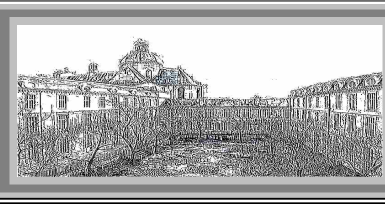
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 26 février
M.P.S.I.2



2023 2024

# TD19

∘0∘ Résolvez pour $a$, $b$ et $c$ complexes distincts donnés : $\left\{\begin{array}{cccc} x & +a.y & +a^2.z & = & a^3 \\ x & +b.y & +b^2.z & = & b^3 \\ x & +c.y & +c^2.z & = & c^3 \end{array}\right|$ d'inconnues $(x,\ y,\ z)$.

∘1∘ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Donnez le polynôme caractéristique de $A$ et son spectre [1].

Montrez que $K$, $K'$ et $N$ sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^3, +, .)$

| |
|---|
| $K_A = \{U \in \mathbb{R}^3 \mid A.U = 0_3\}$ |
| $K'_A = \{U \in \mathbb{R}^3 \mid A^2.U = 0_3\}$ |
| $N_A = \{U \in \mathbb{R}^3 \mid A.U = 9.U\}$ |

. Donnez leurs dimensions.

Lesquelles de ces propositions sont vraies

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}^3 = K' \oplus N$ | $\mathbb{R}^3 = K' + N$ |
| $\mathbb{R}^3 = K \oplus N$ | $\mathbb{R}^3 = K' + N$ |

?

Donnez un polynôme de degré le plus petit possible vérifiant $P(A) = 0_{3,3}$.
Traitez les mêmes questions avec $B$ à la place de $A$.
Placez les dans le tableau : $A$, $B$, $I_3$, $O_{3,3}$

| | diagonalisable | non diagonalisable |
|---|---|---|
| inversible | | |
| non inversible | | |

∘2∘ ♡ $a$, $b$, $c$ et $d$ sont quatre réels. Calculez les déterminants de VanDerImmonde :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

Pensez à un déterminant de VanDerMonde, mais de taille 5 : $VdM(a,\ b,\ c,\ d,\ x)$.

∘3∘ ♡ Résolvez $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$ est liée.

∘4∘ ♡ Quels sont les vecteurs de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ que vous pouvez utiliser pour compléter $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ en base de $\mathbb{R}^3$ ? Lesquels donnent une base de même orientation que la base canonique ?

∘5∘ ♡ Montrez que $M$ et ${}^tM$ ont le même spectre. (racines de $\det(M - X.I_n)$).

∘6∘ $a$, $b$ , $c$ et $d$ sont quatre entiers tirés au hasard entre 0 et 4. Quelle est la valeur maximale de $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a & a^3 \\ 1 & b^2 & b & b^3 \\ 1 & c^2 & c & c^3 \\ 1 & d^2 & d & d^3 \end{vmatrix}$ ?

∘7∘ Inversez ces trois matrices là $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$.

∘8∘ Laquelle de ces formules est la bonne :

| | |
|---|---|
| $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c}$ | $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{b} + (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{c}$ |
| $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} - (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{b}$ | $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{c}$ |

1. $\chi_A(X) = \det(A - X.I_3)$ est le polynôme caractéristique ; ses racines sont le spectre

On se donne deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ de norme 1. On définit la suite $(\overrightarrow{u_n})_n$ par $\overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{u_{n+2}} = \overrightarrow{u_n} \wedge \overrightarrow{u_{n+1}}$. Montrez que la suite converge dans le cas $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$.
La suite converge-t-elle dans le cas $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{j}$ ?
Calculez les six premiers termes de la suite *(on posera $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = \alpha$)*.
Dans quel cas converge-t-elle ?

---

**∘9∘** Duquel des deux plans le point $M(1,1,4)$ est il le plus proche :

| | |
|---|---|
| plan d'équation $x + y - 3.z = 0$ | plan passant par $A(1,3,2)$, $B(0,2,1)$ et $C(2,0,1)$ |

---

**∘10∘** Exprimez $\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \sin(a) \\ 1 & \cos(b) & \sin(b) \\ 1 & \cos(c) & \sin(c) \end{vmatrix} /8$ comme produit de trois sinus
(autre que $\sin(3.\pi/2).\sin(-\pi/2).\sin(Arcsin(\det(\ldots))$ évidemment.

---

**∘11∘** ♡ On veut que $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ d \\ e \end{pmatrix} \right)$ n'engendre qu'un plan. Donnez l'équation de celui ci.

---

**∘12∘** ♡ On pose $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Trouvez la matrice $A$ vérifiant $A.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}$ pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$. Calculez son spectre *(dans $\mathbb{C}$ si nécessaire)*.

---

**∘13∘** Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
(la comatrice est la matrice des cofacteurs pondérés).
Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

---

**∘14∘** Calculez $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

---

**∘15∘** Complétez cette matrice de VanDerMonde, calculez son déterminant, et complétez son inverse, puis calculez le déterminant de son inverse. $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & & \\ & 4 & & 2 & 2 \\ 1 & 1 & & 6 & \\ 1 & 2 & 2 & & \end{pmatrix}$, $V^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & & 1 & 1 \\ & 2 & 0 & & 5 \\ 3 & & & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 3 & \end{pmatrix}$. *Pardon ? Il y a un truc ? Oui. On travaille sur $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 7.*

---

**∘16∘** ♡ Un dé à six faces non équilibré porte la valeur 1 sur deux de ses faces, la valeur 2 sur deux autres et la valeur 3 sur les deux dernières *(c'est finalement ce qu'on pourrait appeler un dé à trois faces et il est non équilibré je le rappelle)*.
On lance ce dé, l'espérance du résultat est $47/22$. Écrivez l'équation linéaire concernant $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
La variance est $365/484$ *(rappel : $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$)*.
Complétez : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$. Calculez alors les trois probabilités.
*Que serait ce problème avec un dé à quatre faces numérotées a, b, c et d ? Que vient faire ici VanDerMonde ?*

---

**∘17∘** $a$, $b$, $c$ et $d$ sont quatre réels, montrez que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) & \cos(d) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) & \cos(2.d) \\ \cos(3.a) & \cos(3.b) & \cos(3.c) & \cos(3.d) \end{vmatrix}$ est égal à $8.(\cos(d) - \cos(c)).(\cos(d) - \cos(b))\ldots$ *(complétez)*. Indication : Tchebychev, combinaisons et VanDerMonde.

---

∘18∘ *Mario et Luigi font des courses en kart* (je suis influencé par les jeux de mon fils), *à vitesse constante. Quand ils font la course sur un kilomètre, Mario arrive alors que Luigi est encore à cinquante mètres de l'arrivée. Ils recommencent, mais pour rendre le jeu équitable, Mario se recule de cinquante mètres par rapport à la ligne de départ. Qui gagne ? De combien ?*

∘18∘ ♡ Dans le plan usuel, on donne $A(1,\ 4)$, $B(5,\ 2)$ et $C(4,\ 5)$. Donnez l'équation de la droite $(A\ B)$. Mesurez la distance de $C$ à la droite $(A\ B)$. Trouvez les points $D$ et $E$ de $(A\ B)$ tel que $[C,\ D]$ et $[C,\ E]$ découpent $(A,\ B,\ C)$ en trois triangles d'aires égales.

∘19∘ ♡ Résolvez $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 5 & 6 \\ b & 4 & 5 \end{vmatrix}$ d'inconnues réelles $a$ et $b$.

∘20∘ ♡ On pose $A(1,\ 4)$, $B(2,\ 5)$ et $C(1,\ 6)$. Quels sont les points à égale distance de $A$ et de $(A\ B)$.
Quels sont les points à égale distance de $C$ et de $(A\ B)$. Rappel : la distance du point $M$ à la droite $(AB)$s'obtient en mesurant de deux façons l'aire du triangle $(A\ B\ M)$ (déterminant versus base fois hauteur).

∘21∘ Calculez les deux intégrales suivantes et dites qui est la plus grande : $\int_1^e \frac{(\ln(t))^2}{t}.dt$ et $\int_1^e (\ln(t))^2.dt$.

∘22∘ On admet (vous le verrez en Spé) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.dt = \frac{\pi}{2}$. Montrez : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}.dt = \frac{\pi}{2}$.

∘23∘ Quand il va au travail à la vitesse de quatre vingt kilomètres par heures, il a dix minutes d'avance. Quand il roule à soixante kilomètres à l'heure, il a dix minutes de retard. A quelle vitesse doit il rouler pour arriver à l'heure ?

∘24∘ ♯ `Points` est une liste de points *(chaque point est une liste de deux nombres)*. Trouvez les deux points de cette liste les plus loin l'un de l'autre.

∘25∘ ♡ Vérifiez que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Décomposez $\overrightarrow{i}$ sur cette base.

Changez la composante d'un de ces vecteurs pour que ce ne soit plus une base de $\mathbb{R}^3$.
Il existe une composante que l'on peut changer comme on veut, sans que la famille cesse d'être une base de $\mathbb{R}^3$. Laquelle ?
*(une base $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ c'est « tout vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose d'une façon unique sous la forme $\overrightarrow{u} = \alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b} + \gamma.\overrightarrow{c}$,et ça revient à avoir un système ayant une unique solution, donc à un déterminant non nul, par exemple).*

∘26∘ On pose $C = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$.
Ajustez les quatre grecques pour avoir $M.V = V.D$. Déduisez la valeur de $\det(M)$ sous forme factorisée.

∘27∘ Résolvez $Tr(\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & -\sin(\pi/12) \\ \sin(\pi/12) & \cos(\pi/12) \end{pmatrix}^n) \in \mathbb{Z}$ d'inconnue $n$ dans $\mathbb{Z}$.
Résolvez $Tr(\begin{pmatrix} \cos(5.\pi/12) & -\sin(5.\pi/12) \\ \sin(5.\pi/12) & \cos(5.\pi/12) \end{pmatrix})^n \in \mathbb{Z}$ d'inconnue $n$ dans $\mathbb{Z}$.
Résolvez $Tr(\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & \sin(\pi/12) \\ \sin(\pi/12) & -\cos(\pi/12) \end{pmatrix}^n) \in \mathbb{Z}$ d'inconnue $n$ dans $\mathbb{Z}$.
Résolvez $\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & -\sin(\pi/12) & 0 & 0 \\ \sin(\pi/12) & \cos(\pi/12) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi/15) & -\sin(\pi/15) \\ 0 & 0 & \sin(\pi/15) & \cos(\pi/15) \end{pmatrix}^n = I_4$ d'inconnue $n$ dans $\mathbb{Z}$.

∘28∘

I∼0) On se place dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ muni de la base canonique orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Pour tout triplet de vecteurs $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$, on définit la matrice $G$ (dite « matrice de Gram ») de terme général

$g_i^k = \overrightarrow{v_i}.\overrightarrow{v_k}$ (produit scalaire des deux vecteurs) : $\begin{pmatrix} ||\overrightarrow{u_1}||^2 & \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & ||\overrightarrow{u_2}||^2 & \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3} & \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3} & ||\overrightarrow{u_3}||^2 \end{pmatrix}$

Montrez : $Tr(G) \geqslant 0$ et $Tr(Com(G)) \geqslant 0$.

I∼1) Montrez même que $Tr(G)$ est nulle si et seulement si les trois vecteurs sont nuls.

I∼2) Montrez aussi $Tr(Com(G))$ est nulle si et seulement si les trois vecteurs sont colinéaires.

I∼3) Montrez que $\det(G)$ est positif ou nul. Montrez qu'il est nul si et seulement si les trois vecteurs sont coplanaires (indication : ${}^tP.P$).

I∼4) Soit $X$ (de composantes $x$, $y$ et $z$) un vecteur propre de $G$ (valeur propre $\lambda$), montrez : $\lambda.||X||^2 = {}^tX.G.X = ||x.\overrightarrow{u_1} + y.\overrightarrow{u_2} + z.\overrightarrow{u_3}||^2$. Déduisez que les valeurs propres de $G$ sont positives ou nulles.
I∼5) On suppose à présent $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ de norme 1. Il existe donc trois angles vérifiant $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \cos(\alpha)$, $\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3} = \cos(\beta)$ et $\overrightarrow{u_3}.\overrightarrow{u_1} = \cos(\gamma)$ (produits scalaires). Par symétrie des rôles, on posera $0 \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant \pi$. On note $G$ la matrice de Gram.
Déterminez les racines du polynôme $X^2 - 2.X.\cos\beta).\cos(\gamma) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) - 1$.

I∼6) Déduisez une factorisation de $\det(G)$ comme produit de deux facteurs.

I∼7) Montrez que $\cos(\alpha)$ est entre $\cos(\beta - \gamma)$ et $\cos(\beta + \gamma)$.

I∼8) Montrez l'équivalence entre $\det(G) = 0$ et $\begin{array}{ccccc} \alpha & +\beta & +\gamma & = & \pi \\ & & ou & & \\ \alpha & = & \beta & +\gamma & \end{array}$.

---

II∼0) On suppose $\alpha = \beta = \gamma$ et on pose alors $c = \cos(\alpha)$. Déterminez le polynôme caractéristique de $G$, puis ses valeurs propres (sachant qu'il y a une valeur propre double).

II∼1) Quelle est la plus petite valeur que peut prendre $c$ ?

II∼2) On prend $c = -1/2$. Calculez $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$.

II∼3) Déterminez le noyau de $G$. Retrouvez le résultat précédent.

| | |
|---|---|
| Rappel : | • Polynôme caractéristique d'une matrice carrée $A$ : $\det(\lambda.I_n - A)$.<br>• Les valeurs propres de $A$ sont les racines du polynôme caractéristique. Mais ce sont surtout les $\lambda$ pour lesquels il existe au moins un vecteur $X$ non nul vérifiant $A.X = \lambda.X$.<br>• Noyau d'une application linéaire $f$ : ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ vérifiant $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.<br>• Noyau d'une matrice rectangulaire $A$ (format $n$ sur $k$) : ensemble des vecteurs $X$ de taille $k$ vérifiant $M.X = 0_n$.<br>• Le déterminant du produit est le produit des déterminants.<br>• La comatrice de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$ |

---

◦29◦ ♡ Décomposez $x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k}$ sur la base $(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ puis sur la base $(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$.

---

◦30◦ Pour quelles valeurs de $n$ peut on avoir sur $M_n(\mathbb{R})$ au moins une matrice $A$ vérifiant : ${}^tA.A = -I_n$. Même question pour $A^2 = -I_n$.

---

◦31◦ Montrez qu'on n'a pas $\det(\Re(M)) = \Re(\det(M))$.

---

∘32∘ Soit $A$ une matrice à trois colonnes et deux lignes. Montrez que ${}^tA.A$ et $A.{}^tA$ sont deux matrices carrées. Montrez que l'une a un déterminant nul. Montrez que le déterminant de l'autre est une somme de carrés de déterminants de matrices de taille 2 extraites de $A$.

---

∘33∘ -a- Construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^2,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{j})$ en le donnant sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.

-b- Construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^2,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j})$.

-c- Construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{k})$.

-d- Pouvez vous construire un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j})$ ?

-e- Pouvez vous construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{k})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j})$ ?

-f- Pouvez vous construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j})$ ?

---

∘34∘ Montrez que la droite passant par $O(0,\ 0)$ et $E(42,\ 151)$ a pour équation cartésienne $\begin{vmatrix} x & 42 \\ y & 151 \end{vmatrix} = 0$.

---

∘35∘ Explicitez

| | | |
|---|---|---|
| $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} ]n,\ n+1[$ | $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} ]-2^{-n},\ 2^{-n}[$ | $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} ]-2^{n},\ 2^{n}[$ |
| $D = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} ]n,\ 2.n[$ | $E = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} ]n,\ 2.n[$ | $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} ]-2^{-n},\ 2^{n}[$ |

---

∘36∘ ♡ Calculez $\int_1^2 x^x.(1+\ln(x)).dx$.

---

∘37∘ ♡ $A$ et $B$ sont des ensembles. Montrez : $(P(A)\cap P(B)=\emptyset \Rightarrow P(A)=P(B))$
$(P(A)\cap P(B)=\{\emptyset\}) \Leftrightarrow (A\cap B=\emptyset)$

---

∘38∘ ♡ Vérifiez

| | diagonalisable | non diagonalisable |
|---|---|---|
| inversible | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| non inversible | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |

---

∘39∘ Complétez $\begin{pmatrix} & -5 \\ 2 & \end{pmatrix}$ pour qu'elle se diagonalise en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

---

∘40∘ La matrice $M_n$ de taille $n$ sur $n$ a pour terme général $1_{i\neq j}$. Calculez son déterminant.

---

∘41∘ ♣ 0 ♣ $E$ est un ensemble de cardinal $N$ et les $A_k$ *($k$ de 0 à $n-1$)* sont des parties de $E$. On définit alors la matrice $S$ de terme général $Card(A_i\cap A_k)$ *(ligne d'indice pythonien i et colonne d'indice pythonien k)*. Montrez dans le cas $n=2$ que $\det(S)$ est toujours positif ou nul.

♮ 0 ♮ Écrivez un script **Python** qui prend en entrée la liste `L` des parties *(chaque partie est elle même une liste sans doublon)* et retourne la matrice `S` sous forme de liste de listes *(les fonctions `len`, `in` , `reversed` et les méthodes `append`, `count`, `append`, `sort` sont autorisées, même si certaines ne servent ici à rien)*.

Par exemple, pour l'entrée `[[0, 1, 4, 7], [0, 2, 7], [0, 1, 6, 9]]` sa réponse sera `[[4, 2, 2],[2, 3, 1],[2, 1, 4]]`).

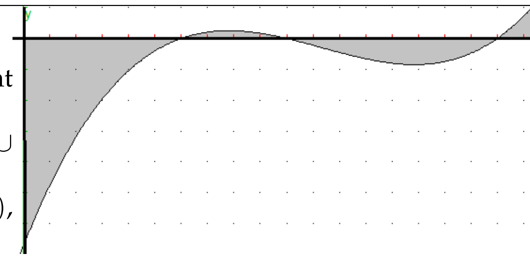
♮ 1 ♮ Indiquez en fonction de $n$ et $N$ un majorant de la complexité de votre algorithme *(au pire, les $A_k$ sont effectivement de cardinal de l'ordre de $N$)*.

♣ 1 ♣ Montrez que si $A_0$ est égal à $A_1$ alors le déterminant de $S$ est nul *($n \geqslant 2$)*.

♣ 2 ♣ Que pouvez vous dire si $Tr(S)$ est nulle ? *($n \geqslant 2$)*

♣ 3 ♣ Montrez que si l'on prend pour $A_0$ les filles de MPSI2, pour $A_1$ les élèves de MPSI2 dont le prénom commence par $E$ (ou È), le déterminant de $S(A_0, A_1, A_2)$ sera toujours un entier naturel *(oui, donc positif, merci de l'avoir compris)*, quel que soit le choix de $A_2$. (assez calculatoire)

---



Donnez une situation où l'on a $S = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs que peuvent prendre $Card(A \cap B \cap C)$ et $Card(A \cup B \cup C)$ pour cette matrice $S$ ?
Donnez alors une matrice diagonale $D$ vérifiant $Tr(S) = Tr(D)$, $\det(S) = \det(D)$ et $Tr(S^2) = Tr(D^2)$.
*(là, je ne me contenterai pas de « on propose/on vérifie », je voudrai le polynôme $X^3 - s.X^2 + d.X - p$ dont les racines sont les trois termes diagonaux de $D$ avec explication, ce qui me permet en passant de définir $s$, $d$ et $p$).*

♣ 4 ♣ Trouvez $P$ de déterminant non nul vérifiant $S.P = P.D$. *On pourrait certes alors calculer $S^n = P.D^n.P^{-1}$ mais il nous manque $P^{-1}$.*

♣ 5 ♣ Montrez : $S^3 = s.S^2 - d.S + p.I_3$.

♣ 6 ♣ On pose alors $U = (S - 5.I_3).(S - 9.I_3)$, $V = (S - 3.I_3).(9.I_3 - S)$ et $W = (S - 3.I_3).(S - 5.I_3)$. Calculez $\det(S - 9.I_3)$, $\det(U)$, $\det(V)$.

♣ 7 ♣ Justifiez $U.V = V.U = 0_{3,3}$, $U^2 = 12.U$, complétez $W - 24.I_3 = (S - 9.I_3)\ldots$ et calculez $W^2 - 24.W$, $U.W$, $W.V$ *(normalement, vous n'avez pas à faire tomber des colonnes sur des lignes, juste à être intelligent)*.

♣ 8 ♣ Trouvez $u$, $v$ et $w$ vérifiant $S = u.U + v.V + w.W$.

♣ 9 ♣ Exprimez alors $S^2$ comme combinaison de $U$, $V$ et $W$.

♣ 10 ♣ Prouvez pour tout $k$ : $S = u.3^k.U + v.5^k.V + w.9^k.W$ pour tout $k$ de $\mathbb{N}$.

---

♣ 11 ♣ On revient au cas général. Montrez pour tout vecteur colonne de composants $x_0$ à $x_n$ : ${}^tX.S.X \geqslant 0$ *(on tentera de croiser $\sum_{i<n} x_i.1_{A_i}$)*.

♣ 12 ♣ Montrez que si $X$ est un vecteur non nul et $\lambda$ un réel vérifiant $S.X = \lambda.X$ , alors $\lambda$ est positif ou nul.

Inspiré d'un oral de Polytechnique.

---

◦42◦ $f$ est une application de $E$ dans $f$ vérifiant $\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ f(x) = y$. Que pouvez vous déduire ?
$f$ est une application de $E$ dans $F$ vérifiant : $\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ f(x) = y$. Que pouvez vous déduire ?
Et si on a $\forall (a, b) \in E^2,\ a \neq b \Rightarrow f(a) = f(b)$.

---

◦43◦ On remplit une matrice sous forme de triangle de Pascal écrit de travers par rapport à nos habitudes et coupé en carré, comme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ venant de $\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$, puis $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}$. Écrivez un script `Python` qui prend en entrée $n$ et fabrique la matrice de taille $n$ sur $n$. (Calculez le déterminant de cette matrice.)

---

◦44◦ Vrai ou faux : $\cos(a) = \cos(b) \Rightarrow a = b + 2.k.\pi$ *ou* $a + b = 2.k.\pi$
$(a = b + 2.k.\pi\ (\forall k \in \mathbb{Z})) \Rightarrow \sin(a) = -\sin(b)$

Vrai ou faux : si $A$ commute avec $B$ et $C$ alors $B$ commute avec $C$ (matrices de taille 2 sur 2).

Vrai ou faux : $x \longmapsto \int_0^x f(t).dt$ a pour dérivée $t \longmapsto f(t)$.

Vrai ou con : $x \longmapsto x.\int_0^x f(t).dt$ a pour dérivée $x \longmapsto \int_0^x f(t).dt + x.f(t)$.

Lesquelles sont bonnes :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $[2.x] = 2.[x]$ | | $\exists x,\ [2.x] = 2.[x]$ | | $\forall x,\ [2.x] \neq 2.[x]$ | |
| $[2.x] \neq 2.[x]$ | | $\exists x,\ [2.x] \neq 2.[x]$ | | $\forall x,\ [2.x] \neq 2.[x]$ | |

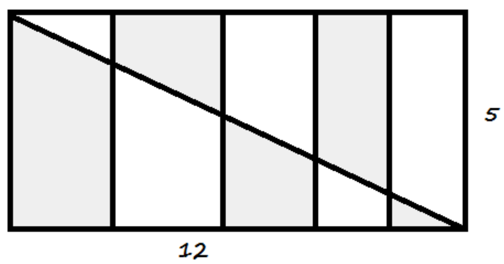
---

∘45∘ ♡♠ On définit $\varphi = t \longmapsto e^{1/t}$. Montrez pour tout $n$ l'existence d'un polynôme $P$ vérifiant $\varphi^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)}{t^{2.n}}.\varphi(t)$ pour tout $t$.
Donnez le relation qui calcule $P_{n+1}$ à l'aide de $P_n$ et $P'_n$. Calculez $P_3$.
De quel degré est $P_n$ ?

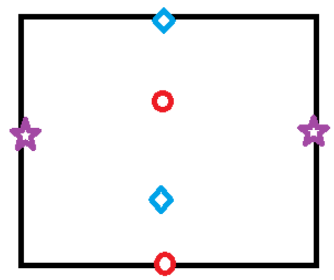
Montrez pour tout $x$ de $]0,\ +\infty[$ : $x^2.\varphi'(x) + \varphi(x) = 0$.
Déduisez sans récurrence : $x^2.\varphi^{(n+1)}(x) + 2.n.x.\varphi^{(n)}(x) + n.(n-1).\varphi^{(n-1)}(x) + \varphi^{(n)}(x) = 0$ pour tout $x$.
Trouvez la relation qui calcule $P_{n+1}$ à l'aide de $P_n$et $P_{n-1}$ *(sans faire intervenir de dérivées)*.

---

∘46∘




Calculez les périmètre de la figure grisée.



Connectez les deux cercles.
Connectez les deux losanges.
Connectez les deux étoiles.
Vos traits doivent rester dans le grand carré sans se croiser.


---

∘47∘ Montrez que $\left(\dfrac{(-1)^p.q^2}{(p+q)!}\right)_{\substack{0\leqslant p\\ 0\leqslant q}}$ est sommable, de somme $3.e/2$.

---

∘48∘ ♡ Sachant que 2337, 2698, 4655 et 9614 sont des multiples de $19^2$, montrez que le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 9 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 5 \\ 9 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ est aussi multiple de 19. Pensez à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1000 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

---

∘49∘ ♡ Inversez les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

---

∘50∘ ♡ Montrez qu'il n'existe pas d'application $f$ linéaire[3] de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant
$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
*(mot clef : relation de dépendance linéaire).*

---

∘51∘ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$. Calculez $\det(A^{-1})$. (la relation de Pascal peut servir...)

---

2. non, vous n'étiez pas obligé de le savoir
3. l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images

◦52◦ ♡ Calculez $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Généralisez en taille $n$, si possible avec démonstration.

---

◦53◦ ♡ Dérivez (pour $b$ fixé non nul) $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+b^2}$.
Calculez $\displaystyle\int_{y=0}^{1}\Big(\int_{x=0}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.dx\Big).dy$ et $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\Big(\int_{y=0}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.dy\Big).dx$.

---

◦54◦ ♡ Calculez le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *(argument géométrique sur des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ « pas si nombreux »).*

---

◦55◦ Calculez $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ a & b & c & d & e-x \end{vmatrix}$ et généralisez en taille $n$. Calculez $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$
Pour le premier, il existe plusieurs approches.

---

◦56◦ On définit : $f = x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$. Calculez $f^{(n)}(0)$ pour $n$ de 0 à 3.
Simplifiez $f(x).f'(x)$ pour tout $x$ réel.
Calculez alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.f^{(n-k)}.f^{(k+1)}$ pour tout entier naturel $n$.
Calculez alors $f^{(n)}(0)$ pour $n$ de 4 à 9.
Montrez que $f^{(2.n+1)}(0)$ est nul pour tout entier naturel $n$.

---

◦57◦ ♣ On pose abusivement $\displaystyle\binom{n}{k} = \prod_{p=1}^{k}\frac{n-p+1}{p}$ le coefficient binomial de Newton *(même pour n non entier, mais quand même pour k entier).*
Quel est le plus grand élément de la liste $\left|\binom{1/3}{k}\right|$ quand $k$ va de 0 à 20 ?
Donnez le développement limité d'ordre 4 en $1/2$ de $x \longmapsto \binom{x}{4}$.
Quel est le module de $\binom{1+i}{4}$. Donnez un équivalent de $\sqrt[n]{\left|\binom{1+i}{k}\right|}$ quand $k$ tend vers l'infini.
♠ Donnez un équivalent de $\left|\binom{1+i}{k}\right|$ quand $k$ tend vers l'infini.
♣$^2$ Il parait que le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $x \longmapsto \binom{2.x}{x}$ est $1+\dfrac{\pi^2}{6}.x^2+2.\zeta(3).x^3+\dfrac{19}{360}.\pi^4.x^4+o(x^4)_{x\to 0}$.
(non, je n'ai pas la preuve).

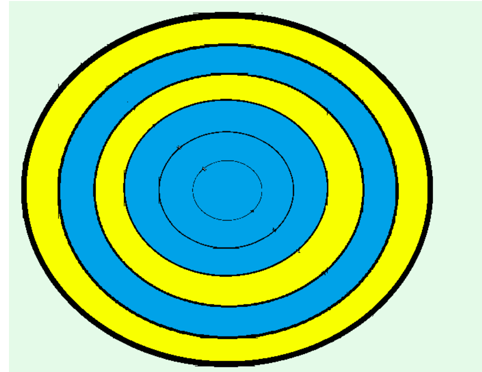
---

◦58◦ Donnez un équivalent en $a.n^\alpha$ de $(n+1)^p-(p+n).n^{p-1}$ quand $n$ tend vers l'infini.

---

◦59◦ Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr(A.^tB)$ est une forme bilinéaire symétrique sur l'espace des matrices de taille 2 sur 3 (la trace est la somme des termes diagonaux, vous devrez vérifier l'existence, mais ne redescendez pas jusqu'aux coefficients pour la bilinéarité, travaillez avec des matrices !).

---



♣ Il fallait découper le gâteau *(ci contre vu du dessus)* en deux parts égales. Au lieu d'effectuer une découpe "en argument", on a effectué une découpe "en module". Sur le schéma, on a des cercles concentriques de rayons entiers 1 à 6. Montrez que les deux parts colorées sont égales.

◦60◦ Re-répartissez ce découpage en deux parts égales.

---

◦61◦ ♡♣ $\mathbb{F}$ est le corps des entiers de `range(7)` pour l'addition et la multiplication modulo 7, et $E$ est $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$. Montrez qu'aucune forme bilinéaire antisymétrique $\phi$ sur $E \times E$ ne vérifie $\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}) = 5$.

Soit $\Phi$ une forme bilinéaire antisymétrique vérifiant $\Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = 5$ calculez $\Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix})$.

Montrez qu'il y a 49 vecteurs dans $E$ et sept forme bilinéaires antisymétriques de $E \times E$ dans $\mathbb{F}$.

Une forme bilinéaire symétrique $\psi$ vérifie $\psi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}) = \psi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = 5$, montrez qu'on peut calculer $\psi(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

---

"Anton Voyl n'arrivait pas à dormir. Il alluma. Son Jaz marquait minuit vingt. Il poussa un profond soupir, s'assit dans son lit, s'appuyant sur son polochon. Il prit un roman, il l'ouvrit, il lut ; mais il n'y saisissait qu'un imbroglio confus, il butait à tout instant sur un mot dont il ignorait la signification.

Il abandonna son roman sur son lit. Il alla à son lavabo ; il mouilla un gant qu'il passa sur son front, sur son cou.

Son pouls battait trop fort. Il avait chaud. Il ouvrit son vasistas, scruta la nuit. Il faisait doux. Un bruit indistinct montait du faubourg. Un carillon, plus lourd qu'un glas, plus sourd qu'un tocsin, plus profond qu'un bourdon, non loin, sonna trois coups. Du canal Saint-Martin, un clapotis plaintif signalait un chaland qui passait.

Sur l'abattant du vasistas, un animal au thorax indigo, à l'aiguillon safran, ni un cafard, ni un charançon, mais plutôt un artison, s'avançait, traînant un brin d'alfa. Il s'approcha, voulant l'aplatir d'un coup vif, mais l'animal prit son vol, disparaissant dans la nuit avant qu'il ait pu l'assaillir."

---

Elle me débecte, cette Edmée ! Elle enlève des enfents, et même des bébés, et les mène chez des gentlemen dérêglés.
Ces chers enges, exempts de péchés tels des chevrettes qend elles nessent, les gentlemen s'en servent perversement. Ces excès entrènent des esclendres. des pères et des mères qe le désenchentement rend déments trènent les gentlemen en terre et les éventrent.
Les fleekmen les séqestrent.
Des déléggés de gens se présentent chez le Préfet et demendent qe des enqêtes révèlent les fets et q'en émergent des pènes sévères et exemplères. Le Préfet en prend le serment.
Mets le Préfet est de ces gentlemen pervers et n'entre en trenses q'entre les fesses de bébés nés ces récents semestres.
Et de frêner les recherches des fleekmen, lesqels se lessent ezément gresser les feet, et d'étrengler l'esclendre, et de fère tère les dépèches de presse, cependent qe, blenche et certène de n'être séqestrée, Edmée persévère en ces menées creemeenelles !

---

◦62◦ Un nombre sur divisible est un nombre « divisible par le nombre de ses diviseurs ».
Montrez qu'il y a exactement 6 nombres sur divisibles ayant justement 70 diviseurs.
Montrez que tout nombre sur-divisible impair est congru à 1 modulo 8.
Montrez qu'un nombre sur-divisible ne peut pas valoir 6 modulo 8.

---

Bonus : Ces ma**c**aques font malo**tr**us. Il bou**cl**e l'é**d**ito. Il n'est pas **u**tile au p**os**te. Ote ta lam**p**e que je puisse **gu**etter. Elle aime les b**oi**tes de Hongr**ie**. S**able** min**us**. La pinède sent la b**r**aise. Oh le **s**ot **gr**e**ff**ier.

---

Bonus :
Admirez les **p**arts des **d**îneurs. Treize à **t**able et pleins de **f**ric. Elle bou**d**e le **ph**are. Ce **m**alus **f**ou mérite-t-il une

**t**elle pu**b** ? Ils aiment les cr**û**s coûteux. Ils **d**înent avec des ra**p**aces. **Cu**vées de **prix**. C'est un expert en **g**affes avec **p**rojet. Ils aiment les **m**enus **c**achés. Des **s**inistres **m**astiquent.

Bonus :
Ce gant est assoup**Li**. Il est **PR**émuni face aux **D**outes. Sans **P**èze, il manque de **B**ouffe. Les vieux **M**asques évitent la **FL**otte. Pas de **B**ouffe, pas de **T**abac. On manque de **CH**aises pour attirer les cor**B**eaux. Ne faites pas cra**M**er votre **CH**ambre. Ces **SP**oliés sont pleins de **G**ermes. J'ai **CHI**né un gros **CALI**bre. Les **B**ars s'en**D**ettente.

---

◦63◦ ♡ Déterminant de Menger. Montrez que $\begin{vmatrix} AB^2 & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} & AC^2 \end{vmatrix}/4$ est le carré de l'aire du triangle *(indication : $\det(M.{}^tM)$).*

Montrez que $\begin{vmatrix} AB^2 & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} & AC^2 & \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} & \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} & AD^2 \end{vmatrix}/36$ est le carré du volume du tétraèdre $(A,\ B,\ C,\ D)$. *Indication : $\det(M)^2 = \det({}^tM.M)$.*

---

◦64◦ ♡ On définit $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & x^3 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & x^4 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & x^5 \end{vmatrix}$. Calculez la petite différence $P(x+1) - P(x)$.

Enfant, Elise étudia en Espagne, en Ethyopie équatoriale, en Erythré (Erasmus économique et étrangement écologique).
Ensuite, euphorique et enamourée, elle épousa Emile, éleveur élégant et estionnien, égoïste et ex-éphèbe épilé.
Elle encouragea énervée, enflammée et exacerbée : "Ecoute, Emile, empale, enfourne, enfonce, effeuille... encore, encore, encore ! "
Emile étourdi éructa et éjacula en elle, et Eugéne, extraverti équivoque, enflamé encula Emile... (eh eh !)
Elle estima être enceinte (et enfanta en Ecosse).
Elle éleva enfant et en équipe (Emile en éducateur euclidien, et Eugène en enseignant élégiaque).

---

◦65◦ Déterminez le noyau de $P(X) \longmapsto P(+1) - P(X)$ sur l'espace vectoriel des polynômes réels.

---

◦66◦ $a$, $b$ et $c$ sont trois complexes distincts. Montrez que $\delta(x)$ est une fonction du premier degré en $x$ *(pensez à combiner les colonnes)*. Calculez sa valeur pour $x$ égal à $-b$, puis pour $x$ égal à $-c$. Calculez $\Delta_5$. Écrivez un script **Python** qui prend en entrée trois réels $a$, $b$, $c$ et un entier $n$ et retourne la matrice de cette forme en taille $n$.

$\delta(x) = \begin{vmatrix} a+x & b+x & b+x & b+x \\ c+x & a+x & b+x & b+x \\ c+x & c+x & a+x & b+x \\ c+x & c+x & c+x & a+x \end{vmatrix}$, $\Delta_5 = \begin{vmatrix} a & b & b & b & b \\ c & a & b & b & b \\ c & c & a & b & b \\ c & c & c & a & b \\ c & c & c & c & a \end{vmatrix}$.

---

◦67◦ On donne dans $\mathbb{R}^3$ : $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Résolvez le système d'équations $\left\{ \begin{array}{ccccc} \overrightarrow{u} & \wedge & \overrightarrow{a} & = & -\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{u} & \wedge & \overrightarrow{b} & = & 2.\overrightarrow{c} \end{array} \right.$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$.

---

◦68◦ ♡ $\overrightarrow{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \\ \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Retrouvez les coefficients qui manquent sachant que $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$ est liée par la relation $2.\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$.

---

◦69◦ On va étudier le déterminant de $\begin{pmatrix} -b.c & b.c+b^2 & b.c+c^2 \\ a.c+a^2 & -a.c & a.c+c^2 \\ a.b+a^2 & a.b+b^2 & -a.b \end{pmatrix}$, et même généraliser, autrement qu'en développant comme un bourrin.

◇ 0 ◇ On se donne trois réels non tous nuls $a$, $b$ et $c$. On pose alors $s = a+b+c$, $\sigma = a.b+a.c+b.c$, $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

et $W = \begin{pmatrix} s-a \\ s-b \\ s-c \end{pmatrix}$, puis $M = W.({}^tU)$ . Calculez ${}^tU.W$ à l'aide de $s$ et $\sigma$. Vérifiez que $M$ est une matrice carrée, et montrez que $(M^2,\ M)$ est liée *(inutile d'en revenir aux neuf coefficients, c'est par associativité)*.

◇ 1 ◇ On pose $K = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid {}^tU.X = 0\}$. Montrez que $K$ est un espace vectoriel et donnez sa dimension.

◇ 2 ◇ On pose $H = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid M.X = 2.\sigma.X\}$. Montrez que $H$ est un espace vectoriel contenant $\begin{pmatrix} b+c \\ a+c \\ a+b \end{pmatrix}$.

◇ 3 ◇ Démontrez $H \cap K = \{0_3\}$.Calculez $\dim(H)$. Déduisez $H \oplus K = \mathbb{R}^3$.

◇ 4 ◇ Déduisez que $M$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.\sigma \end{pmatrix}$.

◇ 5 ◇ Calculez alors $\det(M)$ et $\det(M - \sigma.I_3)$. Concluez.

◇ 6 ◇ Complétez et justifiez

$$\begin{vmatrix} & b^2+b.c+b.d & c^2+b.c+c.d & b^2+b.d+c.d \\ a^2+a.c+a.d & -a.c-a.d-c.d & & d^2+a.d+c.d \\ a^2+a.b+a.d & b^2+a.b+b.d & -a.b-a.d-b.d & \\ a^2+a.b+a.c & & c^2+a.c+b.c & -a.b-a.c-b.c \end{vmatrix} = -(a.b+a.c+\ldots+b.d+c.d)^4.$$