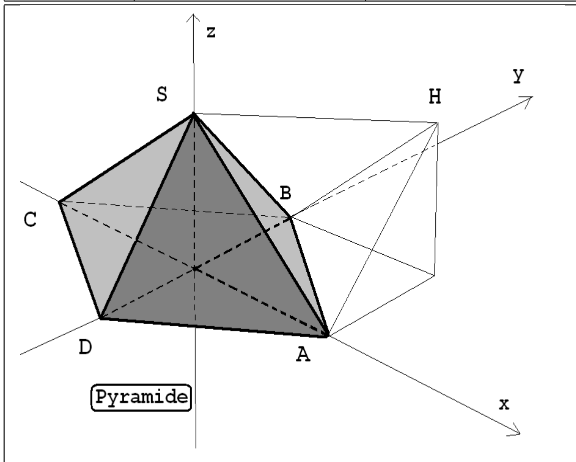
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 5 février
M.P.S.I.2

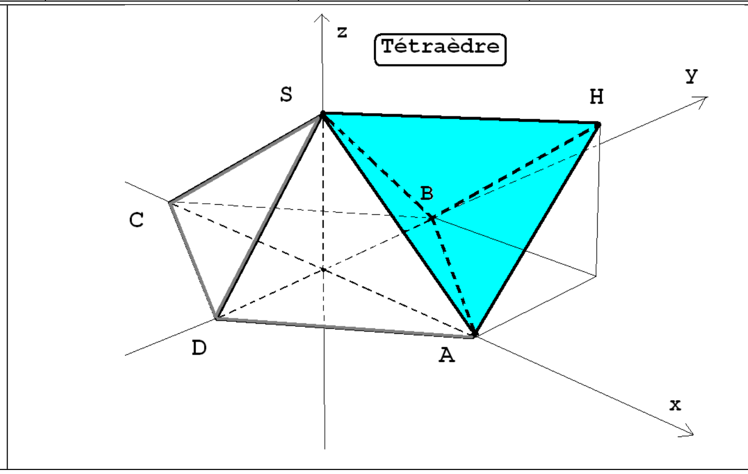
2023 2024

TD18

∘0∘ ♡♣ **La pyramide et le tétraèdre.** On définit :

A	B	C	D	S	H
$(1,\ 0,\ 0)$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 0)$	$(0,\ -1,\ 0)$	$(0,\ 0,\ 1)$	$(1,\ 1,\ 1)$





Montrez que $(A,\ B,\ C,\ D,\ S)$ est une pyramide à base carrée et à faces équilatérales *(nombre de faces ?)*.

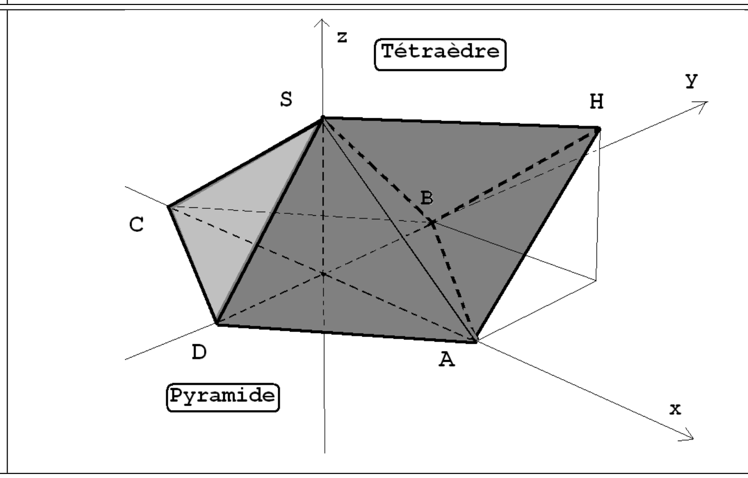
.

Montrez que $(A,\ B,\ S,\ H)$ est un tétraèdre régulier "posé sur une face de la pyramide" *(nombre de faces ?)*.

.

Montrez que A, D, S et H sont coplanaires.
Combien de faces a le solide formé de tous nos points ?

.



∘0∘ ♡ Le colleur demande de calculer le déterminant $\begin{vmatrix} \cos(2.a) & \cos(a+b) & \cos(a+c) & \cos(a+d) \\ \cos(a+b) & \cos(2.b) & \cos(b+c) & \cos(b+d) \\ \cos(c+a) & \cos(c+b) & \cos(2.c) & \cos(c+d) \\ \cos(d+a) & \cos(d+b) & \cos(d+c) & \cos(2.d) \end{vmatrix}$. Après un calcul un peu long, l'élève P.Céhessi trouve 0.
L'élève M.Péhaiçi bougonne "coplanaires dans $\mathbb{R}^4$". Expliquez.

∘1∘ Une forme bilinéaire antisymétrique sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$ vérifie $\phi(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) = 4$ et $\phi(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{k}) = 10$.
Pouvez vous calculer $\phi(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$?
Et si je vous donne $\phi(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) = 8$?

∘2∘ On va étudier les matrices antisymétriques (${}^tA = -A$) et aller en direction du résultat : le déterminant d'une matrice réelle antisymétrique est le carré d'une formule en les coefficients de la matrice (le Pfaffien). Les questions sont largement issues d'une épreuve de Polytechnique-ESPCI, filière P.C. de 2003 (quel âge aviez vous ?)[1]

1. n'allez pas aux toilettes avec votre smartphone pour essayer de récupérer le corrigé, j'ai modifié l'intitulé et le déroulement des questions à ma façon, et viré les parties difficiles.

I$\sim$0) On se fixe un entier n qui pourra le temps de quelques questions prendre une valeur imposée. On note E_i le i^{eme} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ *(n composantes nulles sauf la i^{eme} qui vaut* 1*)*. On note A_n l'espace des matrices antisymétriques de taille n sur n *(rappel : ${}^tA = -A$)*. Montrez que c'est un espace vectoriel pour les lois usuelles, donnez sa dimension et donnez une base à l'aide des $E_i.{}^tE_j$ *(on ne demandera pas de prouver que c'est une base)*[2].

I$\sim$1) Montrez que le déterminant d'une matrice antisymétrique de taille impaire est forcément nul.

I$\sim$2) L'élève A dit que le produit de deux matrices antisymétriques est symétrique, et B dit que le produit de deux matrices antisymétriques est antisymétrique. Mettez les d'accord. *Cette question n'était pas dans le sujet de Polytechnique.*

I$\sim$3) Est il vrai que les matrices antisymétriques de taille 2 forment un supplémentaire[3] de l'ensemble des matrices de trace nulle ? Pouvez vous donner dans $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ un sous-espace vectoriel qui soit à la fois supplémentaire de l'ensemble des matrices symétriques, mais aussi de l'ensemble des matrices de trace nulle ?

I$\sim$4) Montrez que le déterminant d'une matrice antisymétrique de taille 2 est le carré de la forme linéaire $A \longmapsto {}^t E_1.A.E_2$.

II$\sim$0) On définit : $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{pmatrix}$. Montrez qu'elles ont le même déterminant. Calculez $A.B$ et déduisez que $\det(A)$ est le carré d'une application sur les coefficients de A que vous préciserez *(attention, ne pas oublier un détail)*.

II$\sim$1) On définit le script suivant

```
def Mystere(L) :
....n = len(L)
....if n % 2 == 0 :
........return 0
....M = [[0 for k in range(n+1)] for i in range(n+1)]
....for i in range(n) :
........M[i][i+1] = L[i]
........M[i+1][i] = -L[i]
....return M
```

Montrez qu'il définit une matrice antisymétrique, et calculez son déterminant.

II$\sim$2) Soit D_n une matrice diagonale de taille n sur n ; calculez en fonction du déterminant de D_n le déterminant de la matrice de taille $2.n$ par blocs : $\begin{pmatrix} 0_{n,n} & -D_n \\ D_n & O_{n,n} \end{pmatrix}$.

II$\sim$3) Soit A une matrice antisymétrique, on suppose que A^2 est nulle. Montrez que A est nulle *(indication qui n'était pas dans le sujet : calculez ${}^t(A.E_i).(A.E_i)$ pour tout i)*.

III$\sim$0) Dans cette partie, A est une matrice réelle antisymétrique vérifiant $A^2 + I_n = 0$. Montrez que n est pair (on posera alors $n = 2.m$) et que A est inversible. Soit U un vecteur. A quelle condition $(U,\ A.U)$ est elle libre ?

III$\sim$1) On pose : $F = \{V \in \mathbb{R}^n \mid {}^tU.V = 0 \text{ et } {}^t(A.U).V = 0\}$. Montrez que F est un espace vectoriel, quelle est sa dimension. Montrez : $\forall V \in F,\ A.V \in F$.

III$\sim$2) Déduisez l'existence d'une famille de vecteurs $(U_1, \ldots U_m)$ telle que $(U_1, \ldots U_m, A.U_1, \ldots A.U_m)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs deux à deux orthogonaux, et normés.

2. essayez en taille 2 : $E_1.{}^t(E_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_1.{}^t(E_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tandis que $E_2.{}^t(E_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. attention, ne confondez pas supplémentaire et complémentaire : un supplémentaire de A dans E est un espace vectoriel tel que tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $(E, +, .)$ se décompose d'une façon unique comme somme d'un vecteur de A et d'un vecteur de B (exemples : l'axe imaginaire est supplémentaire de l'axe réel dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel)

L'orthogonalité de deux vecteurs V et W c'est ${}^tV.W = 0$. Un vecteur normé vérifie ${}^tV.V = 1$.

IV$\sim$0) Soit A une matrice antisymétrique. Montrez que $(U, V) \longmapsto^t U.A.V$ (notée ϕ^1_A) est une forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathbb{R}^n$.

IV$\sim$1) Une forme multilinéaire est dite alternée si elle donne 0 dès que deux vecteurs d'indices voisins sont égaux : $\forall i,\ U_i = U_{i+1} \Rightarrow \phi(U_1, \dots, U_i, U_{i+1}, \dots U_n) = 0$ *(ce n'est pas (encore) la même définition que dans le cours).*
Montrez alors que $\phi(U_1, \dots U_n)$ change de signe dès qu'on échange deux vecteurs d'indices voisins.

Montrez alors que $\phi(U_1, \dots U_n)$ est nul dès que deux vecteurs d'indices distincts sont égaux.

IV$\sim$2) On définit maintenant $\phi^2_A = (U_1, U_2, U_3, U_4) \longmapsto \phi^1_A(U_1, U_2).\phi^1_A(U_3, U_4) - \phi^1_A(U_1, U_3).\phi^1_A(U_2, U_4) + \phi^1_A(U_1, U_4).\phi^1_A(U_2, U_3)$. Montrez que c'est une forme quadrilinéaire alternée.

IV$\sim$3) On prend ici $n = 4$. Déduisez qu'il existe un réel $Pf(A)$ vérifiant
$\forall (U_1, \dots U_4) \in (\mathbb{R}^4)^4,\ \phi^2_A(U_1, \dots U_4) = Pf(A).\det(U_1, \dots U_4)$.

IV$\sim$4) Explicitez $Pf(A)$ à l'aide des coefficients de A.

V$\sim$0) On définit ensuite $\phi^3_A(U_1, \dots U_6) = \sum_{k=2}^{6} (-1)^k.\phi^1_A(U_1, U_k).\phi^2_A(U_2, \dots U_{k-1}, U_{k+1} \dots, U_6)$ *(la notation étant ambigüe, le premier terme de la somme est $\phi^1_A(U_1, U_2).\phi^2_A(U_3, U_4, U_5, U_6)$et le dernier est $\phi^1_A(U_1, U_6).\phi^2_A(U_2, U_3, U_4, U_5)$).* Montrez que c'est une forme hexalinéaire alternée.

V$\sim$1) On prend ici $n = 6$. Déduisez qu'il existe un réel $Pf(A)$ vérifiant
$\forall (U_1, \dots U_6) \in (\mathbb{R}^6)^6,\ \phi^3_A(U_1, \dots U_6) = Pf(A).\det(U_1, \dots U_6)$.

V$\sim$2) Soit A une matrice antisymétrique de taille 6 et M une matrice de taille 6. Montrez que ${}^tM.A.M$ est antisymétrique. Montrez $Pf({}^tM.A.M) = \det(M).Pf(A)$.

∘3∘ Pour tout entier naturel on pose : $f_n = x \longmapsto x^n.e^{1/x}$. Calculez $(f_n)^{(n+1)}$ pour n de 0 à 3. Émettez une conjecture. Montrez : $(f_{n+1})' = (n+1).f_n - f_{n-1}$. Démontrez votre résultat par récurrence sur n.

φ est une application de classe C^∞. Pour tout n on définit $h_n = x \longmapsto x^n.h\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Calculez $(h_n)^{(n+1)}$ en utilisant au bon moment la formule de Leibniz.

∘4∘ Calculez $(\sin^3)^{(10)}(0)$ et $(\sin^3)^{(11)}(0)$.

∘5∘ Montrez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.\ln(k)$ est équivalent à $\dfrac{n^2.\ln(n)}{2}$ quand n tend vers l'infini.

∘6∘ ♡ Calculez $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2).(p+q^2+1)}$ quitte à intervertir les deux sommes (familles sommables ?).

∘7∘ ♡ Complétez ce qui manque : $\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ \\ \end{pmatrix}$.

∘8∘ ♠ Comparez $\det(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}, \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b})$ et $\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ quand $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ *(une démonstration pourra utiliser la formule du double produit vectoriel).*

∘9∘ ♡ Dérivez cette application (comptez bien) $\left(x \longmapsto \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ x & 2 & 3 & 1 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right)'$.

∘10∘ De même qu'on peut développer un déterminant par rapport à une colonne faite de n termes avec chacun son cofacteur, il existe une formule où l'on développe par rapport à deux colonnes, somme de termes du type "déterminant de taille 2 fois déterminant de taille $n-2$". Combien de termes de ce type ?

Quel est le signe du terme $\begin{vmatrix} a^1_1 & a^2_1 \\ a^1_3 & a^2_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a^3_2 & a^4_2 & a^5_2 \\ a^3_4 & a^4_4 & a^5_4 \\ a^3_5 & a^4_5 & a^5_5 \end{vmatrix}$ dans le déterminant de taille 5 ?

∘11∘ ♡ Résolvez $(\overrightarrow{i}+\clubsuit.\overrightarrow{j}+\diamondsuit.\overrightarrow{k})\wedge\overrightarrow{u}=\overrightarrow{j}+3.\overrightarrow{k}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ sachant que $\overrightarrow{i}+3.\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ est une des solutions.
Existe-t-il une solution dont la composante suivant $\overrightarrow{j}$ est nulle ?

∘12∘ ♡ Comparez $X\longmapsto A.X$ et $\overrightarrow{u}\longmapsto\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}$.
En étudiant $A.B.X$, retrouvez la formule du double produit vectoriel.

∘13∘ ♡ On donne la formule du double produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$:
$(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b})\wedge\overrightarrow{c}=(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c})\times\overrightarrow{b}-(\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c})\times\overrightarrow{a}$ pour tout triplet $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$ de $\mathbb{R}^3$
Vérifiez la pour des triplets de la base canonique comme $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})$, $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{j})$.
Vérifiez que le vecteur du membre de droite est bien orthogonal à $\overrightarrow{c}$.
Vérifiez que le vecteur du membre de droite est bien orthogonal à tout vecteur orthogonal à $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.
Démontrez la formule si vous en avez le courage avec neuf coefficients pour les composantes de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ *(si cette partie de l'exercice vous plait, ne m'adressez plus la parole)*.
Comparez $(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b})\wedge\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{a}\wedge(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c})$.

∘14∘ ♡ Calculez $(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b})\wedge\overrightarrow{c}+(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c})\wedge\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a})\wedge\overrightarrow{b}$.

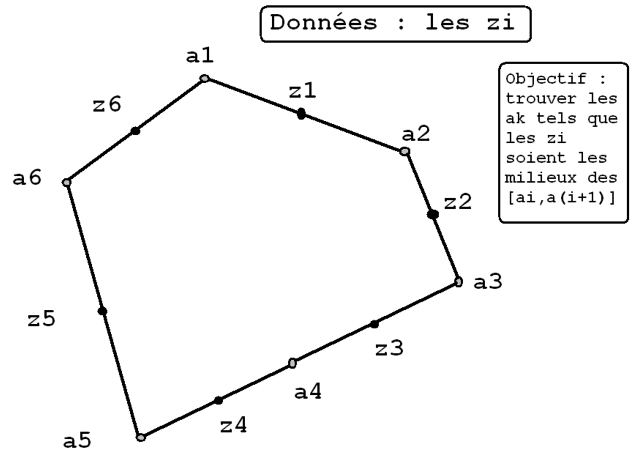
Montrez que l'équation $\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ n'a pas de solution.
Montrez que l'équation $(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k})\wedge\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ a une infinité de solutions.

On se donne $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ et on veut résoudre l'équation $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{u}=\overrightarrow{b}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$. Montrez qu'il faut déjà que $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ soient orthogonaux.

On suppose à présent $\overrightarrow{a}$ orthogonal à $\overrightarrow{b}$. Montrez que $\dfrac{\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|^2}$ *(noté $\overrightarrow{u_0}$)* est une solution de l'équation *(utilisez ici la formule du double produit vectoriel)*.
Montrez que $\overrightarrow{u}$ est solution si et seulement si $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u_0}$ est colinéaire à $\overrightarrow{a}$.
Donnez toutes les solutions de l'équation.
(Quelle est celle dont la norme est la plus courte ?)

∘15∘ ♡ Complétez $(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j})$ en base de $\mathbb{R}^3$ sachant que sur cette base, $\overrightarrow{i}$ a pour composantes $(1,0,1)$ et que $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ a les mêmes composantes sur cette base que sur la base canonique.

∘16∘ Calculez $\begin{vmatrix}-x&1&0&0&0\\0&-x&1&0&0\\0&0&-x&1&0\\0&0&0&-x&1\\e&d&c&b&a-x\end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix}a&1&1&1&1\\b&-1&0&0&0\\c&0&-1&0&0\\d&0&0&-1&0\\e&0&0&0&-1\end{vmatrix}$. (non, pas de rapport)



$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est elle inversible ?

∘17∘ On se donne 9 points A_1 à A_9 dans le plan complexes, d'affixes z_1 à z_9. Montrez qu'il existe une unique famille de points M_1 à M_9 tels que les A_k soient les milieux des côtés du polygone $(M_1, \dots M_9)$.

A-t-on le même résultat pour dix points ?

Un v*en*dangeur m'a véh*i*culé. Il *sh*ootait en *pr*iant. Les f*ées* sont lég*ion* ! Le latiniste spécialiste de Cra*ssus* en*quête* beaucoup. Ils a des escarg*o*ts lents (translation). F*id*èles à Sion au présent (translation). La n*ausée* est r*usse*. J'ai *croqu*é bien des *gal*ettes. Les *ph*obies perturbent le*s* ames. A-t-on des *t*enues pour *c*até ? Des belles hô*t*esses en *F*rance *pa*ssent en montrant une belle a*ssu*rance. L'arène pistée. Il n'a plus de foot, c'est pas un c*r*ado (translation) ! Les astronautes contrôlent l'*o*rbite quand ils v*eu*lent. Vous aimez les *ri*xes ? Plutôt *cé*der !

∘18∘ Le corps est $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 5, noté $\mathbb{F}_5$.
Montrez qu'il y 5 formes bilinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^2$. .
5 formes trilinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^3$
625 formes bilinéaires sur $(\mathbb{F}_5)^2$
125 formes bilinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^3$
125 formes bilinéaires symétriques sur $(\mathbb{F}_5)^2$

∘19∘ ♡ Résolvez $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) = (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k})$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{a}$.

∘20∘ $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k}$ n'a pas de sens si on ne met pas de parenthèses *(ainsi, $(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}) \wedge (\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k})$ va en avoir)*. Combien de « valeurs » peut prendre ce vecteur suivant comment vous mettez les parenthèses ? *(base canonique)*

∘21∘

```
def truc(n) :
....A = []
....for i in range(n) :
........L = []
........for k in range(n) :
............L.append(abs(i-k))
........A.append(L)
....return A
```

Calculez le déterminant de `Truc(n)` pour n de 0 à 6.

L'inflation irrite les *ma*bouls. La gau*ch*e au bou*l*ot. Je n'apprécie pas le *g*éant de taver*n*e. In*tr*us de Bel*g*ique. Les p*r*ofs gèlent dans les f*a*cs. L'*équ*ipe exalte les *p*opulations. L'abî*m*e est dans le con*t*enu. Ce vétérinaire a *ann*ulé l'*enc*aisse. Difficile de *s'en* sortir si on *re*cule. Les footbaleurs ont montré leur f*o*rce dans le p*é*no.

∘22∘ ♣ « Yes, well, the Governor of Kgovjni wants to give a very small dinner-party, and he means to ask his father's brother-in-law, his brother's father-in-law, his father-in-law's brother, and his brother-in-law's father ; and you're to guess how many guests there will be.»
«*There is only one guest*».
C'est du Lewis Carroll. Retrouvez le structure familiale du gouverneur pour que ces quatre dénominations recouvrent une seule et même personne.

∘23∘ ♡ L'élève Aissé-Sontencohr-Okupéh constate que les matrices suivantes ont pour déterminant 1 ou -1 et sont leur propre inverse :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Prouvez le, y compris en taille 6.
Généralisez en donnant la forme du coefficient de ligne i colonne k et si possible en prouvant $M^2 = I_n$ *(là, ça devient ♠ ou ♣, on peut penser à l'application qui passe de $a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + a_3.X^3 + \ldots + a_n.X^n$ à $a_0 + a_1.(1-X) + a_2.(1-X)^2 + a_3.(1-X)^3 + \ldots + a_n.(1-X)^n$ et l'appliquer deux fois).*

◦24◦ ♡ a, b et c sont trois réels, montrez : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) \end{vmatrix} = \cos(b) - \cos(a)$ et

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) \end{vmatrix} = 2.(\cos(b)-\cos(a)).(\cos(c)-\cos(b)).(\cos(c)-\cos(a)).$$

Avez vous une formule pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) & \cos(d) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) & \cos(2.d) \\ \cos(3.a) & \cos(3.b) & \cos(3.c) & \cos(3.d) \end{vmatrix}$? Et pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ch(a) & ch(b) & ch(c) \\ ch(2.a) & ch(2.b) & ch(2.c) \end{vmatrix}$

◦25◦ Est il possible qu'une phrase soit vraie dans ce que j'ai écrit dans ce cadre ?

Dans ce cadre, exactement une phrase est vraie. Dans ce cadre, exactement une phrase est fausse. Dans ce cadre, exactement deux phrases sont vraies. Dans ce cadre, exactement deux phrases sont fausses.

◦26◦ ♡ Déterminez $Com(Com(A))$ si A est une matrice carrée de taille 2.
Déterminez $Com(Com(A))$ si A est une matrice carrée inversible de taille n.
Montrez que si A une matrice de taille 3 non inversible, alors $Com(Com(A))$ est la matrice nulle.

◦27◦ Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Même question avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice de comatrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$?

Existe-t-il une matrice de comatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Existe-t-il une matrice de comatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

◦28◦ ♡ Montrez que l'équation d'un cercle du plan est de la forme $x^2 + y^2 - 2.\alpha.x - 2.\beta.y + \gamma = 0$.
Montrez néanmoins que $x^2 + y^2 - 2.x - 4.y + 7 = 0$ n'est pas une équation de cercle.

Montrez que $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a^2+\alpha^2 & a & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ est l'équation du cercle passant par $A(a,\alpha)$, $B(b,\beta)$ et $C(c,\gamma)$ *(surtout ne développez pas, on est en maths ! pensez à prouver que c'est la forme d'une équation de cercle, et trouvez trois points évidents)*. Donnez l'équation et le centre du cercle passant par $A(1,1)$, $B(2,5)$ et $C(4,12)$.
Donnez l'équation et le centre de la sphère de $\mathbb{R}^3$ passant par $A(1,1,0)$, $B(2,5,0)$ et $C(4,12,0)$ et $D(0,0,1)$.

◦29◦ ♡ Déterminant de Menger. Montrez que $\begin{vmatrix} AB^2 & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} & AC^2 \end{vmatrix}/4$ est le carré de l'aire du triangle *(indication : $\det(M.{}^tM)$)*.

◦30◦ ♡ Un triangle du plan a pour sommets A, B et C de coordonnées $(a',\ a'')$, $(b',\ b'')$ et $(c',\ c'')$. L'aire du triangle est notée S. Montrez $2.S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a' & a'' \\ 1 & b' & b'' \\ 1 & c' & c'' \end{vmatrix}$.

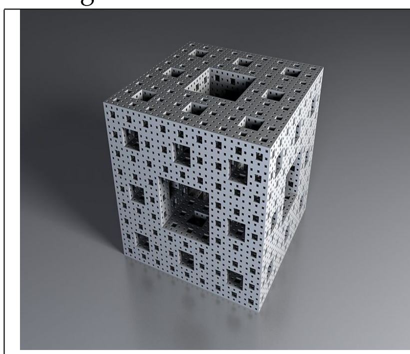
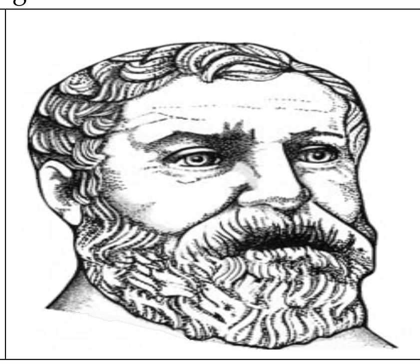
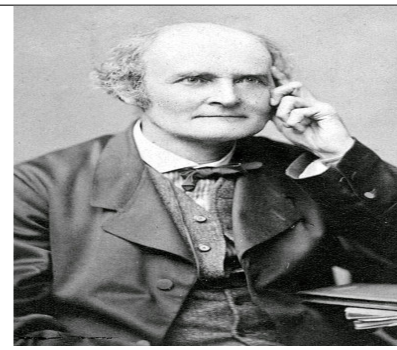
Déduisez : $4.S^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a'^2+a''^2 & 1+a'.b'+a''.b'' & 1+a'.c'+a''.c'' \\ 0 & 1+a'.b'+a''.b'' & 1+b'^2+b''^2 & 1+b'.c'+b''.c'' \\ 0 & 1+a'.c'+a''.c'' & 1+b'.c'+b''.c'' & 1+c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$

puis $-4.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2 + a''^2 & a'.b' + a''.b'' & a'.c' + a''.c'' \\ 1 & a'.b' + a''.b'' & b'^2 + b''^2 & b'.c' + b''.c'' \\ 1 & a'.c' + a''.c'' & b'.c' + b''.c'' & c'^2 + c''^2 \end{vmatrix}$

et $-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2.a'^2 - 2.a''^2 & -2.a'.b' - 2.a''.b'' & -2.a'.c' - 2.a''.c'' \\ 1 & -2.a'.b' - 2.a''.b'' & -2.b'^2 - 2.b''^2 & -2.b'.c' - 2.b''.c'' \\ 1 & -2.a'.c' - 2.a''.c'' & -2.b'.c' - 2.b''.c'' & -2.c'^2 - 2.c''^2 \end{vmatrix}$

et enfin $-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 \end{vmatrix}$ *(déterminant de Cayley-Menger [4]).*

Retrouvez la formule dite de Heron [a] : $S = \sqrt{\dfrac{(a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)}{16}}$ où a, b et c désignent les longueurs des trois côtés du triangle.

a. Heron d'Alexandrie, premier siècle, mathématicien grec, auteur de nombreux livres et d'astucieux systèmes mécaniques

♣ 0 ♣ Pour un tétraèdre de $\mathbb{R}^3$, la formule est $288.V^3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 & AD^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 & BD^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 & CD^2 \\ 1 & AD^2 & BD^2 & CD^2 & 0 \end{vmatrix}$ *(dite formule de Piero della Francesca [5]).* Prouvez la.

∘31∘ Donnez le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et montrez que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres (valeur propre ?). Donnez un dernier vecteur propre, formant une base de $(\mathbb{R}^4, +, .)$ avec des trois autres (on supposera $a+b+c+d$ non nul).
Rappel : $\chi_A(X) = \det(X.I_n - A)$ (ou $\det(A - X.I_n)$ suivant les auteurs).

∘32∘ J'ai tracé un quadrilatère $(A,\ B,\ C,\ D)$ dans le plan. J'ai mesuré ses quatre côtés et une de ses diagonales. J'ai trouvé les mesures suivantes, triées par ordre croissant :

4	8	11	20	30

Dites moi laquelle est la longueur d'une des diagonales *(et prouvez le)*.

Indiquez comment retrouver alors la longueur de l'autre diagonale. Combien de valeurs peut prendre cette longueur de l'autre diagonale ?

∘33∘ (♡ en dimension 2 ou 3) En considérant que la base canonique de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ est de la forme
$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right)$ (on promène les 1 le long de chaque

4. *Karl Menger mathématicien du vingtième siècle né à Vienne mais devenu américain en 1937, connu pour son "éponge" fractale, de volume nul et d'aire infinie*
5. *XV^{eme} siècle, mathématicien italien (oui, avec ce nom) qui formalisa la notion de perspective et volumes dans $\mathbb{R}^3$ et reste d'ailleurs connu comme peintre*

ligne dans l'ordre) ;

la base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right)$ est elle de même orientation qu'elle (cette fois, les 1 se promènent de colonne en colonne) ?
Rappel : pour dire si deux bases B et $\mathbb{B}$ ont la même orientation, on exprime les vecteurs de B sur la base $\mathbb{B}$ et on regarde le signe du déterminant obtenu.

∘34∘ Écrivez un script Python qui prend en entrée n et crée la matrice de taille n sur n "du laboureur", dont voici les premières $L_0 = ()$, $L_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$,

$L_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \to & \to & \to & \to & \curvearrowright \\ \curvearrowleft & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \hookleftarrow \\ \hookrightarrow & \to & \to & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}$

Calculez son déterminant en fonction de n.

∘35∘ Résolvez $(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{u} + \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{u} + \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

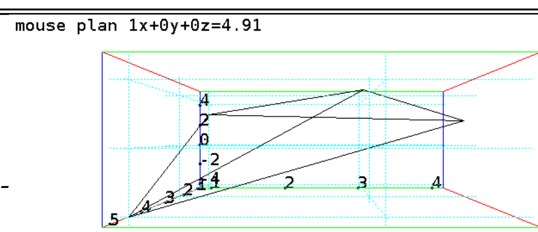
∘36∘ On veut résoudre le système différentiel $\begin{pmatrix} u'_t \\ v'_t \\ w'_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix}$ d'inconnues u, v et w fonctions de t. On pose $m = u^2 + v^2 + w^2$. Montrez : $m' = 0$. Déduisez que les solutions du système sont bornées.
Écrivez le système sous le $\Omega \wedge U_t = U'_t$ même si ça ne sert à rien pour l'instant.
Diagonalisez la matrice dans le cas $(a, b, c) = (3, 4, 12)$.
Résolvez alors le système différentiel pour $(u_0,\ v_0,\ w_0)$ donné.

∘37∘ ♡ Voici les élèves de $MPSI_\pi$ et leurs choix d'options

	Anglais	Info.	Sport
Abelle	oui	oui	
Bairnoulli	oui		oui
Cochy			
Daidekind			
Eulair		oui	
Fibonatchi	oui		
Gauce			oui
Hilbairte		oui	oui
I=$\sqrt{-1}$			

Calculez $P(Anglais)$
Calculez $P(Informatique)$
Calculez $P(Sport)$
Calculez $P(Anglais\ et\ Sport)$.
Les événements $Anglais$ et $Sport$ sont ils indépendants. Les événements $Anglais$ et $Informatique$ sont ils indépendants.
Les événements $Informatique$ et $Sport$ sont ils indépendants.
Calculez $P(Anglais\ et\ Sport\ et\ Informatique)$
Les événements $Anglais$, $Sport$ et $Informatique$ sont ils indépendants dans leur ensemble ?

∘38∘ Y a-t-il plus de parties à 11 éléments dans un ensemble à 33 éléments que de parties à 15 éléments dans un ensemble à 30 éléments ?



On donne $A(1, 1, 3)$, $B(2, 3, 5)$, $C(3, 4, 2)$, $D(5, 1, 4)$. Calculez l'aire de chacune des faces du tétraèdre.

∘39∘ Quelle est sa hauteur quand il est posé sur (A, B, C) ?

∘40∘ Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce déterminant vaudra 2017 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ ? & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$? Si oui, cette valeur sera-t-elle entière, si non, calculez le coefficient de X^{23} dans T_{27}.

∘41∘ Soit A une matrice de terme général a_i^k. On note $\overbrace{A}$ la matrice de terme général $\alpha_i^k = a_{n+1-k}^{n+1-i}$. Expliquez "géométriquement" comment elle se déduit de A.
Montrez qu'elle a le même déterminant que A.
Vous pourrez revenir à la formule "brute", vous pourrez aussi utiliser la permutation $i \longmapsto n+1-i$.
Exprimez $\overbrace{A}$ à l'aide de A et de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

∘42∘ Combien d'anagrammes de « Enis » ? Combien d'anagrammes de « Rayane » ? Et pour « Nathan » ? Et « Alexandre » ?

∘43∘ f est une application affine paire vérifiant $f(2) = 7$. calculez $\int_0^5 f(t).dt$.

∘44∘ Lequel de ces deux programmes va bien construire une matrice (justifiez) :

```
def Fred(n, a, b)  :
....M=[[0 for k in range(n)] for i in range(n)]
....for k in range(n)  :
.......M[k][k]  = a
.......M[k][k+1]  = b
....return M
```

```
def Daphne(n, a, b)  :
....M=[[0 for k in range(n)] for i in range(n)]
....for k in range(n)  :
.......M[k][k]  = a
.......M[k][k-1]  = b
....return M
```

Calculez le déterminant de celle qui existe.

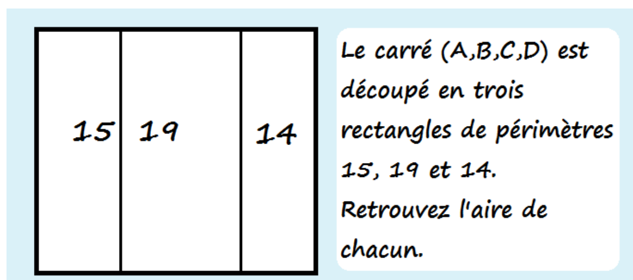
∘45∘ Résolvez $(x^2 - 5.x + 5)^{(x^2-11.x+30)} = 1$ d'inconnue réelle x.

∘46∘ Sachant $\sin(\cos^2(x) + \sin^4(x)) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, calculez $\cos(\sin^2(x) + \cos^4(x))$.

∘47∘ Pour combien d'entiers n plus petits que 2025 le nombre $p.p.c.m.(n,\ 9)$ est il un carré parfait ?

∘48∘

$\heartsuit_0$ Sachant $2^{3.a} = 9$, $3^{2.b} = 10$, $10^c = 11$ et $11^d = 12$, calculez $a.b.c.d$.



$\blacklozenge_0$ Sachant que $A = \begin{pmatrix} 11 & \\ & -13 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} -14 & \\ & 34 \end{pmatrix}$, retrouvez $\det(A)$ et $Sp(A)$.

$\blacklozenge_1$ Pour la matrice A plus haut, j'ajoute que $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un de ses vecteurs propres. Trouvez alors la matrice A (deux possibilités) et diagonalisez la (choisissez une des deux possibilités).

∘49∘ Simplifiez $\prod_{n=2}^{N} \dfrac{n^3-1}{n^3+1}$ en pendant à factoriser et télescoper.

∘50∘ J'ai calculé $\dfrac{10000}{99989999}$ et j'ai vu 0.000100010002000300050008001300210034005500890144023303770610...
Et je me souviens que la suie de Fibonacci commence par $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610$.
Ça ne peut pas être le hasard ! On pose $\rho = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Exprimez F_nà l'aide de ρ^n et ϕ^n.

♣ 1 ♣ Développez $(x+\rho).(x+\phi)$ et décomposez en éléments simples $\dfrac{\sqrt{5}.x}{1-x-x^2}$ (notée $f(x)$).

♣ 2 ♣ Donnez le développement limité en 0 de $\dfrac{1}{1-h}$ en 0 à l'ordre n.

♣ 3 ♣ Justifiez que le développement limité en 0 de $\dfrac{\rho}{\rho+h}$ en 0 à l'ordre n est $\sum_{k=0}^{n} \phi^k.h^k + o(h^n)$.

♣ 4 ♣ Donnez le développement limité en 0 de $\dfrac{\phi}{\phi+h}$ en 0 à l'ordre n et celui de $f(h)$ à l'aide de la suite de Fibonacci. Donnez l'écriture irréductible de $f(10^{-4})/\sqrt{5}$. Concluez.

∘51∘ x, y et z sont trois réels strictement positifs. On doit montrer $x+y+z \leqslant 2.\Big(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\Big)$.
Il parait que c'est une inégalité de Cauchy-Schwarz avec des $\sqrt{y+z}$ et autres $\sqrt{x+z}$ dans un des vecteurs. Alors ?

∘52∘ Calculez $\sum_{k=0}^{p} k^2$, $\sum_{k=0}^{2.p+1}(-1)^k.k^2$ et $\sum_{k=0}^{2.p}(-1)^k.k^2$ pour tout p.

Calculez $\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k^2}{\sum_{k=0}^{n}(-1)^n.k^3}$ suivant la parité de n (oui, $(-1)^n$en bas). Montrez : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k^2}{\sum_{k=0}^{n}(-1)^n.k^3}=2$.

∘53∘ On travaille avec les entiers de $range(7)$ et les opérations modulo 7 :
$A=\begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 1 & 3 \\ & 5 & \end{pmatrix}$ et $Com(A)=\begin{pmatrix} 3 & & 2 \\ & 2 & \\ 1 & & 6 \end{pmatrix}$. Retrouvez les valeurs absentes (entiers entre 0 et 6).
Vérifiez que $M-5.I_3$ n'est pas inversible (toujours modulo 7 voyons).
Trouvez un vecteur U dont la première composante vaut 1 et vérifiant $M.U=5.U$. Calculez alors $M^6.U$.

∘54∘ Un élève me dit : si la loi $\otimes$ est anticommutative ($\forall(a,\ b),\ a\otimes b=-b\otimes a$), alors elle ne peut pas être associaitive, à moins d'être nulle. Il a raison ?

∘55∘ Le point $M(x,y,z)$ est dans le plan d'équation $2.x+3.y-z=5$. Montrez avec l'aide de Cauchy et Schwarz que la distance $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ du point M à l'origine $O(0,0,0)$ vaut au moins $\frac{5}{\sqrt{14}}$.

∘56∘ On pose $a_k=\binom{20}{k}.\binom{30}{k}$ pour k de 0 à 20. Calculez $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ puis $\frac{a_{k+1}}{a_k}-1$ et dites moi lequel des a_k est le plus grand.

∘57∘ Montrez : $\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n^2+4.n+3}}{\sqrt[3]{n^3+6.n^2+8.n}}=\frac{12}{\sqrt[3]{288}}$.

∘58∘ On sait $5^x+5^y=630$ et $\frac{x+y}{5}=1$. Retrouvez x et y (pour information $630=625+5$, si si).

∘59∘ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 3 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix}$.
Existe-t-il (x,y,z) non nul tel que les deux premiers déterminants soient nuls ?
Existe-t-il (x,y,z) non nul tel que les trois premiers déterminants soient nuls ?
Existe-t-il (x,y,z) non nul tel que les trois derniers déterminants soient nuls ?

∘60∘ Inversez $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Changez un coefficient pour qu'elle soit non inversible.
Ah oui, comme souvent, on travaille avec les entiers de range(7) pour les opérations modulo 7.