sin)$

On peut utiliser un équivalent quand u tend vers t : $\dfrac{f(t)-f(u)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)} \sim_{u\to t} -2.\dfrac{\dfrac{x.t-x.u}{2}}{\dfrac{t-u}{2}}.\sin\left(\dfrac{x.t+x.u}{2}\right)$ *(le second sinus n'a pas d'équivalent sans sinus, puisque $\dfrac{x.t+x.u}{2}$ ne tend pas vers 0).*

On trouve une limite : $\boxed{-2.t.\sin(x.t)}$ Pourquoi pas.

On aurait pu aussi écrire $\dfrac{f(t)-f(u)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)} = \dfrac{\cos(x.t)-\cos(x.u)}{x.t-x.u}.\dfrac{\dfrac{t-u}{2}-0}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)-0}.2.x$ *et utiliser* $\dfrac{g(u)-g(t)}{u-t} \longrightarrow_{u\to t} g'(t)$ *pour les fonctions cosinus et sinus.*

III∼3) Montrez $\phi_N(t) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(u).\dfrac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}.du$ et $2.\pi.f(t) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\dfrac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}.du.$

Par linéarité

$$c_n.e^{i.n.t} = e^{i.n.t}.\int_{u=-\pi}^{\pi}\cos(x.t).e^{-i.n.u}.du = \int_{u=-\pi}^{\pi}\cos(x.t).e^{i.n.t}.e^{-i.n.u}.du$$

On somme :

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n.e^{i.n.t} = \int_{u=-\pi}^{\pi}\cos(x.t).\sum_{n=-N}^{N}(e^{i.n.t}.e^{-i.n.u}).du$$

Regardons en détail la somme (géométrique) $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N}(e^{i.n.t}.e^{-i.n.u})$. sa raison $e^{i.n.(t-u)}$ ne vaut pas 1.

$$\sum_{n=-N}^{N}\left(e^{i.(t-u.)}\right)^n = \frac{e^{-N..i.(t-u)} - e^{i.(N+1).(t-u)}}{1-e^{i.(t-u)}} = \frac{e^{i.(N+1).(t-u)} - e^{-N..i.(t-u)}}{e^{i.(t-u)}-1}$$

(plus agréable)

On équilibre un peu mieux numérateur et dénominateur en multipliant haut et bas par un arc moitié :

$$\sum_{n=-N}^{N}\left(e^{i.(t-u.)}\right)^n = \frac{e^{-i.(t-u)/2}}{e^{-i.(t-u)/2}}.\frac{e^{i.(N+1).(t-u)} - e^{-N..i.(t-u)}}{e^{i.(t-u)}-1}$$

C'est bien ce qu'on attendait *(et connaissait par le cours)* :

$$\sum_{n=-N}^{N}\left(e^{i.(t-u.)}\right)^n = \frac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}$$

Remarque : La question précédente montre qu'on peut se permettre d'utiliser cette formule sauf en $u = t$, mais il n'y a pas de problème, un prolongement continu est possible...

On glisse ce noyau de Dirichlet dans l'intégrale :

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n.e^{i.n.t} = \int_{u=-\pi}^{\pi}\cos(x.t).\frac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}.du$$

C'est ce qu'on voulait.

La seconde intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\dfrac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}.du$ ressemble furieusement à la précédente. D'ailleurs, vous êtes prêts à dire que c'est la même. Mais c'est juste parce que vous traitez les variables avec mépris alors que vous

devez vous incliner devant elles et les respecter.
On intègre en u et t est fixé. On sort donc $f(t)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\frac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}.du = f(t).\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}.du$$

Il est temps de sortir le noyau de Dirichlet ou plutôt de telihciriD puisqu'on l'utilise en sens inverse.

$$\frac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)} = 1+2.\sum_{k=1}^{n}\cos(n.(t-u))$$

On intègre :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)} = \int_{-\pi}^{\pi} 1.du + 2.\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n.(t-u)).du$$

Chaque intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n.(t-u)).du$ est nulle

(on calcule $\left[-\dfrac{\cos(n.(t-u))}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{\cos(n.t+n.\pi)-\cos(n.t-n.\pi)}{n}$ *et le cosinus est* $2.\pi-$*périodique*[7]*).*

Il ne reste que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dt$ qui vaut justement $2.\pi$.
On a donc $f(t).(2.\pi+0)$ pour retenir ce qu'il s'est passé.

On aurait pû aussi reprendre les calculs précédents, dans lesquels f aurait été une fonction constante au lieu de $u \longmapsto \cos(x.u)$.

III∼4) En intégrant par parties montrez que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(p.u).\gamma_t(u).du$ converge vers 0 quand p tend vers l'infini.

Regardons donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(p.u).\gamma_t(u).du$ qu'on intègre par parties :

$\gamma_t(u)$	$\hookrightarrow$	$\gamma_t'(u)$
$\sin(p.u)$	$\hookleftarrow$	$\dfrac{\sin(p.u)}{p}$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(p.u).\gamma_t(u).du = \frac{1}{p}.\Big[\sin(p.u).\gamma_t(u)\Big]_{u=-\pi}^{\pi} - \frac{1}{p}.\int_{-\pi}^{\pi}\sin(p.u).\gamma_t'(u).du$$

Le terme $\dfrac{\gamma_t(\pi).\sin(p.\pi)+\gamma_t(-\pi).\sin(p.\pi)}{p}$ a un numérateur borné (compris entre $-|\gamma_t(-\pi)|-|\gamma_t(\pi)|$ et $-|\gamma_t(-\pi)|-|\gamma_t(\pi)|$) et un dénominateur qui tend vers l'infini. Il tend vers 0.
On encadre de même le second terme :

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{p}.\int_{-\pi}^{\pi}\sin(p.u).\gamma_t'(u).du\right| \leqslant \frac{1}{p}.\int_{-\pi}^{\pi}|\sin(p.u).\gamma_t'(u)|.du \leqslant \frac{1}{p}.\int_{-\pi}^{\pi}|\gamma_t'(u)|.du$$

Le terme $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|\gamma_t'(u)|.du$ ne dépend plus de p, on peut le qualifier de « constante ». La division par p fait tendre le majorant vers 0.
Par théorème d'encadrement $\dfrac{1}{p}.\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(p.u).\gamma_t'(u).du$ tend vers 0.
Par addition, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(p.u).\gamma_t(u).du$ tend vers 0 quand p tend vers l'infini.

Le détail qui tue : qui nous assure que γ_t est dérivable ?
Le fait qu'on puisse la dériver, c'est vrai..
Mais en t, elle est continue, pas forcément dérivable. Il faudrait vérifier même ce point.
Et même dire qu'elle est alors C^1 pour pouvoir appliquer la formule d'intégration par parties...

7. *la différence entre $n.t+n.\pi$ et $n.t+n.\pi$ est un multiple de $2.\pi$,j'espère que vous n'avez pas développé avec des $\cos(n.t).\cos(n.\pi)+\sin(n.t).\sin(n.\pi)$; certes, ce n'est pas faux, mais c'est lourd, lourd, lourd comme un mec bourré en boite qui a bu et drague tout ce qui a deux yeux, deux oreilles et deux seins*

Comme quoi rien n'est si évident.

III∼5) Déduisez $f(t) = \dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi}.\Big(\dfrac{1}{x} + \lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.\cos(n.t)\Big)$ pour tout t entre $-\pi$ et π.

Résumons ce qu'on a prouvé : $\phi_N(t) = 2.\sin(\pi.x).\Big(\dfrac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.\cos(n.t)\Big)$

$$\phi_N(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u).\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}.du$$

$$2.\pi.f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t).\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}.du$$

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(p.u).\gamma_t(u).du$ tend vers 0 quand p tend vers l'infini

Et on veut $f(t) = \dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi}.\Big(\dfrac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.\cos(n.t)\Big)$.

Le membre de gauche, c'est $\dfrac{1}{2.\pi}.\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}.du$.

Celui de droite ; c'est la limite quand N tend vers $+\infty$ de $\dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi}.\Big(\dfrac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.\cos(n.t)\Big)$ c'est à dire de $\dfrac{\phi_N(t)}{2.\pi}$ (si cette limite existe).
En utilisant ce qu'on sait, il s'agit donc prouver que $\dfrac{1}{2.\pi}.\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}.du$ et $\dfrac{1}{2.\pi}.\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(u).\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}.du$ ont la même limite quand N tend vers l'infini.

Calculons leur différence :

$$\frac{1}{2.\pi}.\int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(t)-f(u)\Big).\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}.du$$

Déplaçons comme par hasard le dénominateur :

$$\frac{1}{2.\pi}.\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)-f(u)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}.\sin\Big((2.N+1).\frac{t-u}{2}\Big)du$$

C'est une quantité de la forme $\dfrac{1}{2.\pi}.\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\gamma_t(u).\sin(p.u).du$ avec $p = N + \dfrac{1}{2}$.
Quand N tend vers $+\infty$, p fait de même, et l'intégrale tend bien vers 0.

Tous les résultats précédents ont servir, mis bout à bout,pour parvenir à ce qu'on voulait.

III∼6) Déduisez $\pi.\cot(\pi.x) = \dfrac{1}{x} - \lim\limits_{N\to+\infty} C_N$.

On veut maintenant passer de $f(t) = \dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi}.\Big(\dfrac{1}{x} + \lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.\cos(n.t)\Big)$ pour tout t entre $-\pi$ et π à $\pi.\cot(\pi.x) = \dfrac{1}{x} - \lim\limits_{N\to+\infty} C_N$.

Il doit y avoir un rapport, puisque $C_N = \sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{2.x}{n^2-x^2}$.

Il faut faire partir ce $(-1)^n$ et ce cosinus.
Et il faut passer des $\sin(\pi.x)$ aux $\cot(\pi.x)$...
On voit venir l'idée : on prend $t = \pi$, ce qu'on aurait pû faire depuis le début...

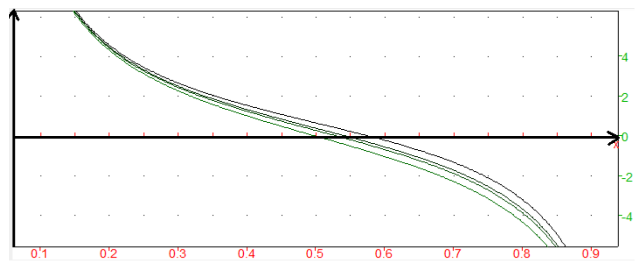
$$f(\pi) = \frac{\sin(\pi.x)}{\pi}.\Big(\frac{1}{x} + \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.\cos(n.\pi)\Big) = \frac{\sin(\pi.x)}{\pi}.\Big(\frac{1}{x} + \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.(-1)^n\Big)$$

Question : *Que faire de l'élève qui reste en arrêt devant $\cos(n.\pi) = (-1)^n$.*
Ou devant $\cos(x+n.\pi) = (-1)^n.\cos(x)$?
Le faire quand même entrer en école d'ingénieur... oui parce que c'est ma mission en tant que prof.
Mais c'est désespérant. Ce devraient être des acquis et réflexes du lycée...

On a donc

$$\cos(\pi.x) = \frac{\sin(\pi.x)}{\pi}.\Big(\frac{1}{x} + \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{2.x}{x^2-n^2}\Big)$$

Je crois que la seule chose qui manque est le signe moins : $\cos(\pi.x) = \dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi}.\Big(\dfrac{1}{x} - \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\dfrac{2.x}{n^2-x^2}\Big)$ *(n^2-x^2 contre x^2-n^2).*



Le graphe ci-contre a tracé $x \longmapsto \pi\cot(\pi.x)$
et des sommes $\dfrac{1}{x} + \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\dfrac{2.x}{x^2-n^2}$
pour N égal à 1, 2 et 3.

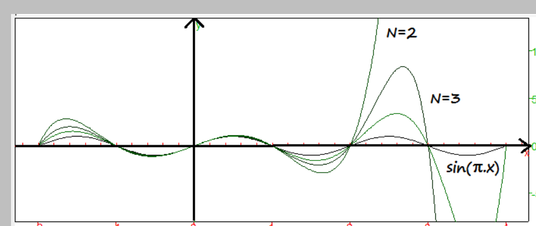
Euler

III∼7) On définit $\varphi = \theta \longmapsto \theta.\cos(\theta) - \sin(\theta)$. Calculez $\varphi^{(k)}$ et $\varphi^{(k)}(0)$ pour k de 0 à 4.

Déduisez $\varphi(\theta) \sim_{\theta\to 0} \dfrac{-\theta^3}{3}$.

Déduisez que $x \longmapsto \pi.\cot(\pi.x) - \dfrac{1}{x}$ se prolonge par continuité en 0 (valeur ?)..

Expliquez comment Euler a pû obtenir : $\dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi.x} = \prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-\dfrac{x^2}{n^2}\Big)$..



Approximation de $\sin(\pi.x)$ par les produits infinis d'Euler $\pi.x.\prod_{n=1}^{N}(1-\frac{x^2}{n^2})$

On fait passer de l'autre côté :

$$\pi.\frac{\cos(\pi.x)}{\sin(\pi.x)} = \Big(\frac{1}{x} - \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{2.x}{n^2-x^2}\Big)$$

et même

$$\pi.\frac{\cos(\pi.x)}{\sin(\pi.x)} - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2.x}{x^2-n^2}$$

Ce que fait Euler ? Il intègre : $\Big[\ln(\sin(\pi.x)) - \ln(x)\Big] = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n^2-x^2) - \ln(n^2)$

$$\Big[\ln(\sin(\pi.x)) - \ln(x)\Big] = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big)$$

$$\Big[\ln(\sin(\pi.x)) - \ln(x)\Big] = \ln\Big(\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big)\Big)$$

Il y aura une question (niveau spé) : l'intégrale de la somme est elle la somme des intégrales ?
Si, il y a un problème, c'est une somme avec une infinité de termes... Et l'infini n'est pas le « grand nombre de termes » de la physique, c'est l'endroit où arrivent les choses qui n'arrivent jamais.

Pareil pour le passer au logarithme avec une infinité de termes...

Ensuite, il reste le crochet $\Big[\ln(\sin(\pi.x)) - \ln(x)\Big]$. Il devrait s'écrire $(\ln(\sin(\pi.x)) - \ln(x)) - (\ln(\sin(\pi.0)) - \ln(0))$. Et il y a un problème...

D'où l'application φ :

n	$\varphi^{(n)}(\theta)$	$\varphi^{(n)}(0)$
0	$\theta.\cos(\theta) - \sin(\theta)$	0
1	$-\theta.\sin(\theta)$	0
2	$-\theta.\cos(\theta) - \sin(\theta)$	0
3	$\theta.\sin(\theta) - 2.\cos(\theta)$	-2
4	$\theta.\cos(\theta) + 3.\sin(\theta)$	0

On écrit une formule de Taylor à l'ordre 3 entre 0 et $0+\theta$:

$$\varphi(\theta) = 0 + \frac{\theta^3}{6}.(-2) + \frac{\theta^4}{6}.\int_0^1 (1-t)^3.\Big(t.\theta.\cos(t.\theta) + 3.\sin(t.\theta)\Big).dt$$

On divise par $-\dfrac{\theta^3}{3}$: $\dfrac{\varphi(\theta)}{-\theta^3/3} = 1 - \dfrac{\theta}{2}.\displaystyle\int_0^1 (1-t)^3.\Big(t.\theta.\cos(t.\theta) + 3.\sin(t.\theta)\Big).dt.$
On se fixe θ entre -1 et 1 pour borner ce qu'il y a dans l'intégrale.
$\dfrac{\varphi(\theta)}{-\theta^3/3}$ tend vers 1. C'est la définition de l'équivalent.

On réduit

$$\pi.(\pi.x) - \frac{1}{x} = \frac{\pi.x.\cos(\pi.x) - \sin(\pi.x)}{\sin(\pi.x).x} = \frac{\varphi(\pi.x)}{\sin(\pi.x).x}$$

En 0 on a une forme indéterminée, mais la question précédente donne un équivalent : $\pi.(\pi.x) - \frac{1}{x} \sim_{x\to 0} \frac{-\pi^3.x^3}{3.\pi.x.x}$.
Le terme de droite tend vers 0, celui de gauche aussi !
Ceci prouve que $\pi.(\pi.x) - \frac{1}{x}$ admet une limite en 0.

On pourra même montrer qu'elle est dérivable en 0.

Et si j'en revient à $\Big[\ln(\sin(\pi.x)) - \ln(x)\Big]$, c'est $\Big[\ln\Big(\frac{\sin(\pi.x)}{x}\Big)\Big]$, et on peut prolonger en 0 aussi.

∘15∘

♣ Soit p un nombre premier. On note $(F_p, +, .)$ le corps des entiers de 0 à $p-1$ pour l'addition et la multiplication modulo p. Montrez que les polynômes $\displaystyle\prod_{k=1}^{p-1}(X-k)$ et $X^{p-1}-1$ ont le même degré, le même coefficient dominant et les mêmes racines. Déduisez qu'ils sont égaux. Que donnent les formules de Viète pour la somme et pour le produit des racines *(théorème de Wilson)* ? Que donnent elles pour la somme des inverses des racines. Montrez que le numérateur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}$ (série harmonique) est un multiple de p *(théorème de Wolstenholme)*.

A faire.

∘16∘

On a croisé le « joli » résultat : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2$. On se demande si il existe p et q ainsi que r vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p = \Big(\sum_{k=1}^{n} k^q\Big)^r$.
En considérant le degré et le terme dominant montrez : $p+1 = r.(q+1)$ et $\dfrac{1}{p+1} = \Big(\dfrac{1}{q+1}\Big)^r$. Déduisez que la formule obtenue plus haut est le seul cas où on a une formule aussi agréable.

On sait (récurrence forte sur n) que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p$ est un polynôme en n de degré $p+1$ et de terme dominant $\dfrac{n^{p+1}}{p+1}$.

Vérification	$\sum_{k=0}^{n} k^0$	$\sum_{k=0}^{n} k$	$\sum_{k=0}^{n} k^2$	$\sum_{k=0}^{n} k^3$	$\sum_{k=0}^{n} k^4$
	$n+1$	$\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$	$\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$	$\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$	$\frac{n^5}{5}+\dots$

Quant à $\left(\sum_{k=1}^{n} k^q\right)^r$, c'est donc un polynôme en n de la forme $\left(\dfrac{n^{q+1}}{q+1}+\ldots\right)^r$.

Son terme dominant est donc $\dfrac{n^{r.(q+1)}}{(q+1)^r}$.

En identifiant

degré	$p+1 = r.(q+1)$
coefficient	$\dfrac{1}{p+1} = \dfrac{1}{(q+1)^r}$

Exemple | Dans le cas connu de $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^1\right)^2$:

degré	$3+1 = 2.(1+1)$
coefficient	$\dfrac{1}{3+1} = \dfrac{1}{(1+1)^2}$

Ici, $r = 2$.

On repart de $p+1 = r.(q+1)$ et $p+1 = (q+1)^r$.
On reporte et simplifie : $r = (q+1)^{r-1}$.

Si q vaut 0, alors r vaut 1 et p vaut 0. C'est un peu idiot : $\sum_{k=0}^{n} 1 = \left(\sum_{k=1}^{n} 0\right)^1$. Pas innovant.

Si q vaut plus que 0, alors $q+1$ vaut au moins 2 et par comparaison 2^{r-1} dépasse très vite r : $3 < 2^2$, $4 < 2^3$ et ainsi de suite.

C'est donc que r vaut 0, 1 ou 2 .
- Si r vaut 0, p vaut -1 , c'est incohérent.
- Si r vaut 1, on aboutit à $p = q$, pas génial : $\sum_{k=0}^{n} k^p = \left(\sum_{k=1}^{n} k^p\right)^1$.
- Reste le cas $r = 2$: $2 < (q+1)^1$ sauf pour $q+1 = 2$ auquel cas on a $2 = 2^1$.

On résume : on a obtenu $r = 2$ et $q = 1$. Et en reportant : $p = 3$. C'est la formule $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^1\right)^2$.

∘17∘

A est la matrice d'un Su-Do-Ku convenablement rempli. Quelle est la valeur maximale de ${}^tU.A.V$ si U est le vecteur colonne formé de neuf 1 et V le vecteur colonne formé des entiers de 0 à 8 ?
A et B sont deux matrices de Su-Do-Ku convenablement remplies. U est le vecteur colonne formé de un 1 suivi de huit 0. Entre quelle et quelle valeur peut varier le réel ${}^tU.A.B.U$ *(au fait pour un demi point déjà, c'est bien un réel ?)* ?

Regardons en taille 3 déjà ce que donne un ${}^tU.M$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a'+a'' & b+b'+b'' & c+c'+c'' \end{pmatrix}.$$

Les 1 font qu'on récupère à chaque fois « la somme des coefficients sur la colonne ».
Et sur une matrice de Su-Do-Ku, la somme sur une colonne vaut toujours $1+2+3+\ldots+9$ car l'addition est commutative et associative (chaque colonne contient chaque entier une fois et une seule).

Notre question se ramène à $\begin{pmatrix} 45 & 45 & \ldots & 45 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 8 \end{pmatrix}$ qu'il faut maximiser.

Mais quoi qu'on y fasse, cette quantité (matrice de taille 1 sur 1) vaut toujours 36×45, et la matrice du milieu n'y peut rien.

Le produit $A.B$ donne une matrice de taille 9 sur 9 avec des coefficients entiers positifs assez imposants.
On multiplie à droite par un vecteur colonne, on obtient un vecteur colonne.
On faut tomber sur une unique ligne, on obtient un réel.
Proprement, en simplifiant les formats :

<table>
<tr><td>matrice</td><td colspan="2">U</td><td colspan="2">A</td><td colspan="2">B</td><td colspan="2">U</td></tr>
<tr><td>lignes</td><td>1</td><td></td><td>$\swarrow$ 9</td><td></td><td>$\swarrow$ 9</td><td></td><td>$\swarrow$ 9</td><td></td></tr>
<tr><td>colonnes</td><td></td><td>9 $\nearrow$</td><td></td><td>9 $\nearrow$</td><td></td><td>9 $\nearrow$</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">${}^tU.A$</td><td colspan="4">$B.U$</td></tr>
<tr><td>lignes</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">$\swarrow$ 9</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>colonnes</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">9 $\nearrow$</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td>lignes</td><td colspan="4">1</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>colonnes</td><td colspan="4"></td><td colspan="4">1</td></tr>
</table>

Mais regroupons par associativité du produit matriciel ${}^tU.A$ face à $B.U$.
Le vecteur $B.U$ récupère en faut la première colonne de B tous les entiers de 1 à 9..
Le vecteur ${}^tU.A$ récupère la première ligne de A : tous les entiers de 1 à 9.

On a donc quelquechose comme $\begin{pmatrix} 3 & 5 & \dots & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \vdots \\ 8 \end{pmatrix}$.

C'est donc une somme du type $\sum_{k=1}^{9} a_k.b_k$ où les a_k et b_k sont les entiers de 1 à 9, pas forcément dans le même ordre.
Quitte à ré-ordonner en fonction de la valeur des a_k, on a une somme $1.b_1 + 2.b_2 + 3.b_3 + \ldots + 9.b_9$.
Ce qu'on appelle inégalité de réarrangement permet de dire

minimum	les b_k dans le même ordre que les a_k	$1.1 + 2.2 + 3.3 + \ldots + 9.9$	285
maximum	les b_k dans l'ordre inverse des a_k	$1.9 + 2.8 + 3.7 + \ldots + 9.1$	165

Réarrangement : L'inégalité de réarrangement dit que si les a_k sont classés par ordre croissant, la somme $\sum_k a_k.b_k$sera maximale si les b_k sont aussi par ordre croissant, et minimale si les b_k sont classés par ordre décroissant.
Elle se démontre en indiquant que la somme augmente si on permute par exemple b_1 et b_3 si l'on avait $b_1 > b_3$, et ainsi de suite.
Et elle se comprend très bien sous l'énoncé suivant : si je dois calculer votre moyenne en mettant des coefficients aux devoirs, vous préférez que les gros coefficients soient sur les meilleures de vos notes, non ?

∘18∘

La relation définie sur $M_2(\mathbb{R})$ par "*il existe P inversible vérifiant* $A.P = P.B$" est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?
La relation définie sur $M_2(\mathbb{R})$ par "*il existe P vérifiant* $A.P = P.B$" est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?
La relation définie sur $M_2(\mathbb{R})$ par "*il existe P inversible vérifiant* $A.P = B.P$" est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?

La première est réflexive, symétrique et transitive, mais pas antisymétrique. (elle est dans le cours ou elle y sera).

La seconde est telle que A est toujours en relation avec B (il suffit de prendre $P = 0_{2,2}$).
Elle est réflexive, symétrique, transitive et vraiment pas antisymétrique. Mais avec une seule classe.

La dernière est l'égalité qui est à la fois réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.

∘19∘

A says "*B is a liar or C is a liar*". B says "*A is a liar*". C says "*A is a liar and B is a liar*".Who is telling the truth ?

Notons A, B et C le fait que A(respectivement B ou C) soit sincère. Et $\overline{A}$ le fait qu'il soit un fieffé menteur.

On a alors $\begin{array}{lcl} A & \Rightarrow & (\overline{B} \ \ ou \ \ \overline{C}) \\ B & \Rightarrow & \overline{A} \\ C & \Rightarrow & (\overline{A} \ \ et \ \ \overline{B}) \end{array}$ et aussi $\begin{array}{lcl} \overline{A} & \Rightarrow & (B \ \ et \ \ C) \\ \overline{B} & \Rightarrow & A \\ \overline{C} & \Rightarrow & (A \ \ ou \ \ B) \end{array}$ en estimant qu'en fait on a l'équivalence $A \Leftrightarrow (\overline{B}\ ou\ \overline{C})$.

On peut alors mettre tout ça bout à bout à la manière d'un « démonstrateur de théorème » ou « langage de programmation logique » (tel Prolog [8]).
Mais on peut aussi partir par exemple de B.
Il n'a que deux possibilités : sincère ou menteur ».
On explore chacune.
Si B est sincère, alors A ment (c'est B qui le dit)
et C est sincère (c'est ce menteur de A qui le dit par réciproque).
Mais alors C se contredit par $(\overline{A}\ et\ \overline{B})$.
Si B ment, alors A est sincère (c'est ce que B nous a dit sans le dire).
Donc l'affirmation de A est cohérente, quoi que fasse C : B ou C ment,
Mais C n'a pas le droit de dire que A et B mentent tous les deux.
On s'en sort avec C menteur.

A sincère	B menteur	C menteur

---

8. https ://fr.wikipedia.org/wiki/Prolog

∘20∘ Calculez à 10^{-3} près $\sqrt{220+30.\sqrt{35}}$.

A la calculatrice, ça ne semble pas tomber très juste.
Mais on a quand même

$$\sqrt{220+30.\sqrt{35}} = \sqrt{(3.\sqrt{5}+5.\sqrt{7})^2} = (3.\sqrt{5}+5.\sqrt{7})$$

∘21∘ Résolvez $x^2 - x + 6 = 2.\sqrt{x^3+8}$.

Deux racines évidentes : 1 et 2. En effet $1-1+6 = 2.\sqrt{9}$ et $4-2+6 = 2.\sqrt{16}$.
Mais a-t-on d'autres solutions ?
Déjà, le domaine : on doit avoir $x^3+8 \geqslant 0$ ce qui exige $x \geqslant -2$. On résout ensuite par équivalences

$$x^2-x+6 = 2.\sqrt{x^3+8} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} (x^2-x+6)^2 & = & 4.(x^3+8) \\ (x^2-x+6 & \geqslant & 0 \end{array} \right|$$

Le polynôme différence $x^4 - 2.x^3 + x^2 - 12.x + 36 + 12.x^2 - 4.x^3 - 32$ se factorise par $x-1$ et par $x-2$.
C'est même $(x-2)^2.(x-1)^2$.
On a donc exactement deux solutions : 1 et 2 (et ce sont des « racines doubles »).

∘22∘ Un élève a affirmé : "*dans l'anneau $(A,+,.)$ l'élément a est absorbant pour la seconde loi, c'est donc le neutre de la première*". A-t-il inventé une réciproque farfelue ?

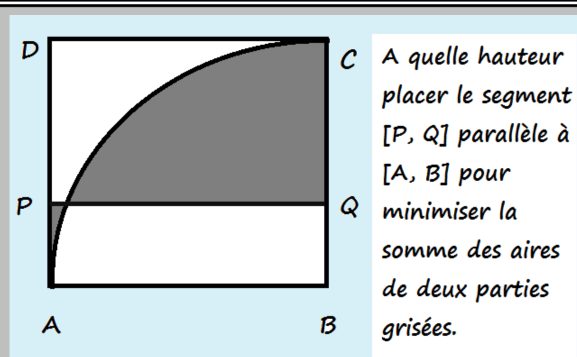
Le cours démontre en effet que dans un anneau $(A,+,.)$, le neutre de la première loi (noté 0) est absorbant pour la deuxième.
Preuve : a donné quelconque, on va prouver $0.a = 0$, même si ça vous semble normal[a]
on écrit $0.a = (0+0).a$ car 0 est neutre additif
on développe : $O.a + O.a = 0.a$
on ajoute l'opposé de $0.a$ de chaque côté , qu'on va noter opp : $(O.a+O.a)+opp = 0.a+opp$
on simplifie en profitant de l'associativité $O.a = 0$
car dans le second membre, il ne reste bien que 0

[a]. mais si c'est normal pour un anneau tel que $(\mathbb{R},+,.)$, l'est ce encore pour un anneau tel que $(P(\mathbb{N}),\Delta,\cap)$?

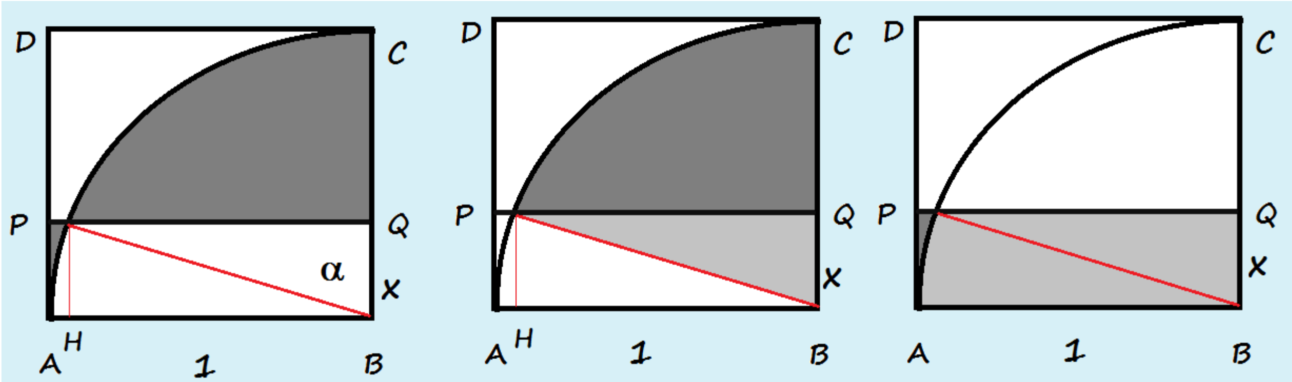
Mais la nouvelle question est « peut il exister un autre élément que 0 qui soit absorbant pour la seconde loi (disons α) ?
On a juste à le tester face à 0 puisque chacun est absorbant : $0.\alpha = 0$ car 0 est absorbant (voir ci-dessus)
$0.\alpha = \alpha$ car α est absorbant (hypothèse)

Zéro difficulté, zéro connaissance,
mais des raisonnements à bâtir, sans taper sur des hypothèses, sans écrire des formules avec des variables partout qui ne servent à rien.
La fausse piste consiste en effet à écrire les hypothèses : $\forall a,\ a.\alpha = \alpha$ et $\forall a,\ a.0 = 0$ et à taper dessus avec un a qui ne sert à rien, et dont on se débarrasse sans trop savoir comment.
Prendre l'initiative de dire »je vais prendre $a = 0$ dans la première et $a = \alpha$ dans la seconde est le début de l'intelligence face à la force brute du tapeur sur les formules. Et mine de rien, c'est ce qui distingue le matheux du reste de la presque humanité présente en Prépas.

∘23∘ Un carré. Un quart de cercle inscrit dans ce carré.
Un segment parallèle à un côté du carré.
Deux aires grisées.
Il faut placer le segment à la bonne hauteur pour minimiser l'aire grisée.
Des points si vous trouvez.



On considère que le carré et le disque ont le même rayon égal à 1 pour définir finalement la longueur de référence.
On note x la hauteur à laquelle on place la barre.



On dispose alors d'un angle α et de son complémentaire $\frac{\pi}{2} - \alpha$.
La trigonométrie de base nous dit $x = BQ = \cos(\alpha)$ et $BH = \sin(\alpha) = \sqrt{1-x^2}$.

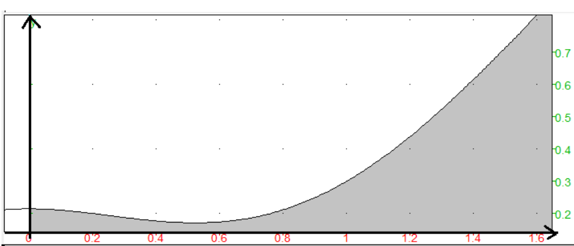
On découpe alors par exemple une portion de disque CBP d'aire $\frac{\alpha}{2}$ (le secteur est proportionnel à l'angle au centre e pour $\alpha = 2.\pi$ il doit donner $\pi.R^2$ avec ici $R = 1$).
On lui soustrait l'aire du triangle rectangle BQP et on a l'aire du morceau supérieur : $\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin(\alpha).\cos(\alpha)}{2}$.

On dispose ensuite d'un rectangle $ABPQ$ d'aire $\cos(\alpha)$. (c'est le côté x). Enlevons un quartier d'angle au centre $\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}$ et un triangle d'aire $\frac{\sin(\alpha).\cos(\alpha)}{2}$, et on récupère l'aire de la partie grisée « en bas ».

On somme les deux : $\boxed{Aire\ grise = \alpha + \cos(\alpha) - \frac{\sin(2.\alpha)}{2} - \frac{\pi}{4}}$

On vérifie pour α égal à $\frac{\pi}{2}$: un quart de disque d'aire $\frac{\pi}{4}$.
pour α égal à 0 : le complémentaire de ce quart de disque ; d'aire $1 - \frac{\pi}{4}$.

On dérive pour minimise cette application : $\frac{dA}{d\alpha} = 1 - \sin(\alpha) - \cos(2.\alpha)$.
Comment résoudre ? En exprimant tout à l'aide d seul sinus ($\cos(2.\alpha) = 1 - 2.\sin^2(\alpha)$).



Annuler la dérivée nous amène à résoudre $2.\sin^2(\alpha) - \sin(\alpha) = 0$.
$\sin(\alpha) = 0$ nous place aux bornes de l'intervalle, pas au minimum mais un maximum (signe de la dérivée seconde, ou passage de la dérivée du positif ou négatif).
C'est donc en $\frac{\pi}{6}$ que le minimum est atteint.

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}}$$

◦24◦

Rappel des règles :
Mettre dans le grille tous les entiers de 1 à 9 (certains sont déjà placés) pour que les trois additions en ligne et en colonne soient correctes :

		7	=	24
			=	11
4			=	10
=	=	=		
15	20	10		

et

			=	20
			=	10
	1		=	15
=	=	=		
22	.7	16		

8	9	7	=	24
3	6	2	=	11
4	5	1	=	10
=	=	=		
15	20	10		

et

9	4	7	=	20
5	2	3	=	10
8	1	6	=	15
=	=	=		
22	.7	16		

◦25◦ Le polynôme complexe P de degré 4 a pour racines a, b, c et d. P' a pour racines α, βet γ.
Montrez pour z dans $\mathbb{C}-\{a,b,c,d\}$: $\overline{\frac{P'(z)}{P(z)}} = \overline{\left(\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}+\frac{1}{z-c}+\frac{1}{z-d}\right)} = \frac{z-a}{|z-a|^2}+\frac{z-d}{|z-b|^2}+\frac{z-c}{|z-c|^2}+\frac{z-d}{|z-a|^2}$.
Déduisez qu'il existe quatre réels positifs λ_1 à λ_4 vérifiant $\alpha = \frac{\lambda_1.a+\lambda_2.b+\lambda_3.c+\lambda_4.d}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}$.
Déduisez que le triangle de sommets α,β et γ est inscrit dans le quadrilatère de sommets a, b, c et d.
Montrez que les deux racines de P'' et la racine de $P^{(3)}$ est aussi dans ce triangle.

On écrit $P(z)=\lambda.(z-a).(a-b).(z-c).(z-d)$ en n'oubliant pas un λ en facteur devant.

On dérive :
$$\begin{array}{llllll} P'(z)= & \lambda.1 & .(z-b) & .(z-c) & .(z-d) & \\ & +\lambda.(z-a) & .1 & .(z-c) & .(z-d) & \\ & +\lambda.(z-a) & .(z-b) & .1 & .(z-d) & . \\ & +\lambda.(z-a) & .(z-b) & .(z-c) & .1 & \end{array}$$

On divise par $\lambda.(z-a).(a-b).(z-c).(z-d)$. Le complexe λ disparait...

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}+\frac{1}{z-c}+\frac{1}{z-d}$$

On peut généraliser. On peut aussi justifier en dérivant $\ln(P(z)) = \ln(\lambda)+\lambda.\ln(z-a)+\lambda.\ln(z-b)+\lambda.\ln(z-c)+\lambda.\ln(z-d)$ quitte à définir un logarithme complexe.

On conjugue (conjugué de la somme égale somme des conjugués, idem pour le produit, le quotient) :

$$\frac{\overline{P'(z)}}{\overline{P(z)}} = \overline{\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}+\frac{1}{z-c}+\frac{1}{z-d}}$$

On remplace chaque $\overline{\frac{1}{z-r}}$ par $\frac{1}{\overline{z-r}}$.

On multiplie haut et bas par $z-r$ (conjugaison) : $\overline{\frac{1}{z-r}} = \frac{z-r}{(z-r).\overline{(z-r)}} = \frac{z-r}{|z-r|^2}$.

Et surtout, on ne transforme pas $|z-r|$ en $\sqrt{(x_r-x)^2+(y_r-y)^2}$.

On somme donc : $\frac{\overline{P'(z)}}{\overline{P(z)}} = \frac{z-a}{|z-a|^2}+\frac{z-b}{|z-b|^2}+\frac{z-c}{|z-c|^2}+\frac{z-d}{|z-d|^2}$. Pourquoi pas.

On prend pour z une valeur α, racine du polynôme P'.
Ayant supposé que les quatre racines de P étaient distinctes, les trois racines de P' sont distinctes des racines de P.
On n'a pas de racine double.
On a donc $\frac{P'(\alpha)}{P(\alpha)} = 0$ (un vrai 0 et pas un $\frac{0}{0}$). Il vient alors

$$\frac{\alpha-a}{|\alpha-a|^2}+\frac{\alpha-b}{|\alpha-b|^2}+\frac{\alpha-c}{|\alpha-c|^2}+\frac{\alpha-d}{|\alpha-d|^2} = 0$$

On fait passer d'un même côté les termes en α :

$$\frac{\alpha}{|\alpha-a|^2}+\frac{\alpha}{|\alpha-b|^2}+\frac{\alpha}{|\alpha-c|^2}+\frac{\alpha}{|\alpha-d|^2} = \frac{a}{|\alpha-a|^2}+\frac{b}{|\alpha-b|^2}+\frac{c}{|\alpha-c|^2}+\frac{d}{|\alpha-d|^2}$$

On se laisse porter et on décide d'appeler λ_1 le réel $\frac{1}{|\alpha-a|^2}$ (oui, c'est un réel et même un réel positif). De même pour les trois autres.

Cette fois : $\alpha.(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4) = \lambda_1.a+\lambda_2.b+\lambda_3.c+\lambda_4.d$.
Et la somme des quatre réels est strictement positive :

$$\alpha = \frac{\lambda_1.a+\lambda_2.b+\lambda_3.c+\lambda_4.d}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}$$

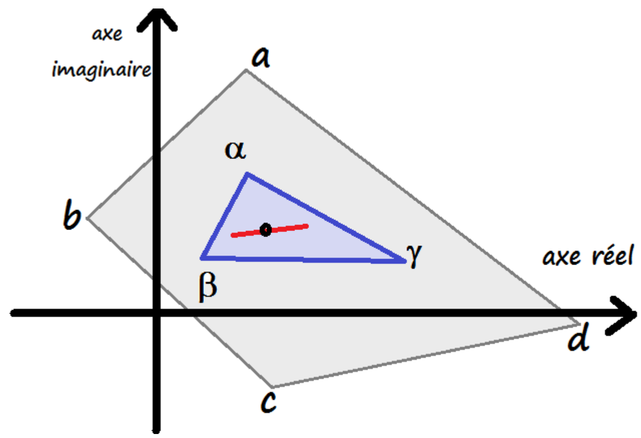
Le complexe α est écrit comme une moyenne de a, b, c et d.
Une moyenne à coefficients positifs.
On appelle ça une moyenne ou un barycentre.
Si les coefficients valaient tous 1, ce serait l'isobarycentre ou centre de gravité.

> *Ce qui est un peu déroutant c'est que les coefficients dépendent de α.*
> *Mais ils existent et sont positifs.*

Géométriquement, qui sont ces barycentres à coefficients positifs des quatre complexes a, b, c et d ?
Ce sont les points du polygone convexe qu'ils délimitent (en fait un quadrilatère sauf si l'un des quatre est déjà dans le triangle délimité par les trois autres).

Et en recommençant, les racines de P'' sont dans le triangle délimité par les racines de P'.

Puis la racine de $P^{(3)}$ est au milieu du segment délimité par les deux racines de P''.
Sur le schéma, on voit le plan complexe de dessus, et on représente juste les racines de P, de P', de P'' et la racine de $P^{(3)}$.
On ne saurait d'ailleurs pas représenter un polynôme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
Par ailleurs, si le polynôme P est à coefficient réels, il y a des racines réelles (a et b devraient être sur l'axe réel par exemple) et des racines complexes deux à deux conjuguées (c et d devant être symétriques de part et d'autre de l'axe réel).



◦26◦

Dans le développement du déterminant d'une matrice de taille 8 sur 8, quel est le signe de chacun des termes suivants :
$a_1^3.a_2^5.a_3^6.a_4^7.a_5^1.a_6^2.a_7^8.a_8^4$ et $a_1^3.a_2^7.a_3^5.a_4^6.a_5^1.a_6^2.a_7^8.a_8^4$ et $a_1^8.a_2^7.a_3^6.a_4^5.a_5^4.a_6^3.a_7^2.a_8^1$.

$a_1^3.a_2^5.a_3^6.a_4^7.a_5^1.a_6^2.a_7^8.a_8^4$	$a_1^3.a_2^7.a_3^5.a_4^6.a_5^1.a_6^2.a_7^8.a_8^4$	$a_1^8.a_2^7.a_3^6.a_4^5.a_5^4.a_6^3.a_7^2.a_8^1$
$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&5&6&7&1&2&8&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&7&5&6&1&2&8&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 8&7&6&5&4&3&2&1 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{(1\,3\,6\,2\,5)}\circ\overrightarrow{(4\,7\,8)}$	$\overrightarrow{(1\,3\,5)}\circ\overrightarrow{(2\,7\,8\,4\,6)}$	$\overrightarrow{(1\,8)}\circ\overrightarrow{(2\,7)}\circ\overrightarrow{(3\,6)}\circ\overrightarrow{(4\,5)}$
$(-1)^4.(-1)^2$	$(-1)^2.(-1)^4$	$(-1)^1.(-1)^1.(-1)^1.(-1)^1$
signe plus	signe plus	signe plus

Un cycle de longueur n a juste besoin de $n-1$ transpositions, donc $n-1$ changements de signes.

◦27◦

Dans $\begin{vmatrix} 20&8&12&34\\ 15&3&9&27\\ 35&44&71&17\\ 70&9&0&41 \end{vmatrix}$ quel est le coefficient de 35.9.12.27 ?

$\begin{vmatrix} &&12&\\ &&&27\\ 35&&&\\ &9&& \end{vmatrix}$ est bien présent dans le déterminant.

On veut son coefficient : $\left|\begin{array}{cccc} 12 & & & \\ & & & 27 \\ & & 35 & \\ & 9 & & \end{array}\right|$ un signe moins

$\left|\begin{array}{cccc} 12 & & & \\ & 27 & & \\ & & 35 & \\ & & & 9 \end{array}\right|$ un deuxième signe moins

Total : deux signes moins, ce qui fait un signe plus (signature de $\overrightarrow{(1\ 3)} \circ \overrightarrow{(2\ 4)}$).

∘28∘ Calculez $\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x^x}.dx$ (ça a l'air compliqué, mais pourtant...).

C'est quoi ce x^x ? C'est $e^{x.\ln(x)}$. Avec x positif *(ou nul ? oui on prolonge par continuité $x.\ln(x)$ tend vers 0 en 0)*.
Cette intégrale existe-t-elle ? On va se ramener à des distances finies :
$\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x^x}.dx = \int_1^a (1+\ln(x)).e^{-x.\ln(x)}.dx.$
Zéro effort ! C'est $u'.e^u$. On peut changer de variable si nécessaire avec $u = x.\ln(x)$.
On intègre explicitement en $\left[-e^{-x.\ln(x)}\right]_1^a$. On trouve $1 - \frac{1}{a^a}$.
On fait tendre a vers l'infini : $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x^x}.dx = 1}$

Moi je l'aime cet exercice, avec son intégrale qui a l'air si atroce et qui est si simple au final.
Soit dit en passant, le logiciel de calcul formel Xcas (ou Maple) ne trouve pas la réponse si on ne lui souffle pas le changement de variable.

∘29∘ Qui est ce nombre dont l'écriture binaire est $\overline{0.0\overline{0011}00110011\ldots}_2$ *(pour ceux qui ne l'ont pas compris, la barre au dessus de 0011 c'est pour dire qui est le motif périodique, et la grande barre au dessus, c'est pour préciser qu'on n'est pas en base 10)*.

Pour interpréter le nombre d'écriture binaire $0.0\overline{0011}00110011\ldots$ on développe

2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}	2^{-12}	$\ldots$	$2^{-2-4.k}$	$2^{-3-4.k}$	$2^{-4-4.k}$	$2^{-5-4.k}$	$\ldots$
0.	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	$\ldots$	0	0	1	1	$\ldots$

On peut le jouer à la physicienne avec les premiers termes :

$$x \simeq \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} = \frac{51}{512} \simeq \frac{1}{10}$$

Proprement, on coupe à un rang N *(ou plutôt $4.N$)* et on a une série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{N} \left(2^{-4-4.k} + 2^{-4-5.k}\right) = \frac{2^{-4} + 2^{-5} - 2^{-4-4.(N+1)} - 2^{-5-4.(N+1)}}{1 - 2^{-4}}$$

(la raison est $2^{-4} \neq 1$).
On fait tendre N vers l'infini et il reste

$$\frac{\frac{1}{16} + \frac{1}{32}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{15}{16}} = \frac{1}{10}$$

C'est bon, vous connaissez donc le $\boxed{\text{développement en base 2 de } \frac{1}{10}}$ que vous écrivez souvent $0,1$ car vous travaillez en décimal.

On pouvait aussi poser $x = 0,000110011001100\ldots$ et déplacer la virgule en multipliant par une puissance de 2.
On a donc $15.x = 1 + \frac{1}{2}$. On retrouve $x = \frac{1}{10}$.

$2^4.x$	$= 00001,100110011001100\ldots$
x	$= 0,0001100110011\ldots$
$2^4.x - x$	$= 1,1$

En base -2, les dénominateurs sont les mêmes, mais les signes changent aux numérateurs.
Je vous l'offre : $\overline{0,011\overline{0111}01110111\ldots}_{-2}$ le motif qui se répète est 0111. Cherchez en la preuve.

∘30∘ Montrez pour tout x réel positif : $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}$. Déduisez : $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{e}}$.

Ne comparons pas $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ et e^{-x}, mais comparons plutôt leurs logarithmes respectifs : $n.\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$ et $-x$.

On crée donc, pour n fixé l'application $x \longmapsto n.\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right)+x$.

On la dérive $x \longmapsto n.\dfrac{\frac{-1}{n}}{1-\frac{x}{n}}+1$ et on simplifie cette dérivée : $x \longmapsto \dfrac{x}{x-n}$.

Cette dérivée est négative sur $[0,\ n]$, donc l'application est décroissante.
Elle est nulle en 0. la voilà donc négative sur $[0,\ n]$.
On a donc $n.\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right) \leqslant -x$. On passe à l'exponentielle (croissante) : $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}$ pour tout x de $[0,\ n]$.

On l'écrit pour chaque entier de 0 à n : $\left(1-\dfrac{p}{n}\right)^n \leqslant e^{-p}$.

On somme : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\left(1-\frac{p}{n}\right)^n \leqslant \sum_{p=0}^{n} e^{-p}$.

On change de variable dans la première somme : $k=n-p$ (et quand p va de 0 à n, k fait de même dans l'autre sens) :

$\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n \leqslant \sum_{p=0}^{n} e^{-p}$.

On calcule la série géométrique du second membre : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n \leqslant \frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}} \leqslant \frac{1}{1-e^{-1}}$.

◦31◦

François a posé l'addition suivante *(il a fait vite, il y a une infinité de termes, mais il a tout calculé)* : pouvez vous me dire quel sera le deux mille quinzième chiffre de la somme ?

0.	1													
+	0	2												
+	0	0	3											
+	0	0	0	4										
+	0	0	0	0	5									
+	0	0	0	0	0	6								
+	0	0	0	0	0	0	7							
+	0	0	0	0	0	0	0	8						
+	0	0	0	0	0	0	0	0	9					
+	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0				
+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1			
+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2		
+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	
+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4

Vous avez un joli Rubik's Cube en Apéricubes de la Vache qui Rit. Un ver a décidé d'en goûter chacun des vingt sept petits cubes. Il se déplace en passant d'un cube à son voisin ayant une face commune *(pas de passage en diagonale)*. Il a commencé par le cube central. Pourra-t-il visiter tous les petits cubes ? Indication : coloriez les cubes en deux couleurs.

On va poser vraiment l'addition en espérant qu'il n'y a pas trop de chiffres qui remontent par des retenues ?
Non. On regarde qui cette somme est : $1.10^{-1}+2.10^{-2}+3.10^{-3}+4.10^{-4}+\ldots$ malproprement.

Proprement c'est $\displaystyle\sum_{n} n.10^{-n}$.

Enfin, plus proprement, c'est la limite quand N tend vers l'infini de $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} n.10^{-n}$.

Comment calculer cette série qui ressemble à une série géométrique ?
En libérant une variable.

Posons $f_N(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{N} x^n$ dont la valeur est connue : $f(x)=\dfrac{1-x^{N+1}}{1-x}$ (tant que x ne vaut pas &).

On dérive : $f'_N(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{N} n.x^{n-1}=\frac{1-x^{N+1}}{(1-x)^2}-\frac{(N+1).x^N}{1-x}$.[9].

On multiplie par x : $x.f'_N(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{N} n.x^n = x.\frac{1-x^{N+1}}{(1-x)^2}-\frac{(N+1).x^{N+1}}{1-x}$.

On calcule en 10^{-1} : $x.f'_N(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{N} n.10^{-n}=\frac{1}{10}.\frac{1-10^{-N-1}}{(9/10)^2}-\frac{(N+1).10^{-N-1}}{9/10}$.

On fait tendre N vers l'infini : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} n.10^{-n}=\frac{1}{10}.\frac{1}{(9/10)^2}$.

Le nombre étudié vaut $\boxed{\dfrac{10}{81}}$

Surprise : | Ce nombre est finalement un rationnel !

9. oui, on a dérivé un produit, avec un terme d'exposant -1 c'est plus simple

Son écriture décimale est périodique à partir d'un certain rang.
On pose la division 0.123456790123456790123456790123456790123456790123456...

Génial : c'est dès le début qu'on a une période, et elle est de 10.
Vous connaissez tous ses chiffres, et le 2015^{ieme} chiffre est un 5. Encadré d'un 4 et d'un 6.

Finalement, un exercice sur les séries numériques.

Pour le cube, colorions effectivement un cube sur deux en noir et un sur deux en blanc.
Disons que le cube central est blanc. Voici les trois coupes :

N	B	N
B	N	B
N	B	N

,

B	N	B
N	B	N
B	N	B

et

N	B	N
B	N	B
N	B	N

Le ver part d'un cube blanc. A chaque déplacement, il change de couleur puisqu'il passe d'un cube à un de ses voisins directs.
Il doit visiter vingt sept cubes :

$$BNBNBN...BNB$$

Il finira donc dans un cube blanc ! Donc pas dans un coin.

Remarque : En plus, il ne finira même pas sur un blanc, car il y a 14 noirs
13 blancs
Il ne pourra donc même pas tout visiter...

◦32◦ Vous m'avez tellement embêté avec « mais la multiplication dans un anneau, c'est quelle multiplication » que je décide de construire un anneau un peu n'importe comment. On prend $\mathbb{Z}$ mais on ne prend pas les lois usuelles.
Comme addition, je prends $x \oplus y = x + y - 7$.
Vérifiez que $(\mathbb{Z}, \oplus)$ est quand même un groupe (quel est le neutre, qui est le symétrique de n ?).
Puis, je décide de définir une multiplication, avec comme seule condition « interne, associative et distributive sur $\oplus$ ».
Vérifiez que c'est le cas si je pose $a \otimes b = 7$ pour tout couple $(a,\ b)$.
L'anneau est il alors intègre ?

Je cherche quand même à définir autre chose. Juste associatif et distributif sur $\oplus$.
Montrez pour tout n : $7 \otimes n = n \otimes 7 = 7$.
Montrez pour tout a et tout p : $a \otimes (14 - p) = 14 - (a \otimes p)$ (pensez à $a \otimes ((14 - p) \oplus p)$).
Montrez $(14 - p) \otimes (14 - n) = p \otimes n$.
On pose $a = 8 \otimes 8$. Montrez pour tout n supérieur ou égal à 7 : $8 \otimes n = (a - 7).n + 56 - 7.a$ (vous initialiserez pour $n = 7$ et pour l'hérédité, vous penserez à démontrer : $n + 1 = n \oplus 8$).
Montrez que ce résultat est encore valable pour n plus petit que 7 (vous pourrez écrire $n = 14 - p$).
Montrez alors par récurrence sur k : $k \otimes n =$
Finalement, pour l'addition $\oplus$ fixée, il y a plusieurs multiplication $\otimes$ qui conviennent, mais pas tant que ça.

◦33◦ On définit $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Généralisez en donnant une formule pour le terme général de chacune de ces matrices en taille n *(du type $a_i^k = N + 1 - k$ si $i + k \leqslant n + 1$)*.
Montrez que la somme des coefficients de A_n vaut $\sum_{k=0}^{n} k^2$. Même question avec B_n et C_n.
Donnez le du terme général de $A_n + B_n + C_n$ *(combien y a-t-il de coefficients non nuls ?)*.
Calculez la somme des coefficients de $A_n + B_n + C_n$. Quel résultat avez vous retrouvé ?

$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$a_i^k = \begin{matrix} n+1-k & si & i+k \leqslant n+1 \\ 0 & sinon & \end{matrix}$	$c_i^k = \begin{matrix} n+1-i & si & i+k \leqslant n+1 \\ 0 & sinon & \end{matrix}$	$c_i^k = \begin{matrix} i+k-1 & si & i+k \leqslant n+1 \\ 0 & sinon & \end{matrix}$

$$\sum_{i,k} a_i^k = \sum_{k\leqslant n}\Big(\sum_{i\leqslant n} a_i^k\Big) = \sum_{k\leqslant n}\Big(\sum_{i\leqslant n+1-k}(n+1-k)\Big) = \sum_{i=1}^{n}(n+1-k)^2$$

(compteur par colonne).

On renverse la somme et on a $\sum\limits_{p=1}^{n} p^2$.

Pour B la somme se fait en ligne.
Pour C on somme en fonction de la valeur de $i+k$ avec les mêmes termes.

Le terme général de $A+B+C$ est à chaque fois $(n+1-k)+(n+1-i)+i+k-1$ ce qui fait $2.n+1$.
Du moins pour $i+k\leqslant n+1$. Sinon, on a 0.

Si on somme $\sum\limits_{i,k}(a_i^k+b_i^k+c_i^k)$ est faite de termes tous égaux à $2.n+1$ ou 0.

On ne compte que les $2.n+1$. Il y en a $\dfrac{n.(n+1)}{2}$.

La somme vaut donc $\dfrac{n.(n+1).(2.n+1)}{2}$.

Mais en séparant en $\sum\limits_{i,k}(a_i^k+b_i^k+c_i^k)$, on a $3.\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

En identifiant : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{1}{3}.\dfrac{n.(n+1).(2.n+1)}{2}$.

∘34∘

♡ Une série géométrique a pour somme (tous les termes de 0 à l'infini) 1, et la somme de ses carrés vaut 2.
Retrouvez la raison.
Et la valeur du premier terme.

On note a le terme initial (non nul sinon la somme de la série est nulle), et r la raison (comprise entre -1 et 1 strictement sinon la série diverge).

Le jeu de conditions donne $\dfrac{a}{1-r}=1$ et $\dfrac{a^2}{1-r^2}=2$.

On a donc $a=1-r$ puis $a^2=(1-r)^2$.

En comparant avec $a^2=2.(1-r^2)$ on trouve $(1-r)^2=2.(1-r^2)$ et en simplifiant par $1-r$ non nul : $\boxed{r=\dfrac{-1}{3}}$

On reporte : $\boxed{a=\dfrac{4}{2}}$

On peut vérifier si nécessaire.

∘35∘

Montrez que $\prod\limits_{k=0}^{n} 2^{(k/2^k)}$ converge vers 4 quand n tend vers l'infini (on pourra dériver $x\longmapsto\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$).

Il suffit de trouver la limite de l'exposant : $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{k}{2^k}$ (oui, $\prod\limits_{k=0}^{n} 2^{a_k}=2^{\sum_k a_k}$, c'est l'évidence, non ?).

On peut l'obtenir en étudiant $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$, en dérivant puis en calculant en $x=\dfrac{1}{2}$.

On peut aussi écrire $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{k}{2^k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^k}.\sum\limits_{i=0}^{k-1}1$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{2^k}=\sum_{0\leqslant i<k\leqslant n}\frac{1}{2^k}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{2^k}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i+1}^{n}\frac{1}{2^k}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{2^k}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\frac{1}{2^{i+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$$

et ainsi de suite.
Bref, $\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{2^k}=2-N.2^{-N}-2^{1-N}$. Et il tend vers 2.

Notre limite vaut 2^2 ce qui fait 4.

∘36∘

On rappelle $\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}\dots a_n^{\sigma(n)}$. Montrez que si A est une matrice triangulaire ($a_i^k=0$ si $k<i$) alors son déterminant est le produit des termes diagonaux.
Montrez : $\det\begin{pmatrix}a&b&\beta\\c&d&\gamma\\0&0&\alpha\end{pmatrix}=\alpha.(a.d-b.c)$.

∘37∘

a, b, c, d et e sont cinq complexes non nuls. Le polynôme $(X-a).(X-b).(X-c).(X-d).(X-e)$ est noté P, et sous forme développée, on l'écrit $X^5-\sigma_1.X^4+\sigma_2.X^3-\sigma_3.X^2+\sigma_4.X-\sigma_5$. Pour tout k, on pose aussi $S_k=a^k+b^k+c^k+d^k+e^k$. Exprimez S_2 à l'aide des σ_i. *Le but est d'écrire simplement les relations donnant les S_k à l'aide des σ_i et vice versa.*
Montrez : $\frac{P'(X)}{P(X)}=\frac{1}{X-a}+\frac{1}{X-b}+\frac{1}{X-c}+\frac{1}{X-d}+\frac{1}{X-e}$ *(partez du côté qui vous semble le plus pratique).*
Justifiez pour α non nul : $\frac{1}{t-\alpha}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{t^{k+1}}+o\Big(\frac{1}{t^{n+1}}\Big)$ quand t tend vers l'infini *(on rappelle : « $f(t)=o(g(t))$ quand t tend vers un truc » signifie « la forme surement indéterminée $\frac{f(t)}{g(t)}$ tend vers 0 quand t tend vers le truc en question »).*
Déduisez $\frac{P'(t)}{P(t)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{S_k}{t^{k+1}}+o\Big(\frac{1}{t^{n+1}}\Big)$, puis déduisez par produit en croix les formules de Newton (par exemple $S_4-\sigma_1.S_3+\sigma_2.S_2-\sigma_3.S_1+\sigma_4.S_0=\sigma_4$).
Déduisez et généralisez $S_4=\begin{vmatrix}1&0&0&0&5\\-\sigma_1&1&0&0&-4.\sigma_1\\\sigma_2&-\sigma_1&1&0&3.\sigma_2\\-\sigma_1&\sigma_2&-\sigma_1&1&-2.\sigma_3\\\sigma_4&-\sigma_3&\sigma_2&-\sigma_1&\sigma_4\end{vmatrix}$.

On écrit $(X-a).(X-b).(X-c).(X-d).(X-e)=X^5-\sigma_1.X^4+\sigma_2.X^3-\sigma_3.X^2+\sigma_4.X-\sigma_5$.
Les relations coefficients-racines disent tout de suite

$\sigma_1=a+b+c+d+e$
$\sigma_2=a.b+a.c+a.d+a.e+b.c+b.d+b.e+c.d+c.e+d.e$
$\sigma_3=a.b.c+a.b.d+a.b.e+a.c.d+a.c.e+a.d.e+b.c.d+b.c.e+b.d.e+c.d.e$
$\sigma_4=a.b.c.d+a.b.c.e+a.b.d.e+a.c.d.e+b.c.d.e$
$\sigma_5=a.b.c.d.e$

Un calcul classique donne $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=(\sigma_1)^2-2.\sigma_2$

On doit décomposer $\frac{P'(x)}{P(x)}$ en éléments simples. C'est $\frac{P'(x)}{(X-a).(x-b).(x-c).(x-d).(x-e)}$.
On peut décomposer en éléments simples sous la forme $\frac{\alpha}{x-a}+\frac{\beta}{x-b}+\frac{\gamma}{x-c}+\frac{\delta}{x-d}+\frac{\epsilon}{x-e}$.
Il ne reste plus qu'à calculer α, β, γ, δ et ϵ par la méthode des pôles et trouver 1 à chaque fois.
Soit en bluffant, soit par un calcul bien mené.

Mais il ne faut pas toujours utiliser la même méthode. Il faut savoir varier les points de vue. partir de droite pour aller à gauche, ou partir de gauche pour aller à droite ; réduire au dénominateur commun ou au contraire séparer... Innovez !
Ici, on part de ce qu'on nous propose à droite :

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\frac{1}{x-d}+\frac{1}{x-e}=\frac{\dots}{(x-a).(x-b).(x-c).(x-d).(x-e)}=\frac{\dots}{P(x)}$$

Et qui est ce numérateur ? C'est

$$(x-b).(x-c).(x-d).(x-e)+(x-a).(x-c).(x-d).(x-e)+(x-a).(x-b).(x-d).(x-e)$$

$$+(x-a).(x-b).(x-c).(x-e)+(x-a).(x-b).(x-c).(x-d)$$

Il est facile d'y voir une chose comme $u'.v+u.v'$ ou $v'.v.w+u.v'.w'$ et même la généralisation à cinq termes, où chaque dérivée u', v' ou w' vaut 1.
Bref, c'est $P'(x)$ quand on dérive $P(x)=(x-a).(x-b).(x-c).(x-d).(x-e)$ comme un produit. C'est tout !

Pour la formule $\dfrac{1}{t-\alpha}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{t^{k+1}}+o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$, on peut aussi partir du meilleur côté. Le plus compliqué. Qu'on va essayer de simplifier.
Sinon, c'est une formule de Taylor avec reste intégrale pour l'application $x\longmapsto\dfrac{1}{t-\alpha}$ qu'on aura d'abord factorisée sous la forme $\dfrac{1}{t}.\dfrac{1}{1-\alpha.t}$. On y écrase ensuite le reste intégrale en en faisant un $o(1/t^{n+1})$.
Mais partons juste de $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{t^{k+1}}=\dfrac{1}{t}+\dfrac{\alpha}{t^2}+\dfrac{\alpha^2}{t^3}+\ldots+\dfrac{\alpha^n}{t^{n+1}}$. C'est une série géométrique dont la raison est $\dfrac{\alpha}{t}$, qui ne vaut pas 1 (comme t va tendre vers l'infini, il a dépassé la valeur particulière α).
Ceci vaut $\dfrac{\dfrac{1}{t}-\dfrac{\alpha^{n+1}}{t^{n+2}}}{1-\dfrac{\alpha}{t}}$ et on simplifie en $\dfrac{1}{t-\alpha}-\dfrac{\alpha^{n+1}}{t^{n+2}.\Big(1-\frac{\alpha}{t}\Big)}$.
On tient notre terme $\dfrac{1}{t-\alpha}$, et le terme correctif est $\dfrac{\alpha^{n+1}}{t^{n+2}.\Big(1-\frac{\alpha}{t}\Big)}$.

On vérifie si c'est un $o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$ en effectuant (comme la définition le dit) le quotient $\dfrac{\dfrac{\alpha^{n+1}}{t^{n+2}.\Big(1-\frac{\alpha}{t}\Big)}}{\dfrac{1}{t^{n+1}}}$. Il vaut $\dfrac{\alpha^{n+1}}{t.(1-\frac{\alpha}{t})}$.
Quand t tend vers l'infini, ceci tend bien vers 0.

Écrivons cette formule pour α égal à a, puis à b, puis à c, puis à d et à e, et sommons :

$$\frac{1}{t-a}+\frac{1}{t-b}+\ldots+\frac{1}{t-e}=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{t^{k+1}}+\sum_{k=0}^{n}\frac{b^k}{t^{k+1}}+\ldots+\sum_{k=0}^{n}\frac{e^k}{t^{k+1}}+o\Big(\frac{1}{t^{n+1}}\Big)$$

en sommant déjà les quatre $o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$ en un seul.
On réunit les sommes en une seule, et on dit qui est le premier membre :

$$\frac{P'(t)}{P(t)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k+b^k+c^k+d^k+e^k}{t^{k+1}}+o\Big(\frac{1}{t^{n+1}}\Big)$$

Et heureusement, il y a une notation pour $a^k+b^k+c^k+d^k+e^k$, et c'est justement S_k.
On a bien $\dfrac{P'(t)}{P(t)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{S_k}{t^{k+1}}+o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$ quand t tend vers l'infini.

Dans la formule précédente, effectuons un produit en croix et remplaçons $P'(t)$ et $P(t)$ par leurs valeurs sur la base canonique :

$$5.X^4-4.\sigma_1.X^3+3.\sigma_2.X^2-2.\sigma_3.X+\sigma_4=(t^5-\sigma_1.t^4+\sigma_2.t^3-\sigma_3.t^2+\sigma_4.t-\sigma_5).\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{S_k}{t^{k+1}}+o\Big(\frac{1}{t^{n+1}}\Big)\Big)$$

quand t tend vers l'infini.
La mention « quand t tend vers l'infini », c'est pour que le petit o ait un sens, sinon, il y a un reste sous forme d'intégrale impossible à écrire simplement.
Écrivons cette formule pour n pas trop grand :
$5.t^4-4.\sigma_1.t^3+3.\sigma_2.t^2-2.\sigma_3.t+\sigma_4 \;=\; (t^5-\sigma_1.t^4+\sigma_2.t^3-\sigma_3.t^2+\sigma_4.t-\sigma_5).\Big(\frac{S_0}{t}+\frac{S_1}{t^2}+\frac{S_2}{t^3}+\frac{S_3}{t^4}+\frac{S_4}{t^5}+o\Big(\frac{1}{t^5}\Big)\Big)$
$(t\to+\infty)$
avec bien sûr $S_0=a^0+b^0+c^0+d^0+e^0=5$.
On identifie de chaque côté les termes en fonction des puissances de t

t^4	5	S_0
t^3	$-4.\sigma_1$	$S_1-\sigma_1.S_0$
t^2	$3.\sigma_2$	$S_2-\sigma_1.S_1+\sigma_2.S_0$
t	$-2.\sigma_3$	$S_3-\sigma_1.S_2+\sigma_2.S_1-\sigma_3.S_0$
1	σ_4	$S_4-\sigma_1.S_3+\sigma_2.S_2-\sigma_3.S_1+\sigma_4.S_0$

L'identification donne
- $S_0=5$, ce n'est pas un scoop.
- $-4.\sigma_1=S_1-5.\sigma_1$ d'où $\sigma_1=S_1$, nihil novi sub sole
- $3.\sigma_2=S_2-(\sigma_1)^2+5.\sigma_2$, rien de neuf non plus : $(S_1)^2=S_2+2.\sigma_2$.
- $-2.\sigma_3=S_3-\sigma_1.S_2+\sigma_2.S_1-5.\sigma_3$ c'est déjà un peu plus intéressant :

$(a^3+\ldots+e^3)-(a+\ldots+e).(a^2+\ldots e^2)+(a.b+a.c+\ldots+d.e).(a+\ldots+e)=3.(a.b.c+\ldots+c.d.e)$
Et la dernière relie un peu toutes les autres, mais avec $(a^4+b^4+\ldots+e^4)$ et des $(a.b+a.c+\ldots d.e).(a^2+\ldots+e^2)$ et autres termes homogènes.

On doit trouver une belle formule avec un déterminant.
La démarche bourrine de Terminale consiste à calculer S_4, à calculer le déterminant et à comparer les deux objets.
Vous n'irez jamais loin en « raisonnant » comme ça.
Regardez ce qu'on a obtenu plus haut :

$S_0=5$
$S_1-\sigma_1.S_0=-4.\sigma_1$
$S_2-\sigma_1.S_1+\sigma_2.S_0=3.\sigma_2$
$S_3-\sigma_1.S_2+\sigma_2.S_1-\sigma_3.S_0=-2.\sigma_3$
$S_4-\sigma_1.S_3+\sigma_2.S_2-\sigma_3.S_1+\sigma_4.S_0=\sigma_4$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-\sigma_1&1&0&0&0\\\sigma_2&-\sigma_1&1&0&0\\-\sigma_1&\sigma_2&-\sigma_1&1&0\\\sigma_4&-\sigma_3&\sigma_2&-\sigma_1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}S_0\\S_1\\S_2\\S_3\\S_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-4.\sigma_1\\3.\sigma_2\\-2.\sigma_3\\\sigma_4\end{pmatrix}$$

Ça s'appelle un système de Cramer, et ça se résout par les formules du même nom. En particulier $S_4=\begin{vmatrix}1&0&0&0&5\\-\sigma_1&1&0&0&-4.\sigma_1\\\sigma_2&-\sigma_1&1&0&3.\sigma_2\\-\sigma_1&\sigma_2&-\sigma_1&1&-2.\sigma_3\\\sigma_4&-\sigma_3&\sigma_2&-\sigma_1&\sigma_4\end{vmatrix}$

En plus petit, on avait aussi $\begin{pmatrix}1&0&0\\-\sigma_1&1&0\\\sigma_2&-\sigma_1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}S_0\\S_1\\S_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-\ 4.\sigma_1\\3.\sigma_2\end{pmatrix}$

puis $S_2=\begin{vmatrix}1&0&5\\-\sigma_1&1&-4.\sigma_1\\\sigma_2&-\sigma_1&3.\sigma_2\end{vmatrix}=(\sigma_1)^2-2.\sigma_2$

Mais les formules de Newton se généralisent avec

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0&5\\-\sigma_1&1&0&0&0&-4.\sigma_1\\\sigma_2&-\sigma_1&1&0&0&3.\sigma_2\\-\sigma_1&\sigma_2&-\sigma_1&1&0&-2.\sigma_3\\\sigma_4&-\sigma_3&\sigma_2&-\sigma_1&1&\sigma_4\\-\sigma_5&\sigma_4&-\sigma_3&\sigma_2&-\sigma_1&-\sigma_5\end{vmatrix}$$

puis $a^6+b^6+c^6+d^6+e^6=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0&0&5\\-\sigma_1&1&0&0&0&0&-4.\sigma_1\\\sigma_2&-\sigma_1&1&0&0&0&3.\sigma_2\\-\sigma_1&\sigma_2&-\sigma_1&1&0&0&-2.\sigma_3\\\sigma_4&-\sigma_3&\sigma_2&-\sigma_1&1&0&\sigma_4\\-\sigma_5&\sigma_4&-\sigma_3&\sigma_2&-\sigma_1&1&-\sigma_5\\0&-\sigma_5&\sigma 4&-\sigma_3&\sigma_2&-\sigma_1&0\end{vmatrix}$ puisque σ_6 est nul.

Il existe aussi les formules renversées qui calculent les coefficients σ_k du polynôme à l'aide des sommes de puissances des racines :

telles que $\sigma_2=\dfrac{1}{2!}.\begin{vmatrix}S_1&1\\S_2&S_1\end{vmatrix}$, $\sigma_3=\dfrac{1}{3!}.\begin{vmatrix}S_1&1&0\\S_2&S_1&2\\S_3&S_2&S_1\end{vmatrix}$,$\sigma_4=\dfrac{1}{4!}.\begin{vmatrix}S_1&1&0&0\\S_2&S_1&2&0\\S_3&S_2&S_1&3\\S_4&S_3&S_2&S_1\end{vmatrix}$

∘38∘

Décomposez la suite périodique $(a,\ b,\ a,\ b,\ a,\ b,\ldots)$ comme combinaison de (1^n) et $((-1)^n)$.
Décomposez la suite périodique $(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ldots)$ comme combinaison de (1^n) et (j^n) et $(j^{2.n})$.
Se décompose-t-elle à l'aide de (1^n) et (j^n) et $((-j)^n)$?

$(a,\ b,\ a,\ b,\ a,\ b,\ldots)=\dfrac{a+b}{2}.(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ldots)+\dfrac{a-b}{2}.(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ldots)$
(on trouve les deux coefficients par résolution d'un tout petit système)

$$(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0\ldots) \text{ s'écrit } \begin{array}{l} \frac{1}{3}\times \quad (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots) \\ \frac{1}{3}\times \quad (1,\ j,\ j^2,\ 1,\ j,\ j^2,\ 1,\ \ldots) \\ \frac{1}{3}\times \quad (1,\ j^2,\ j,\ 1,\ j^2,\ j,\ 1,\ \ldots) \end{array}$$

Peut on l'écrire $\begin{array}{ll} a\times & (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots) \\ b\times & (1,\ j,\ j^2,\ 1,\ j,\ j^2,\ 1,\ \ldots) \\ c\times & (1,\ -j,\ j^2,\ -1,\ j,\ -j^2,\ 1,\ \ldots) \end{array}$?

Le système conduit par exemple (colonnes 0 et 3) à $a+b+c=1$ et $a+b-c=1$ d'où $c=0$ puis $a+b=1$ et $a+j.b=0$ et $a+j^2.b=0$ (trois premières colonnes). Il y a contradiction.

∘39∘ Calculez $\sum_{k=0}^{n}\cos((2.k+1).\theta)$ pour n donné dans $\mathbb{N}$ et θ dans $\mathbb{R}$.

Il ne semble pas judicieux de replier ici en deux $\frac{e^{-(2.n+1).i.\theta}}{2}+\frac{e^{-(2.n-1).i.\theta}}{2}+\ldots+\frac{e^{-i.\theta}}{2}+\frac{e^{i.\theta}}{2}+\frac{e^{3.i.\theta}}{2}+\ldots+\frac{e^{\cdot(2.n+1).i.\theta}}{2}$ *, quoique.*

C'est juste la partie réelle de $\sum_{k=0}^{n} e^{i.(2.k+1).\theta}$.

On met de côté le cas multiple de π et on applique la formule de la série géométrique (la raison est $e^{2.i.\theta}$ puisque on passe de $e^{i.(2.k+1).\theta}$ à $e^{i.(2.k+3).\theta}$:

$$\frac{e^{i.\theta}-e^{i.(2.n+3).\theta}}{1-e^{2.i.\theta}}=\frac{e^{i.(2.n+3).\theta}-e^{i.\theta}}{e^{2.i.\theta}-1}$$

On multiplie haut et bas par $e^{-i.\theta}$: $\frac{e^{i.(2.n+2).\theta}-1}{e^{.i.\theta}-e^{-i.\theta}}$ et même $\frac{e^{i.(2.n+2).\theta}-1}{2.i.\sin(\theta)}$.

Seule la partie réelle nous intéresse, donc la partie imaginaire du numérateur.

Il reste $\boxed{\frac{\sin((2.n+2).\theta)}{2.\sin(\theta)}}$

On pouvait aussi regarder le noyau de Dirichlet $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{2n}\cos(k.\theta)$ de paramètres θ et $2.n$

et lui soustraire le noyau de Dirichlet $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k.2.\theta)$ de paramètres $2.\theta$ et n.

∘40∘ ♡ Calculez $\sum_{n=0}^{2014}\Big(\sum_{k=0}^{n}2^k\Big)$ puis $\sum_{n=0}^{2014}\Big(\sum_{k=0}^{n}2^n\Big)$ et enfin $\sum_{k=0}^{2014}\Big(\sum_{n=k}^{2014}2^n\Big)$ (changez l'année si vous y tenez).

$$\begin{array}{rcll} \sum_{n=0}^{2014}\Big(\sum_{k=0}^{n}2^k\Big) & = & \sum_{n=0}^{2014}(2^{n+1}-1) & \\ & = & \sum_{n=0}^{2014}2^{n+1} & -2015 \\ & = & 2^{2016}-2 & -2015 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sum_{n=0}^{2014}\Big(\sum_{k=0}^{n}2^n\Big) & = & \sum_{n=0}^{2014}(n+1).2^n \\ & = & 2014.2^{2015}+1 \end{array}$$

il suffit de penser à $\sum_{n=0}^{2014}x^{n+1}=\frac{x-x^{2016}}{1-x}$, de dériver $\sum_{n=0}^{2014}(n+1).x^n=\frac{1-2016.x^{2015}}{1-x}+\frac{1-x^{2016}}{(1-x)^2}$ et de calculer en $x=2$.

$$\sum_{k=0}^{2014}\Big(\sum_{n=k}^{2014}2^n\Big)=\sum_{k=0}^{2014}\Big(2^{2015}-2^k\Big)=2015.2^{2015}-\sum_{k=0}^{2014}2^k$$

On trouve cette fois $2015.2^{2015}-2^{2015}+1$.

Bien d'autres approches sont possibles,par exemple en sommant les deux dernières.

∘41∘

♡ Cet élève Izeurahai-Cranpla affirme $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}(i+j)=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}(i+j)$ puisque de toutes façons, pour i et j nuls, $i+j$ ne compte pas. Prouvez lui qu'il a tort.

C'est vrai que pour i et j nuls, ça ne change rien. Mais si un seul est nul, il reste l'autre.

Ici, n vaut 5

0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

et

	2	3	4	5	6
	3	4	5	6	7
	4	5	6	7	8
	5	6	7	8	9
	6	7	8	9	10

∘42∘

Calculez $\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n}j\Big)$ de deux façons. Retrouvez $\sum_{k=0}^{n}k^2$.

Dans ce sens là :

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n}j\Big)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(n-i+1).(n+i)}{2}=\frac{1}{2}.\sum_{i=0}^{n}(n.(n+1)+i-i^2)$$

On compte et somme $\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n}j\Big)=\frac{n.(n+1)^2}{2}+\frac{n.(n+1)}{4}-\frac{1}{2}.\sum_{i=0}^{n}i^2$ en considérant qu'on ne sait pas calculer la somme des carrés.

Mais dans l'autre sens

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n}j\Big)=\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}j=\sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{j}j\Big)$$

On compte

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n}j\Big)=\sum_{j=0}^{n}(j+1).j=\sum_{j=0}^{n}j^2+\frac{n.(n+1)}{2}$$

Si on connaît la somme des carrés, on trouve $\frac{n.(n+1).(n+2)}{3}$.

Sinon, on aboutit à

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n}j\Big)=\frac{n.(n+1)^2}{2}+\frac{n.(n+1)}{4}-\frac{1}{2}.C_n=\frac{n.(n+1)}{2}+C_n$$

En égalisant dans la seconde moitié $2.n^2.(n+1)+n.(n+1)=2.n.(n+1)+6.C_n$ et finalement $C_n=\frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$.

∘43∘

♡ Augustin-Louis, Hermann-Amandus ! Montrez que $a.\cos(\theta)+b.\sin(\theta)$ est toujours entre $-\sqrt{a^2+b^2}$ et $\sqrt{a^2+b^2}$.

Le produit scalaire de $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\\sin(\theta)\end{pmatrix}$ est plus petit que le produit de leurs normes.

∘44∘

♡ Calculez $\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(k.\theta)}{\cos^k(\theta)}$ (on supposera que θ n'est pas un multiple de π).

Partie réelle d'une série géométrique de raison $\frac{e^{i.\theta}}{\cos(\theta)}$ c'est à dire $1+i.\tan(\theta)$.

On met de côté les cas où $\tan(\theta)$ est nulle, et ceux où $\cos(\theta)$ est nul [10].

On trouve alors $\dfrac{1-\dfrac{e^{i.(n+1).\theta}}{\cos^{n+1}(\theta)}}{1-(1+i.\tan(\theta))}$ et il faudra encore en extraire la partie réelle.

On simplifie les 1 et les $\frac{1}{i}$: $i.\dfrac{1-\dfrac{e^{i.(n+1).\theta}}{\cos^{n+1}(\theta)}}{\tan(\theta)}$.

10. refusé par l'énoncé normalement

On simplifie les $\cos(\theta)$ au dénominateur : $i.\dfrac{\cos^{n+1}(\theta)-e^{i.(n+1).\theta}}{\sin(\theta).\cos^n(\theta)}$.

On garde la partie réelle : $\boxed{\dfrac{\sin((n+1).\theta)}{\sin(\theta).\cos^n(\theta)}}$

∘45∘ Les suites (a_n) et (b_n) sont liées par $\forall n,\ b_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a_k$.

Montrez alors $\forall p,\ a_p=\sum\limits_{i=0}^{p}\binom{p}{i}.(-1)^{i+p}.b_i$.

Qui est la suite (b_n) si (a_n) est constante ?
Qui est la suite (b_n) si (a_n) est géométrique de raison r ?

C'est la formule dite « d'inversion de Newton ». On a deux opérateurs qui transforment chacun une suite en une autre

$(a_n)\longmapsto(A_n)$	$(A_n)\longmapsto(a_n)$
$\forall n,\ A_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a_k$	$\forall n,\ a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.(-1)^{n+k}.A_k$

ils se ressemblent beaucoup,au signe près, mais chacun est la réciproque de l'autre...
Si vous transformez les sigma en intégrales, vous avez des résultats du même type, avec la transformée de Fourier et sa réciproque.
Pareil pour Laplace.

Commençons par le cas particulier « (a_n) est constante ».

On note α cette constante, et pour tout n on calcule $\forall n,\ b_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\alpha$.

On trouve $\forall n,\ b_n=2^n.\alpha$ *(suite géométrique de raison 2)*.

Passons à (a_n) est géométrique de raison r.

$$\forall n,\ b_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a_0.r^k=a_0.(2+r)^n$$

On a encore une suite géométrique *(et pour $r=-2$, la suite géométrique en question est constante)*.

On va garder les notations de l'énoncé, se donner une suite (a_n), construire la suite (b_n) associée et vérifier que l'on retrouve (a_p) en calculant pour tout p la nouvelle somme

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}.(-1)^{i+p}.b_i=\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}.(-1)^{i+p}.\Big(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}.a_k\Big)$$

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}.(-1)^{i+p}.b_i=\sum_{0\leqslant k\leqslant i\leqslant p}\Big(\binom{p}{i}.(-1)^{i+p}.\binom{i}{k}.a_k\Big)$$

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}.(-1)^{i+p}.b_i=\sum_{k=0}^{p}\Big(\sum_{i=k}^{p}\binom{p}{i}.(-1)^{i+p}.\binom{i}{k}.a_k\Big)$$

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}.(-1)^{i+p}.b_i=\sum_{k=0}^{p}\Big(\sum_{i=k}^{p}\binom{p}{i}.(-1)^{i+p}.\binom{i}{k}\Big).a_k$$

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}.(-1)^{i+p}.b_i=\sum_{k=0}^{p-1}\Big(\sum_{i=k}^{p}\binom{p}{i}.(-1)^{i+p}.\binom{i}{k}\Big).a_k+\Big(\binom{p}{p}.(-1)^{p+p}.\binom{p}{p}\Big).a_p$$

Le coefficient (unique) devant a_p vaut 1.

Il reste à prouver que pour chaque k plus petit que p la somme $\Big(\sum\limits_{i=k}^{p}\binom{p}{i}.(-1)^{i+p}.\binom{i}{k}\Big)$ est nulle.

A faire.

∘46∘ Démontrez la formule d'intégration par parties *(dite aussi formule d'Abel, mais c'est tellement plus parlant quand on la rapproche de $\int a.b = [a.B] - \int a'.B$ avec $B' = b$ que vous connaissez !).*
Si l'on pose $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n.b_n$ et $B_m = \sum_{k=0}^{m} b_k$. Alors : $S_N = a_N.B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n.(a_{n+1} - a_n)$.

On peut évidemment faire une récurrence.

On peut partir du membre de droite, le plus compliqué a priori et tenter de le simplifier.

$$a_N.B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n.(a_{n+1} - a_n) = a_N.B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n.a_{n+1} + \sum_{n=0}^{N-1} B_n.a_n$$

on a séparé, on va décaler un des indices en l'appelant p (et on change le nom de l'autre)

$$a_N.B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n.(a_{n+1} - a_n) = a_N.B_N - \sum_{p=1}^{N} B_{p-1}.a_p + \sum_{p=0}^{N-1} B_p.a_p$$

on isole deux termes pour « aligner les parties communes »

$$a_N.B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n.(a_{n+1} - a_n) = a_N.B_N - B_{N-1}.a_N - \sum_{p=1}^{N-1} B_{p-1}.a_p + a_0.B_0 + \sum_{p=1}^{N-1} B_p.a_p$$

on fusionne les parties communes

$$a_N.B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n.(a_{n+1} - a_n) = a_N.B_N - B_{N-1}.a_N + \sum_{p=1}^{N-1} a_p.(B_p - B_{p-1}) + a_0.B_0$$

on simplifie et on note que B_0 vaut b_0

$$a_N.B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n.(a_{n+1} - a_n) = a_N.B_N - B_{N-1}.a_N + \sum_{p=1}^{N-1} a_p.b_p + a_0.b_0$$

on simplifie le premier terme en $a_n.b_n$et on l'incorpore à la somme comme le dernier

$$a_N.B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n.(a_{n+1} - a_n) = \sum_{p=0}^{N} a_p.b_p$$

∘47∘ Calculez la somme $\sum_{q=0}^{n} (-1)^{n-q}.q^2$ pour n de 0 à 6 puis pour tout n de $\mathbb{N}$.

On calcule les premières sommes $\sum_{q=0}^{n} (-1)^{n-q}.q^2$

$n = 0$	0^2						$= 0$
$n = 1$	-0^2	$+1^2$					$= 1$
$n = 2$	0^2	-1^2	$+2^2$				$= 3$
$n = 3$	-0^2	$+1^2$	-2^2	$+3^2$			$= 6$
$n = 4$	0^2	-1^2	$+2^2$	-3^2	$+4^2$		$= 10$
$n = 5$	-0^2	$+1^2$	-2^2	$+3^2$	-4^2	$+5^2$	$= 15$

La formule générale ressemble à la somme des premiers entiers.

On montre : $\boxed{\sum_{q=0}^{n} (-1)^{n-q}.q^2 = \frac{n.(n+1)}{2}}$

Quelles sont les approches possibles ?
● La récurrence. La formule est initialisée.
On la suppose vraie pour un n donné. On passe au suivant :

$$\sum_{q=0}^{n+1} (-1)^{n+1-q}.q^2 = (-1)^{n+1-(n+1)}.(n+1)^2 + \sum_{q=0}^{n} (-1)^{n+1-q}.q^2$$

$$\sum_{q=0}^{n+1}(-1)^{n+1-q}.q^2 = (n+1)^2 - \sum_{q=0}^{n}(-1)^{n-q}.q^2$$

$$\sum_{q=0}^{n+1}(-1)^{n+1-q}.q^2 = (n+1)^2 - \frac{n.(n+1)}{2}$$

$$\sum_{q=0}^{n+1}(-1)^{n+1-q}.q^2 = (n+1).\frac{2.(n+1)-n}{2}$$

$$\sum_{q=0}^{n+1}(-1)^{n+1-q}.q^2 = \frac{(n+1).(n+2)}{2}$$

• La généralisation hâtive :

$$S_{20}\ \begin{array}{cccccccccccccc} = & -1^2 & +2^2 & -3^2 & +4^2 & \dots & -13^2 & +14^2 & -15^2 & +16^2 & -17^2 & +18^2 & -19^2 & +20^2 \\ = & (2+1). & (2-1) & +(4+3). & (4-3) & & +(14+13). & (14-13) & +(15+16). & (15-16) & & & +(19+20). & (20-19) \\ = & 3 & & +7 & & & +27 & & +31 & & +35 & & +39 & \\ = & 1 & +2 & +3 & +4 & & +13 & +14 & +15 & +16 & +17 & +18 & +19 & +20 \end{array}$$

• Le calcul visuel :

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^{n-q}.q^2 = n^2 - (n-1)^2 + (n-2)^2 - (n-3)^2 + (n-4)^2 - (n-5)^2 + \dots$$

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^{n-q}.q^2 = \Big(n^2 - (n-1)^2\Big) + \Big((n-2)^2 - (n-3)^2\Big) + \Big((n-4)^2 - (n-5)^2\Big) + \dots$$

(le dernier ?)

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^{n-q}.q^2 = \Big(2.n-1\Big) + \Big(2.n-5\Big) + \Big(2.n-7\Big) + \dots + 1$$

On a une suite arithmétique, il suffit de compter le nombre de termes et de regarder la moyenne des extrêmes.

• Le calcul aussi astucieux : on définit $f = x \longmapsto \sum_{q=0}^{n} e^{q.x}$ (c'est $x \longmapsto \dfrac{1-e^{(n+1).x}}{1-e^x}$).
On la dérive deux fois $f'' = x \longmapsto \sum_{q=0}^{n} q^2.e^{q.x}$.
On calcule en $x = i.\pi$.

Non, on va préférer
• Le calcul bien conduit en distinguant les cas.
n pair, de la forme $2.N$:

$$\sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{2.N-q}.q^2 = \sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{q}.q^2$$

$$\sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{2.N-q}.q^2 = \sum_{q=pair} q^2 - \sum_{q=impair} q^2$$

$$\sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{2.N-q}.q^2 = \sum_{p=1}^{N}(2.p)^2 - \sum_{p=1}^{N}(2.p-1)^2$$

$$\sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{2.N-q}.q^2 = \sum_{p=1}^{N}((2.p)^2 - (2.p-1)^2)$$

$$\sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{2.N-q}.q^2 = \sum_{p=1}^{N}(4.p-1)$$

$$\sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{2.N-q}.q^2 = N.\frac{3+(4.N-1)}{2}$$

nombre de termes fois moyenne des extrêmes

$$\sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{2.N-q}.q^2 = \frac{(2.N).(2.N+1)}{2}$$

n impair de la forme $2.N+1$:

$$\sum_{q=0}^{2.N+1}(-1)^{2.N+1-q}.q^2 = -\sum_{q=0}^{2.N+1}(-1)^q.q^2$$

$$\sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{2.N-q}.q^2 = -\sum_{q=pair} q^2 + \sum_{q=impair} q^2$$

et ainsi de suite

◦48◦ ♡ Calculez pour n donné ces trois sommes là

$A_n = \sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} \frac{j}{i}$	$B_n = \sum_{i+j=n} i.j$	$C_n = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant n}} Max(i,\ j)$

$$A_n = \sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} \frac{j}{i}$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.\sum_{j=0}^{i-1} j$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.\frac{i.(i-1)}{2}$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{2}$$

$$\boxed{A_n = \frac{n.(n-1)}{4}}$$

$$B_n = \sum_{i+j=n} i.j$$

$$B_n = \sum_{i=0}^{n} i.(n-i)$$

$$B_n = n.\sum_{i=0}^{n} i - \sum_{i=0}^{n} i^2$$

$$\boxed{B_n = \frac{n^3-n}{6}}$$

$$C_n = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant n}} Max(i,\ j)$$

$$C_n = \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} Max(i,\ j) + \sum_{0\leqslant i=j\leqslant n} Max(i,\ j) + \sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} Max(i,\ j)$$

$$C_n = 2.\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} Max(i,\ j) + \sum_{0\leqslant i=j\leqslant n} i$$

$$C_n = 2.\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} j + \sum_{i=0}^{n} i$$

$$C_n = 2.\sum_{j=0}^{n} j \sum_{i=0}^{j-1} 1 + \frac{n.(n+1)}{2}$$

$$C_n = 2.\sum_{j=0}^{n} j^2 + \frac{n.(n+1)}{2}$$

$$\boxed{C_n = \frac{n.(n+1).(4.n+5)}{6}}$$

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to_{n\to+\infty} e^1$$

◦49◦

♡ Dans le développement du déterminant d'une matrice A de taille 8 et de terme général a_i^k, combien de termes de la forme $a_1^1.a_3^2.a_.^3.a_!^4.a_.^5.a_4^6.a_2^7.a_,^8$ ont un signe $+$?

Ce sont des termes de la forme $a_1^1.a_3^2.a_i^3.a_j^4.a_k^5.a_4^6.a_2^7.a_l^8$ où $[i,\ j,\ k,\ l]$ est une permutation de la liste $[5,\ 6,\ 7,\ 8]$.
Il y en a 24 (factorielle de 4).

Mais chaque fois qu'on fait un choix $[i,\ j,\ k,\ l]$ qui a un signe plus, il y a $[j,\ i,\ k,\ l]$ qui a un signe moins.

Et chaque fois qu'on fait un choix $[i,\ j,\ k,\ l]$ qui a un signe moins, il y a $[j,\ i,\ k,\ l]$ qui a un signe plus.
Il y en a autant avec un signe plus qu'avec un signe moins.
Ce qui en fait 12 avec le signe *plus*.

◦50◦

♡ Montrez : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+4.n+3} = \frac{3}{4}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+4.n+3} = \frac{1}{4}$ *(la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ signifie $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$).*

Calculons à horizon fini $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+4.n+3} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1).(n+3)}$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+4.n+3} = \frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+4.n+3} = \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}.\sum_{k=3}^{N+3} \frac{1}{k}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+4.n+3} = \frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3}\right)$$

On peut faire tendre N vers l'infini et voir disparaître les deux termes en N.

De la même façon : $\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2+4.n+3} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(n+1).(n+3)}$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2+4.n+3} = \frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n+3}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+4.n+3} = \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{N+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{1}{2}.\sum_{k=3}^{N+3} \frac{(-1)^{k-3}}{k}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+4.n+3} = -\frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{N+1} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{1}{2}.\sum_{k=3}^{N+3} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+4.n+3} = -\frac{1}{2}.\left(-1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.\left(\frac{(-1)^{N+2}}{N+2} + \frac{(-1)^{N+3}}{N+3}\right)$$

Les termes « au bout » s'en vont, quel que soit leur signe.

◦51◦

n est un entier naturel donné. Montrez : $\prod_{0\leq i<j\leqslant n} (j-i) = \prod_{k=1}^{n} k^{(n+1-k)}$.
Calculez aussi $\sum_{0\leq i\leq j} (j-i)$ et $\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} (j-i)$.
Combien de fois $j-i$ prend la valeur k (positif ou négatif d'ailleurs).

$\prod_{0\leq i<j\leqslant n} (j-i) = \prod_{k=1}^{n} k^{(n+1-k)}$ se démontre de multiples façons.

Une faute m'avait fait proposer $\prod_{0\leq i\leq j} (j-i)$ qui n'avait pas de sens (où s'arrêtait j ?),

puis $\prod_{0\leq i\leq j\leqslant} (j-i)$ qui autorisait $i=j$!

Il y a certes la récurrence.
Ou un dénombrement sur le dessin.

Sinon, c'est direct si on renverse le produit, permute les π et voit j comme un compteur :

$$\prod_{0\leq i<j\leqslant n}(j-i)=\prod_{j=1}^{n}\Big(\prod_{i=0}^{j-1}(j-i)\Big)=\prod_{j=1}^{n}\Big(\prod_{k=1}^{j}k\Big)=\prod_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant n}k=\prod_{k=1}^{n}\Big(\prod_{j=k}^{n}k\Big)=\prod_{k=1}^{n}k^{n-k+1}$$

On effectue le même type de manipulations sur la somme (ici, la condition $i<j$ peut être remplacée par $i\leqslant j$ sans différence, les termes en sus sont nuls) :

$$\sum_{0\leq i\leqslant j\leqslant n}(j-i)=\sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{j}(j-i)\Big)=\sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{k=0}^{j}k\Big)=\sum_{j=0}^{n}\frac{j.(j+1)}{2}=\sum_{p=1}^{n}\binom{p+1}{2}=\binom{n+2}{3}=\frac{n.(n+1).(n+2)}{6}$$

L'autre somme est nulle, chaque terme $j-i$ croise son opposé $i-j$.

∘52∘ Combien y a-t-il de termes non nuls dans la somme $\sum_{i+j+k=20}\binom{23}{i}.\binom{21}{j}.\binom{13}{k}$? Montrez que cette somme vaut $\binom{57}{20}$. Quel est l'exposant de 13 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de ce nombre ?
Indication $(1+X)^{23}.(1+X)^{21}.(1+X)^{13}$.

Dans $\sum_{i+j+k=20}\binom{23}{i}.\binom{21}{j}.\binom{13}{k}$, k ne peut pas dépasser 13 (que signifie $\binom{13}{17}$?).
Et par exemple pour k égal à 13, il reste la condition $i+j=7$. Il y a 8 couples possibles, de $(0,7)$, $(1,6)$, $(2,5)$ jusqu'à $(7,0)$.

k	couples (i,j)
13	$(0,7),\ (1,6),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1),\ (7,0)$
12	$(0,8),\ (1,7),\ (2,6),\ (3,5),\ (4,4),\ (5,3),\ (6,2),\ (7,1),\ (8,0)$
11	$(0,9),\ (1,8),\ (2,7),\ (3,6),\ (4,5),\ (5,4),\ (6,3),\ (7,2),\ (8,1),\ (9,0)$
10	$(0,10),\ (1,9),\ (2,8),\ (3,7),\ (4,6),\ (5,5),\ (6,4),\ (7,3),\ (8,2),\ (9,1),\ (10,0)$
9	$(0,11),\ (1,10),\ldots\ (4,7),\ (5,6),\ (6,5),\ (7,4),\ (8,3),\ (9,2),\ (10,1),\ (11,0)$
8	$(0,12),\ (1,11),\ldots\ (5,7),\ (6,6),\ (7,5),\ (8,4),\ (9,3),\ (10,2),\ (11,1),\ (12,0)$
7	et
6	ainsi
5	de
4	suite
3	jusqu'à
2	la ligne
1	finale
0	$(0,20),\ (1,19),\ (2,18),\ (3,17)\ldots(17,3),\ (18,2),\ (19,1),\ (20,0)$

Total : 231 termes.

Ensuite, c'est du dénombrement. Imaginons une classe de MPSI2 de 57 élèves.
23 garçons, 21 filles et 13 chats (ce n'est pas plus absurde que les urnes et les boules).
On doit former un groupe de 20 élèves.
Il y a $\binom{57}{20}$ façons de le faire.
Mais on peut dire aussi : combien de garçons,
combien de fille
combien de chats ?
On choisit i garçons parmi 23 : $\binom{23}{i}$
j filles parmi 21 : $\binom{21}{j}$
k chats parmi 13 : $\binom{13}{k}$
On multiplie ces choix indépendants : $\binom{23}{i}.\binom{23}{j}.\binom{23}{k}$ (produit).

Mais il y a la contrainte de « un groupe de 20 élèves » d'où $i+j+k=20$.

Et on étudie toutes les possibilités (probabilités totales) en sommant $\sum\limits_{i+j+k=20} .\binom{\cdots}{\cdots}$.

Ce binomial s'écrit $\dfrac{57.56.54.53.52.51.50.49.48.47.46.45.44.43.42.41.40.39.38}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20}$ avec 20 termes en haut et 20 termes en bas (c'est comme ça qu'il faut le voir dès qu'il s'agit de le calculer ou dénombrer, et pas comme $\dfrac{57!}{20.37}$).

On cherche les facteurs 13 en haut et en bas :

$$\frac{39.52}{13}.\frac{57.56.54.53.*.51.50.49.48.47.46.45.44.43.42.41.40.*.38}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.*14.15.16.17.18.19.20}$$

Il en reste un d'avance :

$$\binom{57}{20} = 13^1.2^a.3^b.5^c.7^d.11^e.19.23.41.43.47.53$$

♣ On sait additionner les binomiaux en lignes *(2^n)*, en colonne *(Zou-Shi-Zhi)*. Mais que se passe-t-il si on les additionne en diagonale *(évidemment de direction Sud-Ouest vers Nord-Est, comme ci contre)* ? Écrivez la formule rigoureuse $\sum\limits_{k=\triangle}^{\oslash}\binom{\otimes}{\odot}$. Émettez une conjecture. Prouvez

∘53∘ la.

Et pour la somme alternée ?

0	1	0	0	0	**0**	0
1	1	1	0	**0**	0	0
1	1	2	**1**	0	0	0
2	1	**3**	3	1	0	0
3	**1**	4	6	4	1	0
$\nearrow$	1	5	10	10	5	1
1+4+3	1	6	15	20	15	6

Avec des binomiaux aberrants, c'est pratique : $\sum\limits_{i+k=n}\binom{i}{k} = F_n$.

Sinon, c'est aussi $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{i}{n-i} = F_n$.

En ayant initialisé la suite de Fibonacci à 1 suivie de 1.

Et sans ces binomiaux nuls, c'est $\sum\limits_{i=[n/2]}^{n}\binom{i}{n-i} = F_n$

La preuve par récurrence est initialisée. Ladite récurrence sera à double hérédité.

Supposons en effet pour un n donné quelconque que l'on a à la fois $\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{i}{n-i} = F_n$

et $\sum\limits_{i=0}^{n+1}\binom{i}{n+1-i} = F_{n+1}$

Additionnons les deux :

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{n-i} + \sum_{i=0}^{n+1}\binom{i}{n+1-i} = F_n + F_{n+1}$$

Par définition de la suite de Fibonacci :

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{n-i} + \sum_{i=0}^{n+1}\binom{i}{n+1-i} = F_{n+2}$$

En adjoignant un terme nul $\binom{n+1}{-1}$:

$$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{i}{n-i} + \sum_{i=0}^{n+1}\binom{i}{n+1-i} = F_{n+2}$$

En fusionnant les sommes :

$$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{i}{n-k} + \binom{i}{n+1-i} = F_{n+2}$$

En appelant Pascal :

$$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{i+1}{n+1-i} = F_{n+2}$$

En décalant les indices :

$$\sum_{p=1}^{n+2} \binom{p}{n+2-p} = F_{n+2}$$

En ajoutant encore un terme nul :

$$\sum_{p=0}^{n+2} \binom{p}{n+2-p} = F_{n+2}$$

C'est la formule attendue.

Et visuellement

0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
1	1	2	1	0	0	0
2	1	3	3	1	0	0
3	1	4	6	4	1	0
F_4	1	5	10	10	5	1
	1	6	15	20	15	6

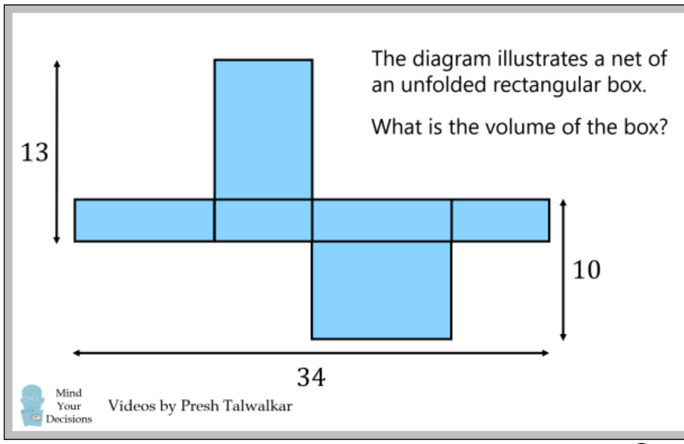
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
1	1	2	1	0	0	0
2	1	3	3	1	0	0
3	1	4	6	4	1	0
F_4	1	5	10	10	5	1
F_5	1	6	15	20	15	6

0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
1	1	2	1	0	0	0
2	1	3	3	1	0	0
3	1	4	6	4	1	0
F_4	1	5	10	10	5	1
F_5	1	6	15	20	15	6

et donc

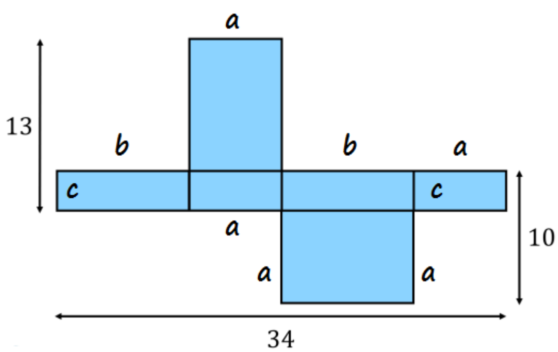
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
1	1	2	1	0	0	0
2	1	3	3	1	0	0
3	1	4	6	4	1	0
F_4	1	5	10	10	5	1
F_5	1	6	15	20	15	6
F_6						

54



Donnez un polynôme P vérifiant $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$ et $P(4) = -4$. Que vaut il en 0 ?

Quel est le minimum sur $]0, +\infty[$ de $t \longmapsto t^{(t^2)}$?



On note a, b et c les trois longueurs des côtés du parallélépipède.

On a alors $\left\{\begin{array}{ccccc|} 2.a & +2.b & & = & 34 \\ a & & +c & = & 10 \\ & b & +c & = & 13 \end{array}\right.$ et donc $\left\{\begin{array}{ccccc|} a & +b & & = & 17 \\ a & & +c & = & 10 \\ & b & +c & = & 13 \end{array}\right.$

Avec $L_1 + L_2 - L_3$ on trouve $a = 7$, puis avec $L_1 + L_3 - L_2$ on trouve $b = 10$ et enfin $c = 3$.

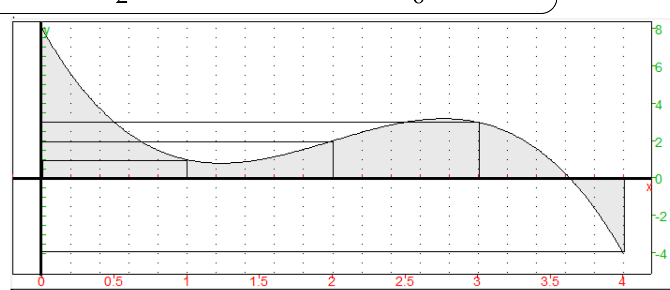
Le pavé droit a pour volume $\boxed{3 \times 7 \times 10 \text{ unités de volume}}$

On veut $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$ et $P(4) = -4$.

x	1	2	3	4
P(x)	1	2	3	-4
Lagrange propose				
$\dfrac{(X-2).(X-3).(X-4)}{-6}$	1	0	0	0
$\dfrac{(X-1).(X-3).(X-4)}{2}$	0	1	0	0
$\dfrac{(X-1).(X-2).(X-4)}{-2}$	0	0	1	0
$\dfrac{(X-1).(X-2).(X-3)}{6}$	1	0	0	0

La combinaison cherchée est donc

$$\boxed{\frac{(X-2).(X-3).(X-4)}{-6} + 2.\frac{(X-1).(X-3).(X-4)}{2} + 3.\frac{(X-1).(X-2).(X-4)}{-2} - 4.\frac{(X-1).(X-2).(X-3)}{6}}$$



En 0, on trouve 8.

$t \longmapsto t^{(t^2)}$ est définie sur $]0, +\infty[$ sous la forme $t \longmapsto \exp(t^2.\ln(t))$.
Cette application a le même sens de variations que $t \longmapsto t^2.\ln(t)$ de dérivée $t \longmapsto 2.t.\ln(t) + t$.

◦55◦

Complétez :

$P(X)$	$\dfrac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$	$\dfrac{(x-a).(x-b)}{?}$	$\dfrac{(x-a).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$
$P(a)$	?	?	?
$P\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)$	?	1	?
$P(b)$	?	?	?
$\displaystyle\int_a^b P(t).dt$	$\dfrac{b-a}{6}$	?	$\dfrac{b-a}{6}$

Un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifie $P(a) = \alpha, P(b) = \beta$ et $P(\dfrac{a+b}{2}) = \gamma$. Montrez : $\dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b P(t).dt = \dfrac{\alpha+4.\gamma+\beta}{6}$ (valeur moyenne donnée par la formule dite des trois niveaux).

Oui, c'est des polynômes d'interpolation de Lagrange !

$P(X)$	$\dfrac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$	$4.\dfrac{(x-a).(x-b)}{(a-b)^2}$	$\dfrac{(x-a).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$
$P(a)$	1	0	0
$P\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)$	1	1	0
$P(b)$	0	0	1

On a juste $4.\dfrac{(x-a).(x-b)}{(a-b)^2}$ au milieu pour que ce polynôme, nul en a et b vaille 1 juste au milieu.

On calcule alors la dernière intégrale : $4.\displaystyle\int_a^b \dfrac{(x-a).(x-b)}{(a-b)^2}.dx$ par parties

$(x-a)$	$\hookrightarrow$	1
$(x-b)$	$\hookleftarrow$	$(x-b)^2/2$

$P(X)$	$\dfrac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$	$4.\dfrac{(x-a).(x-b)}{(a-b)^2}$	$\dfrac{(x-a).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$
$\displaystyle\int_a^b P(t).dt$	$\dfrac{b-a}{6}$	$\dfrac{4.(b-a)}{6}$	$\dfrac{b-a}{6}$

On nous a donné P. On considère alors
$Q = x \longmapsto \alpha.\dfrac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2} + \gamma.4.\dfrac{(x-a).(x-b)}{(a-b)^2} + \beta.\dfrac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$.
C'est aussi un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
Et il vérifie $Q(a) = \alpha = P(a)$, $Q(b) = \beta = P(b)$ et $Q\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big) = \gamma = P\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)$.
La différence $P-Q$ est nulle en trois points. Elle est nulle partout (polynôme ayant plus de racines que son degré).
On a donc en fait $P = Q$.
On résume avec Joseph-Louis Lagrange : $P(x) = \alpha.\dfrac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2} + \gamma.4.\dfrac{(x-a).(x-b)}{(a-b)^2} + \beta.\dfrac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}$.
On intègre alors $P(x) = \alpha.\displaystyle\int_a^b \dfrac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}.dx + \gamma.\int_a^b 4.\dfrac{(x-a).(x-b)}{(a-b)^2}.dx + \beta.\int_a^b \dfrac{(x-b).(2.x-a-b)}{(a-b)^2}.dx$.

Les calculs sont déjà faits : $\displaystyle\int_a^b P(x).dx = \dfrac{F(a) + 4.P\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big) + P(b)}{6}.(b-a)$
Formule valable pour tous les polynômes de degré 2.

On note que la valeur moyenne de P est alors $\dfrac{F(a) + 4.P\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big) + P(b)}{6}$.
Quand le polynôme est de degré inférieur ou égal à 2, il suffit de le connaître aux deux extrémités de l'intervalle et au milieu pour pouvoir le connaître partout et même l'intégrer...

◦56◦

♡Combien existe-t-il de polynômes de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant $P(1) = 2$, $P(2) = 2$ et $P(3) = 6$?
Combien existe-t-il de polynômes de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant $P(1) = 2$, $P(2) = 2$ et $P(3) = 6$?

On suit la démarche de Joseph Louis Lagrange :

	valeur en 1	valeur en 2	valeur en 3	
$(X-2).(X-3)$	2	0	0	oui
$(X-1).(X-3)$	0	-1	0	
$-2.(X-1).(X-3)$	0	2	0	oui
$(X-1).(X-2)$	0	0	2	
$3.(X-1).(X-2)$	0	0	6	oui
$(X-2).(X-3)$ $-2.(X-1).(X-3)$ $+3.(X-1).(X-2)$	2	2	6	

Le polynôme $\boxed{2.X^2-6.X+6}$ est une solution.
Est ce la seule ?

Si on écrit sur la base canonique $a.X^2+b.X+c$ on un système de trois équations à trois inconnues. Il semble logique qu'il n'y ait qu'une solution.

Sinon, soient P_1 et P_2deux solutions. On a alors P_1-P_2 qui est de degré inférieur ou égal à 2, nul en 1, en 2 et en ″. Pas le choix, ce polynôme est nul. la solution et tu niques.

Ayant un polynôme de degré 2 qui convient, on lui ajoute $(X-1).(X-2).(X-3)$ (ou même m\lambda.(X-1).(X-2).(X-3)) et on a encore les mêmes valeurs en 1, 2 et 3. On a donc une infinité de solutions : $\boxed{2.X^2-6.X+6+\lambda.(X-1).(X-2).(}$

◦57◦

♣ Montrez que $n\longmapsto 2^n$ de $\mathbb{F}_7$ dans lui même peut s'écrire sous forme d'un polynôme.
La notation $\mathbb{F}_7$ c'est le corps modulo 7.

Il y a si peut d'éléments qu'on peut calculer toutes les images.

n	0	1	2	3	4	5	6
2^n	1	2	4	1	2	4	1

Les images des sept éléments sont connues, on peut construire de toutes pièces le polynôme.
Il suffit de faire appel à Lagrange.
La formule explicite sera laide.