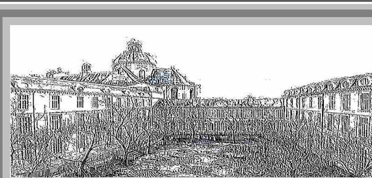
LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 23 janvier
M.P.S.I.2



2023 2024

SI16

♡ 0 ♡ Donnez la formule pour l'approximation décimale par défaut d'un réel x à 10^{-n}, près et montrez que cette approximation converge vers x quand n tend vers l'infini. 2 pt.

♡ 1 ♡ Pour quels x l'équation $ch(t) = x$ a-t-elle des solutions ? Donnez leur forme en fonction de x (pas $Argch$, la formule explicite). 3 pt.

◇ 0 ◇ Sachant $a + b = 5$ calculez $(a-3)^{99} + (b-2)^{99}$. 1 pt.

◇ 1 ◇ Calculez en fonction de n : $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant k\leqslant n}} 2^{k-i}$. 2 pt.

◇ 2 ◇ Montrez que $x \longmapsto 5.x + 2$ est une bijection de $range(14)$ dans lui même (pour les opérations modulo 14). calculez sa signature. 2 pt.

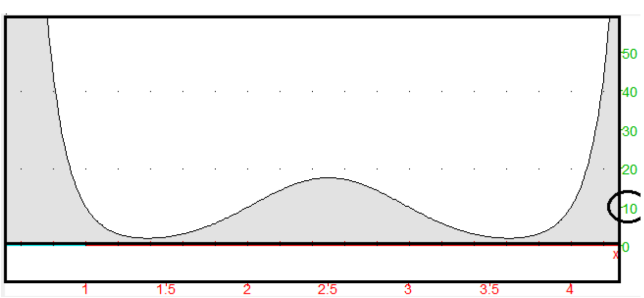
◇ 3 ◇ Montrez : $(11!)^2 = 1\ [23]$. 3 pt.

◇ 4 ◇ L'élève Hurefond-Gonlai-Lepin connaît $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$ pour tout n, mais ne connaît plus $\sum_{k=0}^{n} k^3$. Aidez le en calculant $\sum_{0\leqslant i<k\leqslant n} k^2$. 3 pt.

◇ 5 ◇ Les deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ vérifient $\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X+2}$, $\frac{Q'(X)}{Q(X)} = \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X+3}$ et $P(0) = Q(0)$. Décomposez $\frac{(P-Q)'}{P-Q}$ en éléments simples. 3 pt.

◇ 6 ◇ On définit $\phi : \mathbb{R}^3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ par $\phi(P(X)) = (P(1),\ P'(1),\ P(3),\ P(6))$.
Trouvez un antécédent pour $(0,\ 1,\ 0,\ 0)$, calculez $\phi((X-1)^2.(X-3))$ et donnez un antécédent de $(0,\ 0,\ 1,\ 0)$. Pouvez vous trouver c et d pour que $\phi((X-3).(X-6).(c.X+d))$ soit $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$. 4 pt.
Montrez que $Im(\phi)$ est de dimension 4. déduisez que ϕ est bijective. 1 pt.
Trouvez le polynôme de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant $P(1) = 1$, $P'(1) = 2$, $P(3) = 2$ et $P(6) = -1$. 2 pt.

♣ 0 ♣ Visiblement l'équation $(5+2.\sqrt{6})^{x^2-5.x+5} + (5-2.\sqrt{6})^{x^2-5.x+5} = 10$ a quatre racines réelles. Saurez vous m'en retrouver le plus possible ? 3 pt.

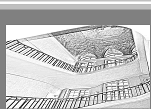


♯0

```
def scooby(n) : #int -> ...
....k = 2
....while n%k != 0 :
........k += 1
....while n%k == 0 :
........n = n//k
....return(n == 1)
```

Que vont donner `scooby(21)`, `scooby(91)`, `scooby(121)`, `scooby(1573)`, `scooby(100)` and `scooby(101)`, `scooby(127)` and `scooby(128)`. Pourquoi ne lancerez vous jamais `scooby(1)` ?
Justifiez : `scooby(8191) = True` et `scooby(8192) = True`. 4 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE Mardi 23 janvier M.P.S.I.2		2023 2024 SI16 CORRECTION



Questions rapides. SI16

$\dfrac{[10^n.x]}{10^n}$ est un rationne comme quotient de deux entiers. Sous la forme $[x.10^n].10^{-n}$ c'est même un décimal.
Par définition de la partie entière, on a $10^n.x - 1 \leqslant [10^n.x] \leqslant 10^n.x$

$$x - 10^{-n} \leqslant 10^{-n}.[10^n.x] \leqslant x$$

Le majorant est fixe, le minorant converge vers x. Par encadrement, la suite $(10^{-n}.[10^n.x])_n$ converge vers x.

On a suppose $a + b = 5$. On peut remplacer b par $5 - a$. On reporte

$$(a-3)^{99} + (b-2)^{99} = (a-3)^{99} + (3-a)^{99} = (-a6'')^{99} + (-1)^{99}.(a-3)^{99} = 0$$

On peut aussi factoriser par variante de la série géométrique

$$(a-3)^{99} + (b-2)^{99} = (a-3+b-2).\Big((a-3)^{98} + (a-3)^{97}.(b-2) + \ldots + (b-2)^{98}\Big) = 0 \times \ldots = 0$$

$\boxed{\diamond\ 7\ \diamond}$ L'équation $sh(t) = x$ admet des solutions si et seulement si x est plus grand que 1 (minimum de l'application ch sur $\mathbb{R}$).
On résout ensuite $e^t + e^{-t} = 2.x$ sachant qu'on a aussi $e^t.e^{-t} = 1$.
Les deux réels positifs e^t et e^{-t} sont les racines de $T^2 - 2.x.T + 1 = 0$.
On trouve deux solutions pour T puis pour t lui même (opposées car logarithmes de deux nombres inverses l'un de l'autre)

$$\ln(x + \sqrt{x^2-1})\ et\ \ln\Big(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\Big) = \ln(x - \sqrt{x^2-1})$$

Pour $x \longmapsto 5.x + 3$ modulo 14, on calcule les images modulo 14. Le plus simple n'est pas de tout recalculer. Une fois qu'on connaît l'image de 0, on a celle de 1 en ajoutant 5. A chaque étape on ajoute 5 et si nécessaire, on réduit modulo 14.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
j'ajoute		8	13	18	9	14	5	10	15	6	11	16	7	12
je réduis si nécessaire	3	8	13	4	9	0	5	10	1	6	11	2	7	12

On reconnaît que les images sont tous les entiers de 0 à 13, dans un autre ordre.
Mais sous cette forme $0 \longmapsto 3$, $1 \longmapsto 8$ et ainsi de suite, ce n'est pas très lisible.
On va plutôt décomposer en produit de cycles :

$$\overrightarrow{(0\ 3\ 4,\ 9,\ 6,\ 5)} \circ \overrightarrow{(1\ 8)} \circ \overrightarrow{(2\ 13\ 12\ 7\ 10\ 11)}$$

La signature vaut $(-1)^5.(-1).(-1)^5$ ce qui se calcule de tête et vaut -1.

La somme double est en fait le produit de deux sommes simples

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant k\leqslant n}} 2^{k-i} = \Big(\sum_{k=0}^{n} 2^k\Big).\Big(\sum_{i=0}^{n} 2^{-i}\Big) = \frac{1-2^{n+1}}{1-2}.\frac{1-2^{-n-1}}{1-\dfrac{1}{2}} = 2.(2^{n+1}-1).(1-2^{-n-1})$$

On peut certes encore développer.

Le produit 11!.11! fait penser au théorème de Wilson, non ?
Non. C'est 22! modulo 23 qui est bien.
Il suffit de regrouper les termes deux à deux ? Mais où ? Dans 11! ou dans 12! ?
En fait, on calcule modulo 23 en remplaçant 1 par -22, 2 par -21, 3 par -20 et ainsi de suite.

11 !	=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
11	=	-22	-21	-20	-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12

On multiplie ces deux produits en comptant les signes moins et on a $(-1)^{11}.22!$.
Ceci donne $-(-1)$ c'est à dire 1.

Elements simples. SI16

Avec $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{X+2}$, on voit que P ne peut avoir que deux racines : -1 et 2 et s'écrit finalement $\lambda.(X+1).(X+2)$ avec λ à déterminer.
De même, $Q(X)$ est de la forme $\mu.(X+1).(X+3)$ avec μ à déterminer aussi (pas forcément égal à λ).
L'autre information $P(0) = Q(0)$ nous donne juste $2.\lambda = 3.\mu$. Mais on ignore encore la valeur de λ.
Toutefois, elle se met en facteur dans

$$P(X) - Q(x) = \lambda.(X+1).(X+2) - \frac{2.\lambda}{3}.(X+1).(X+3) = \lambda.(X+1).\frac{X}{3}$$

Et dans le quotient, $\lambda/3$disparaît, étant présent au numérateur et au dénominateur

$$\frac{P'(X) - Q'(X)}{P(X) - Q(X)} = \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X}$$

Solution de matheux : $P - Q$ sera un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Il aura toujours pour racine -1 mais aura aussi pour racine 0 puisque on a supposé $P(0) = Q(0)$. Ayant alors ses deux racines, on décompose en éléments simples son quotient $\dfrac{(P-Q)'}{P-Q}$ en $\dfrac{X+1}{} + \dfrac{1}{X}$.

Somme des cubes. SI16

On va calculer la somme double (triangulaire) $\sum_{0\leqslant i<k\leqslant n} k^2$ de deux façons :

$$\sum_{0\leqslant i<k\leqslant n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{i=0}^{k-1} k^2\Big) = \sum_{k=0}^{n} k^3$$

car i agit comme un compteur. C'est la somme cherchée.
Mais la lecture dans l'autre sens donne

$$\sum_{0\leqslant i<k\leqslant n} k^2 = \sum_{i=0}^{n} \Big(\sum_{k=i}^{n} k^2\Big) = \sum_{i=0}^{n} \Big(\sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{i-1} k^2\Big)$$

On profite de ce que l'élève connaît déjà

$$\sum_{0\leqslant i<k\leqslant n} k^2 = \sum_{i=0}^{n} \Big(\frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6} - \frac{(i-1).i.(2.i-1)}{6}\Big)$$

$$\sum_{0\leqslant i<k\leqslant n} k^2 = n.\frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6} - \frac{1}{3}.\sum_{i=0}^{n} i^3 + \frac{1}{2}.\sum_{i=0}^{n} i^2 - \frac{1}{6}.\sum_{i=0}^{n} i$$

Comme la même somme est présente des deux côtés (i ou k , qu'importe la variable de sommation), on passe d'un même côté

$$\frac{2}{3}.\sum_{0\leqslant i<k\leqslant n} k^2 = \frac{n^2.(n+1).(2.n+1)}{6} + \frac{1}{2}.\frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6} - \frac{1}{6}.\frac{n.(n+1)}{2}$$

Tous calculs faits $\dfrac{2}{3}.\sum_{0\leqslant i<k\leqslant n} k^2 == \dfrac{n^4 + 2.n^3 + n^2}{3}$ et c'est ce qu'on voulait.

Lagrange mais avec une dérivée. SI16

On veut un polynôme vérifiant $P(1à = P(3) = P(6) = 0$ et $P'(1) = 1$. On part avec $(X-1).(X-3).(X-6)$ pour les racines.
Mais sa dérivée est $(X-3).(X-6) + (X-1).(X-6) + (X-1).(X-3)$. En 1 elle vaut 10. On va donc prendre $\frac{(X-1).(X-3).(X-6)}{10}$
On calcule ensuite l'image de de $(X-1)^2.(X-3)$ (nulle en 1 et en 3 mais pas en 6). Sans même développer avant de dériver, on constate

$$((X-1)^2.(X-3))' = 2.(X-1).(X-3) + (X-1)^2.(X-3)$$

et cette dérivée est nulle en $1\phi((X-1)^2.(X-3)) = (0,\ 0,\ 0,\ 50)$.
Quitte à diviser par 50 : $\phi\Big(\dfrac{(X-1)^2.(X-3)}{50}\Big) = (0,\ 0,\ 0,\ 1)$ et de même $\phi\Big(\dfrac{(X-1)^2.(X-6)}{-12}\Big) = (0,\ 0,\ 1,\ 0)$.

Plus délicat, on cherche un antécédent de $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$. On veut un polynôme nul en 3 et 6. Mais aussi avec une tangente horizontale en 1. On ne peut donc pas se contenter de $(X-3).(X-6)$. On prend donc $(X-3).(X-6).(c.X+d)$ (on ne peut pas pousser plus loin le degré). Il est encore nul en 3 et en 6 et sa dérivée se calcule en 1 :

$$(1.(1-6).(c.1+d) + (1-3).1.(c.1+d) + (1-3).(1-6) = 3.c - 7.d$$

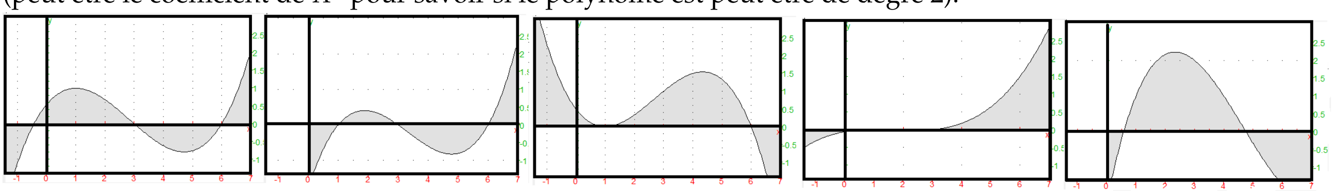
On va avoir deux exigences : $10.(c+d) = 1$ et $3.c - 7.d = 0$. On résout et on trouve le polynôme

$$(X-3).(X-6).\frac{7.X+3}{100}$$

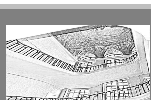
On a des antécédents pour chacun des quatre vecteurs $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 0,\ 1)$; on a un antécédent pour $(1,\ 2,\ 2,\ -1)$

$$1.\frac{(X-3).(X-6).(7.X+3)}{100} + 2.\frac{(X-1).(X-3).(X-6)}{10} + 2.\frac{(X-1)^2.(X-6)}{-12} - \frac{(X-1)^2.(X-3)}{50}$$

Seul l'élève « gentillet » développera ce polynôme sur la base canonique. Après tout, le polynôme est peut être plus pratique sous cette forme. En effet, si je vous donne x, vous avez juste besoin de calculer $(x-1)$, $(x-3)$ et $(x-6)$ et d'effectuer quelques produits. Alors en quoi serait il plus utile d'avoir des 1, des X, des X^2 et des X^3 (peut être le coefficient de X^3 pour savoir si le polynôme est peut être de degré 2).



Sinon, comme chaque vecteur d'une base de $(\mathbb{R}^4, +, .)$ a au moins un antécédent, c'est chaque vecteur de $(\mathbb{R}^4, +, .)$ qui va avoir un antécédent par linéarité.
Notre application est donc surjective entre deux espaces de même dimension 4.
Elle est donc automatiquement injective avec la formule du rang $(\dim(Ker(\phi)) + \dim(Im(\phi)) = \dim \mathbb{R}_4[X])$.



Equation chelou. SI16

Je ne sais pas vous, mais moi, il m'a sauté aux yeux que $(5+2.\sqrt{6})^{x^2-5.x+5} + (5-2.\sqrt{6})^{x^2-5.x+5} = 10$ admettait une solution avec $x^2 - 5.x + 5 = 1$. En effet, on a alors

$$(5+2.\sqrt{6})^1 + (5-2.\sqrt{6})^1 = 5 + 2.\sqrt{6} + 5 - 2.\sqrt{6} = 10$$

On trouve donc déjà deux solutions : 1 et 4.

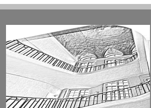
Mais il y en a d'autres, visiblement.
On pose déjà $5+2.\sqrt{6} = a$ et $5-2.\sqrt{6} = b$. On est quand même embêté par $a^y + b^y = 10$. Ce n'est pas trivial.
Sauf si on constate : $a.b = (5+2.\sqrt{6}).(5-2.\sqrt{6}) = 25 - (2.\sqrt{6})^2 = 25 - 24$.
L'équation est alors juste $a^y + \left(\dfrac{1}{a}\right)^y = 10$ c'est à dire $a^{2.y} - a^y + 1 = 0$ avec $y = x^2 - 5.x + 1$.

Posons alors $T = a^y$ c'est à dire $T = (5+\sqrt{24})^{x^2-5.x+5}$. On résout $T^2 - 10.T + 1 = 0$.
On trouve deux valeurs pour T.

On résout alors $(5+\sqrt{25})^{x^2-5.x+1} = \dfrac{10+\sqrt{96}}{2}$ et son « conjugué » $(5+\sqrt{25})^{x^2-5.x+1} = 5-\sqrt{24}$.

La première famille conduit comme déjà dit à $x^2 - 5.x + 1 = 1$. La seconde donne $x^2 - 5.x + 5 = -1$. On peut donc conclure

$$S_x = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$



Procédure Scooby. SI16

La procédure prend un entier `n`.
Elle cherche si il est divisible par `k` (sortie de la boucle `while` dès que `n%k` est nul), en avançant de `1` en `1` (`k+=1`) à partir de `2`.
La première boucle permet de détecter le premier diviseur de `n` (autre que `1`).

Ensuite, que fait on ? On divise `n` par cet entier `k` tant que c'est possible.
On sait que c'est faisable au moins une fois, mais ensuite, tout dépend de la factorisation de `n`.
Et une fois que `n` n'est plus divisible par `k`, on regarde ce qu'il reste.
Ce reste vaut-il `1` (booléen évalué) ?
Finalement, on regarde si `n` est une puissance de `k`, son premier diviseur.
Et comme `k` est son premier diviseur, c'est un diviseur premier.

Bref, on regarde si `n` est une puissance d'un nombre premier (incluant d'ailleurs le cas où `n` est lui même premier).
On se doute que la réponse sera sûrement `False`. Mais il va y avoir des `True`.

Prenons les exemples à traiter.

<table>
<tr><th></th><th>21</th><th>91</th><th>121</th><th>1573</th><th>100</th><th>101</th><th>127</th><th>128</th></tr>
<tr><td>première boucle k</td><td>2, 3</td><td>2,3..,91</td><td>2,3..11</td><td>2,3,...11</td><td>2</td><td>2,3,..101</td><td>2,..127</td><td>2</td></tr>
<tr><td>valeur de k</td><td>3</td><td>91</td><td>11</td><td>11</td><td>2</td><td>101</td><td>127</td><td>2</td></tr>
<tr><td>divisions par k</td><td>21, 7</td><td>91, 1</td><td>121, 11, 1</td><td>1573, 143, 13</td><td>100, 50, 25</td><td>101, 1</td><td>127, 1</td><td>128,64,32,..1</td></tr>
<tr><td>n à la fin</td><td>7</td><td>1</td><td>1</td><td>13</td><td>25</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">booléen retourné</td><td rowspan="2">False</td><td rowspan="2">True</td><td rowspan="2">True</td><td rowspan="2">False</td><td>False</td><td>True</td><td>True</td><td>True</td></tr>
<tr><td colspan="2">False</td><td colspan="2">True</td></tr>
</table>

Si on lance le programme pour n=1 (qui n'est pas un nombre premier, mais est une puissance de nombre premier si je l'écris 2^0 j'en conviens), k commence à 2 et augmente tant que 1 modulo k n'est pas égal à 0. Mais 1 modulo k vaut toujours 1. On va entrer dans une folle boucle !

Pour le plaisir :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
réponse T/F	...	T	T	T	T	F	T	T	T	F	T	F	T	F	F	T	T	F	T

Pour `scooby(8191) = True` on dit que 8191 doit être un nombre premier.

Et pour `scooby(8192) = True`

on voit qu'il n'est pas premier (divisible par 2). Mais combien de fois est il divisible par $é$? $8192 = 1024 \times 8 = 2^{13}$.
La réponse est bien `True`.