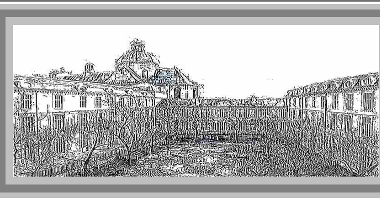
LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 30 janvier
M.P.S.I.2



2023 2024

IS17

♡ 0 ♡ Montrez qu'il n'y a qu'une forme quadrilinéaire antisymétrique de $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. 2 pt.

♡ 1 ♡ Montrez que si l'application $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})\longmapsto\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})$ est alternée [1], alors elle est antisymétrique [2] 2 pt.

♡ 2 ♡ On définit $\sec=\dfrac{1}{\cos}$. Calculez $\sec'(\pi/4)$, $\sec''(\pi/4)$ et $\sec^{(3)}(\pi/4)$ (on pourra partir de $\cos.\sec=1$ et dériver plusieurs fois). 4 pt.

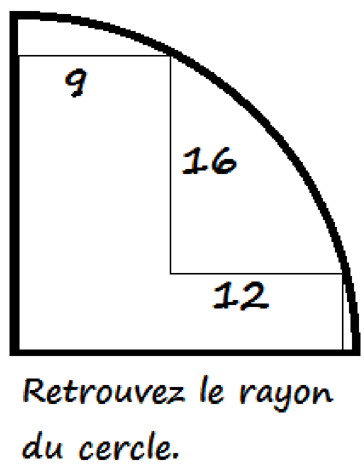
On suppose $\sec(x)+\tan(x)=5$. On calcule alors $\cos(x)+cotan(x)=\dfrac{p}{q}$ (fraction irréductible). Calculez $p+q$.(conseil : passez par la tangente de l'arc moitié) 2 pt.

♡ 3 ♡ Résolvez $e^z=(1+i)^{3+4.i}$ dans $\mathbb{C}$. 2 pt.

♣ 0 ♣ On note E l'ensemble des 24 matrices de permutations de taille 4 sur 4. Donnez le maximum et le minimum de l'application $A\longmapsto\det(A)$, $A\longmapsto\det(-A)$, $A\longmapsto\det(I_4+A)$ et $A\longmapsto\det(I_4-A)$ sur E. 5 pt.

♢ 0 ♢ Calculez $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant k\leqslant n}}2^{min(i,k)}$. 4 pt.

Pour valider votre calcul, écrirez une procédure **Python** qui prend en entrée n et retourne l'entier cherché. 2 pt.



2 pt.

♢$_1$ Calculez pour tout N $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n\leqslant N}\binom{n}{k}.2^k$. 2 pt.

♢$_2$ Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\binom{n+1}{k}^{-1}$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\binom{n+1}{k}^{-1}$. 4 pt.

♢$_3$ On rappelle la table de la loi de la multiplication dans $(\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}},+,\times)$:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2		4		
2	2		6			5
3	3	6				
4	4		5			
5		3			4	
6				3		

Complétez. On note M la matrice obtenue (de colonnes C_1 à C_6). Calculez sa trace. Calculez $C_1-C_3-C_4+C_6$. Calculez $\det(M)$. 4 pt.

♣ 1 ♣ On définit sur $\mathbb{Z}$ la loi Δ par $\forall(a,b),\ a\Delta b=a^2-b^2$. Est elle commutative ? Est elle associative ? 1 pt.

On a calculé $\dfrac{100\Delta98}{49\Delta48}\times\dfrac{98\Delta96}{48\Delta47}\times\dfrac{96\Delta94}{47\Delta46}\dots\dfrac{4\Delta2}{1\Delta0}=2^a.b$ avec b impair. Retrouvez $a+b$. 3 pt.

♢$_4$ Montrez que le déterminant D est un polynôme en X et donnez son degré et son terme dominant : 3 pt.

♢$_5$ Montrez que H est réel. 2 pt.

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&1&X\\2&1&X&3&4\\X&2&1&1&1\\1&X&1&0&1\\X&2&1&3&4\end{vmatrix},\ H=\begin{vmatrix}1&1+i&2-i&3\\1-i&2&i&1+i\\2+i&-i&4&2.i\\3&1-i&-2.i&3\end{vmatrix}$$

1. $\forall(\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{c}),\ \phi(\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{c})=0$
2. $\forall(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}),\ \phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})=-\phi(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a})$

LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 30 janvier
M.P.S.I.2

2023 2024
IS17
CORRECTION

Formes quadrilinéaires sur $\mathbb{R}^3$. IS17

La forme nulle $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}) \longmapsto 0$ est évidemment quadrilinéaire et antisymétrique.
Réciproquement, prenons une forme ϕ à la fois quadrilinéaire et antisymétrique.
Pour tout quadruplet de vecteurs donne $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d})$, il existe douze réels permettant de les décomposer sur la base canonique. On doit ensuite développer

$$\phi(\alpha_1.\overrightarrow{i}+\alpha_2.\overrightarrow{j}+\alpha_3.\overrightarrow{k},\ \beta_1.\overrightarrow{i}+\beta_2.\overrightarrow{j}+\beta_3.\overrightarrow{k},\ ,\gamma_1.\overrightarrow{i}+\gamma_2.\overrightarrow{j}+\gamma_3.\overrightarrow{k},\ \delta_1.\overrightarrow{i}+\delta_2.\overrightarrow{j}+\delta_3.\overrightarrow{k})$$

par multilinéarité. on obtient 81 termes tels que $\alpha_1.\beta_2.\gamma_1.\delta_3.\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$. Mais dans chacun de ces termes, on a un $\phi(\overrightarrow{?}, \overrightarrow{?}, \overrightarrow{?})$ dans lequel deux au moins des vecteurs sont égaux. Par antisymétrie, chacun de ces termes est nul, et la grande somme est nulle.

Forme alternée implique antisymétrique. IS17

Si on a $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = 0$ pour tout vecteur $\overrightarrow{a}$ on l'a aussi pour $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$.
Mais en développant $\phi(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}) = 0$ on trouve vite

$$\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) + \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}) = 0$$

puis en simplifiant $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})$ et $\phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b})$ il reste $\phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) + \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$ comme demandé.

Equation dans $\mathbb{C}$. IS17

Est il bien prudent de résoudre cette chose avec des complexes à la puissance complexe ?
Si on pose $(1+i) = \sqrt{2}.e^{i.\pi/4} = e^{\ln(2)/2}.e^{i.\pi/4}$, l'équation devient

$$e^z = (e^{\ln(\sqrt{2})+i.\pi/4})^{3+4.i}$$

et on résout simplement.
Une solution naturelle est $z = (3+4.i).\dfrac{\ln(4)+i.\pi}{4}$.
Mais les cas d'égalité des exponentielles complexes donnent d'autres solutions

$$z \in \left\{(3+4.i).\frac{\ln(4)+i.\pi}{4} + 2.i.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Mais une chose me chiffonne dans cet énoncé qui traine pourtant sur Internet. Le complexe $1+i$ s'écrit aussi $\sqrt{2}.e^{9.i.\pi/4}$.
On a alors comme solutions

$$z \in \left\{(3+4.i).\frac{\ln(4)+9.i.\pi}{4} + 2.i.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Et j'en ai plein d'autres. Le complexe $e^{a+i.b}$ a un sens. Le complexe $(c+i.d)^{a+i.b}$ n'en a plus.
Comment vais je évaluer les solutions que vous proposerez ?

Fonction secante. IS17

On peut certes dériver, déjà avec plus ou moins d'intelligence :

	$\sec=\dfrac{1}{\cos}$	$\sec'=-\dfrac{-\sin}{\cos^2}=\dfrac{\sin}{\cos}$	$\sec''=\dfrac{2.\cos.\cos'.\sin-\cos^2.\sin'}{\cos^4}=\dfrac{1+\sin^2}{\cos^3}$	$\sec^{(3}$
	$\sec=\cos^{-1}$	$\sec'=-1.\cos^{-2}.\cos'=\sin.\cos^{-2}$	$\sec''=\cos.\cos^{-2}+\sin.(-2).\cos^{-3}.\cos'=\cos^{-3}+\sin^2.\cos^{-3}$	

Mais le mieux est effectivement de partir de $\cos.\sec=1$ pour tout x de $D_{\tan}$ et de dériver puis calculer en $\dfrac{\pi}{4}$ puisque telle est la question

formule	$\cos.\sec=1$	$\cos'.\sec+\cos.\sec'=0$	$\cos''.\sec+2.\cos'.\sec'+\cos.\sec''=0$	
en $\pi/4$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sec(\pi/4)=1$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sec'(\pi/4)=0$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}+2.\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sec''(\pi/4)=0$	
	$\sec(\pi/4)=\sqrt{2}$	$\sec'(\pi/4)=\sqrt{2}$	$\sec''(\pi/4)=3.\sqrt{2}$	

et enfin, avec $\cos^{(3)}.\sec+3.\cos''.\sec'+3.\cos'.\sec''+\cos.\sec=0$ on trouve $\sec^{(3)}(\pi/4)=11.\sqrt{2}$ mais il faut quand même du courage.

L'équation de l'énoncé nous dit $\dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}=5$. On doit pouvoir trouver cosinus et sinus. Mais si on pose $t=\tan(x/2)$, l'équation devient

$$\frac{1+t^2}{1-t^2}+\frac{2.t}{1-t^2}=5$$

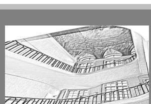
On simplifie $\dfrac{1+t^2}{1-t^2}+\dfrac{2.t}{1-t^2}=\dfrac{1+t^2+2.t}{(1-t).(1+t)}=\dfrac{(1+t)^2}{(1-t).(1+t)}=\dfrac{1+t}{1-t}$ et l'équation nous donne $(1-t).5=(1+t)$. On trouve la seule valeur possible pour t : $\dfrac{2}{3}$.

On pouvait aussi voir cachée ici la formule $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$ *avec un déphasage.*

On reporte alors :

$$\cos(x)+cotan(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{2.t}=\frac{125}{156}$$

et la somme demandée vaut 281.



Une somme avec des 2, des *Min* et l'aide de Python. IS17

Pour avoir les choses en tête :

1	1	1	1	1
1	2	2	2	2
1	2	4	4	4
1	2	4	8	8
1	2	4	8	16

On va sommer sur i des sommes sur k (calcule en ligne).

Chaque somme $\sum\limits_{k=0}^{n}2^{Min(i,k)}$ se décompose en deux

$$\sum_{k=0}^{n}2^{Min(i,k)}=\sum_{k=0}^{i-1}2^k+\sum_{k=i}^{n}2^i=\frac{1-2^i}{1-2}+(n-i+1).2^i=(n-i+2).2^i-1$$

On a déjà un compteur qui donne $-(n+1)$. On a ensuite $\sum\limits_{i=0}^{n}(n-i+2).2^i$ qu'on peut séparer en deux : $(n+2).\sum\limits_{i=0}^{n}2^i$ et $-\sum\limits_{i=0}^{n}i.2^i$ qui est un classique. Je vais même proposer $(n+3).\sum\limits_{i=0}^{n}2^i$ et $\sum\limits_{i=0}^{n}(i+1).2^i$.

Dans le second, je reconnais la dérivée de $x\longmapsto\sum\limits_{i=0}^{n}x^{i+1}$, calculée en $x=2$.

J'ai donc après calcul $\sum\limits_{i=0}^{n}(i+1).2^i=n.2^{n+1}+1$ puis $\sum\limits_{i=0}^{n}(n-i+2).2^i=3.2^{n+1}-n-4$.

et si on tient compte de tous les morceaux :

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{k=0}^{n}2^{Min(i,k)}\Big)=\sum_{i=0}^{n}\Big((n-i+2).2^i-1\Big)=3.2^{n+1}-2.n-5$$

Et je confirme pour n petit.
On peut aussi sommer par bandes de valeur 2^p : le tableau en haut donne $9\times 1+7\times 2+5\times 4+3\times 8+1\times 16$ et je vous laisse généraliser.

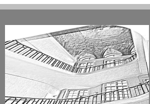
Pour ce qui est de `Python`, on peut attaquer brutalement

```
def somme(n) : #int -> int
....S = 0
....for i in range(n+1) :
.......for k in range(n+1) :
...........S += 2**min(i,k)
....return S
```

Ceci a la rigueur voulue pour le débutant. les deux boucles sont imbriquées, on va jusqu'à n inclus.
La complexité est quadratique, sauf que quand même, le calcul de puissance est un peu du sadisme.
A quoi bon calculer 2**34 quand juste avant dans la boucle on a calculé 2**33 ? Il suffit de multiplier le résultat précédent par 2.

```
def somme(n) :
....S = 0
....for i in range(n+1) :
.......p = 1
.......for k in range(i+1) : #jusqu'à k=i inclus
...........S += p
...........p *= 2 #la puissance suivante
.......for k in range(i+1, n+1) :
...........S += p #la puissance de 2 n'augmente plus
....return S
```

On peut ensuite économiser encore en ne parcourant que la moitié du tableau.

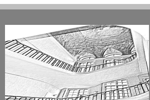


Une somme avec des 2 et des binomiaux. IS17

La somme $\sum_{0\leqslant k\leqslant n\leqslant N}\binom{n}{k}.2^k$ est une somme multiple qu'on découpe en tranches conditionnelles

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n\leqslant N}\binom{n}{k}.2^k=\sum_{n=0}^{N}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.2^k\Big)=\sum_{n=0}^{N}(1+2)^n$$

On a ensuite une série géométrique, de somme $\dfrac{3^{N+1}-1}{3-1}$.



Une loi étange. IS17

La loi Δ définie par $(a\Delta b)=a^2-b^2=(a+b).(a-b)$ a tout pour ne pas être commutative ni associative. Avec des nombres pris au hasard, on aura un contre-exemple

Non commutative		Non associative	
$1\Delta 2=-3$	$2\Delta 1=3$	$(1\Delta 0)\Delta 2=1\Delta 2=-3$	$1\Delta(0\Delta 2)=1\Delta(-4)=-15$

On écrit déjà proprement le produit de l'énoncé pour ne pas avoir de surprise sur le nombre de termes (49 termes en haut comme en bas) :

$$\prod_{k=1}^{49}\frac{(2.k+2)\Delta(2.k)}{k\Delta(k-1)}=\prod_{k=1}^{49}\frac{(2.k+2+2.k).(2.k+2-2.k)}{(k+k-1).(k-(k-1))}=\prod_{k=1}^{49}\frac{4.(2.k+1)}{2.k-1}$$

Le facteur 4 est doté d'un compteur à 49 termes. Et le quotient est télescopique

$$\prod_{k=1}^{49}\frac{2.k+1}{2.k-1}=\frac{\prod\limits_{p=1}^{49}(2.p+1)}{\prod\limits_{p=0}^{48}(2.p+1)}=\frac{99}{1}$$

Notre produit est donc $4^{49}.99$. Déjà c'est un entier, et la somme $a+b$ vaut $98+99$ ce qui fait 197. E le nombre calculé est 31 374 352 355 648 677 687 043 404 333 056 (le physicien dira $3,2.10^{31}$).

Un déterminant — IS17

Si on développe $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & X \\ 2 & 1 & X & 3 & 4 \\ X & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & X & 1 & 0 & 1 \\ X & 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ par la formule brutale, on a une somme de produits de termes avec ou sans X. Chaque $a_i^{\sigma(i}$ est soit un réel, soit un X. Leur produit est donc à chaque fois au plus de degré 5. On a un polynôme de degré inférieur ou égal à 5.
Mais est il de degré 5 ? il faudrait prendre les cinq facteurs X. Mais deux sont sur la même colonne. Il n'y a pas de terme en X^5.

Mais a-t-on des termes de degré 4 ? Pour ma part, j'ai

$\begin{vmatrix} & & & & X \\ & & X & & \\ X & & & & \\ & X & & & \\ & & & 3 & \end{vmatrix}$	$X.X.X.X.3$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{(1\,5\,4\,2\,3)}$	$+1$
$\begin{vmatrix} & & & & X \\ & & X & & \\ & & & 1 & \\ & X & & & \\ X & & & & \end{vmatrix}$	$X.X.1.X.X$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{(1\,5)}\circ\overrightarrow{(2\,3\,4)}$	-1

On a donc $3.X^4-X^4$ ce qui fait X^2.

J'ai pris mon courage à deux mains et trouvé $2.X^4-3.X^3-10.X^2+24.X-29$.

Modulo 7. — IS17

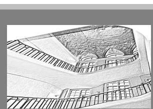
On commence par compléter la matrice/le tableau, sachant $14=0$, $12=5$ et autres formules agréables

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

La trace vaut 14 et si on réduit modulo 7, on trouve 0.
La combinaison $C_1+C_6-C_3-C_4$ donne une colonne nulle (même sans notre modulo 7).
Je l'ai sans calcul (quoique). En ligne i, le coefficient de $C_k$est $i.k$. On calcule donc dans la combinaison $i.(1-3-4+6)$.

A quoi ceci sert il ? A dire $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4&5&6\\\hline 2&4&6&8&3&5\\\hline 3&6&2&5&1&4\\\hline 4&1&5&2&6&3\\\hline 5&3&1&6&4&2\\\hline 6&5&4&3&2&1\\\hline\end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 0\\\hline -1\\\hline -1\\\hline 0\\\hline 1\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 0\\\hline 0\\\hline 0\\\hline 0\\\hline 0\\\hline 0\\\hline\end{array}$ de la forme $M.U = 0_5$.

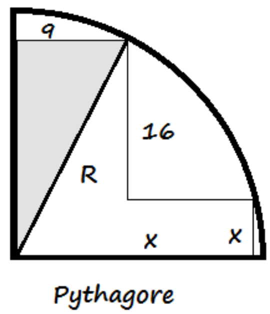
Si la matrice M était inversible, on multiplierait à gauche par M^{-1} et on aurait $U = M^{-1}.0_5 = 0_5$. C'est donc que M n'est pas inversible. Et son déterminant est nul.

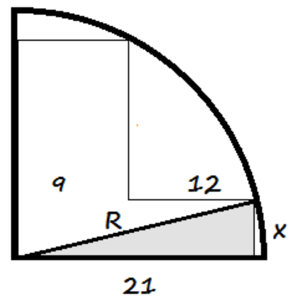


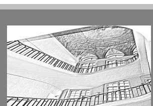
Un quart de cercle. IS17

On va juste appliquer le théorème de Pythagore avec nos données et avec deux notations : R pour le ayon et x pour le côté non mesuré.
On a alors $R^2 = 9^2 + (16+x)^2$ et $R^2 = (9+12)^2 + x^2$.
On compare et on élimine R^2 puis x^2 :
$81 + 256 + 32.x + x^2 = 441 + x^2$ et donc $32.x = 104$.

On est déçu : x n'est même pas entier mais au moins il est rationnel : $x = \dfrac{14}{4}$ puis R vaut $\dfrac{85}{4}$.







Déterminant réel. IS17

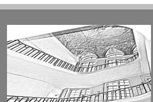
Le déterminant $H = \begin{vmatrix} 1 & 1+i & 2-i & 3 \\ 1-i & 2 & i & 1+i \\ 2+i & -i & 4 & 2.i \\ 3 & 1-i & -2.i & 3 \end{vmatrix}$ est a priori un complexe. Mais on va calculer son conjugué. En notant C la matrice dont il est issu, on a

$$\overline{D} = \overline{\det(C)} = \det(\overline{C})$$

Mais la conjugué de C est sa transposée. Et on a la formule $\det({}^tC) = \det(C)$. Finalement

$$\overline{D} = \overline{\det(C)} = \det(\overline{C}) = \det({}^tC) = \det(C) = D$$

Étant égal à son propre conjugué, ce déterminant est un réel.



Avec des binomiaux. IS17

On commence par simplifier

$$\binom{n}{k}.\binom{n+1}{k}^{-1} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}.\frac{k!.(n+1-k)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1-k)}{n+1}$$

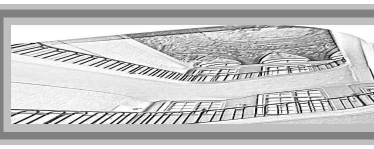
Quand on somme, on peut sortir $\dfrac{1}{n+1}$ et il reste $\sum_{k=0}^{n}(n+1-k)$. On la renverse en $\sum_{i=1}^{n+1} i$. la somme vaut finalement $\dfrac{(n+1).(n+2)}{2}.\dfrac{1}{n+1}$ et on la simplifie en $\dfrac{n+2}{2}$.

Pour le produit, on a $\dfrac{1}{n+1}$ dans chaque terme du produit. Agissant comme un compteur, il nous reste

$$\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\binom{n+1}{k}^{-1} = \frac{\prod_{k=0}^{n}(n+1-k)}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

On préfèrera $\dfrac{n!}{(n+1)^n}$. Et on trouvera ça assez satisfaisant.

LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2023 2024
IS17
27- points