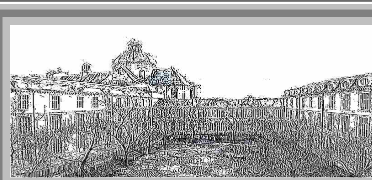
LYCEE CHARLEMAGNE

Lundi 29 janvier

M.P.S.I.2



2023 2024

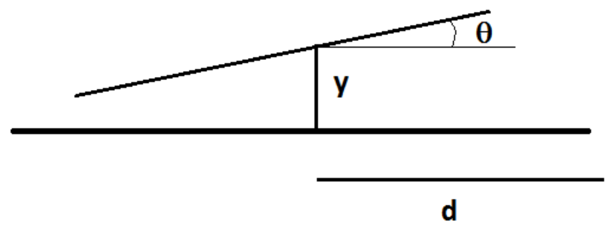
TD17

$\circ 0 \circ$ Montrez que pour tout x réel, les deux suites $\left(\dfrac{[10^n.x]}{10^n}\right)$ et $\left(\dfrac{[10^n.x]+1}{10^n}\right)$ encadrent x et convergent vers x.
Soit f une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$. Montrez $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

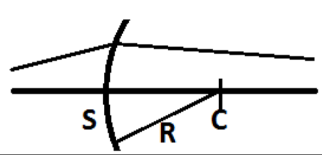
$\circ 1 \circ$ ♣ Ayant appris qu'avec la formule de Taylor appliquée au logarithme entre 1 et 2, on obtenait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge vers $\ln(2)$, un élève écrit sans se méfier
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \ldots$ puis mélange en
$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{16} + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{18}\right) - \ldots$
Qu'obtient il ?

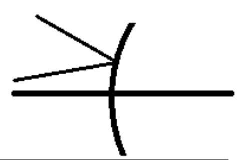
$\circ 2 \circ$ ♡ Calculez $\displaystyle\int_a^b 2^t.dt$ en passant par la limite des sommes de Riemann.
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n}\right).\frac{b-a}{n} \longrightarrow_{n\to+\infty} \int_a^b f(t).dt$ pour f continue.

$\circ 3 \circ$



En optique géométrique, quand les angles sont petits, on fait l'approximation $\sin(\theta) \simeq \tan(\theta) \simeq \theta$. Les équations deviennent alors linéaires en θ. On peut donc tout traduire matriciellement. Un rayon passant par un point I est alors décrit par une ordonnée y et un angle « homogénéisé » : $\begin{pmatrix} y \\ n.\theta \end{pmatrix}$ (où n est l'indice du milieu).
Justifiez alors que les phénomènes suivants son traduits par les actions des matrices suivantes $\begin{pmatrix} y_1 \\ n.\theta_1 \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} y_0 \\ n.\theta_0 \end{pmatrix}$





translation dans un milieu homogène	$\begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
réfraction à travers un dioptre sphérique	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}$
réflexion sur un miroir sphérique	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2.n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}$

Je croyais que la traversée d'un dioptre plan avec changement d'indice utilisait $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_2/n_1 \end{pmatrix}$. Pourquoi ai-je tort ?
Justifiez que n est algébrique *(c'est à dire qu'il a un signe ! on tient compte du sens dans lequel on avance)*.

Montrez qu'il n'y a plus qu'à multiplier ces matrices entre elles.
Justifiez qu'on peut toujours remonter le trajet inverse *(d'ailleurs, qui sont les inverses de ces matrices ?)*

$\circ 4 \circ$ Dérivez $a \longmapsto \displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}.dx$, puis calculez $\displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}.dx$ et $\displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{Atan(x)}{x}.dx$ pour tout a.
Pensez à écrire $\displaystyle\int_{u(a)}^{v(a)} f(t).dt$ sous la forme $F(v(a)) - F(u(a))$ pour pouvoir dériver en fonction de a.

$\circ 5 \circ$ ♡ Trente pour cent des élèves de cette classe sont des filles. Quarante pour cent des filles ont pris SI Hard, trente-cinq pour cent ont pris SI Light, la fille/les filles qu'il reste a/ont pris Info. Trente pour cent des garçons ont pris SI Hard, cinquante pour cent ont pris SI Light, le reste a pris Info. Vous tirez un élève au hasard parmi les SI Hard. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

◦6◦

DEPHASAGES

Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un réel, on pose $\tau_a(f) = x \longmapsto f(x+a)$.

I∼0) Qui est τ_0 ? Montrez : $\tau_a \circ \tau_b = \tau_b \circ \tau_a = \tau_{a+b}$ pour tout couple $(a,\ b)$ de réels.

I∼1) Explicitez $\tau_a(\cos)$ à l'aide de cos et sin.
Attention, ce sont des questions de mathématiques, et pas juste de calcul. Surveillez vos variables, ne vous trompez pas d'étages, et comprenez tout de suite pourquoi si vous écrivez $\tau_a(f(x))$ votre copie ne sera pas corrigée.

I∼2) On pose $\gamma = x \longmapsto x^3$. Représentez graphiquement sur un même graphe $\tau_k(\gamma)$ pour k de 0 à 3. Trouvez les α_k vérifiant $\tau_4(\gamma) = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k.\tau_k(\gamma)$.

On dit que f est d'ordre n si il existe n réels a_1 jusqu'à a_n vérifiant que pour tout u, $\tau_u(f)$ soit une combinaison linéaires de $(\tau_{a_1}(f), \dots \tau_{a_n}(f))$.

II∼0) Montrez que l'exponentielle est d'ordre 1.

II∼1) Pour montrer que l'identité est d'ordre 1, l'élève Hursafé-Leuvailpin écrit $(x+\alpha) = (1-\alpha).x + \alpha.(x+1)$. Il me semble qu'il a compris. A vous de rédiger proprement à sa place.

II∼2) Montrez que $x \longmapsto x^2$ est d'ordre 3.

II∼3) Qui sont les applications d'ordre 0 ?

II∼4) Montrez que le cosinus et le sinus sont toutes deux d'ordre 2.

II∼5) De quel ordre est $x \longmapsto e^x.\cos(x)$?

II∼6) Montrez que la valeur absolue n'est pas d'ordre n *(et ce, quel que soit n)*.

II∼7) Soient s et p deux réels. Montrez que si f vérifie $\forall t,\ f''(t) - s.f'(t) + p.f(t) = 0$ alors elle est d'ordre inférieur ou égal à 2.

II∼8) Soient s, d et p trois réels. On suppose que f vérifie $f^{(3)} - s.f''(t) + d.f' - p.f = 0$. Montrez que chaque $\tau_a(f)$ vérifie encore la même équation. Déduisez que f est alors d'ordre inférieur ou égal à 3.

III∼0) Soit f une application dérivable d'ordre 2 *(il existe a et b tels que chaque $\tau_h(f)$ soit combinaison de $\tau_a(f)$ et $\tau_b(f)$)*. Montrez : $\exists(\alpha_0,\ \beta_0) \in \mathbb{R}^2,\ f = \alpha_0.\tau_a(f) + \beta_0.\tau_b(f)$.

III∼1) Montrez : $\exists(\alpha_1,\ \beta_1) \in \mathbb{R}^2,\ f' = \alpha_1.\tau_a(f) + \beta_1.\tau_b(f)$.

III∼2) Montrez : $\exists(\alpha_2,\ \beta_2) \in \mathbb{R}^2,\ f'' = \alpha_2.\tau_a(f) + \beta_2.\tau_b(f)$.

III∼3) Éliminez $\tau_a(f)$ et $\tau_b(b)$ et déduisez que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

On a démontré ici en petite dimension un résultat :

une application f est d'ordre n pour les translations si et seulement si elle est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants.

Il fait l'objet d'un exercice d'oral de Concours en pas trop de lettres *(X, E.N.S. ou Mines, je ne sais plus lequel)*.

◦7◦ Montrez que $\begin{vmatrix} 20 & 8 & 12 & 34 \\ 15 & 3 & 9 & 27 \\ 35 & 44 & 71 & 17 \\ 70 & 9 & 0 & 41 \end{vmatrix}$ est un multiple de 30 (exercice sur le développement de déterminant en ligne/colonne).

Quel est le coefficient de 35.9.12.27 ?

◦8◦ ♡ Si A est une matrice à coefficients complexes a_i^k, on note $\overline{A}$ la matrice de terme général $\overline{a_i^k}$ *(conjugué)*. Montrez : $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$. Montrez que $Tr({}^tA.\overline{A})$ est un réel positif. Que pouvez vous dire si il est nul ?

◦9◦ Soit A une matrice à coefficients entiers, dont les termes diagonaux sont impairs et les termes hors de la diagonale pairs *(ceux ci peuvent donc être nuls)*. Montrez que le déterminant de A est impair. Déduisez que A est inversible.
Vous pouvez commencer par traiter l'exercice en taille 2 ou 3.
Mais sinon, pensez à travailler modulo 2, dans la matrice elle même...

◦10◦ On prend l'ensemble des entiers de 1 à 28 pour la multiplication modulo 29 *(on rappelle que c'est un groupe, donnez la liste des inverses si vous en avez le courage)*.
Montrez que $\{7^k \mid 0 \leqslant k \leqslant 6\}$ en est un sous-groupe. Est-ce encore le cas pour $\{2^k \mid 0 \leqslant k \leqslant 6\}$?
Montrez que $\{12^k \mid 0 \leqslant k \leqslant 3\}$ en est un sous-groupe. Est-ce encore le cas pour $\{2^k \mid 0 \leqslant k \leqslant 3\}$?
Montrez que $\{5^k \mid 0 \leqslant k \leqslant 13\}$ en est un sous-groupe. Est-ce encore le cas pour $\{2^k \mid 0 \leqslant k \leqslant 13\}$?
Bon, quelle valeur de q faut il prendre pour que $\{2^k \mid 0 \leqslant k \leqslant q\}$ soit un sous-groupe de l'ensemble initial ?
Quelle est la probabilité que vous ayez eu envie de traiter cet exercice si vous avez le profil à aller en P.S.I. avec ou sans étoile ?

◦11◦ ♣ Calculez $\prod_{k=2}^{2015} \left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)}$ *(les crochets désignent la partie entière)*.

◦12◦ La classe est faite de n élèves dont vous avez la liste. Comparer la date de naissance de deux élèves vous prend une demi-seconde. Indiquez en fonction de n le temps qu'il vous faudra pour savoir si il existe deux élèves ayant la même date de naissance.
La classe est faite de n élèves dont vous avez la liste. Comparer la date d'anniversaire de deux élèves vous prend un tiers de seconde. Indiquez en fonction de n le temps qu'il vous faudra pour savoir si il existe deux élèves ayant la même date d'anniversaire.

◦13◦ Soit $(G, .)$ un groupe où tout élément vérifie $x * x = 1$ (le neutre). Montrez que $(G, *)$ est commutatif.
(pensez à calculer $(a * b) * (a * b)$ et l'exercice devient ♡).

◦14◦ ♡ Montrez que l'ensemble des matrices carrées de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec a et b réels est un sous-anneau de $(M(\mathbb{R}), +, .)$.
Est il commutatif ? Trouvez les élément de carré I_2 (résolvez $M^2 = I_2$).
Trouvez les élément de carré $-I_2$ (résolvez $M^2 = -I_2$).
Montrez que l'ensemble des matrices carrées de la forme $\begin{pmatrix} z & -\overline{h} \\ h & \overline{z} \end{pmatrix}$ avec z et h complexes est un sous-anneau de $(M(\mathbb{C}), +, .)$.
Est il commutatif ? Trouvez les élément de carré I_2 (résolvez $M^2 = I_2$).
Trouvez les élément de carré $-I_2$ (résolvez $M^2 = -I_2$).

◦15◦ On rappelle qu'un individu a en moyenne cent trente cinq mille cheveux sur la tête *(davantage pour les roux)*. Durant les deux heures d'un devoir, quelle longueur totale de matière "cheveu" allez vous produire tous ensemble *(je ne compte pas)*.

◦16◦ Complétez avec vrai/faux et d'éventuels contre-exemples

ensemble	loi	interne	commutative	associative	existence de neutre (droite/gauche)	symétriques
$\mathbb{R}$	$a * b = a \times \lvert b \rvert$					
$\mathbb{C}$	$a \odot b = b$					
$\mathbb{R}$	$a \otimes b = a + b + a.b$					

∘17∘

			5083
			66
			665
1311	1309	130	

2	3	5	7
11	13	17	19
23			

A droite, neuf nombres. Placez les dans les cases du tableau pour que les produits indiqués en ligne et en colonne soient corrects.

∘18∘ ♡ Trouvez une primitive de $t \longmapsto e^{a.t}.\cos(t)$ en intégrant par parties.
Vérifiez que $t \longmapsto e^{(a+i.b).t}$ se dérive bien en $t \longmapsto (a+i.b).e^{(a+i.b).t}$.
Trouvez une primitive de $t \longmapsto e^{a.t}.2.\cos(t)$ en l'écrivant $t \longmapsto e^{(a+i.).t} + e^{(a-i.t)}$.

∘19∘ Voici une table de vérité. Mais j'ai oublié des choses, comme « quelle colonne est a, quelle colonne est b et quelle colonne est c ». Complétez.

			a et $\overline{b \Rightarrow c}$	$a \Rightarrow (\bar{b} \Rightarrow c)$
0	0	0	0	
0	0	1		
0	1	1		1
0	1	0	0	
1	1	0	1	
1	0	0	0	
1	0	1		
1	1	1	0	

∘20∘ On rappelle

ou_e	*True*	*False*
True	*False*	*True*
False	*True*	*False*

Complétez les tables de vérité :

a	b	c	a ou_e b	$(a$ ou_e $b)$ ou_e c	a ou_e $(b$ ou_e $c)$	$(a$ ou_e $b)$ et c	$(a$ et $c)$	$(b$ et $c)$	$(a$ et $c)$ ou_e $(b$ et $c)$
False	*False*	*False*							
False	*False*	*True*							
False	*True*	*True*							
False	*True*	*False*							
True	*True*	*False*							
True	*False*	*False*							
True	*False*	*True*							
True	*True*	*True*							

Qu'avez vous prouvé (deux propriétés à nommer).

∘21∘ Calculez $\left(x \longmapsto \dfrac{x^4.\ln(x)}{4!}\right)^{(4)}$. Trouvez f vérifiant $f^{(4)} = \ln$ et $f^{(k)}(1) = 0$ pour tout k de 0 à 4.
Et pour $f^{(n)} = \ln$ et $f^{(k)}(1) = 0$ pour tout k de 0 à n ?

∘22∘ Dans un devoir de physique (pas cette année, vous êtes bons ☺), des élèves ont écrit $\dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.
SCT m'en a parlé beaucoup en salle des profs.
J'ai tenté de les sauver en trouvant des exemples où ça marche quand même...
Trouvez une solution dans $\mathbb{C}$. Et des solutions dans range(13) pour les opérations modulo 13.

∘23∘ Complétez $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ avec des coefficients entiers sachant que son carré est $11.I_2$ et son déterminant -11. Combien de solutions ?

∘24∘ Pour tout p au moins égal à 2 on pose $\zeta(p) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ (existence ?).

Montrez $\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty} (\zeta(p) - 1) = 1$.

∘25∘ Un entier naturel p supérieur ou égal à 2 est dit jovial s'il existe une liste d'entiers naturels entiers
$2 \leqslant k_0 < k_1 < \ldots < k_{n-1} = p$ vérifiant $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{k_i} = 1$. Par exemple : 12 est jovial d'ordre 4 car $1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12}$.

Écrivez un script testeur de jovialité qui prend en entrée une suite d'entiers `L` et vérifie si les entiers plus grands que 2 vont en croissant et ont pour somme de leurs inverses 1. La procédure devra retourner `False, 0` si il y a une erreur, et `True, p` où p est le dernier terme de la liste *(le nombre jovial)* si tout va bien.

```
S=0
for i in L :
....S += 1/i
if S==1 :
```

Comme on est en maths, il ne faudra pas se baser sur un calcul approché qui de toutes façons ne pourra pas être probant comme ci contre. Je rappelle que pour Python, 1/2+1/3+1/6 vaut 0.99999999999. Quel farceur ce serpent !
Par exemple, `TestJovial([2, 4, 6, 12])` doit donner « `True, 12` », donc 12 est jovial.

♣ 0 ♣ Montrez que 24 est jovial d'ordre 5. Montrez que 156 (c'est 12.13) est jovial d'ordre 5.

♣ 1 ♣ Montrez qu'aucun nombre premier n'est jovial.

♣ 2 ♣ On note J l'ensemble des nombres joviaux. Donnez $Min(J)$ *(justifiez)*.

♣ 3 ♣ On doit montrer que J est stable par multiplication ; un élève propose le raisonnement suivant : on part de $\frac{1}{k_0}+\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{p}=1$ (n termes) et $\frac{1}{h_0}+\frac{1}{h_1}+\ldots+\frac{1}{q}=1$ (m termes), on effectue le produit et on réordonne les nombres aux dénominateurs $\frac{1}{k_0.h_0}+\ldots+\frac{1}{p.q}=1$ ($n.m$ termes), le dernier entier de la liste est jovial. Où est l'erreur ?

♣ 4 ♣ Montrez que si p est jovial alors $2.p$ et $p.(p+1)$ le sont aussi.

∘26∘ ♡ On rappelle la définition du déterminant d'une matrice A de terme général a_i^k : $\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).(a_1^{\sigma(1)}\ldots a_n^{\sigma(n)})$.
A-t-on $\det(-A)=\det(A)$?
Montrez que le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des termes diagonaux.
Quel est le coefficient de chacun des termes suivants dans le déterminant d'une matrice de taille 6 :

$a_1^2.a_2^3.a_3^4.a_4^5.a_5^6.a_6^1$	$a_1^6.a_2^5.a_3^4.a_4^3.a_5^2.a_6^1$	$a_1^3.a_2^4.a_3^2.a_4^1.a_5^6.a_6^5$	$a_1^3.a_3^4.a_5^2.a_6^1.a_2^6.a_4^5$	$a_1^3.a_2^2.a_3^4.a_4^6.a_5^5.a_6^1$

En taille n, quel est le coefficient de $a_1^n.a_2^{n-1}\ldots a_{n-1}^2.a_n^1$.

Calculez $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ en utilisant la définition avec ses 24 termes *(dont plusieurs seront nuls)*.

∘27∘ Calculez ces trois sommes $I_n=\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n} i$, $J_n=\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n} j$ et $K_n=\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n} k$ et écrivez le script Python qui vous permettra de vérifier..

∘28∘ ♡ Calculez $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$. Vous avez ensuite le droit d'augmenter ou diminuer un des coefficients d'une unité. Est il possible que le déterminant ne change pas ?
Quel coefficient changez vous pour que le déterminant bouge le plus possible ?

∘29∘ Calculez $\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2.n-1}{k}}$ et $\sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\Big)$.

∘30∘ On pose : $U_n=\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{\ln(k+3)}{k.\sqrt{k}}\Big)$ pour tout n. Chargé d'étudier la monotonie de cette suite, un élève calcule : $\frac{U_{n+1}}{U_n}=1-\frac{\ln(n+4)}{(n+1).\sqrt{n+1}}$. Il constate que ceci est plus petit que 1. Il écrit alors "la suite U_n décroit". Prouvez qu'il a raison. Mais pourquoi l'élève qui dit que U croît a raison aussi ?

∘31∘ On travaille avec les entiers de 0 à 16 pour l'addition et la multiplication modulo 17.

Complétez

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
inverse de a	*	*	*	13	*		5			*		*	*	*	*	*

Complétez $\begin{pmatrix} 2 & 4 & * \\ 1 & * & 3 \\ * & 1 & * \end{pmatrix}$ pour que ce soit l'inverse de $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 15 & 5 & 16 \\ 16 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculez le déterminant de $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 15 & 5 & 16 \\ 16 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ en utilisant la formule $\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}\dots a_n^{\sigma(n)}$.

Résolvez l'équation $\left\{\begin{array}{rrrcl} 7.a & +2.b & +2.c & = & 2 \\ 15.a & +5.b & +16.c & = & 1 \\ 16.a & +2.b & & = & 4 \end{array}\right|$.

∘32∘ ♡ Montrez : $\det(M^2+I_2)\geqslant 0$ pour toute matrice M de $M_2(\mathbb{R})$.
Conseil : $\det(M+i.I_2)$ et $\det(M-i.I_2)$.

∘33∘ ♡ Montrez que $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes, mais que ni leur somme, ni leur produit ne l'est.

Rappel : une matrice A carrée de taille n est dite nilpotente s'il existe un entier naturel k vérifiant $A^k=0_n$.
Montrez que si A et B sont deux matrices nilpotentes carrées de taille n permutables (ce que vous appelez "qui commutent", c'est à dire vérifiant $A.B=B.A$) alors $A.B$ et $A+B$ sont nilpotentes (pourquoi pouvez vous supposer $A^p=B^p=0_n$ pour le même indice p ?).

∘34∘ Qui c'est $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[2.n,\ 3.n]$?

∘35∘ On sait $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & * \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 8 \end{pmatrix}$. Retrouvez ce qui manque *(détail : on travaille avec les entiers de 0 à 10 pour l'addition et la multiplication modulo 11).*

∘36∘ ♣♡ Calculez cette somme étrange $(-1)^{\sum_{k=1}^{20}(-k)^k}$.

∘37∘ Un élève prétend que si A et B sont deux matrices carrées de taille n alors on a $\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A^2+B^2)$.
Montrez par un contre-exemple simple pour n égal à 2 qu'il a tort. Montrez qu'en revanche, son résultat est vrai si $A.B$ est égal à $B.A$ *(on pourra utiliser les matrices $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ i.I_n & I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ i.I_n & I_n \end{pmatrix}$ de part et d'autre)* . Montrez que si A et B sont réelles, qu'elles « commutent » ou non, on a quand même $\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^+$.

∘38∘ Montrez que D est réel *(il vaut d'ailleurs 39, mais je ne vous recommande pas de le calculer, juste de prouver qu'il est réel).*

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1+i & 1-2.i & 3-i \\ 1-i & 2 & i & 2-i \\ 1+2.i & -i & 0 & 1+3.i \\ 3+i & 2+i & 1-3.i & 4 \end{vmatrix}$$

∘39∘ Le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ (notée A) vaut 7 quel que soit a. Trouvez b.

Et donnez les coefficients de A^{-1} qui ne dépendant pas de a.

∘40∘ On pose $U=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Montrez que $\{M\in M_2(\mathbb{R})\mid \exists\lambda\in\mathbb{R},\ M.U=\lambda.U\}$ est un espace vectoriel. Donnez en une base et la dimension.

∘41∘ On pose $u_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}$ et $v_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{2.n}}}}}$.

Montrez : $v_n-u_n\leqslant\dfrac{n}{2^{n-1}.\sqrt{(n-1)!}}$ *(conjuguez, conjuguez il en restera quelque chose).*
Déduisez que (u_n) et (v_n) forment un couple de suites adjacentes.
Écrivez un script `Python` qui pour ε donné calcule leur limite commune à ε près.

∘42∘ Deux applications f et g sont dites conjuguées si il existe un homéomorphisme h vérifiant $f=h\circ g\circ h^{-1}$. Montrez

que cette relation est une relation d'équivalence *(oui, ça fait penser à $P.D.P^{-1}$)*.
Montrez que les applications constantes sont toutes conjuguées entre elles.
Qui sont les applications conjuguées à Id ?
Montrez que $x \longmapsto 2.x$ est conjuguées à $x \longmapsto 8.x$.
♠ Montrez que sin et cos ne sont pas conjuguées.

∘43∘ Complétez la permutation suivant pour que sa signature vaille -1 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & * & 4 & * \end{pmatrix}$. Pouvez vous alors la décomposer à l'aide de $\overrightarrow{1\,2\,3}$ et $\overrightarrow{2\,3\,4}$?
Et si on impose "signature égale à 1" ?

∘44∘ ♡ Pouvez vous construire un triangle dont les sommets sont des points du quadrillage (=coordonnées entières) et dont l'aire vaut 2019 ? Pouvez vous construire un triangle dont les sommets sont des points du quadrillage et dont l'aire vaut $20,19$?

«Pourquoi la terre tourne ?
- Parce qu'elle est ronde !
- Alors, pourquoi est elle ronde ?
- Mais... Parce qu'elle tourne !»
Jacques Prévert.

∘45∘ Dérivez $x \longmapsto \begin{vmatrix} 15 & 2 & 3 \\ x & 25 & 13 \\ 18 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

∘46∘ Donnez sous forme factorisée $\sum_{k=n+1}^{2.n} (k^3 - 4.k)$ et $\Big(\sum_{k=n+1}^{2.n} k\Big).\Big(\sum_{k=n+1}^{2.n} (k^2-4)\Big)$.

∘47∘ Montrez que $\begin{vmatrix} a & 5 & 1 \\ 9 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4\;1 & 3 & 5 \\ 6\;1 & 5 & 7 \\ 0\;1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ ne pourront jamais être nuls.

∘48∘ Écrivez un script Python qui prend en entrée un entier n et crée la matrice de format n sur n(liste de listes) correspondant aux exemples suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Et demandez au matheux en vous de calculer le déterminant en taille n.

∘49∘ En développant de deux façons $(1+X)^p.(1+X)^q$, simplifiez $\sum_{i+j=k} \frac{p!.q!}{i!.j!.(p-i)!.(q-j)!}$.
Effectuez les produits matriciels suivants et calculez leurs déterminants

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

∘50∘ ♡ Quel est le coefficient de $a^{2000}.b^0.c^{10}.d^9$ dans $(a+b+c+d)^{2019}$?

∘51∘ Montrez $(1+x^2).Arctan^{(n+1)}(x) + 2.n.x.Arctan^{(n)}(x) + n.(n-1).Arctan^{(n-1)}(x) = 0$ pour tout x réel et tout n au moins égal à 2 *(indication : $(1+x^2).Arctan'(x) = ?$)*.

∘52∘ ♡ On pose $f = x \longmapsto x^3.e^{2.x}$. Calculez rapidement $f^{(n)}(1)$.

∘53∘ Calculez $\sum_{n=0}^{2017} \Big(\sum_{k=0}^{n} z^k\Big)$ pour tout complexe z différent de 1.

∘54∘ ♡ Résolvez $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ a & 5 & 6 \\ b & 6 & 5 \end{vmatrix}$ d'inconnues réelles a et b.

∘55∘ ♡ Pouvez vous choisir a pour que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 3 & 3 \end{pmatrix}$ soit inversible pour tout b.

∘56∘ Résolvez $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 4 & 7 \\ x^3 & 4^3 & 7^3 \end{vmatrix} = 0$ (devrez vous développer ?).

∘57∘ ♡ Montrez que si $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto f(2+x)$ (notée g) sont impaires, alors f est périodique.

∘58∘ ♡ Je ne veux pas qu'elle soit inversible : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$. C'est jouable ?

∘59∘ ♡ Inversez $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & & 1 \end{pmatrix}$, après l'avoir complétée par un entier, sachant que son inverse est à coefficients entiers *(que vaut son déterminant ?)*. Oui, il y a deux solutions.

∘60∘ ♣ On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez son déterminant puis son inverse *(pensez à la voir comme matrice d'un changement de base)*.
Calculez $det(A + I_6)$.
♣ Quelles valeurs peut prendre $\det(A + I_6)$ quand A décrit l'ensemble des permutations de taille 6 ?
♣♠ Même question en taille n.

∘61∘ On sait que $\begin{pmatrix} -3 & 12 & -4 \\ 7 & & 10 \\ & -81 & \end{pmatrix}$ *(notée M)* a pour vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et pour valeur propre -3.
Calculez son déterminant. Diagonalisez la.

∘62∘ Déterminez la somme des chiffres de $45 \times 999...99$ *(il y a 45 chiffres 9)*.

∘63∘ On donne $Card(A) = 10$, $Card(B) = 15$, $Card(C) = 20$, $Card(A \cap B) = 7$, $Card(A \cap C) = 9$ et $Card(B \cap C) = 8$. Pouvez vous déduire la valeur de $Card(A \cup B \cup C)$? Pouvez vous encadrer la valeur de $Card(A \cup B \cup C)$?

∘64∘ ♡ On sait : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ et $Com(A) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & 3 \\ 2 & -1 & \end{pmatrix}$. Retrouvez les coefficients qui manquent.

∘65∘ Rappel : on inverse les matrices carrées en calculant leur comatrice : $M^{-1} = \dfrac{{}^tCom(M)}{\det(M)}$ où la comatrice est la matrice des cofacteurs pondérés.

Utilisez cette méthode pour inverser $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ en calculant déjà sa comatrice (attention aux signes devant les comatrices) et le produit $M.{}^t(Com(M))$.

∘66∘ La comatrice d'une matrice antisymétrique inversible est antisymétrique. La preuve :
${}^t(Com(A)) = \det(A).A^{-1}$ donc
$Com(A) = {}^t(\det(A).A^{-1}) = \det(A).{}^t(A^{-1}) = \det(A).({}^tA)^{-1} = \det(A).(-A)^{-1} = -\det(A).A^{-1} = -Com(A)$
Et pourtant, il suffit d'une matrice de taille 3 pour avoir un contre-exemple. Alors ?

∘67∘ ♡ Complétez, sachant que cette matrice a un déterminant réel : $\begin{pmatrix} 1+i & 1 & 2 & 1 \\ 1 & & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.