



○◦ Résolvez pour a, b et c complexes distincts donnés : $\begin{cases} x + a.y + a^2.z = a^3 \\ x + b.y + b^2.z = b^3 \\ x + c.y + c^2.z = c^3 \end{cases}$ d'inconnues (x, y, z) .

Le système $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 \\ b^3 \\ c^3 \end{pmatrix}$ a pour matrice une matrice de VanDerMonde inversible.

Les formules de Cramer donnent par exemple

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{a.b.c. \cdot \begin{vmatrix} a^2 & 1 & a \\ b^2 & 1 & b \\ c^2 & 1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = a.b.c. \cdot \frac{-\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & b^2 & b \\ 1 & c^2 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = a.b.c$$

puis $y = -(a.b + a.c + b.c)$ et

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}}{(c-a).(c-b).(b-a)} = \frac{\begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}}{(c-a).(c-b).(b-a)} = \frac{(b-a).(c-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & b^2+a.b+a^2 \\ 1 & c^2+a.c+c^2 \end{vmatrix}}{(c-a).(c-b).(b-a)} = \dots = a+b+c$$

On peut aussi utiliser la méthode de Gauss : on écrit simplement

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{array} \right]$$

on combine les lignes $L_2 - L_1, L_3 - L_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \end{array} \right]$$

on divise par $b-a$ et $c-a$ sachant $\frac{x^3-y^3}{x-y} = x^2 + x.y + y^2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+a.b+a^2 \\ 0 & 1 & c+a & c^2+a.c+a^2 \end{array} \right]$$

on combine encore :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+a.b+a^2 \\ 0 & 0 & c-b & c^2+a.c-b^2-a.b \end{array} \right]$$

on divise par $c-b$, on tient z :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+a.b+a^2 \\ 0 & 0 & 1 & c+b+a \end{array} \right]$$

on remonte par combinaisons $y = (b^2 + a.b + a^2) - (a+b).(a+b+c) = -a.b - a.c - b.c$ et on termine avec x .

On peut (?) aussi penser au polynôme $X^3 - (x+y.X+z.X^2)$.

Si x, y et z sont les racines de notre système, alors on a $P(a) = P(b) = P(c) = 0$.

C'est donc qu'on a $P(X) = (X-a).(X-b).(X-c) = 0$.

En développant et identifiant les coefficients

$$x = a + b + c$$

$$y = -(a.b + a.c + b.c)$$

$$z = a.b.c$$

◦1◦

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Donnez le polynôme caractéristique de A et son spectre ^a.

Montrez que K , K' et N sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$K_A = \{U \in \mathbb{R}^3 \mid A.U = 0_3\}$
 $K'_A = \{U \in \mathbb{R}^3 \mid A^2.U = 0_3\}$. Donnez leurs dimensions.
 $N_A = \{U \in \mathbb{R}^3 \mid A.U = 9.U\}$

Lesquelles de ces propositions sont vraies

$\mathbb{R}^3 = K' \oplus N$	$\mathbb{R}^3 = K' + N$
$\mathbb{R}^3 = K \oplus N$	$\mathbb{R}^3 = K' + N$

?

Donnez un polynôme de degré le plus petit possible vérifiant $P(A) = 0_{3,3}$.

Traitez les mêmes questions avec B à la place de A .

Placez les dans le tableau : $A, B, I_3, O_{3,3}$

	diagonalisable	non diagonalisable
invertible		
non invertible		

a. $\chi_A(X) = \det(A - X.I_3)$ est le polynôme caractéristique ; ses racines sont le spectre

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ La trace vaut 9, le déterminant est nul (colonnes égales !), et la somme des mineurs de taille 2

vaut $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, ce qui fait peu.

Le polynôme caractéristique est $X^3 - 9.X$.

Le spectre est $[0, 0, 9]$ (0 est racine double).

Tout ensemble de la forme $\{U \in \mathbb{R}^3 \mid M.U = 0_3\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On y trouve le vecteur nul : $M.U = 0_3$.

Si U et v sont dans cet ensemble, et si λ et μ sont réels, alors on a $M.(\lambda.U + \mu.V) = \lambda.M.U + \mu.M.V = 0_3$.

On peut appliquer ce résultat à $M = A$ (c'est K) ou $M = A^2$ (c'est K') ou $M = A - I_3$ (pour N).

On fera de même pour B .

Sinon, sans effort, on détermine explicitement K , et on le met sous la forme $Vect(\dots)$ et c'est bien un espace vectoriel !

$$\begin{aligned} K &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2.y + 2.z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -2.y - 2.z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2.y + 2.z = 0 \right\} \\ &= Vect\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Sachant $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 18 \\ 18 & 36 & 36 \\ 18 & 36 & 36 \end{pmatrix}$, on a $K' = K$, aussi de dimension 2.

Enfin, $N = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ en résolvant le système dégénéré

$$\begin{cases} -8.x & +2.y & +2.z & = & 0 \\ 2.x & -5.y & +4.z & = & 0 \\ 2.x & +4.y & -5.y & = & 0 \end{cases}$$

$$L_1 = -2.L_2 - 2.L_3$$

On résume

espace	équations	base	dimension
K	$x + 2.y + 2.z = 0$	$\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$	2
$K' = K$	$x + 2.y + 2.z = 0$	$\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$	2
N	$\begin{cases} 4.x & -y & -z & = 0 \\ 2.x & -5.y & +4.z & = 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	1

On constate $K \cap N = \{ \vec{0} \}$. On a donc $\dim(K \cap N) = 0$ puis $\dim(K + N) = \dim(K) + \dim(N) - 0 = 3$.

Ayant déjà l'inclusion, on déduit $K + N = \mathbb{R}^3$. Comme l'intersection est réduite à $\vec{0}$, la somme est directe : $K \oplus N = \mathbb{R}^3$.

$K_A + N_A = \mathbb{R}^3$	$K_A \oplus N_A = \mathbb{R}^3$	$K'_A + N_A = \mathbb{R}^3$	$K'_A \oplus N_A = \mathbb{R}^3$
oui	oui	oui	oui

Pour B on recommence de même ou presque : polynôme caractéristique $X^3 - 9.X$ et spectre $[0, 0, 9]$.

On constate $B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 18 \\ 18 & 36 & 36 \\ 18 & 36 & 36 \end{pmatrix} = A^2$.

espace	équations	base	dimension
K_B	$\begin{cases} 5.x & +4.y & -2.z & = 0 \\ -x & +y & +4.z & = 0 \end{cases}$	$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$	1
$K'_B = K_A$	$\{ x + 2.y + 2.z = 0 \}$	$\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$	2
N	$\begin{cases} -4.x & +4.y & -2.z & = 0 \\ -2.x & -7.y & +8.z & = 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	1

On a des espaces déjà croisés, certaines sommes, directes ou non sont déjà obtenues. Pour d'autres, la dimension suffit à obtenir $K_B + N_B \neq \mathbb{R}^3 + N_B \neq \mathbb{R}^3$.

$K_B + N_B = \mathbb{R}^3$	$K_B \oplus N_B = \mathbb{R}^3$	$K'_B + N_B = \mathbb{R}^3$	$K'_B \oplus N_B = \mathbb{R}^3$
non, dim 2	non, je l'ai déjà dit	oui	oui

Vous voulez des polynômes annulateurs : A et I_3 sont indépendantes, mais $A^2 = 9.A$.

B est non colinéaire à I_3 et B^2 n'est pas combinaison de I_3 et B . En revanche, $B^3 = 9.B^2$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 18 \\ 18 & 36 & 36 \\ 18 & 36 & 36 \end{pmatrix} \text{ et } B^3 = \begin{pmatrix} 81 & 162 & 162 \\ 162 & 324 & 324 \\ 162 & 324 & 324 \end{pmatrix}$$

Polynômes annulateurs :	$X^2 - 9.X$	$X^3 - 9.X^2$
	$A^2 = 9.A$	$A^3 = 9.B^2$

La matrice I_3 est diagonalisable. Déjà diagonale. Et elle est inversible.

La matrice $0_{3,3}$ est diagonalisable, déjà diagonale. Si on y tient : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 0 \end{pmatrix} \cdot (I_3)^{-1}$. Mais pas très inversible.

Ni A ni B n'est inversible.

Mais A est diagonalisable. On a une matrice diagonale : $\begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix}$, imposée par le polynôme caractéristique.

On cherche P avec des vecteurs vérifiant $M.U = 0.U$, $M.V = 0.V$ et $.W = 9.W$. Et on veut qu'ils forment une famille libre.

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ on a bien}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix}$$

Si B était diagonalisable, ce serait en la même matrice D . Mais on n'arrive pas à trouver U et V vérifiant $B.U = 0.U$ et $B.V = 0.V$ et formant une famille libre. La dimension de K_B n'est pas suffisante.

D'ailleurs, si B se diagonalisait, on aurait $B = Q \cdot \begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix} \cdot Q^{-1}$ puis $B^2 = Q \cdot \begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 81 \end{pmatrix} \cdot Q^{-1} = 9..B$, ce qui n'est pas le cas...

Pour prolonger l'exercice : trouvez Q vérifiant $B.Q = Q.D'$ avec $D' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix}$ (un petit 1, appelé terme de trigonalisation de Jordan, en plus).

	diagonalisable	non diagonalisable
inversible	$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & o & o \\ o & 1 & o \\ o & o & 1 \end{pmatrix}$	
non inversible	$O_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 0 \end{pmatrix}, A = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$	$B = Q \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix} \cdot Q^{-1}$

Et si vous voulez compléter la case qui manque : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & o \\ o & 1 & o \\ o & o & 1 \end{pmatrix}$ par exemple.

20

♥ a, b, c et d sont quatre réels. Calculez les déterminants de VanDerImmonde :

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$
--	--	--	--

Pensez à un déterminant de VanDerMonde, mais de taille 5 : $VdM(a, b, c, d, x)$.

On connaît la formule générale :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (x-a). & (x-b). & (x-c). & (x-d) \\ (d-a). & (d-b). & (d-c). & \\ (c-a). & (c-b). & & \\ (b-a) & & & \end{matrix} \begin{matrix} Van \\ Der \\ Monde \end{matrix}$$

On l'écrit même $\lambda.(x-a).(x-b).(x-c).(x-d)$ avec $\lambda = \frac{(d-a).(d-b).(d-c).}{(c-a).(c-b).(b-a)}$ (produit de six termes).

Mais en développant le déterminant par rapport à sa dernière colonne, c'est aussi

$$x^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} - x^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} + x^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

On peut alors identifier les coefficients des polynômes (après avoir développé $(x-a).(x-b).(x-c).(x-d)$ par les formules de Viète) :

x^4		$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} (d-a). & (d-b). & (d-c). \\ (c-a). & (c-b). \\ (b-a) \end{matrix}$
x^3		$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} (d-a). & (d-b). & (d-c). \\ - (c-a). & (c-b). & \\ (b-a) \end{matrix} .(a+b+c+d)$
x^2		$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} (d-a). & (d-b). & (d-c). \\ (c-a). & (c-b). \\ (b-a) \end{matrix} \times \begin{pmatrix} a.b & +a.c & +a.d \\ & b.c & +b.d \\ & & +c.d \end{pmatrix}$
1		$\begin{matrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} (d-a). & (d-b). & (d-c). \\ (c-a). & (c-b). \\ (b-a) \end{matrix} .a.b.c.d$

Deux d'entre eux sont déjà « de VanDerMonde », quitte pour l'un à factoriser chaque colonne.

3. Résolvez $\vec{a} \wedge (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = (\vec{i} + \vec{j} - 2.\vec{k})$ et $(\vec{a}, \vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{k})$ est liée.

A faire.

4. Quels sont les vecteurs de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ que vous pouvez utiliser pour compléter $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ en base de $\mathbb{R}^3$? Lesquels donnent une base de même orientation que la base canonique ?

Pour passer d'une famille libre de deux vecteurs à une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ il faut un vecteur et un seul.

Et il suffit que ce vecteur ne soit pas coplanaire avec les deux premiers.

La condition devient « déterminant non nul ».

Et pour que la base soit directe, la condition devient « déterminant strictement positif ».

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
4	-1	0	16	non !	0	0
oui	oui	non	oui		non	non
directe			directe			

Dans la dernière, le vecteur ajouté est colinéaire au premier.

Il y a un cas où on allonge avec « carrément le vecteur nul ».

Sinon, on a aussi $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2. \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, ce qui élimine bien $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$$2. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 1 \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quatre équations, quatre inconnues, on va s'en tirer :

$$2. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et la voilà liée.

On peut alors vérifier une chose : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ ne veut rien dire

$$\text{Mais } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

◦5◦

♥ Montrez que M et tM ont le même spectre. (racines de $\det(M - X.I_n)$).

Normal, elles ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes racines pour ce polynôme.

L'un est $\det(M - \lambda.I_n)$ et l'autre $\det({}^tM - \lambda.I_n)$.

Et une matrice a le même déterminant que sa transposée.

En revanche, on ne sait pas passer des vecteurs propres de M à ceux de tM .

◦6◦

a, b, c et d sont quatre entiers tirés au hasard entre 0 et 4. Quelle est la valeur maximale de $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a & a^3 \\ 1 & b^2 & b & b^3 \\ 1 & c^2 & c & c^3 \\ 1 & d^2 & d & d^3 \end{vmatrix}$?

C'est l'opposé d'un déterminant de VanDerMonde (en permutant des colonnes).

On l'écrit $-(b-a) \cdot (c-a) \cdot (d-a) / ((c-b) \cdot (d-b) \cdot (d-c))$. Pour le maximiser, on va éviter d'en prendre deux égaux.

On a donc quatre nombres pour finalement cinq entiers possibles.

C'est donc qu'on en évite un et un seul. Par exemple $0 < 1 < 3 < 4$. Ou $0 < 1 < 2 < 4$.

Les rôles étant symétriques au signe près à la fin, on va prendre $a < b < c < d$.

Si d vaut 3 et non 4, on le fait passer à 4, les distances augmentent, et le déterminant grandit.

De même, si a ne vaut pas 0 (il vaut donc 1), on peut agrandir en prenant $a = 0$.

Il ne reste que quelques possibilités à tester : $0 < 2 < 3 < 4$, $0 < 1 < 3 < 4$ ou $0 < 1 < 2 < 4$.

C'est la solution $0 < 1 < 3 < 4$ qui l'emporte. Le déterminant vaut 72. Les autres choix donnent 48.

◦7◦

Inversez ces trois matrices là $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ (calcul direct)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix} \text{ Comment je l'ai eue ? par cofacteurs et déterminant. Ou en tâtonnant.}$$

Pour la dernière, une piste agréable est de l'élever au carré :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pas loin.

On sort un 4 et on multiplie par une matrice de permutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vient comme inverse « naturel ».

Et on peut généraliser en dimension plus grande.

On peut dire qu'inverser la matrice revient à résoudre

$$\begin{array}{cccccc} x & +y & +z & +t & = & a \\ x & +i.y & -z & -i.t & = & b \\ x & -y & +z & -t & = & c \\ x & -i.y & -z & +i.t & = & d \end{array} \quad \text{d'inconnues } x, y, z \text{ et } t.$$

Et ce système se résout aussi sans inverser la matrice, mais en sommant les lignes : $x + z = \frac{a+c}{2}$ par exemple, et en continuant avec de bonnes idées comme ça.

8.

Laquelle de ces formules est la bonne :

$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \times \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$	$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{c}) \times \vec{c}$
$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{c}) \times \vec{b}$	$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{c}) \times \vec{c}$

On se donne deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de norme 1. On définit la suite $(\vec{u}_n)_n$ par $\vec{u}_0 = \vec{a}$ et $\vec{u}_1 = \vec{b}$ et $\vec{u}_{n+2} = \vec{u}_n \wedge \vec{u}_{n+1}$. Montrez que la suite converge dans le cas $\vec{a} = \vec{b}$.

La suite converge-t-elle dans le cas $\vec{a} = \vec{i}$ et $\vec{b} = \vec{j}$?

Calculez les six premiers termes de la suite (on posera $\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha$).

Dans quel cas converge-t-elle ?

A faire.

9.

Duquel des deux plans le point $M(1, 1, 4)$ est il le plus proche :

plan d'équation $x + y - 3z = 0$	plan passant par $A(1, 3, 2)$, $B(0, 2, 1)$ et $C(2, 0, 1)$
----------------------------------	--

Formule clef en main pour la distance point plan quand on a l'équation : $\frac{a.x + b.y + c.z + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

L'équation du premier plan est connue. Pour le second, on développe

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y-3 & -1 & -3 \\ z-2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad (\text{c'est } \det(\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}))$$

et on lui demande d'être nul.

On trouve l'équation $-x - y + 2z = 0$.

Mais comment on rédige quand on est matheux ? On propose $-x - y + 2z = 0$. C'est l'équation d'un plan.

Il passe par A (vérifiez), par B (idem) et par C ($-2 - 0 + 2.1 = 0$).

C'est donc le plan $(A B C)$.

C'est mille fois plus intelligent dans la copie que de rédiger une page de calcul.

Certes, ça ne montre pas au correcteur « m'sieur, m'sieur, regarde, j'ai tout retenu de ma classe de première », mais qu'est ce qu'il s'en fout... Pour lui, c'est aussi passionnant que si vous lui disiez « j'ai retenu la liste des dates de naissance de tous les rois de France depuis Henri 4 ».

Reste à mettre dans l'équation $(1, 1, 4)$.

plan d'équation $x + y - 3z = 0$	plan passant par $A(1, 3, 2)$, $B(0, 2, 1)$ et $C(2, 0, 1)$
	$x + y - 2z = 0$
distance = $\frac{1+1-12}{\sqrt{1+1+9}}$	$\frac{1+1-8}{\sqrt{1+1+16}}$

La fin n'est que produit en croix et élévation au carré ?

Pardon ! Pour comparer $\frac{10}{\sqrt{11}}$ et $\frac{6}{\sqrt{18}}$ vous prenez la calculatrice !

Prenez plutôt la porte et ne revenez plus me voir, allez finir vos jours en amphi 21.

Il suffit de comparer $\frac{100}{11}$ et $\frac{36}{18}$ et donc de comparer 1800 et 11×36 .

Où voyez vous une calculatrice ?

Oui, vous pouvez aller finir vos jours en amphi 21, je viendrai vous y rejoindre à la fin de l'année pour les cours

1. non, pas $\frac{a.x + b.y + c.z + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$, d est justement un terme de distance déjà

de maths de juin...

◦10◦

Exprimez $\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \sin(a) \\ 1 & \cos(b) & \sin(b) \\ 1 & \cos(c) & \sin(c) \end{vmatrix} / 8$ comme produit de trois sinus
(autre que $\sin(3\pi/2) \cdot \sin(-\pi/2) \cdot \sin(\text{Arcsin}(\det(\dots)))$ évidemment.

On va combiner les lignes et faire de la trigonométrie :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \sin(a) \\ 1 & \cos(b) & \sin(b) \\ 1 & \cos(c) & \sin(c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \sin(a) \\ 0 & \cos(b) - \cos(a) & \sin(b) - \sin(a) \\ 0 & \cos(c) - \cos(a) & \sin(c) - \sin(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(b) - \cos(a) & \sin(b) - \sin(a) \\ \cos(c) - \cos(a) & \sin(c) - \sin(a) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 \cdot \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2} & -2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2} \\ -2 \cdot \sin \frac{a+c}{2} \cdot \sin \frac{a-c}{2} & -2 \cdot \cos \frac{a+c}{2} \cdot \sin \frac{a-c}{2} \end{vmatrix}$$

On peut sortir un facteur -2 et même deux. Puis on sort $\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{a-c}{2}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \sin(a) \\ 1 & \cos(b) & \sin(b) \\ 1 & \cos(c) & \sin(c) \end{vmatrix} = 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-c}{2}\right) \cdot \begin{vmatrix} \sin \frac{a+b}{2} & \cos \frac{a+b}{2} \\ \sin \frac{a+c}{2} & \cos \frac{a+c}{2} \end{vmatrix}$$

Mais la formule finale en $\sin \cdot \cos - \cos \cdot \sin$ donne le sinus d'une différence :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \sin(a) \\ 1 & \cos(b) & \sin(b) \\ 1 & \cos(c) & \sin(c) \end{vmatrix} = -4 \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-c}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{b-c}{2}\right)$$

◦11◦

On veut que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ d \\ e \end{pmatrix}\right)$ n'engendre qu'un plan. Donnez l'équation de celui ci.

Il faut et il suffit que ces quatre vecteurs soient coplanaires.

Mais déjà, le premier et le troisième sont non colinéaires et engendrent un plan.

Il faut et il suffit que le second soit combinaison de « premier et troisième »

le dernier soit combinaison de « premier et troisième »

Il existe α, β, α' et β' vérifiant :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ d \\ e \end{pmatrix} = \alpha' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \beta' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

Quelques valeurs sont vite imposées :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ d \\ e \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \beta' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

Après ce sont des systèmes.

$$\text{On peut aussi imposer la coplanarité ainsi : } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & a & c \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ d & 1 & 1 \\ e & a & c \end{vmatrix} = 0.$$

On peut aussi se donner l'équation d'un plan contenant comme par hasard deux des vecteurs, puis imposer aux deux autres de vérifier cette équation, ce qui répond en même temps à la dernière question.

◦12◦

♥ On pose $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Trouvez la matrice A vérifiant $A \cdot \vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{u}$ pour tout vecteur $\vec{u}$. Calculez son spectre (dans $\mathbb{C}$ si nécessaire).

$$\text{En posant } \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ on trouve } \vec{a} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} b.z - c.y \\ c.x - a.z \\ a.y - b.x \end{pmatrix}$$

$$\text{La matrice qui transforme } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} -c.y + b.z \\ c.x - a.z \\ -b.x + a.y \end{pmatrix} \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

(et d'avoir écrit le vecteur sous une forme un peu intelligente et aérée a simplifié le travail !).

On écrit le polynôme caractéristique $\det(A - \lambda.I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -c & b \\ c & -\lambda & -a \\ -b & a & -\lambda \end{vmatrix}$.

On le calcule (soit ainsi, soit par trace, déterminant, somme des mineurs 2 sur 2) :
 $\lambda^3 - (a^2 + b^2 + c^2).\lambda$

Une racine est 0 (de vecteur propre $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, devinez vous pourquoi ?)

et les deux autres sont $i.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ et $-i.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (complexes conjuguées, c'est un peu normal).

◦13◦

Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 (la comatrice est la matrice des cofacteurs pondérés).

Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. En taille 2, c'est facile : $\text{Com}(\text{Com}(A)) = A$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour comatrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Pardon ? Je pars dans le mauvais sens ? A voir...

Regardons alors « par hasard » la comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On trouve $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. C'est carrément raté pour les signes.

Alors on tente son opposé : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui a pour comatrice... $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ encore...

(normal, $\text{Com}(-A) = \text{Com}(A)$ en taille 3 car on a des déterminants de taille 2, pour lesquels le signe moins ne change rien).

D'où l'idée de prendre $\begin{pmatrix} -i & i & 0 \\ 2i & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$. Sa comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Mais vous vous dites que faire appel à i de carré -1 , c'est tricher.

Pas tant que ça. Si on reste sur $\mathbb{R}$, il n'y aura pas de matrice dont la comatrice sera $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Je vous le prouve. Supposons $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Com}(A)$.

La relation $A.^t(\text{Com}(A)) = \det(A).I_3$ donne, en passant au déterminant $\det(A).\det(\text{Com}(A)) = (\det(A))^3$ puis $\det(\text{Com}(A)) = (\det(A))^2$.

Le déterminant d'une comatrice est (en taille 3) toujours un carré.

Mais $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a un déterminant négatif. Elle n'est la comatrice de personne sur $\mathbb{R}$.

◦14◦

Calculez $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Comme on peut remplacer une colonne d par une combinaison $a + b + c + d$ sans modifier le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 12 \\ 9 & 2 & 0 & 12 \\ 1 & 9 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

On peut ensuite soustraire une ligne (*la première*) sur les autres et trouver 12.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière colonne, le déterminant est de taille 3 et on fait appel à Pierre-Frédéric Sarrus. On trouve -5904

L'autre se calcule de la même façon et donne 5904 . Il suffit d'ailleurs de remettre les colonnes dans le « bon » ordre pour passer de l'un à l'autre.

◦15◦

Complétez cette matrice de VanDerMonde, calculez son déterminant, et complétez son inverse, puis calculez

le déterminant de son inverse. $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & & \\ & 4 & & 2 & 2 \\ 1 & 1 & & 6 & \\ 1 & 2 & 2 & & \end{pmatrix}$, $V^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & & 1 & 1 \\ & 2 & 0 & & 5 \\ 3 & & & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 3 & \end{pmatrix}$. Pardon ? Il y a un truc ? Oui. On

travaille sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 7.

Oui, $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Certaines colonnes sont déjà remplies.

Pour d'autres, on complète avec les puissances de 5.

Pour d'autres, on se demande comment passer de 2 à 6.

Enfin, la dernière pourrait contenir les puissances de 3, mais on lui demande d'être inversible, cette matrice. Il n'y a donc pas deux colonnes égales.

Ensuite, comme on nous offre plusieurs coefficients, l'inversion de V se fait juste en complétant les cases :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◦16◦

♥ Un dé à six faces non équilibré porte la valeur 1 sur deux de ses faces, la valeur 2 sur deux autres et la valeur 3 sur les deux dernières (*c'est finalement ce qu'on pourrait appeler un dé à trois faces et il est non équilibré je le rappelle*).

On lance ce dé, l'espérance du résultat est $47/22$. Écrivez l'équation linéaire concernant $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.

La variance est $365/484$ (*rappel : $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$*).

Complétez : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$. Calculez alors les trois probabilités.

Que serait ce problème avec un dé à quatre faces numérotées a , b , c et d ? Que vient faire ici VanDerMonde ?

Notons p_k la probabilité $P(X = k)$.

Comme l'univers se réduit à trois états, on a $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Le calcul de l'espérance donne $1.p_1 + 2.p_2 + 3.p_3 = E(X)$ (moyenne).

De manière similaire $1.p_1 + 4.p_2 + 9.p_3 = E(X^2)$ (moyenne des carrés).

Dans nos moyennes, il n'y a pas de dénominateur, puisque $p_1 + p_2 + p_3$ vaut 1.

Par définition de la variance : $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (en fait $Var(X) = E((X - E(X))^2)$ mais ça revient au même).

Il suffit de faire ensuite passer de l'autre côté.

On met bout à bout nos informations et on écrit sous forme de système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 47/22 \\ 117/22 \end{pmatrix}$$

Quitte à inverser la matrice de VanDerMonde :

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 47/22 \\ 117/22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 47/22 \\ 117/22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/22 \\ 5/22 \\ 10/22 \end{pmatrix}$$

Bonne nouvelle, les probabilités sont positives.

◦17◦

a, b, c et d sont quatre réels, montrez que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) & \cos(d) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) & \cos(2.d) \\ \cos(3.a) & \cos(3.b) & \cos(3.c) & \cos(3.d) \end{vmatrix}$ est égal à $8.(\cos(d) - \cos(c)).(\cos(d) - \cos(b)) \dots$ (complétez). Indication : Tchebychev, combinaisons et VanDerMonde.

◦18◦

Mario et Luigi font des courses en kart (je suis influencé par les jeux de mon fils), à vitesse constante. Quand ils font la course sur un kilomètre, Mario arrive alors que Luigi est encore à cinquante mètres de l'arrivée. Ils recommencent, mais pour rendre le jeu équitable, Mario se recule de cinquante mètres par rapport à la ligne de départ. Qui gagne ? De combien ?

On peut tout mettre en équation, avec deux vitesses v_m et v_l , une distance 1 et un temps T .

On peut aussi dire que pour la seconde course, après un temps égal à celui de la première, Mario a parcouru un kilomètre, et Luigi cinquante mètres de moins... Ils sont à égale distance de la ligne : cinquante mètres.

Mais Mario continue à aller le plus vite. Il va gagner.

De combien ?

Sur un kilomètre, il mettait cinquante mètres dans la vue à Luigi.

Sur cinquante mètres (vingt fois moins), il va lui mettre vingt fois moins...

Ce qui fait deux mètres cinquante...

Mario - Départ première course
Luigi - Départ première course

Arrivée première course (temps T)

- Départ deuxième course

Après un temps T

il leur reste
50 mètres

et Mario est toujours
plus rapide que Luigi

Arrivée de la deuxième course. mario gagne de...

Et si vous aimez • l'univers de Mario Bros

• les films réalistes et sociaux des frères Dardenne et du cinéma français

• le travail de Yes Vous aime (Broute, Bertrand Usclat et ici studio Bagel) dans le domaine du pastiche :

<https://www.youtube.com/watch?v=jnGftcdnIB4>

◦18◦

♥ Dans le plan usuel, on donne $A(1, 4)$, $B(5, 2)$ et $C(4, 5)$. Donnez l'équation de la droite (AB) . Mesurez la distance de C à la droite (AB) . Trouvez les points D et E de (AB) tel que $[C, D]$ et $[C, E]$ découpent (A, B, C) en trois triangles d'aires égales.

Pour l'équation de (AB) , on utilise $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$. On trouve $x + 2.y = 9$

On ne peut pas écrire $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ y-4 & -2 \end{vmatrix} = -2.(x-1) - 4.(y-4) = -2.x - 4.y + 18 = 0$ comme le font les élèves qui confondent raisonnements mathématiques et application numérique de physique. Dans cet enchainement, les premières égalités sont vraies que le point soit ou non sur (AB) et seule la dernière devient une équation. Je vais finir par flinguer direct.

On rédige donc $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ y-4 & -2 \end{vmatrix} = -2.(x-1) - 4.(y-4) = -2.x - 4.y + 18$ (sans = 0).

On ajoute que l'équation $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$ devient $-2.x - 4.y + 18 = 0$

L'équation obtenue est bien une équation de droite, et elle est vérifiée par A et B, c'est la bonne.

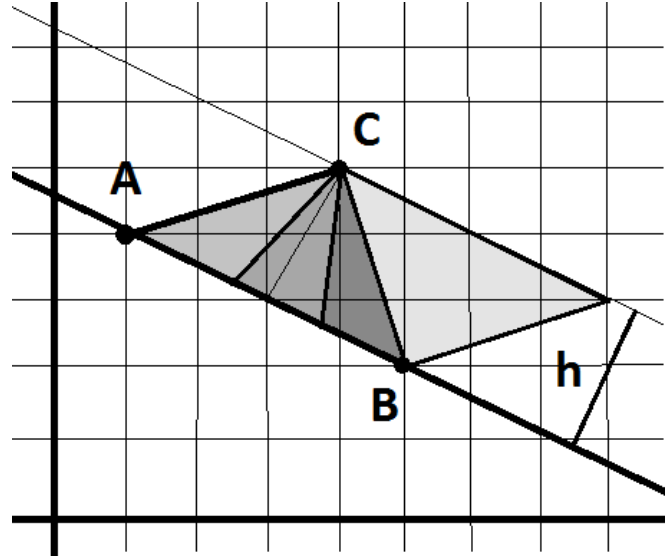
Pour la distance de C à la droite, on calcule l'aire du parallélogramme : $\det(\vec{AC}, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -10$.

On divise par la longueur de la base pour récupérer sa hauteur :

$$\text{dist}(C, (AB)) = \frac{|-10|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{20}} \text{ qu'on écrira}$$

$$\boxed{\text{dist}(C, (AB)) = \sqrt{5}}$$

On peut aussi par chance ici projeter orthogonalement C en H(3, 3) car le triangle est isocèle.



Pour ce qui est des points découpant en trois triangles d'aires égales, il suffit de diviser la base par 3, la hauteur restera la même...

$$A + \frac{\vec{AB}}{3} \text{ et } A + 2 \cdot \frac{\vec{AB}}{3} \text{ auront pour coordonnées } \left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right) \text{ et } \left(\frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

◦19◦

♥ Résolvez	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 5 & 6 \\ b & 4 & 5 \end{vmatrix}$	d'inconnues réelles a et b.
------------	---	-----------------------------

$$24 + 15.a - 25 - 12.a \text{ doit être égal à } 25 + 12.b + 12.a - 15.b - 24 - 10.a$$

$$\text{La condition devient } \boxed{a = 2 - 3.b}$$

Dans le plan des points (a, b), l'ensemble des solutions est une droite.

◦20◦

♥ On pose A(1, 4), B(2, 5) et C(1, 6). Quels sont les points à égale distance de A et de (AB). Quels sont les points à égale distance de C et de (AB). Rappel : la distance du point M à la droite (AB) s'obtient en mesurant de deux façons l'aire du triangle (ABM) (déterminant versus base fois hauteur).

La distance d'un point M à la droite (AB) se mesure en projetant le point M sur la droite : $\text{dist}(M, (AB)) = MH$. L'égalité $\text{dist}(M, (AB)) = MA$ dit ici $MA = MH$. Et comme H est sur (AB), cela revient à avoir imposé $H = A$. Ce sont les points qui se projettent orthogonalement en H. C'est la perpendiculaire à (AB) passant par A.

Et si on veut le faire avec des équations :

$$\text{on détermine l'équation de la droite (AB) : } M \in (AB) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2-1 \\ y-4 & 5-4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$M \in (AB) \Leftrightarrow (x-1) - (y-4) = 0$$

$$M \in (AB) \Leftrightarrow x - y + 3 = 0$$

$$\text{l'équation normalisée : } \frac{x - y + 3}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\text{la distance d'un point M à la droite : } \frac{|x - y + 3|}{\sqrt{2}}$$

$$\text{l'équation cherchée : } \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = \frac{|x - y + 3|}{\sqrt{2}}$$

$$\text{En élevant au carré par positivité : } 2((x-1)^2 + (y-4)^2) = (x - y + 3)^2.$$

$$\text{On développe : } x^2 + y^2 + 2.x.y - 10.x - 10.y + 25 = 0.$$

$$\text{C'est une droite, ça ? Oui : } (x + y - 5)^2 = 0.$$

Pour l'autre équation, c'est plus décevant, sauf si on aime la géométrie.

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-6)^2} = \frac{|x - y + 3|}{\sqrt{2}} \text{ donne } x^2 + y^2 + 2.x.y - 10.x - 18.y + 65 = 0.$$

C'est une parabole².

◻21◻

Calculez les deux intégrales suivantes et dites qui est la plus grande : $\int_1^e \frac{(\ln(t))^2}{t} .dt$ et $\int_1^e (\ln(t))^2 .dt$.

La première est de la forme $\int u^2 .u'$. On intègre : $\int_1^e \frac{(\ln(t))^2}{t} .dt = \left[\frac{(\ln(t))^3}{3} \right]_{t=1}^e$ et on trouve $\frac{1}{3}$.

Pour l'autre (dont l'existence est assurée comme pour la première par continuité), on intègre par parties :

1	$\leftrightarrow$	t
$(\ln(t))^2$	$\hookrightarrow$	$2. \frac{\ln(t)}{t}$

et on recommence (ou on utilise une primitive toute prête en $t. \ln(t) - t$).

$$\int (\ln(t))^2 .dt = t.(\ln(t))^2 - 2.t. \ln(t) + 2.t$$

et avec les bornes 1 et e : $\int_1^e (\ln(t))^2 .dt = e - 2$.

Ensuite, le physicien sortira sa calculatrice pour comparer $e - 2$ et $\frac{1}{3}$.

Mais le matheux dira juste $\frac{(\ln(t))^2}{t} \leq (\ln(t))^2$ pour tout t de $[1, e]$: $\int_1^e \frac{(\ln(t))^2}{t} .dt < \int_1^e (\ln(t))^2 .dt$. Et sans calcul approche.

Vous préférez l'approche du physicien : faites PSI.

Vous préférez l'approche du matheux : faites une spé.

◻22◻

On admet (vous le verrez en Spé) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} .dt = \frac{\pi}{2}$. Montrez : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} .dt = \frac{\pi}{2}$.

On va quand même intégrer à distance finie, y compris au voisinage de 0.

La première intégrale est la limite de $\int_a^b \frac{\sin(t)}{t} .dt$ quand a tend vers 0 et b vers l'infini. En 0, c'est juste l'application sous le signe intégrale qui se prolonge par continuité. A l'infini, c'est la primitive non explicite qui a une limite.

On intègre par parties la nouvelle

$\frac{1}{t^2}$	$\leftrightarrow$	$-\frac{1}{t}$
$\sin^2(t)$	$\hookrightarrow$	$2. \sin(t). \cos(t)$

$$\int_a^b \frac{\sin^2(t)}{t^2} .dt = \left[\frac{\sin^2(t)}{t} \right]_a^b + \int_a^b \frac{2. \sin(t). \cos(t)}{t} .dt = \frac{\sin^2(a)}{a} - \frac{\sin^2(b)}{b} + \int_a^b \frac{\sin(2t)}{t} .dt$$

Là, il y a une idée géniale : $\theta = 2t$ dans la seconde. Et le truc est d'autant plus surprenant que $\frac{dt}{t} = \frac{d\theta}{\theta}$ (invariance logarithmique).

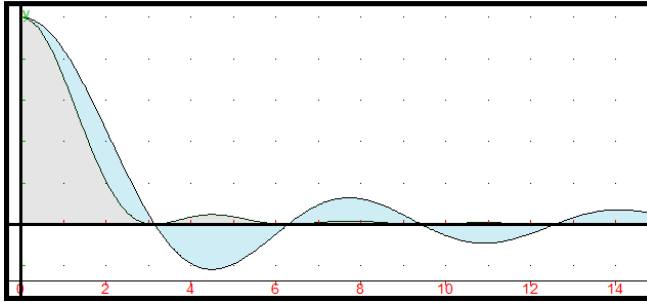
$$\int_a^b \frac{\sin^2(t)}{t^2} .dt = \frac{\sin^2(a)}{a} - \frac{\sin^2(b)}{b} + \int_{2.a}^{2.b} \frac{\sin(\theta)}{\theta} .d\theta$$

On fait tendre a vers 0 : $\frac{\sin^2(a)}{a} = \frac{\sin(a)}{a} . \sin(a)$ tend vers 1×0

On fait tendre b vers l'infini, le quotient à numérateur borné $\frac{\sin^2(b)}{b}$ tend vers 0.

Et l'intégrale $\int_{2.a}^{2.b} \frac{\sin(\theta)}{\theta} .d\theta$ tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\theta)}{\theta} .d\theta$ dont on nous a dit qu'elle existait, et qu'elle valait $\frac{\pi}{2}$ (certains livres lui donnent même un nom).

On a bien $\left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} .dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\theta)}{\theta^2} .d\theta \right) = \frac{\pi}{2}$



Pour $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} .dt$ on a comme pour une série à termes positifs des aires positives de plus en plus petites (en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ au n^{ieme} intervalle de longueur π) qui s'additionnent mais donnent au total une aire finie.

Pour $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\theta)}{\theta^2} .d\theta$, des aires algébriques sont positives, d'autres négatives. On pense davantage aux séries alternées...

Pour information

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} .dt$	$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} .dt$	$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^3} .dt$	$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(t)}{t^5} .dt$	$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t^5} .dt$	
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3.\pi}{8}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{115.\pi}{384}$	

mais n'essayez pas d'en déduire des choses.

◦23◦

Quand il va au travail à la vitesse de quatre vingt kilomètres par heures, il a dix minutes d'avance. Quand il roule à soixante kilomètres à l'heure, il a dix minutes de retard. A quelle vitesse doit il rouler pour arriver à l'heure ?

On note D la distance à parcourir (*toujours la même*) et T le temps qu'il doit mettre pour arriver à l'heure. On traduit les hypothèses

80km/h	10 minutes d'avance	$\frac{D}{80} = T - \frac{1}{6}$
60km/h	10 minutes de retard	$\frac{D}{60} = T + \frac{1}{6}$

On élimine T : $\frac{D}{80} + \frac{1}{6} = \frac{D}{60} - \frac{1}{6}$, on résout : D vaut 80.

On cherche la vitesse V pour avoir $\frac{D}{V} = T$. On élimine encore T : $V = \frac{480}{7}$

En valeur approchée : 68,5 km/h à 10^{-1} près, et pas 70.

◦24◦

Points est une liste de points (*chaque point est une liste de deux nombres*). Trouvez les deux points de cette liste les plus loin l'un de l'autre. Quelle est la complexité de votre programme ? ($O(n)$, $O(n^2)$, $O(n!)$?)

```
def Dist(L,i, j) :
    ....#calcule le carré de la distance de L[i] à L[j]
    ....x, y = L[i][0], L[i][1]
    ....xx, yy = L[j][0], L[j][1]
    ....dx, dy = x-xx, y-yy
    ....return dx*dx+dy*dy
```

Inutile de calculer la distance en surchargeant d'un sqrt à la fin. En effet, les distances sont classés dans le même ordre que les carrés de distances.

Calculer la quantité étape par étape, c'est plus clair, aussi rapide en calcul, et guère plus lourd en occupation mémoire.

On initialise un record de distance au minimum : ici 0, puis on parcourt la liste.

```
def PlusLoin(Points) :
    ....DistMax = 0
    ....Indexi, Indexj = 0, 0
    ....n = len(Points)
    ....for i in range(n-1) :
    .....for j in range(i+1, n) : #ne testons que la moitié des couples...
    .....Distij = Dist(Points, i, j)
    .....if Distij > DistMax :
    .....DistMax = Distij
    .....Indexi = i
    .....Indexj = j
    ....return Indexi, Indexj
```

Invariant de boucle : à chaque étape, **DistMax** contient la plus grande distance pour les couples de points déjà étudiés

Indexi contient l'indice du couple « le plus éloigné » parmi ceux étudiés

Boucles imbriquées, complexité $O(n^2)$.

◦25◦

♥ Vérifiez que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Décomposez $\vec{i}$ sur cette base.

Changez la composante d'un de ces vecteurs pour que ce ne soit plus une base de $\mathbb{R}^3$.

Il existe une composante que l'on peut changer comme on veut, sans que la famille cesse d'être une base de $\mathbb{R}^3$. Laquelle ?

(une base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ c'est « tout vecteur $\vec{u}$ se décompose d'une façon unique sous la forme $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}$, et ça revient à avoir un système ayant une unique solution, donc à un déterminant non nul, par exemple).

Ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires, puisque $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ est non nul (il vaut $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}^3$ ce qui fait 6.

On décompose $\vec{i}$ par exemple par les formules de Cramer :

$$\vec{i} \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot \det(\vec{i}, \vec{b}, \vec{c}) + \vec{b} \cdot \det(\vec{a}, \vec{i}, \vec{c}) + \vec{c} \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{i})$$

On calcule $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$: $\vec{i} = -2 \cdot \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

On peut aussi résoudre un système, ce qui revient au même.

Ou tenter peu à peu des combinaisons :

on nous a donné $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on veut $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On arrange : $\vec{b} - 2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

On somme

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{c} + \vec{b} - 2 \cdot \vec{a}$$

Pour que ce ne soit plus une base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ il faut et il suffit que ces trois vecteurs soient coplanaires (et on ne pourra plus décomposer grâce à eux des vecteurs hors du plan).

On change donc un coefficient pour annuler le déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & a \end{vmatrix} = 0$.

On calcule $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 3 \cdot a$ et on choisit donc $a = 2$.

On peut aussi se dire « tiens, et si le dernier était une combinaison des deux premiers :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les deux premières lignes imposent a et b : $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{7}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{-2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

et la troisième complète alors $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{7}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{-2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On peut aussi choisir arbitrairement un plan contenant les deux premiers $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} : z = 2.x$

Il ne reste qu'à ajuster une composante du dernier pour qu'il soit aussi dans ce plan.

C'est ça l'algèbre linéaire.

Il n'y a pas qu'un chemin pour parvenir à la solution.

Il y en a beaucoup, et parfois, il y en a plusieurs qui sont esthétiques et efficaces.

C'est ce qui va inquiéter les élèves besogneux qui aiment les « fiches synthèse » (mais on peut en faire).

Et faire plaisir à ceux qui aiment varier les points de vue et tenter des choses.

Regardons maintenant le déterminant en détail : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$. Il contient un petit déterminant de taille 2 qui est

nul : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

On en déduit que dans le développement du déterminant par rapport à la dernière colonne, on aura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Le cofacteur du 3 est nul. Donc

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

ne change pas de valeur si on change a .

On aura beau modifier le 3 et le remplacer par autre chose, le déterminant vaudra toujours 6, et la famille restera une base.

◻26◻ On pose $C = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$.
Ajustez les quatre grecques pour avoir $M.V = V.D$. Déduisez la valeur de $\det(M)$ sous forme factorisée.

◻27◻ Résolvez $\text{Tr}\left(\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & -\sin(\pi/12) \\ \sin(\pi/12) & \cos(\pi/12) \end{pmatrix}\right)^n \in \mathbb{Z}$ d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$.
Résolvez $\text{Tr}\left(\begin{pmatrix} \cos(5\pi/12) & -\sin(5\pi/12) \\ \sin(5\pi/12) & \cos(5\pi/12) \end{pmatrix}\right)^n \in \mathbb{Z}$ d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$.
Résolvez $\text{Tr}\left(\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & \sin(\pi/12) \\ \sin(\pi/12) & -\cos(\pi/12) \end{pmatrix}\right)^n \in \mathbb{Z}$ d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$.
Résolvez $\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & -\sin(\pi/12) & 0 & 0 \\ \sin(\pi/12) & \cos(\pi/12) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi/15) & -\sin(\pi/15) \\ 0 & 0 & \sin(\pi/15) & \cos(\pi/15) \end{pmatrix}^n = I_4$ d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$.

On rappelle le résultat du cours $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$

Inutile de vous lancer dans des récurrences, diagonalisation ou autres.

C'est géométrique : on fait n rotations d'angle θ , on a fait une rotation d'angle $n\theta$.

La première question demande : $2 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right) \in \mathbb{Z}$.

Ce cosinus se promène sur une liste finie de valeurs parmi lesquelles il y a 0, $\frac{1}{2}$, 1 et leurs opposés (et d'autres inutiles car irrationnelles).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
oui				oui		oui		oui			

$$S = \{12.k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{4 + 12.k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{6 + 12.k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{8 + 12.k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Oui, on est sur $\mathbb{Z}$, et la formule $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n.\theta) & -\sin(n.\theta) \\ \sin(n.\theta) & \cos(n.\theta) \end{pmatrix}$ est valable aussi sur $\mathbb{Z}$.

Pour le second, on a mal placé l'exposant : $(2.\cos(5.\pi/12))^n$ doit être dans $\mathbb{Z}$.

Mais cet irrationnel est plus petit que 1, la suite $((2.\cos(5.\pi/12))^n)$ converge vers 0.

La seule solution positive est $n = 0$ qui donne $(trace)^0 = 1$.

$\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & \sin(\pi/12) \\ \sin(\pi/12) & -\cos(\pi/12) \end{pmatrix}$ est une matrice de symétrie. Ses puissances paires donnent I_2 (trace entière) et ses puissances impaires la redonnent (trace entière).

Bref, pour tout n , $\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & \sin(\pi/12) \\ \sin(\pi/12) & -\cos(\pi/12) \end{pmatrix}^n$ a sa trace dans $\mathbb{N}$.

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & -\sin(\pi/12) & 0 & 0 \\ \sin(\pi/12) & \cos(\pi/12) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi/15) & -\sin(\pi/15) \\ 0 & 0 & \sin(\pi/15) & \cos(\pi/15) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n.\pi/12) & -\sin(n.\pi/12) & 0 & 0 \\ \sin(n.\pi/12) & \cos(n.\pi/12) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(n.\pi/15) & -\sin(n.\pi/15) \\ 0 & 0 & \sin(n.\pi/15) & \cos(n.\pi/15) \end{pmatrix}$$

(rotations et produits par blocs)

On demande que n soit à la fois multiple de 24 et de 30.

$$S = \{120.k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

◦28◦

I~0) On se place dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ muni de la base canonique orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 Pour tout triplet de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, on définit la matrice G (dite « matrice de Gram ») de terme général $g_i^k = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_k$ (produit scalaire des deux vecteurs) :
$$\begin{pmatrix} \|\vec{u}_1\|^2 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \|\vec{u}_2\|^2 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 & \|\vec{u}_3\|^2 \end{pmatrix}$$

 Montrez : $Tr(G) \geq 0$ et $Tr(Com(G)) \geq 0$.

La trace de la matrice de Gram G est la somme $\|\vec{u}_1\|^2 + \|\vec{u}_2\|^2 + \|\vec{u}_3\|^2$.

En tant que somme de carrés de normes, elle est positive.

Chaque coefficient de la diagonale de la comatrice est un déterminant de la forme $\begin{vmatrix} \|\vec{u}_1\|^2 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \|\vec{u}_2\|^2 \end{vmatrix}$ (en variant les indices).

Un tel déterminant vaut $(\|\vec{u}_1\| \times \|\vec{u}_2\|)^2 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)^2$.

Et l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous dit : $(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)^2 \leq \|\vec{u}_1\|^2 \cdot \|\vec{u}_2\|^2$.

C'est l'inégalité de la forme $(x.x' + y.y' + z.z')^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2).(x'^2 + y'^2 + z'^2)$.

On somme ces trois termes positifs ou nuls, on obtient un réel positif ou nul.

Sinon, il suffit d'écrire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\text{angle})$ pour conclure aussi géométriquement.

I~1) Montrez même que $Tr(G)$ est nulle si et seulement si les trois vecteurs sont nuls.

La seule façon pour qu'elle soit nulle est que chaque norme soit nulle, et chaque vecteur nul.

Et la matrice est alors nulle.

I~2) Montrez aussi $Tr(Com(G))$ est nulle si et seulement si les trois vecteurs sont colinéaires.

Que peut on dire si

$((\|\vec{u}_1\| \times \|\vec{u}_2\|)^2 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)^2) + ((\|\vec{u}_2\| \times \|\vec{u}_3\|)^2 - (\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3)^2) + ((\|\vec{u}_3\| \times \|\vec{u}_1\|)^2 - (\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1)^2)$ est nulle ?

En tant que somme de réels positifs ou nuls, c'est que chacun est nul.

Mais alors chaque inégalité de Cauchy-Schwarz devient une égalité.

$((\|\vec{u}_1\| \times \|\vec{u}_2\|)^2 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)^2) = 0$ se traduit par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires.

Les vecteurs sont deux à deux colinéaires, ils sont tous colinéaires.

Et c'est réciproque.

I~3) Montrez que $\det(G)$ est positif ou nul. Montrez qu'il est nul si et seulement si les trois vecteurs sont coplanaires (indication : ${}^t P.P$).

Écrivons nos trois vecteurs sur la base canonique : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ pour simplifier la lecture.

Les produits scalaires se calculent « vectoriellement » :

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x.x' + y.y' + z.z' = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ par exemple.}$$

$$\text{On a alors : } G = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x.x' + y.y' + z.z' & x.x'' + y.y'' + z.z'' \\ x.x' + y.y' + z.z' & x'^2 + y'^2 + z'^2 & x'.x'' + y'.y'' + z'.z'' \\ x.x'' + y.y'' + z.z'' & x'.x'' + y'.y'' + z'.z'' & x''^2 + y''^2 + z''^2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$$

G est de la forme ${}^t P.P$ avec P égale à la matrice de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sur la base canonique.

Son déterminant se calcule : $\det({}^t P.P) = \det({}^t P) \cdot \det(P) = \det(P) \cdot \det(P)$.

En tant que carré de réel, il est positif ou nul.

Et il n'est nul que pour $\det(P) = 0$. Ce qui se traduit par « vecteurs coplanaires ».

$Tr(G)$	$Tr(Com(G))$	$\det(G)$
positive	positive	positif
nul si tous nuls	nul si tous colinéaires	nul si tous coplanaires

I~4) Soit X (de composantes x, y et z) un vecteur propre de G (valeur propre λ), montrez : $\lambda \cdot ||X||^2 = {}^t X.G.X = ||x.\vec{u}_1 + y.\vec{u}_2 + z.\vec{u}_3||^2$. Déduisez que les valeurs propres de G sont positives ou nulles.

Prenons un vecteur propre X de G , de valeur propre λ . On traduit : $G.X = \lambda.X$.

$$\text{Si vous y tenez : } \begin{pmatrix} ||\vec{u}_1||^2 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & ||\vec{u}_2||^2 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 & ||\vec{u}_3||^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ mais c'est juste pour vérifier les formats.}$$

On doit évaluer trois termes. partons de celui du milieu : ${}^t X.G.X$.

$$\text{Pour les formats : } \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ||\vec{u}_1||^2 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & ||\vec{u}_2||^2 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 & ||\vec{u}_3||^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ c'est un réel.}$$

$$\text{Mais surtout : } {}^t X.G.X = {}^t X.\lambda.X = \lambda.{}^t X.X.$$

$$\text{Et le réel } {}^t X.X \text{ c'est } \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ qui fait } x^2 + y^2 + z^2. \text{ Et c'est bien } ||X||^2.$$

Mais dans le même temps, au niveau des coefficients (des fois le matheux se la joue physicien et il calcule) :

$${}^t X.G.X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \times ||\vec{u}_1||^2 & +y \times \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & +z \times \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 \\ x \times \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & +y \times ||\vec{u}_2||^2 & +z \times \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 \\ x \times \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 & +y \times \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 & +z \times ||\vec{u}_3||^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{C'est un réel fait de neuf termes : } \begin{bmatrix} x^2 \cdot ||\vec{u}_1||^2 & +x \times y \times (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) & +x \times z \times (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3) \\ +x \times y \times (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) & +y^2 \times ||\vec{u}_2||^2 & +y \times z \times (\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3) \\ +x \times z \times (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3) & +y \times z \times (\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3) & +z^2 \times ||\vec{u}_3||^2 \end{bmatrix}$$

on a intérêt à écrire $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$ plutôt que $||\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2||^2$.

Ces neuf termes correspondent au développement de $(x \times \vec{u}_1 + y \times \vec{u}_2 + z \times \vec{u}_3) \cdot (x \times \vec{u}_1 + y \times \vec{u}_2 + z \times \vec{u}_3)$ par bilinéarité.

$$\text{On a donc aussi } {}^t X.G.X = ||x \times \vec{u}_1 + y \times \vec{u}_2 + z \times \vec{u}_3||^2.$$

Assemblons nos résultats : $\lambda \cdot ||X||^2 = ||x \times \vec{u}_1 + y \times \vec{u}_2 + z \times \vec{u}_3||^2$ et divisons par $||X||^2$ (non nul).

Le réel λ est positif.

Les valeurs propres des matrices de Gram sont positives ou nulles.

	$Tr(G)$	$Tr(Com(G))$	$\det(G)$
Ceci confirme	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_1$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$
	positif	positif	positif

I~5) On suppose à présent $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ de norme 1. Il existe donc trois angles vérifiant $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \cos(\alpha)$, $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = \cos(\beta)$ et $\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 = \cos(\gamma)$ (produits scalaires). Par symétrie des rôles, on posera $0 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha \leq \pi$. On note G la matrice de Gram.
Déterminez les racines du polynôme $X^2 - 2.X.\cos(\beta).\cos(\gamma) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) - 1$.

Les trois produits scalaires utiles sont connus, la matrice de Gram est donc ici $\begin{pmatrix} 1 & \cos(\alpha) & \cos(\gamma) \\ \cos(\alpha) & 1 & \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) & \cos(\beta) & 1 \end{pmatrix}$.

Oui, il faut savoir lire l'énoncé, les vecteurs sont de norme 1, donc une diagonale de 1, et les produits scalaires en $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\text{angle})$ donnent juste de cosinus.⁴

Si on en a besoin, le déterminant vaut $1 + 2.\cos(\alpha).\cos(\beta).\cos(\gamma) - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta) - \cos^2(\gamma)$.

Et moi je vois le rapport avec la suite et le polynôme $X^2 - 2.X.\cos(\beta).\cos(\gamma) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) - 1$ calculé en $\cos(\alpha)$.

$X^2 - 2.X.\cos(\beta).\cos(\gamma) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) - 1$ a pour discriminant

$$4.(\cos^2(\beta).\cos^2(\gamma) - \cos^2(\beta) - \cos^2(\gamma) + 1).$$

Il doit se passer quelque chose, sinon les valeurs vont être affreuses.

On factorise $4.(\cos^2(\beta) - 1).(\cos^2(\gamma) - 1)$

Remarque : $Oui, a.b - a - b + 1 = (a - 1).(b - 1)$ est classique.

Les maths, ce ne sont pas de formules abjectes à apprendre par cœur, ce sont de petites idées à savoir exploiter.

On transforme : $4.(-\sin^2(\beta)).(-\sin^2(\gamma))$.

Et comme nos angles sont entre 0 et π , pas de valeur absolue : $\delta = 2.\sin(\beta).\sin(\gamma)$.

On trouve les deux racines : $\frac{2.\cos(\beta).\cos(\gamma) - 2.\sin(\beta).\sin(\gamma)}{2}$ et $\frac{2.\cos(\beta).\cos(\gamma) + 2.\sin(\beta).\sin(\gamma)}{2}$.

Un peu de trigonométrie : les deux racines sont $\cos(\beta + \gamma)$ et $\cos(\beta - \gamma)$

On pouvait aussi essayer de les deviner : somme $2.\cos(\beta).\cos(\gamma)$ et produit plus laid. Puis proposer/vérifier.

I~6) Déduisez une factorisation de $\det(G)$ comme produit de deux facteurs.

Ayant effectué le calcul quelques lignes plus haut, on a donc

$$\det(G) = 1 + 2.\cos(\alpha).\cos(\beta).\cos(\gamma) - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta) - \cos^2(\gamma)$$

$$\text{soit } \det(G) = -P(\cos(\alpha)) = (\cos(\alpha) - \cos(\beta + \gamma)).(\cos(\beta - \gamma) - \cos(\alpha))$$

I~7) Montrez que $\cos(\alpha)$ est entre $\cos(\beta - \gamma)$ et $\cos(\beta + \gamma)$.

Comment cerner $\cos(\alpha)$ justement entre les deux racines ?

On sait que $\det(G)$ est positif ou nul.

Donc $P(\cos(\alpha))$ est négatif ou nul.

Ceci force $\cos(\alpha)$ à être entre les deux racines... Niveau Première.

Remarque : Une question d'évidence... mathématique.

Et qui aide à deviner d'ailleurs les racines du polynôme P !

I~8) Montrez l'équivalence entre $\det(G) = 0$ et
$$\begin{array}{ccccc} \alpha & +\beta & +\gamma & = & \pi \\ & & \text{ou} & & \\ \alpha & = & \beta & +\gamma & \end{array}.$$

Ce déterminant est nul si et seulement si un de ces facteurs est nul.

Méfions nous quand même des cas d'égalité des cosinus. Pas seulement à cause des modulo $2.\pi$ mais aussi à cause des deux familles à chaque fois.

$\cos(\alpha) = \cos(\beta + \gamma)$		$\cos(\alpha) = \cos(\beta - \gamma)$	
$\alpha = \beta + \gamma [2.\pi]$	$-\alpha = \beta + \gamma [2.\pi]$	$\alpha = \beta - \gamma [2.\pi]$	$\alpha = \gamma - \beta [2.\pi]$
$\alpha = \beta + \gamma$	$\alpha + \beta + \gamma = 2.\pi$	« impossible »	« impossible »

La troisième ligne du tableau prend une formule telle que $\alpha = \beta + \gamma + 2.k.\pi$ et trouve la seule valeur de k compatible avec nos encadrements $0 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha \leq \pi$.

Par exemple, $\beta - \gamma$ est positif, mais plus petit que α . Il ne peut pas être égal à α .

Mais $\beta - \gamma + 2.\pi$ est plus grand que $2.\pi$ donc plus grand que α , il ne peut pas être égal à α non plus.

De même $\beta - \gamma + 2.k.\pi$ avec k non nul n'est pas entre 0 et π et ne peut pas être égal à α .

4. le pluriel de cosinus, c'est cosini ?

De même, $\gamma - \beta$ est entre $-\pi$ et 0 , et ne peut coïncider avec α , ni avec α translaté d'un multiple de 2π .

Plus rapide : $0 \leq (\beta - \gamma) \leq \alpha \leq \pi$. Sur $[0, \pi]$, le cosinus décroît strictement.

La seule façon d'avoir $\cos(\alpha) = \cos(\beta - \gamma)$ c'est donc de demander $\alpha = \beta - \gamma$ puis $\gamma = 0$ et donc finalement $\alpha = \beta + \gamma$ déjà mentionné.

Mine de rien, on vient de donner le critère sur les angles pour que les trois vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ soient coplanaires.

II~0) On suppose $\alpha = \beta = \gamma$ et on pose alors $c = \cos(\alpha)$. Déterminez le polynôme caractéristique de G , puis ses valeurs propres (sachant qu'il y a une valeur propre double).

Les trois cosinus sont égaux, la matrice G est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{pmatrix}$ avec nos notations proposées.

$Tr(G)$	$Tr(Com(G))$	$\det(G)$
3	$3 - 3.c^2$	$1 + 2.c^3 - 3.c^2$
polynôme caractéristique		
$X^3 - 3.X^2 + (3 - 3.c^2).X - 1 - 2.c^3 + 3.c^2$		

On cherche une racine évidente, sinon comment s'en sortir ?

Ah si. Une indication de l'énoncé : la racine double.

C'est donc une racine du polynôme et de sa dérivée...

$$P(X) = X^3 - 3.X^2 + (3 - 3.c^2).X - 1 - 2.c^3 + 3.c^2 \text{ donc } P'(X) = 3.(X^2 - 2.X + (1 - c^2))$$

Les racines de P sont $1 + c$ et $1 - c$.

Laquelle est aussi racine de P et sera donc la racine double ?

C'est $1 - c$.

Par la somme des racines, on retrouve la troisième :

$X^3 - 3.X^2 + (3 - 3.c^2).X - 1 - 2.c^3 + 3.c^2$		
$1 - c$	$1 - c$	$1 + 2.c$

Autre approche : si nous notons a , a et b les trois racines,

$$\text{on a alors } 2.a + b = 3 \text{ et } a^2.b = 1 + 2.c^3 - 3.c^2 \text{ et } a^2 + 2.a.b = 3 - 3.c^2.$$

Et on n'a plus que deux inconnues a et b .

II~1) Quelle est la plus petite valeur que peut prendre c ?

Les valeurs propres de G sont tenues d'être positives. $1 + 2.c$ est donc positif, et c ne descendra pas en deçà de $-\frac{1}{2}$.

Et c'est justement le cas qu'on va étudier ensuite, donc on peut atteindre cette valeur.

Et la plus grande, c'est 1, avec 1 avec trois vecteurs colinéaires... Bien triste.

II~2) On prend $c = -1/2$. Calculez $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

Pour c égal à $-\frac{1}{2}$, la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, visiblement non inversible (additionnez les colonnes les unes sur les autres).

Calculons la norme du vecteur $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ en effectuant le produit scalaire avec lui même :

$$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3).(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3) = \begin{matrix} 1 & +\cos(\alpha) & +\cos(\alpha) \\ +\cos(\alpha) & +1 & +\cos(\alpha) \\ +\cos(\alpha) & +\cos(\alpha) & +1 \end{matrix} = 0.$$

Le vecteur est nul.

D'ailleurs, géométriquement, ce sont trois vecteurs coplanaires, de norme 1, faisant entre eux des angles $\frac{2\pi}{3}$.

Comme 1, j et j^2 dans le plan complexe !

II~3) Déterminez le noyau de G . Retrouvez le résultat précédent.

Quant au noyau de $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ il est formé de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de ses multiples, je ne vois pas trop quoi dire d'autre.

- Rappel :
- Polynôme caractéristique d'une matrice carrée A : $\det(\lambda.I_n - A)$.
 - Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique. Mais ce sont surtout les λ pour lesquels il existe au moins un vecteur X non nul vérifiant $A.X = \lambda.X$.
 - Noyau d'une application linéaire f : ensemble des vecteurs $\vec{u}$ vérifiant $f(\vec{u}) = \vec{0}$.
 - Noyau d'une matrice rectangulaire A (format n sur k) : ensemble des vecteurs X de taille k vérifiant $M.X = 0_n$.
 - Le déterminant du produit est le produit des déterminants.

• La comatrice de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a' & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a' & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

◦29◦

♡ Décomposez $x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ sur la base $(\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{j})$ puis sur la base $(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$.

$$x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} = \frac{-x+y+z}{2} .(\vec{j} + \vec{k}) + \frac{-x+y+z}{2} .(\vec{i} + \vec{k}) + \frac{x+y-z}{2} .(\vec{i} + \vec{j})$$

en résolvant le système $\begin{cases} b+c = x \\ a+c = y \\ a+b = z \end{cases}$.

Pour le résoudre, somme : $\begin{cases} b+c = x \\ a+c = y \\ a+b = z \\ 2.a+2.b+2.c = x+y+z \end{cases}$, divisez $\begin{cases} b+c = x \\ a+c = y \\ a+b = z \\ a+b+c = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \end{cases}$.

Comparez ensuite les trois premières lignes à la dernière.

Après, il suffit de proposer/vérifier (en étant sûr qu'il y a unicité de la solution).

De même

$$x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} = \left(\frac{y+z}{2}\right) \cdot (-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) + \frac{x+z}{2} \cdot (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) + \frac{x+y}{2} \cdot (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$$

◦30◦

Pour quelles valeurs de n peut-on avoir sur $M_n(\mathbb{R})$ au moins une matrice A vérifiant : ${}^t A.A = -I_n$. Même question pour $A^2 = -I_n$.

Si on regarde en petite taille, on a très vite une contradiction :

$$\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + a'^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \neq -I_2 \text{ et } \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + a'^2 + a''^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \neq -I_3$$

Le terme de position 1, 1 de ${}^t A.A$ est de la forme $\sum_{i=1}^n (a_i^1)^2$ et ne peut être égal à -1 . L'équation ${}^t A.A = -I_2$ ne peut pas avoir de solution.

Étudions $A^2 = -I_n$. Condition nécessaire : $\det(A^2) = (-1)^n$.

Mais alors $(\det(A))^2 = (-1)^n$.

Comme $\det(A)$ est réel, son carré est réel positif. Nécessairement, il faut que n soit pair.

Mais est-ce suffisant ? Le fait qu'il n'y ait pas de contradiction sur le déterminant ne dit pas qu'il n'y a aucune contradiction.

Pour n égal à 2, on a au moins une solution : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (par exemple).

$$\text{Et pour } n \text{ égal à 4, on propose : } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ puis 6 : } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et pour tout n pair, une matrice faite de $n/2$ blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur la diagonale convient.

◦31◦

Montrez qu'on n'a pas $\det(\Re(M)) = \Re(\det(M))$.

◦32◦

Soit A une matrice à trois colonnes et deux lignes. Montrez que ${}^t A.A$ et $A.{}^t A$ sont deux matrices carrées. Montrez que l'une a un déterminant nul. Montrez que le déterminant de l'autre est une somme de carrés de déterminants de matrices de taille 2 extraites de A .

$${}^t A.A = \begin{pmatrix} o & o \\ o & o \\ o & o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} o & o & o \\ o & o & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & o & o \\ o & o & o \\ o & o & o \end{pmatrix} \text{ carrée 3 sur 3}$$

$$A.{}^t A = \begin{pmatrix} o & o & o \\ o & o & o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} o & o \\ o & o \\ o & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & o \\ o & o \end{pmatrix} \text{ carrée 2 sur 2}$$

$$\text{En notant } U \text{ et } V \text{ les deux colonnes de } {}^t A, \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \\ u'' & v'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} o & o & o \\ o & o & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & o & o \\ o & o & o \\ o & o & o \end{pmatrix} \text{ les trois colonnes de } {}^t A.A$$

sont combinaisons de U et V .

Elles sont dans le plan engendré par U et V .

Les trois colonnes sont coplanaires, le déterminant est nul.

Ensuite, on nomme les coefficients de A

$$A^t A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & a.a' + b.b' + c.c' \\ a.a' + b.b' + c.c' & a'^2 + b'^2 + c'^2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant cherché vaut $(a^2 + b^2 + c^2).(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (a.a' + b.b' + c.c')^2$

Il suffit de le développer (par exemple les $(a.a')^2$ s'en vont et il reste des vrais $-2.a.a'.b.b'$)

et de le comparer à $(a.b' - a'.b)^2 + (a.c' - a'.c)^2 + (b.b' - b'.c)^2$.

Il y a bien égalité.

Pur calcul sans astuce. Des fois, même en maths ça arrive...

33.

-a- Construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ de noyau $\text{Vect}(\vec{i} + \vec{j})$ et d'image $\text{Vect}(\vec{j})$ en le donnant sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.

-b- Construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ de noyau $\text{Vect}(\vec{i} + 2.\vec{j})$ et d'image $\text{Vect}(\vec{i} + 2.\vec{j})$.

-c- Construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ de noyau $\text{Vect}(\vec{i} + 2.\vec{j} + \vec{k})$ et d'image $\text{Vect}(\vec{i} + 2.\vec{j}, \vec{i} + \vec{k})$.

-d- Pouvez vous construire un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ de noyau $\text{Vect}(\vec{i} + 2.\vec{j} + \vec{k})$ et d'image $\text{Vect}(\vec{i} + 2.\vec{j})$?

-e- Pouvez vous construire un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ de noyau $\text{Vect}(\vec{i}, \vec{i} + \vec{k})$ et d'image $\text{Vect}(\vec{i} + 2.\vec{j})$?

-f- Pouvez vous construire un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ de noyau $\text{Vect}(\vec{i} + \vec{k})$ et d'image $\text{Vect}(\vec{i}, \vec{i} + 2.\vec{j})$?

On va plutôt donner des matrices (sur la base canonique).

Pour $-a-$, on demande que la somme des deux colonnes soit nulle. Et que les colonnes soient de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On trouve par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ou un de ses multiples.

Pour $-b-$: $\begin{pmatrix} a & b \\ 2.a & 2.b \end{pmatrix}$ pour l'image et $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ pour le noyau.

Pour $-c-$ on a beaucoup de possibilités. On peut remplir les deux premières colonnes avec une base de l'image :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ? \\ 2 & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \end{pmatrix}.$$

On ajuste alors la troisième pour le noyau : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Le $-d-$ est une impossibilité à cause de la formule du rang.

Le $-e-$, avec sa condition $\text{Ker} = \text{Vect}(\vec{i}, \vec{i} + \vec{k})$ donne déjà que la première colonne est nulle, puis la troisième aussi.

Par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Pour $-f-$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$ Mais ce n'est pas la seule.

Je vous laisse réfléchir à la forme générale des matrices de la question.

Les deux premières colonnes sont des combinaisons comme $\begin{pmatrix} a+b \\ 2.b \\ 0 \end{pmatrix}.$ Et la dernière est combinaison l'opposé de la première.

◦34◦ Montrez que la droite passant par $O(0, 0)$ et $E(42, 151)$ a pour équation cartésienne $\begin{vmatrix} x & 42 \\ y & 151 \end{vmatrix} = 0$.

Approche dynamique : ce déterminant est nul si et seulement si les deux colonnes sont proportionnelles (aire du parallélogramme gale à 0).

Ceci revient à dire que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 42 \\ 151 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Appelons les $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OA}$. Ceci revient à dire « ils sont colinéaires », et ceci donne même O, A et M sont alignés. C'est fini.

Approche Terminale : l'équation de la droite est $y = \frac{151}{42}x$ (coefficient directeur).
Elle est la même que $x.151 - y.42 = 0$. C'est bon.

Attention.

Si vous vous contentez de cette méthode (certes exacte), alors vous restez dans vos ornières de Terminale.

Vous pourrez continuer à avancer à la vitesse d'un lourd camion de Terminale, mais vous ne pourrez pas aller à la vitesse attendue pour réussir aux concours.

C'est même là la grosse difficulté pour certains lèves : j'ai réussi comme ça jusqu'à présent, donc je continue comme ça.

NON ! En continuant comme ça, vous vous ferez dépasser par les vrais lèves de Prépas, et vous n'arriverez qu'à réussir le bac et c'est tout.

Il faut accepter de changer vos méthodes, même si vos méthodes marchaient jusqu'à présent.

Il ne faut plus que ça marche seulement, il faut que ça coure !

◦35◦

Explicitez	$A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$	$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-2^{-n}, 2^{-n}[$	$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-2^n, 2^n[$
	$D = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}}]n, 2.n[$	$E = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, 2.n[$	$F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-2^{-n}, 2^n[$
$A = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$	$B = \{0\}$	$C =]-2, 2[$	
$D = \emptyset$	$E =]1, 2[\cap]2, +\infty[$ confus sur $\mathbb{R}^-$	$F =]0, 2[$	

◦36◦

♡ Calculez $\int_1^2 x^x \cdot (1 + \ln(x)) \cdot dx$.

Avez vous écrit $e^{x \cdot \ln(x)} \cdot (1 + \ln(x))$ et reconnu la forme en $e^u \cdot u'$?

◦37◦

♡ A et B sont des ensembles. Montrez : $(P(A) \cap P(B) = \emptyset \Rightarrow P(A) = P(B))$
 $(P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}) \Leftrightarrow (A \cap B = \emptyset)$

Il est impossible d'avoir $P(A) \cap P(B) = \emptyset$.

En effet, dans $P(A)$ et $P(B)$ il y a toujours un élément commun (appelé $\emptyset$ lui même).

On a donc au moins $\{\emptyset\} \subset P(A) \cap P(B)$.

L'exercice $(P(A) \cap P(B) = \emptyset \Rightarrow P(A) = P(B))$ est donc un pur plaisir de prof de maths : « faux implique ce qu'on veut ».

Prouvons $(P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}) \Leftrightarrow (A \cap B = \emptyset)$ par double implication.

On suppose $(P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\})$. On veut montrer $(A \cap B = \emptyset)$.

On a déjà $\emptyset \subset A \cap B$ évidemment. Mais peut il y avoir un x dans $A \cap B$.

Non, car si tel était le cas, on aurait $\{x\} \in P(A)$ et $\{x\} \in P(B)$ d'où $\{x\} \in P(A) \cap P(B)$, ce qui contredit $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$.

On suppose $A \cap B = \emptyset$.

On a déjà $\emptyset \in P(A)$ et $\emptyset \in P(B)$, d'où $\emptyset \in P(A) \cap P(B)$ et donc $\{\emptyset\} \in P(A) \cap P(B)$.

Soit à présent X dans $P(A) \cap P(B)$. On traduit : $X \in P(A)$ et $X \in P(B)$.

On traduit : $X \subset A$ et $X \subset B$.

On a donc $X \subset A \cap B$. mais comme $A \cap B$ est vide, on a donc $X = \emptyset$.
Le seul élément de $P(A) \cap P(B)$ est donc bien $\emptyset$.

◦38◦

♥ Vérifiez

	diagonalisable	non diagonalisable
inversible	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
non inversible	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On trouve « à la main » les inverses (en résolvant de petits systèmes) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oui, être inversible, c'est avoir un inverse, c'est tout.

Qu'êtes vous allés chercher dans des livres des caractérisations avec un déterminant non nul C'est inutile. ?

$$\text{De même } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour « non inversibles », on voit qu'on aura beau faire :

un résultat tel que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est impossible. Rien qu'avec le premier 1 en haut à gauche de la matrice produit. C'est toujours un 0.
Il ne va de même de l'autre matrice.

Et là encore, pourquoi aller chercher un critère certes automatique par le déterminant, mais que vous allez appliquer sans comprendre ?

Pour « diagonalisable », on trouve D et P :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ inversible (pour son inverse, j'ai } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})).$$

$$\text{Et de même } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour non diagonalisables, on fait un raisonnement par l'absurde.

◦39◦

Complétez $\begin{pmatrix} & -5 \\ 2 & \end{pmatrix}$ pour qu'elle se diagonalise en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a & -5 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ a pour trace $a + b$ et pour déterminant $a.b + 10$.

On veut qu'elle ait pour trace 5 et déterminant 4.

a et b vérifient $a + b = 5$ et $a.b = -6$.

On trouve tout de suite le couple $(-1, 6)$ et son « symétrique ».

Mais on ne s'arrête pas là. Pour l'instant, on a juste raisonné par conditions nécessaires.

Reste à être sûr qu'elle se diagonalise bien. C'est à dire à trouver effectivement P et à vérifier que P est inversible...

$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Remarque :

S'arrêter à $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas répondre à la question.

C'est n'avoir raisonné que par conditions nécessaire, comme douze fois sur dix au lycée et au collège.

Mais raisonner juste par implications (conditions nécessaires), ce n'est pas raisonner.

C'est agir en automate (facile, tu apprends quarante trois règles, et tu ne te poses quasiment aucune question...).

Mais ensuite, se demander « ai je répondu à la question ? », c'est faire des maths

des sciences

de l'ingénierie

En arrivant à $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ vous avez juste prouvé que « si il y a des solutions, ce ne peut être que ».

Mais avez vous prouvé qu'elles se diagonalisaient vraiment ainsi ? Non. pas tant que vous n'avez pas trouvé P^5 .

Dans un devoir de maths, si vous résolvez mal l'équation du second degré conduisant à -1 et 6 , vous perdrez un petit quart des points.

Si vous ne prouvez pas que P existe, vous perdez la moitié des points.

Faites votre choix.

40

La matrice M_n de taille n sur n a pour terme général $1_{i \neq j}$. Calculez son déterminant.

$$\text{C'est } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Et même en taille 0 et ∞ , on peut le définir.

$n =$	0	1	2	3
$\det =$	1	0	-1	2

On ne va pas appliquer la règle de Sarrus en taille supérieure, même si les 0 de la diagonale vont annuler quelques termes.

On fait des combinaisons sur les colonnes, qui ne modifient pas le déterminant.

Je le raconte en taille 5, au delà, on mettra des points de suspension.

Méthode 1 :

$$\text{On ajoute toutes les colonnes à la dernière : } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{On sort le facteur 4 (en fait } n-1) : \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{On soustrait la dernière colonne à chacune : } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4. \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice est triangulaire : $\det(A_5) = (-1)^4 \cdot 4$ et plus généralement : $(-1)^{n-1} \cdot (n-1)$.

$n =$	0	1	2	3	4	5	6
$\det$	1	0	-1	2	-3	4	-5

Méthode 2 :

On soustrait chaque la première colonne sur toutes les autres (en gardant la première intacte pour que l'opération soit réversible) :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

On ajoute chaque ligne sur la première :

5. ou cité un théorème qui dit qu'« avec autant de valeurs propres distinctes que le format de la matrice c'est bon »

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

La matrice est diagonale.

41

0 0

E est un ensemble de cardinal N et les A_k (k de 0 à $n-1$) sont des parties de E . On définit alors la matrice S de terme général $\text{Card}(A_i \cap A_k)$ (ligne d'indice pythonien i et colonne d'indice pythonien k). Montrez dans le cas $n = 2$ que $\det(S)$ est toujours positif ou nul.

Prenons le cas de deux ensembles A et B au lieu de A_0 et A_1 .

La matrice est de la forme $\begin{pmatrix} \text{Card}(A) & \text{Card}(A \cap B) \\ \text{Card}(A \cap B) & \text{Card}(B) \end{pmatrix}$.

Son déterminant vaut $\text{Card}(A) \cdot \text{Card}(B) - (\text{Card}(A \cap B))^2$.

C'est en entier, de la forme $a \cdot b - c^2$ avec c plus petit que a et que b , puisque c est le cardinal de l'intersection.

On a donc $0 \leq c \leq a$ et $0 \leq c \leq b$ et enfin $0 \leq c^2 \leq a \cdot b$.

Le déterminant est un réel positif ou nul.

Pour qu'il soit nul, une seule solution : $A = B$ et le déterminant est de la forme $\begin{vmatrix} a & a \\ a & a \end{vmatrix}$.

Tiens, tant que j'y pense, j'ai une preuve jolie : $(\text{Card}(A \cap B))^2 = \left(\sum_{x \in E} 1_{A \cap B}(x) \right)^2 = \left(\sum_{x \in E} 1_A(x) \cdot 1_B(x) \right)^2$.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(\text{Card}(A \cap B))^2 \leq \left(\sum_{x \in E} (1_A(x))^2 \right) \cdot \left(\sum_{x \in E} (1_B(x))^2 \right) = \left(\sum_{x \in E} 1_A(x) \right) \cdot \left(\sum_{x \in E} 1_B(x) \right)$$

car le carré d'une indicatrice est cette indicatrice elle même.

On reconnaît $(\text{Card}(A \cap B))^2 \leq \text{Card}(A) \cdot \text{Card}(B)$ avec égalité si et seulement si les deux suites sont les mêmes : $A = B$.

0

Écrivez un script Python qui prend en entrée la liste L des parties (chaque partie est elle même une liste sans doublon) et retourne la matrice S sous forme de liste de listes (les fonctions **len**, **in**, **reversed** et les méthodes **append**, **count**, **append**, **sort** sont autorisées, même si certaines ne servent ici à rien).

Par exemple, pour l'entrée $[[0, 1, 4, 7], [0, 2, 7], [0, 1, 6, 9]]$ sa réponse sera $[[4, 2, 2], [2, 3, 1], [2, 1, 4]]$.

Pour le programme, on va créer déjà une procédure qui détermine le cardinal d'une intersection de deux ensembles.

Il suffit de compter avec un accumulateur S les éléments du premier qui sont aussi dans l'autre :

```
def CardInter(A, B):
    ....S = 0
    ....for a in A:
    .....if a in B:
    .....S += 1
    ....return S
```

et sans le test **in** pour mieux cerner la complexité :

```
def CardInter(A, B):
    ....S = 0
    ....for a in A:
    .....for b in B:
    .....S += int(a==b)
    ....return S
```

La complexité est en $\text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$, même si on peut l'améliorer en travaillant sur une copie de B dont on enlève au fur et à mesure les éléments de A qu'on a trouvés dans B .

Ensuite, on crée une matrice avec des 0 de taille convenable, et on en remplit la moitié supérieure (la matrice est symétrique). Quant à la diagonale, c'est du gaspillage de chercher **CardInter(A, A)**, c'est **len(A)**.

```
def Matrice(L) :
...n = len(L)
...M = [[0 for k in range(n)] for i in range(n)]
...for k in range(n) :
.....A = L[k]
.....M[k][k] = len(A)
.....for i in range(k+1, n) :
.....c = CardInter(A, L[i])
.....M[i][k], M[k][i] = c, c
...return M
```

$M[i][k] = \text{CardInter}(A, L[i])$
 $M[k][i] = \text{CardInter}(A, L[i])$

Remarque :: si vous avez écrit vous avez perdu d'un facteur 2. Vous sollicitez deux fois le même calcul. Python ne va pas se souvenir l'avoir déjà fait !

#1#

Indiquez en fonction de n et N un majorant de la complexité de votre algorithme (au pire, les A_k sont effectivement de cardinal de l'ordre de N).

La création initiale de M est de complexité $n \times n$.

On effectue deux boucles imbriquées, l'une étant dépendante de l'autre : on passe $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=k+1}^{n-1} 1 \right)$ fois dans l'instruction $c = \text{CardInter}(A, L[i])$ et l'affectation $M[i][k], M[k][i] = c, c$.

On sollicite environ $\frac{n^2}{2}$ fois une procédure de complexité au pire N^2 .

Mon programme est de complexité $O(n^2 \times N^2)$

1 1 1

Montrez que si A_0 est égal à A_1 alors le déterminant de S est nul ($n \geq 2$).

Supposons qu'il y ait deux ensembles égaux : A_0 et A_1 .

Les deux premières colonnes de la matrice S sont alors égales.

Le déterminant est alors nul.

2 2 2

Que pouvez vous dire si $\text{Tr}(S)$ est nulle ? ($n \geq 2$)

Ah au fait, que faire si la trace est nulle ?

Mais les termes de la diagonale sont des cardinaux.

Leur somme ne peut être nulle qu'avec des cardinaux tous nuls.

On en déduit que les A_i sont tous vides.

Mais alors tous les termes hors de la diagonale sont nuls aussi. Et la matrice est nulle.

Son déterminant est nul.

3 3 3

Montrez que si l'on prend pour A_0 les filles de MPSI2, pour A_1 les élèves de MPSI2 dont le prénom commence par E (ou È), le déterminant de $S(A_0, A_1, A_2)$ sera toujours un entier naturel (oui, donc positif, merci de l'avoir compris), quel que soit le choix de A_2 .

Passons au cas où l'on a trois ensembles : les filles de MPSI2 (17 éléments l'année où je l'ai posé en D.S.), les élèves au prénom en E (Émile fois deux, Élise, Élisabeth et Esther-Anne⁶).

On peut commencer à remplir la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 3 & . \\ 3 & 5 & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$ et même l'écrire son déterminant : $\begin{vmatrix} 17 & 3 & \alpha \\ 3 & 5 & \beta \\ \alpha & \beta & c \end{vmatrix}$, où α, β

et a désignent trois cardinaux.

On calcule le déterminant en développant par rapport à la dernière colonne par exemple :

$$110.a + 6.\alpha.\beta - 7.\alpha^2 - 17.\beta^2$$

Il y a des signes moins, il n'est pas si évident que cette chose soit positive.

On sait quand même que a est entre 0 et 48, que α est entre 0 et 17 et aussi entre 0 et a puisque c'est $\text{Card}(A \cap \text{Filles})$.

De même, β est plus petit que 7 et que a puisque c'est $\text{Card}(A \cap E)$ avec une notation facile à comprendre j'espère.

6. une année sans élève en E est assez triste

Comment prouver que $110.a + 6.a.\beta - 7.a^2 - 17.\beta^2$ est positif ?

Voyons le comme une fonction du second degré en $\alpha : \alpha \mapsto -7.\alpha^2 + 6.a.\beta + 110.a - 17.\beta^2$.

C'est un trinôme du second degré dont le maximum est atteint en $\frac{3.\beta}{7}$.

Son minimum sur $[0, 17]$ est atteint en 0 ou en 17 (ou en a si a est plus petit que 17).

Si ce minimum est positif, la fonction est positive.

On fait les calculs, on a cette fois un trinôme en β dont on cherche le minimum quand β est un entier entre 0 et 7 (et aussi entre 0 et a).

C'est calculatoire, et je regrette d'avoir posé cette question...

Donnez une situation où l'on a $S = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs que peuvent prendre $\text{Card}(A \cap B \cap C)$ et $\text{Card}(A \cup B \cup C)$ pour cette matrice S ?

Donnez alors une matrice diagonale D vérifiant $\text{Tr}(S) = \text{Tr}(D)$, $\det(S) = \det(D)$ et $\text{Tr}(S^2) = \text{Tr}(D^2)$.

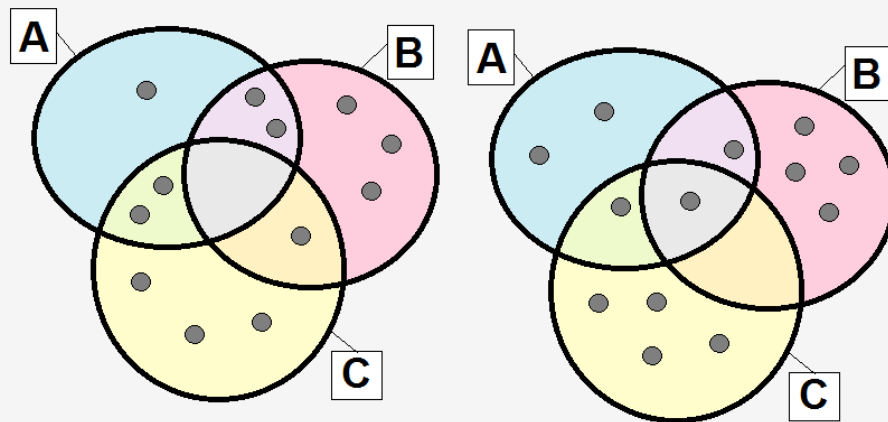
(là, je ne me contenterai pas de « on propose/on vérifie », je voudrai le polynôme $X^3 - s.X^2 + d.X - p$ dont les racines sont les trois termes diagonaux de D avec explication, ce qui me permet en passant de définir s, d et p).

On cherche trois ensembles A, B et C de cardinaux respectifs 5, 6 et 6.

Et leurs intersections deux à deux ont pour cardinaux 2, 2 et 1.

Il y a cinq éléments dans A dont deux dans B et deux dans C (peut être les mêmes ?).

Il y a six éléments dans B dont déjà deux dans A et aussi un dans C (il faut peut être partie des deux dans A).



Sachant que $A \cap B \cap C$ est inclus dans $A \cap B$, dans $A \cap C$ et $B \cap C$, son cardinal ne peut dépasser 1.

Il peut valoir 0 ou 1. Si on trouve une configuration pour chacun des deux, on aura gagné.

Le cardinal de $A \cup B \cup C$ se calcule alors par une formule du type crible :

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = (\text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C)) - (\text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(A \cap C) + \text{Card}(B \cap C)) + (\text{Card}(A \cap B \cap C))$$

L'un des cas donne **12 et l'autre 13**.

$S = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$S^2 = \begin{pmatrix} 33 & & \\ & 41 & \\ & & 41 \end{pmatrix}$	<table border="1"> <tr> <th>$\det(S)$</th><th>$\text{Tr}(S)$</th><th>$\text{Tr}(S^2)$</th></tr> <tr> <td>135</td><td>17</td><td>115</td></tr> <tr> <td>$\alpha.\beta.\gamma$</td><td>$\alpha + \beta + \gamma$</td><td>$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$</td></tr> </table>	$\det(S)$	$\text{Tr}(S)$	$\text{Tr}(S^2)$	135	17	115	$\alpha.\beta.\gamma$	$\alpha + \beta + \gamma$	$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$
$\det(S)$	$\text{Tr}(S)$	$\text{Tr}(S^2)$									
135	17	115									
$\alpha.\beta.\gamma$	$\alpha + \beta + \gamma$	$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$									
$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$	$D^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}$										

On ajoute donc vite la relation $\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{2} = 87$.

Les formules de Viète donnent $(X - \alpha).(X - \beta).(X - \gamma) = X^3 - 17.X^2 + 87.X - 135$

On résout ce polynôme. On peut s'inspirer de ce que donne le graphe approximatif.

On peut aussi lire dans la suite le rôle récurrent de 9, 5 et 3.

$$\begin{array}{rclcl} & 5 & +9 & +3 & = & 17 \\ \text{On est donc amené à proposer et vérifier :} & 3.9 & +5.3 & +5.9 & = & 87 \\ & 5 & \times 9 & \times 3 & = & 135 \end{array}$$

C'est encore une fois plus rapide à vérifier que $3^3 - 17.3^2 + 87.3 - 135 = 5^3 - 17.5^2 + 87.5 - 135 = 9^3 - 17.9^2 + 87.9 - 135 = 0$, comme quoi les relations coefficients racines sont un outil plus performant que les racines elles mêmes. Vous en convaincrez un jour, ou resterez vous le nez collé à votre cours de Terminale ?

Tiens, d'ailleurs, si on se dit « le prof n'est quand même pas vache au point de donner une matrice dont les valeurs propres ne soient pas entières... », on regarde alors le produit des valeurs propres : $135 = 3^3.5$. On teste donc « naturellement » 1, 3, 5, 3^2 , 3^3 , 3.5, $3^2.5$ et leurs opposés.

$$(X - 3).(X - 5).(X - 9) = X^3 - 17.X^2 + 87.X - 135$$

4

Trouvez P de déterminant non nul vérifiant $S.P = P.D$. On pourrait certes alors calculer $S^n = P.D^n.P^{-1}$ mais il nous manque P^{-1} .

On donc donc trouver à présent P inversible vérifiant

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Il en est pour lesquels la chose passe bien :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0.5 & ? & 1 \\ -0.5 & ? & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & ? & 9 \\ -1.5 & ? & 9 \\ -1.5 & ? & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0.5 & ? & 1 \\ -0.5 & ? & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

La colonne du 5 résiste à tout calcul avec le classique 1 en première ligne.

$$\text{On tente alors } \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ -0.5 & y & 1 \\ -0.5 & x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & ? & 9 \\ -1.5 & ? & 9 \\ -1.5 & ? & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ -0.5 & y & 1 \\ -0.5 & z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

et on trouve une solution, avec (malchance !) : $x = 0$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -0.5 & y & 1 \\ -0.5 & -y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ -1.5 & 5.y & 9 \\ -1.5 & -5.y & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -0.5 & y & 1 \\ -0.5 & -y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

On fait un choix de y non nul, et même on multiplie la première colonne :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ -3 & 5 & 9 \\ -3 & -5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice P trouvée (et elle n'est pas unique) a pour déterminant -6 . Elle est inversible. Mais on ne calculera pas son inverse ici.

(l'ordre des colonnes de votre matrice P va aussi dépendre de l'ordre des valeurs propres de D sur sa diagonale).

5

Montrez : $S^3 = s.S^2 - d.S + p.I_3$.

S^3	=	$17.S^2$	$-87.S$	$+135I_3$
$\begin{pmatrix} 261 & 234 & 234 \\ 234 & 310 & 185 \\ 234 & 185 & 310 \end{pmatrix}$	=	$17. \begin{pmatrix} 33 & 24 & 24 \\ 24 & 41 & 16 \\ 24 & 16 & 41 \end{pmatrix}$	$-87. \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$+135 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Le genre de question passionnante ! ☺ Mais il faut faire les calculs pour avoir les points. On ne peut pas se contenter de dire « après calculs au brouillon ».

C'est quand même le type de question qui permet de ramasser des points même sans connaître son cours sur le bout des doigts, ou même en n'ayant pas compris qui dépend de qui dans une quantification en $\forall \epsilon, \exists N_\epsilon$. Une question pour gagner des points à un petit concours filière P.S.I., là où les maths sont juste une des trois matières, et juste au outil au service des deux autres.

Il y en a que ça rassure de savoir que ça existe des concours comme ça.
Et moi ça me rassure de savoir que ça les rassure.

♣ 6 ♣

On pose alors $U = (S - 5.I_3).(S - 9.I_3)$, $V = (S - 3.I_3).(9.I_3 - S)$ et $W = (S - 3.I_3).(S - 5.I_3)$. Calculez $\det(S - 9.I_3)$, $\det(U)$, $\det(V)$.

Ensuite, ça redevient plus intelligent !

Pour $\det(S - 9.I_3)$, on calcule simplement : $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ par la règle qu'on veut et on trouve 0.

On affirme alors $\det(U) = \det(S - 5.I_3) \cdot \det(S - 9.I_3)$ et on trouve 0.

♣ 7 ♣

Justifiez $U.V = V.U = 0_{3,3}$, $U^2 = 12.U$, complétez $W - 24.I_3 = (S - 9.I_3) \dots$ et calculez $W^2 - 24.W$, $U.W$, $W.V$ (normalement, vous n'avez pas à faire tomber des colonnes sur des lignes, juste à être intelligent).

On a donc $S^3 - 17.S^2 + 87.S - 135.I_3 = 0_{3,3}$ et donc, en factorisant : $(S - 3.I_3).(S - 5.I_3).(S - 9.I_3) = 0_{3,3}$

Ou encore $(S - 3.I_3).(S - 9.I_3).(S - 5.I_3) = 0_{3,3}$ ou même $(S - 5.I_3).(S - 9.I_3).(S - 3.I_3) = 0_{3,3}$

C'est ce qui nous permet d'affirmer : $U.V = (S - 5.I_3).(S - 9.I_3).(S - 3.I_3).(9.I_3 - S)$. Dans le lot, il y a la matrice nulle, le produit est nul.

Le plus déprimant là dessus est de voir des élèves calculer $\begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ et leur produit, puis commenter « bon c'était pas très intelligent comme devoir, c'est pas des maths ».

De la même façon :

$$V.U = (S - 3.I_3).(9.I_3 - S).(S - 5.I_3).(S - 9.I_3) = 0_{3,3} \cdot (S - 9.I_3)$$

On calcule les neuf termes :

	$U = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$	$W = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$
$U = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$U^2 = \begin{pmatrix} 72 & -48 & -48 \\ -48 & 24 & 24 \\ -48 & 24 & 24 \end{pmatrix} = 12.U$	$U.V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$U.W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$	$V.U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$V^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -32 \\ 0 & -32 & 32 \end{pmatrix} = 8.V$	$V.W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$W = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$	$W.U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$W.V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$W^2 = \begin{pmatrix} 192 & 192 & 192 \\ 192 & 192 & 192 \\ 192 & 192 & 192 \end{pmatrix}$

Hors de la diagonale, c'est cadeau. On a à chaque fois un produit avec $(S - 3.I_3)$, $(S - 5.I_3)$ et $(S - 9.I_3)$ et un autre terme. Le produit est directement nul !

Mais, monsieur, la multiplication matricielle n'est pas commutative ! C'est vous même qui nous avez dit de bien faire attention.

Oui, mais ici, ce ne sont que des S et des I_3 qui se multiplient entre eux et permutent !

Pour la diagonale, c'est plus subtil.

Mais l'énoncé nous met sur des pistes intelligentes :

$$W - 24.I_3 = (S - 3.I_3).(S - 5.I_3) - 24.I_3 = S^2 - 8.S - 9.I_3 = (S - 9.I_3).(S + I_3)$$

On poursuit :

$$W^2 - 24.W = W.(W - 24.I_3) = (S - 3.I_3).(S - 5.I_3).(S - 9.I_3).(S + I_3) = 0_{3,3} \cdot (S + I_3) = 0_{3,3}$$

Et c'est pareil pour $V^2 - 8.V = V.(V - 8.I_3) = ((S - 3.I_3).(9.I_3 - S)).((S - 5.I_3).(7.I_3 - S))$

car $V = -S^2 + 12.S - 27.I_3$

$$V - 8.I_3 = -S^2 + 12.S - 35.I_3$$

$$V - 8.I_3 = -(S - 5.I_3).(S - 7.I_3)$$

♣ 8 ♣

Trouvez u , v et w vérifiant $S = u.U + v.V + w.W$.

On combine ensuite : $S = \frac{1}{4} \cdot (S^2 - 14.S + 45.I_3) + \frac{5}{8} \cdot (-S^2 + 12.S - 27.I_3) + \frac{3}{8} \cdot (S^2 - 8.S + 15.I_3)$

On le trouve en résolvant un petit système

$$\begin{cases} u & -v & +w & = & 0 & \text{pour } S^2 \\ -14.u & +12.v & -8.w & = & 1 & \text{pour } S \\ 45.u & -27.v & +15.w & = & 0 & \text{pour } I_3 \end{cases}$$

même si il y a d'autres méthodes possibles.

On trouve donc
$$S = \frac{2.U + 5.V + 3.W}{8} = \frac{1}{4}.U + \frac{5}{8}.V + \frac{3}{8}.W$$



Exprimez alors S^2 comme combinaison de U, V et W .

On a passé une phase calculatoire au niveau des coefficients, il doit être temps de revenir à une phase algébrique, au niveau des matrices.⁷
On ne se tape des systèmes de taille 9 sur 9 que quand on n'apas le choix...

On élève au carré :

$$S^2 = \frac{2.U + 5.V + 3.W}{8} \cdot \frac{2.U + 5.V + 3.W}{8}$$

Quand on développe, on a des U^2, V^2 et W^2 qu'on remplace par $12.U, 8.V$ et $24.W$.
Et on a des $U.V, U.W$ et autres qui sont tous nuls...

Il reste donc
$$S^2 = \frac{4.U^2 + 25.V^2 + 9.W^2 + 0_{3,3}}{64}.$$

On simplifie :
$$S^2 = \frac{3}{4}.U + \frac{25}{8}.V + \frac{27}{8}.W$$



Prouvez pour tout k : $S = u.3^k.U + v.5^k.V + w.9^k.W$ pour tout k de $\mathbb{N}$.

On vient de commencer une jolie récurrence.

$$S^3 = \left(\frac{3}{4}.U + \frac{25}{8}.V + \frac{27}{8}.W\right) \cdot \left(\frac{1}{4}.U + \frac{5}{8}.V + \frac{3}{8}.W\right) = \frac{3}{16}.U^2 + \frac{125}{64}.V^2 + \frac{81}{64}.W^2$$

$$S^3 = \frac{9}{4}.U + \frac{125}{8}.V + \frac{243}{8}.W$$

on commence à deviner les coefficients :

$$S^n = \frac{3^{n-1}}{4}.U + \frac{5^n}{8}.V + \frac{9^n}{3.8}.W$$
 que l'on prouve par récurrence sur n dont je ne traiterai pas ici l'hérédité.

On peut d'ailleurs dire que si l'on développe $S^n = \left(\frac{1}{4}.U + \frac{5}{8}.V + \frac{3}{8}.W\right)^n$ par la formule du multinôme (car tout « commute »), on trouve plein de termes, mais ils sont presque tous nuls. En effet, ils sont faits de croisements entre des U , des V et des W qui donnent $U.V = 0_{3,3}$ et ainsi de suite.

Il ne reste que les trois termes « purs » : $S^n = \left(\frac{1}{4}.U\right)^n + \left(\frac{5}{8}.V\right)^n + \left(\frac{3}{8}.W\right)^n$.

Ensuite, en mettant en boucle la formule $U^2 = 12.U$, on a $U^n = 12^{n-1}.U$ et la même chose (du moins pour l'idée, pas pour le coefficient) pour V^n et W^n .

Et c'est ainsi que cet exercice se rattache aussi à la formule du binôme.



On revient au cas général. Montrez pour tout vecteur colonne de composants x_0 à x_n : ${}^tX.S.X \geq 0$ (on tentera de croiser $\sum_{i < n} x_i.1_{A_i}$).

On va calculer des choses comme

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Card}(A_0) & \text{Card}(A_0 \cap A_1) & \text{Card}(A_0 \cap A_2) \\ \text{Card}(A_0 \cap A_1) & \text{Card}(A_1) & \text{Card}(A_1 \cap A_2) \\ \text{Card}(A_0 \cap A_2) & \text{Card}(A_1 \cap A_2) & \text{Card}(A_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

pour lesquelles déjà, les formats sont compatibles.

On se donne le vecteur colonne et la matrice.

Le produit $S.X$ donne un vecteur colonne dont l'élément de ligne i est $y_i = \sum_{k=0}^{n-1} S_i^k.x_k$ par les formules du produit

matriciel (colonne unique sur ligne d'indice i).

Les éléments de ce vecteur colonne tombent sur les x_i de la matrice ligne tX .

On fait se rencontrer x_i et y_i : $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$

7. surtout si on lit la suite de l'énoncé

On a donc au final un réel (ce qui explique qu'on va le comparer à 0) :

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot y_i = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} S_i^k \cdot x_k \right)$$

Par indépendance des variables de sommation on écrit une grande somme ${}^t X.S.X = \sum_{\substack{0 \leq i < n \\ 0 \leq k < n}} \text{Card}(A_i \cap A_k) \cdot x_i \cdot x_k$.

Mais qui est ce cardinal ? $\text{Card}(A_i \cap A_k) = \sum_{e \in E} 1_{A_i \cap A_k}(e)$ (on fait défiler les éléments de E et chacun répond présent ou non).

Mais qui est l'indicatrice de l'intersection ? $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$: $\text{Card}(A_i \cap A_k) = \sum_{e \in E} 1_{A_i}(e) \cdot 1_{A_k}(e)$.

La grande somme devient ${}^t X.S.X = \sum_{\substack{0 \leq i, k < n \\ e \in E}} 1_{A_i}(e) \cdot 1_{A_k}(e) \cdot x_i \cdot x_k$ (somme triple !)

On intervertit l'ordre de sommation :

$$X.S.X = \sum_{e \in E} \left(\sum_{\substack{0 \leq i < n \\ 0 \leq k < n}} 1_{A_i}(e) \cdot x_i \cdot 1_{A_k}(e) \cdot x_k \right)$$

Dans la parenthèse, les variables sont indépendantes : ${}^t X.S.X = \sum_{e \in E} \left(\left(\sum_{0 \leq i < n} 1_{A_i}(e) \right) \cdot \left(\sum_{0 \leq k < n} 1_{A_k}(e) \right) \right)$.

Mais qu'est ce qui distingue les deux sommes $\sum_{0 \leq i < n} 1_{A_i}(e)$ et $\sum_{0 \leq k < n} 1_{A_k}(e)$?

Rien, à part le nom de la variable de sommation. C'est deux fois la même. C'est donc un carré !

$${}^t X.S.X = \sum_{e \in E} \left(\sum_{0 \leq i < n} 1_{A_i}(e) \right)^2$$

Chaque carré de réel est positif ou nul, la somme l'est aussi !

C'est cette question qu'on retrouve dans un oral de Polytechnique, tiens...

12

Montrez que si X est un vecteur non nul et λ un réel vérifiant $S.X = \lambda.X$, alors λ est positif ou nul.

Si ensuite le hasard nous met en présence d'un X vérifiant $S.X = \lambda.X$ (un vecteur propre, une colonne d'une matrice P vérifiant $S.P = P.D$), on calcule de deux façons ${}^t X.S.X$. On a par le calcul précédent un réel positif.

Mais on a aussi par associativité du produit matriciel : ${}^t X.S.X = {}^t X.(S.X) = {}^t X.(\lambda.X) = \lambda.{}^t X.X$.

C'est bien encore un réel, puisque ${}^t X.X$ est le réel $(x_0)^2 + \dots + (x_{n-1})^2$: $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

On a donc : $\lambda \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (x_k)^2 \geq 0$.

Comme $\sum_{k=0}^{n-1} (x_k)^2$ est un réel positif non nul, il reste $\lambda \geq 0$.

Les valeurs propres de cette matrice S sont toujours positives ou nulles.

Si vous sortez ensuite un théorème qui dit que le déterminant est le produit des valeurs propres, le voilà bien positif.

42

f est une application de E dans F vérifiant $\exists y \in F, \forall x \in E, f(x) = y$. Que pouvez vous déduire ?
 f est une application de E dans F vérifiant : $\exists x \in E, \forall y \in F, f(x) = y$. Que pouvez vous déduire ?
 Et si on a $\forall (a, b) \in E^2, a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.

$\exists y \in F, \forall x \in E, f(x) = y$ comme y ne dépend pas de x , tous les x ont la même image. f est constante !

$\exists x \in E, \forall y \in F, f(x) = y$ pour ce x , par transitivité : pour y et z dans F : $y = f(x) = z$.

L'ensemble F est réduit à un seul élément !

Et f est encore constante. Mais il faut être idiot pour dire « je vais regarder des applications de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans $\{0\}$...

Encore une fois, f est constante.

43

On remplit une matrice sous forme de triangle de Pascal écrit de travers par rapport à nos habitudes et coupé en carré, comme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ venant de $\begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 3 & & 1 \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{matrix}$, puis $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}$. Écrivez un script Python qui prend en entrée n et fabrique la matrice de taille n sur n . (Calculez le déterminant de cette matrice.)

En indexation **Python**, le terme général (ligne i colonne k) est $\binom{i+k}{k}$ qui n'est autre aussi que $\binom{i+k}{i}$ (les rôles sont bien symétriques).
Et l'indexation à partir de 0 est la plus pratique.

On peut créer la matrice en bourrin :

```
def Pascal(n) :
...return [[binomial(i+k,i) for k in range(n)] for i in range(n)]
```

à condition d'avoir une fonction **binomial** disponible, par exemple avec le module **math**.

Mais on va la remplir plus efficacement avec la relation de Pascal.

```
def Pascal(n) :
...M = [[1]*n] #première ligne
...for i in range(1, n) : #les autres lignes
...    L = [1] #toutes les lignes commencent ainsi
...    for k in range(1, n) :
...        L.append(L[-1]+M[i-1][k])
...    M.append(L)
...return M
```

Dans cette version, juste des additions :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & ? & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$
 le terme à calculer vaut $4 + 6$, et le suivant $10 + 10$

et ainsi de suite.

*Le premier script avec binomial rapport les points si c'est pour une épreuve d'I.P.T.
Mais il vous vaut un regard noir en option informatique...*

Le déterminant de cette matrice vaut toujours 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 5 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 15 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 10 & 10 & 15 \\ 1 & 5 & 15 & 20 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 5 & 10 & 20 & 35 \end{vmatrix}$$

en soustrayant $C_k = C_k - C_{k-1}$ jusqu'à
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la première ligne :
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 10 & 15 \\ 4 & 10 & 20 & 35 \end{vmatrix}.$$

On soustrait chaque ligne à sa suivante :
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

et on arrive sur
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

On a diminué la matrice d'une taille.

On poursuit jusqu'à celle dont le déterminant vaut 1.

Mais j'ai aussi ça : on effectue des combinaisons sur les colonnes, après avoir émis une conjecture en calculant les premiers déterminants. On soustrait chaque colonne à la suivante (*et on garde la première*). On recommence avec les colonnes suivants, jusqu'à obtenir une matrice triangulaire

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 10 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Le déterminant vaut toujours 1.

◦44◦

Vrai ou faux : $\cos(a) = \cos(b) \Rightarrow a = b + 2.k.\pi$ ou $a + b = 2.k.\pi$
 $(a = b + 2.k.\pi (\forall k \in \mathbb{Z})) \Rightarrow \sin(a) = -\sin(b)$

Vrai ou faux : si A commute avec B et C alors B commute avec C (matrices de taille 2 sur 2).

Vrai ou faux : $x \mapsto \int_0^x f(t).dt$ a pour dérivée $t \mapsto f(t)$.

Vrai ou con : $x \mapsto x. \int_0^x f(t).dt$ a pour dérivée $x \mapsto \int_0^x f(t).dt + x.f(t)$.

Lesquelles sont bonnes :

$[2.x] = 2.[x]$	$\exists x, [2.x] = 2.[x]$	$\forall x, [2.x] \neq 2.[x]$
$[2.x] \neq 2.[x]$	$\exists x, [2.x] \neq 2.[x]$	$\forall x, [2.x] \neq 2.[x]$

$\cos(a) = \cos(b) \Rightarrow a = b + 2.k.\pi$ ou $a + b = 2.k.\pi$

Mais k n'est pas quantifié ! Il est peut être complexe !

$(a = b + 2.k.\pi (\forall k \in \mathbb{Z})) \Rightarrow \sin(a) = -\sin(b)$

On ne peut pas avoir $(a = b + 2.k.\pi$ pour tous les k à la fois !

On ne quantifie pas n'importe comment.

C'est donc de la forme (*Faux* $\Rightarrow$ *Truc*). C'est donc vrai.

Mais il ne faut pas confondre avec $\forall k \in \mathbb{Z}, (a = b + 2.k.\pi) \Rightarrow \sin(a) = -\sin(b)$ qui est faux...
sauf si a et b sont bien choisis.

Vrai ou faux : si A commute avec B et C alors B commute avec C (matrices de taille 2 sur 2).

Faux. I_2 commute avec $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et I_2 commute avec $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Mais $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne commute pas avec $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vrai ou faux : $x \mapsto \int_0^x f(t).dt$ a pour dérivée $t \mapsto f(t)$.

Vrai. Même si on a plus envie de dire $x \mapsto \int_0^x f(t).dt$ a pour dérivée $x \mapsto f(x)$.

Mais une fois que l'énoncé n'a pas figé x et t , on a $(t \mapsto f(t)) = (x \mapsto f(x))$ (qu'on appelle aussi f).

Vrai ou con : $x \mapsto x. \int_0^x f(t).dt$ a pour dérivée $x \mapsto \int_0^x f(t).dt + x.f(t)$.

Con ! Dans $x \mapsto \int_0^x f(t).dt + x.f(t)$, qui est ce t ?

Ce qui est vrai c'est $x \mapsto x. \int_0^x f(t).dt$ a pour dérivée $x \mapsto \int_0^x f(t).dt + x.f(x)$ (et encore, pour f continue).

$[2.x] = 2.[x]$	$\exists x, [2.x] = 2.[x]$	$\forall x, [2.x] \neq 2.[x]$
qui est x ?	oui : $x = 0$	faux : il existe $x = 0$
$[2.x] \neq 2.[x]$	$\exists x, [2.x] \neq 2.[x]$	$\forall x, [2.x] \neq 2.[x]$
qui est x je le redis	vrai : $x = \frac{2}{3}$	encore ?

◦45◦

♥♠ On définit $\varphi = t \mapsto e^{1/t}$. Montrez pour tout n l'existence d'un polynôme P vérifiant $\varphi^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2.n}}.\varphi(t)$ pour tout t .

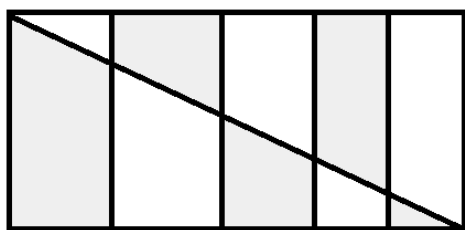
Donnez la relation qui calcule P_{n+1} à l'aide de P_n et P'_n . Calculez P_3 .

De quel degré est P_n ?

Montrez pour tout x de $]0, +\infty[: x^2.\varphi'(x) + \varphi(x) = 0$.

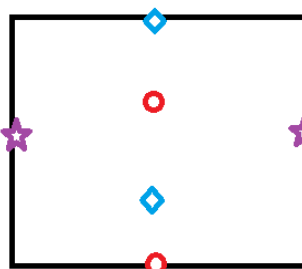
Déduisez sans récurrence : $x^2.\varphi^{(n+1)}(x) + 2.n.x.\varphi^{(n)}(x) + n.(n-1).\varphi^{(n-1)}(x) + \varphi^{(n)}(x) = 0$ pour tout x .

Trouvez la relation qui calcule P_{n+1} à l'aide de P_n et P_{n-1} (sans faire intervenir de dérivées).



Calculez les
périmètre
de la figure
grisée.

5



Connectez les deux cercles.
Connectez les deux losanges.
Connectez les deux étoiles.
Vos traits doivent rester
dans le grand carré sans se
croiser.

◦46◦

Which diagram cannot be drawn
without lifting your pencil off the
page and without drawing along
the same line twice?



A



B



C



D

◦47◦

Montrez que $\sum_{\substack{0 \leq p \\ 0 \leq q}} \frac{(-1)^p \cdot q^2}{(p+q)!}$ est sommable, de somme $3.e/2$.

On va raisonner sans prendre garde à la sommabilité pour l'instant.

Et même à horizon infini : $S = \sum_{p,q} \frac{(-1)^p \cdot q^2}{(p+q)!}$ (tant mieux si ça existe, sinon, tant pis !). On regarde le tableau à double

entrée :

	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
$q = 0$	$\frac{0^2}{0!}$	$-\frac{0^2}{1!}$	$\frac{0^2}{2!}$	$-\frac{0^2}{3!}$	$\frac{0^2}{4!}$	$-\frac{0^2}{5!}$
$q = 1$	$\frac{1^2}{1!}$	$-\frac{1^2}{2!}$	$\frac{1^2}{1!}$	$-\frac{1^2}{1!}$	$\frac{1^2}{1!}$	$-\frac{1^2}{1!}$
$q = 2$	$\frac{1^2}{2!}$	$-\frac{2^2}{2!}$	$\frac{3^2}{2!}$	$-\frac{4^2}{2!}$	$\frac{5^2}{2!}$	$-\frac{6^2}{2!}$
$q = 3$	$\frac{2^2}{3!}$	$-\frac{3^2}{3!}$	$\frac{4^2}{3!}$	$-\frac{5^2}{3!}$	$\frac{6^2}{3!}$	$-\frac{7^2}{3!}$
$q = 4$	$\frac{3^2}{4!}$	$-\frac{4^2}{4!}$	$\frac{5^2}{4!}$	$-\frac{6^2}{4!}$	$\frac{7^2}{4!}$	$-\frac{8^2}{4!}$
$q = 5$	$\frac{4^2}{5!}$	$-\frac{6^2}{5!}$	$\frac{6^2}{5!}$	$-\frac{7^2}{5!}$	$\frac{8^2}{5!}$	$-\frac{9^2}{5!}$
$q = 6$	$\frac{5^2}{6!}$	$-\frac{6^2}{6!}$	$\frac{7^2}{6!}$	$-\frac{8^2}{6!}$	$\frac{9^2}{6!}$	$-\frac{10^2}{6!}$

On va regrouper en fonction du dénominateur.

Chaque dénominateur $n!$ est atteint à chaque fois qu'on a $p+q = n$. Et p peut aller de 0 à n .

$$\begin{array}{r}
 \frac{0^2}{0!} \\
 \frac{1^2 - 0!}{1!} \\
 \frac{0^2 - 1^2 + 2^2}{2!} \\
 \frac{-0^2 + 1^2 - 2^2 + 3^2}{3!} \\
 \frac{0^2 - 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2}{4!} \\
 \frac{-0^2 + 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2}{5!}
 \end{array}$$

✓

✓

✓

✓

✓

✓

✓

✓

$\frac{0^2}{0!}$	$-\frac{0^2}{1!}$	$\frac{0^2}{2!}$	$-\frac{0^2}{3!}$	$\frac{0^2}{4!}$	$-\frac{0^2}{5!}$	$\frac{0^2}{6!}$
$\frac{1^2}{1!}$	$-\frac{1^2}{2!}$	$\frac{1^2}{1!}$	$-\frac{1^2}{1!}$	$\frac{1^2}{1!}$	$-\frac{1^2}{1!}$	$\frac{1^2}{1!}$
$\frac{1^2}{2!}$	$-\frac{2^2}{2!}$	$\frac{3^2}{2!}$	$-\frac{4^2}{2!}$	$\frac{5^2}{2!}$	$-\frac{6^2}{2!}$	$\frac{7^2}{2!}$
$\frac{2^2}{3!}$	$-\frac{3^2}{3!}$	$\frac{4^2}{3!}$	$-\frac{5^2}{3!}$	$\frac{6^2}{3!}$	$-\frac{7^2}{3!}$	$\frac{8^2}{3!}$
$\frac{3^2}{4!}$	$-\frac{4^2}{4!}$	$\frac{5^2}{4!}$	$-\frac{6^2}{4!}$	$\frac{7^2}{4!}$	$-\frac{8^2}{4!}$	$\frac{9^2}{4!}$
$\frac{4^2}{5!}$	$-\frac{6^2}{5!}$	$\frac{6^2}{5!}$	$-\frac{7^2}{5!}$	$\frac{8^2}{5!}$	$-\frac{9^2}{5!}$	$\frac{10^2}{5!}$
$\frac{5^2}{6!}$	$-\frac{6^2}{6!}$	$\frac{7^2}{6!}$	$-\frac{8^2}{6!}$	$\frac{9^2}{6!}$	$-\frac{10^2}{6!}$	$\frac{11^2}{6!}$
$\frac{6^2}{6!}$	$-\frac{6^2}{6!}$	$\frac{7^2}{6!}$	$-\frac{8^2}{6!}$	$\frac{9^2}{6!}$	$-\frac{10^2}{6!}$	$\frac{11^2}{6!}$

Ce regroupement donne

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^n \frac{(-1)^{n-q} \cdot q^2}{n!} \right)$$

On simplifie en $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n \cdot (n+1)}{n! \cdot 2}$ grâce à la question précédente. Oui, c'est pour ça qu'elle était là.

On simplifie encore en $S = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)}{(n-1)!}$ sachant que le terme $n=0$ ne sert à rien.

On décale : $S = \frac{1}{2} \cdot \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{(N+2)}{N!}$ (l'infini et l'infini moins 1, c'est pareil).

On sépare :

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{N}{N!} + \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{1}{N!}$$

On efface un terme et on décale encore :

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{N}{N!} + \sum_{M=0}^{+\infty} \frac{1}{M!}$$

Or, la formule de Taylor donne

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Classique : *Oui, c'est la formule de Taylor avec reste intégrale $e^x = \sum_{k=0}^K \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \frac{x^{K+1}}{K!} \cdot \int_0^1 (1-t)^K \cdot \exp^{(K+1)}(t \cdot x) \cdot dt$, quand on fait tendre K vers l'infini, il reste $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot x^k}{k!}$. Et c'est bien Taylor et JAMAIS au grand jamais un développement limité.
Les mots ont un sens précis en mathématiques.
Le développement limité c'est « nombre de termes fixé et x tend vers 0 ».
La formule de Taylor, c'est ici « x fixé et K tend vers l'infini ».*

◦48◦

♥ Sachant que 2337, 2698, 4655 et 9614 sont des multiples de 19^a , montrez que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 9 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 5 \\ 9 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} \text{ est}$$

aussi multiple de 19. Pensez à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1000 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. non, vous n'étiez pas obligé de le savoir

On effectue une combinaison qui ne modifie pas le déterminant : $C_4 := 1000 \cdot C_1 + 1 \dots C_2 + 10 \cdot C_3 + C_4$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 9 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 5 \\ 9 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 2337 \\ 2 & 6 & 9 & 2698 \\ 4 & 6 & 5 & 4655 \\ 9 & 6 & 1 & 9614 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 19 \times 123 \\ 2 & 6 & 9 & 19 \times 142 \\ 4 & 6 & 5 & 19 \times 245 \\ 9 & 6 & 1 & 19 \times 506 \end{vmatrix} = 19 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 123 \\ 2 & 6 & 9 & 142 \\ 4 & 6 & 5 & 245 \\ 9 & 6 & 1 & 506 \end{vmatrix}$$

Le déterminant est ensuite entier (somme de produits d'entiers). On a un multiple de 19.

Ici, x vaut 1 (et effectivement, 1 ne tend pas vers 0).

On a donc $S = \frac{e^1}{2} + e^1$ et c'est la bonne réponse.

Avait-on le droit de regrouper ainsi les termes ?

Oui, si la famille était sommable.

Sommable, c'est sommable en valeur absolue. On va donc étudier les sommes $\sum_{(p,q) \in D} \frac{q^2}{(p+q)!}$ où D est une partie finie de $\mathbb{N}^2$ et tenter de les majorer par une quantité ne dépendant pas de D .

Et on va reprendre la même idée de regrouper par « diagonales », celles où $p + q$ est constant (et vaut n).

On inclus notre partie D dans une partie triangulaire $p + q \leq N$ avec N assez grand.

Par positivité des termes :

$$\sum_{(p,q) \in D} \frac{q^2}{(p+q)!} \leq \sum_{p+q \leq N} \frac{q^2}{(p+q)!}$$

Sous cette forme, on regroupe en

$$\sum_{(p,q) \in D} \frac{q^2}{(p+q)!} \leq \sum_{p+q \leq N} \frac{q^2}{(p+q)!} = \sum_{n=0}^N \left(\sum_{p+q=n} \frac{q^2}{(p+q)!} \right)$$

Le majorant devient $\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n!} \cdot \sum_{p+q=n} q^2 \right)$.

La condition $p + q = n$ impose juste à q de n'aller que de 0 à n .

Le majorant est à présent $\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n!} \cdot \sum_{q=0}^n q^2 \right)$ et même $\frac{1}{6} \cdot \sum_{n=0}^N \left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{n!} \right)$.

Si on avait $\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}$, on majorerait par e^1 (Taylor toujours).

Mais les n , $n+1$ et $2n+1$ ne changent pas grand chose. Ils ne font que décaler les termes, mais la factorielle faut tout le travail.

Tenez, je simplifie $\frac{1}{6} \cdot \sum_{n=1}^N \left(\frac{(n+1) \cdot (2n+1)}{(n-1)!} \right)$.

Je décale et distribue : $\frac{1}{6} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{(m+2) \cdot (2m+3)}{m!} \right)$ puis $\frac{1}{6} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{2m^2 + 7m + 6}{m!} \right)$.

J'isole $\frac{1}{6} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \frac{6}{m!}$ que je majore par e et je recommence avec

$$\frac{1}{6} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \frac{7m}{m!} = \frac{7}{6} \sum_{p=0}^{N-2} \frac{1}{p!}$$

puis le dernier de la même façon.

L'ensemble est majoré par un multiple de e .

La famille était bien sommable.

Le groupement de termes était légitime.

◦49◦

♥ Inversez les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, on calcule le déterminant et surtout les cofacteurs :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & 2 \\ \cdot & 4 & 5 \\ \cdot & 1 & 2 \end{array} & \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 2 \\ 2 & \cdot & 5 \\ 1 & \cdot & 2 \end{array} & \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 3 & \cdot \\ 2 & 4 & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4 & 5 \\ \cdot & 1 & 2 \\ \cdot & 3 & 2 \end{array} & \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & 5 \\ 1 & \cdot & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} & \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 4 & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot \\ 1 & 3 & \cdot \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 2 \\ \cdot & 3 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} & \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 2 \\ 1 & \cdot & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} & \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot \\ 1 & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \end{array} \right)$$

Et même les cofacteurs pondérés

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & 2 \\ \cdot & 4 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 2 \\ 2 & \cdot & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 3 & \cdot \\ 2 & 4 & \cdot \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 2 \\ \cdot & 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 2 \\ 2 & \cdot & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot \\ 2 & 4 & \cdot \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 2 \\ \cdot & 3 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 2 \\ 1 & \cdot & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot \\ 1 & 3 & \cdot \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

On transpose ensuite :

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & 2 \\ \cdot & 4 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \cdot & 1 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \cdot & 1 & 2 \\ \cdot & 3 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 2 \\ 2 & \cdot & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 2 \\ 2 & \cdot & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 3 & \cdot \\ 2 & 4 & \cdot \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot \\ 1 & 3 & \cdot \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Il n'y a plus qu'à calculer ces petits déterminants et à diviser par le déterminant de la 3 sur 3.
On fait de même avec les autres, sauf à avoir une belle idée...

◦50◦

♥ Montrez qu'il n'existe pas d'application f linéaire^a de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(mot clef : relation de dépendance linéaire).

a. L'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images

En gros, avec les images de quatre vecteurs de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, on donne trop de conditions. Et elles finissent par être incompatibles.

Considérons $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. La famille est liée.

Par exemple, on reconstruit $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ avec les trois premiers :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{On recombine : } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(on a une relation de dépendance linéaire).

$$\text{Si } f \text{ est linéaire, on doit avoir } f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) - \frac{1}{2} \cdot f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \frac{3}{2} \cdot f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Et ce n'est pas le cas.

Remarque : si cela avait été vrai, on aurait pu définir f .

En fait, f est définie dès qu'on connaît l'image de chacun des vecteurs d'une base.

Ici, on connaissait l'image de chacun des vecteurs d'une famille génératrice. C'était peut être trop.

◦51◦

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$. Calculez $\det(A^{-1})$. (la relation de Pascal peut servir...)

Si A^{-1} a une forme simple, on la calcule puis on calcule son déterminant.

Mais ici, autant calculer $\det(A)$ puis passer à $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{vmatrix}$$

On a soustrait la première colonne à chacune, puis développé par rapport à la première ligne.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 1$$

On a encore soustrait des multiples de la première sur les suivantes et développé par rapport à la bonne ligne avec ses 0.

Le déterminant de A (et de A^{-1}) vaut 1.

◦52◦

♡ Calculez $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Généralisez en taille n , si possible avec démonstration.

On développe par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + d \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + d \cdot (-d) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On a redéveloppé le deuxième par rapport à sa dernière ligne.

La matrice 3 sur 3 est la matrice I_3 de déterminant 1.

On recommence en développant le déterminant de taille 4 par rapport à sa dernière colonne :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} - c \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} - d^2$$

$$\text{On re-développe } \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = c.$$

$$\text{On itère le bon nombre de fois : } \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 - b^2 - c^2 - d^2.$$

On pouvait aussi développer par rapport à la première ligne et bien travailler chaque cofacteur.

Mais il y a mille fois plus simple.

On note C_0, C_1, C_2, C_3 et C_4 les cinq colonnes de la matrice initiale.

On remplace C_0 par $C_0 - a.C_1 - b.C_2 - c.C_3 - d.C_4$:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ? & a & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ avec } ? = -a^2 - b^2 - c^2 - d^2.$$

La matrice est diagonale, son déterminant est le produit des termes diagonaux.

Et la combinaison $C_0 := C_0 - \sum_i a_i \cdot C_i$ est le bon argument pour arriver à $-\sum_i (a_i)^2$.

◦53◦

♥ Dérivez (pour b fixé non nul) $x \mapsto \frac{x}{x^2 + b^2}$.

Calculez $\int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dx \right) \cdot dy$ et $\int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dy \right) \cdot dx$.

$$\left(x \mapsto \frac{x}{x^2 + b^2} \right)' = \left(x \mapsto \frac{1}{x^2 + b^2} - \frac{2 \cdot x}{(x^2 + b^2)^2} \cdot x \right)$$

On réduit au dénominateur commun $\left(x \mapsto \frac{x}{x^2 + b^2} \right)' = \left(x \mapsto \frac{b^2 - x^2}{(x^2 + b^2)^2} \right)$

quelle chance, si au lieu de b on note y la constante, alors on a pour tout y non nul :

$$\int_{x=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dx = \left[\frac{-x}{x^2 + y^2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{-1}{1 + y^2}$$

On traite à part le cas $y = 0$? $\int_{x=0}^1 \frac{x^2 - 0}{(x^2 + 0)^2} \cdot dx$ ceci n'existe pas. Mais on va faire comme si on n'avait pas vu.

quel sens donner ensuite à $\int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dx \right) \cdot dy$?

C'est $\int_{y=0}^1 F(y) \cdot dy$ avec $F(y) = \left(\int_{x=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dx \right)$ pour tout y (c'est bien une intégrale qui ne dépend plus après intégration que de y).

Par le calcul précédent, on trouve $\int_{y=0}^1 \frac{-1}{1 + y^2} \cdot dy$. On intègre en arctangente et on trouve $-\frac{\pi}{4}$.

Dans $\int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dy \right) \cdot dx$, qu'est ce qui change ? Les rôles sont inversés.

On peut tout de suite conclure en disant que le signe va changer.

Sinon, pour chaque x de $]0, 1]$, on calcule $\int_{y=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dy$ en trouvant justement une primitive :

$$\left(y \mapsto \frac{y}{x^2 + y^2} \right)' = \left(y \mapsto \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

donc

$$\int_{y=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dy = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ensuite

$$\int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dy \right) \cdot dx = \int_{x=0}^1 \left(\frac{1}{1 + x^2} \right) \cdot dx = [\text{Arctan}(x)]_{x=0}^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Bilan : } \left(\int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dx \right) \cdot dy = \frac{\pi}{4} \text{ et } \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dy \right) \cdot dx = \frac{\pi}{4} \right)$$

Pas de quoi être troublé...

Sauf si on se dit que $\iint_C \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dx dy$ doit se calculer, quand C est le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

Et une intégrale double, c'est deux intégrales simples.

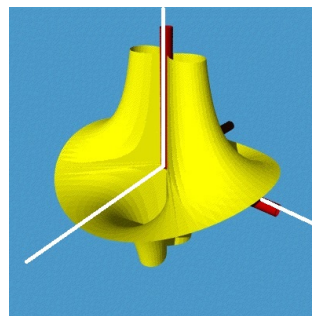
$$\text{On doit bien avoir } \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^1 F(x, y) \cdot dx \right) \cdot dy = \iint_{[0,1]^2} F(x, y) \cdot dx dy = \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 F(x, y) \cdot dy \right) \cdot dx.$$

C'est ce qu'on appelle théorème de Fubini.

Et il est vrai si f est de classe C^0 sur tout $[0, 1]^2$.

Mais justement, ici, F n'est pas continue. Elle n'est pas définie en 0, et ça suffit à tout planter...

$$\text{On a d'ailleurs } \iint_C \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| \cdot dx dy = +\infty.$$



Si non, on peut aussi regarder $\int_{x=0}^2 \left(\int_{y=0}^1 x \cdot y \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^3} \cdot dy \right) \cdot dx = \frac{1}{5}$ et $\int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^2 x \cdot y \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^3} \cdot dx \right) \cdot dy = -\frac{1}{20}$ pour faire plus original.

(pour les intégrales du centre en $\left(\int_{y=0}^1 x \cdot y \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^3} \cdot dy \right)$ et sa consœur, changez de variable en $u = x^2 + y^2$).

◦54◦

♥ Calculez le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (argument géométrique sur des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ « pas si nombreux »).

On a une matrice de taille 4 sur 4 qu'on peut certes expliciter.

Mais si on note A , B et C les trois colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

La matrice finale est faite de quatre colonnes ($3.A - B + C$, $B + 2.C$, $2.A + B + C$, $-A - 3.B + 2.C$).

Ces colonnes forment une famille liée (quatre vecteurs dans un sous-espace de dimension 3).

Le déterminant est nul.

Tenez, j'ai aussi ça : A , B et C sont dans un même sous-espace de dimension 3, d'équation $4.x = 2.y + t$.

$$4.1 = 2.2 + 0.1 + 1.0$$

On vérifie en effet : $4.2 = 2.3 + 0.5 + 1.2$.

$$4.1 = 2.0 + 0.3 + 1.4$$

On transcrit même : $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

puis $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En notant M la matrice 4 sur 4 : $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ou même ${}^t M \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La matrice ${}^t M$ ne peut pas être inversible, sinon en multipliant par son inverse on passerait de ${}^t M \cdot U = 0_4$ à $U = 0_4$.

On a donc $\det({}^t M) = 0$ et par suite $\det(M) = 0$.

De l'algèbre linéaire dans toute sa splendeur. Epsilon calcul, un résultat intelligent.

Au fait, comment ai-je trouvé l'équation du plan contenant A , B et mC (par jeu de dimensions justement ?).

On peut tâtonner/vérifier. Beuh.

On écrit juste $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 2 & 3 & 0 & y \\ 1 & 5 & 3 & z \\ 0 & 2 & 4 & t \end{pmatrix} = 0$.

Et on a quatre déterminants de taille 3 sur 3 à calculer.

◦55◦

On définit : $f = x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$. Calculez $f^{(n)}(0)$ pour n de 0 à 3.

Simplifiez $f(x) \cdot f'(x)$ pour tout x réel.

Calculez alors $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)} \cdot f^{(k+1)}$ pour tout entier naturel n .

Calculez alors $f^{(n)}(0)$ pour n de 4 à 9.

Montrez que $f^{(2n+1)}(0)$ est nul pour tout entier naturel n .

	0	1	2	3
$f^{(n)}(x)$	$(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$	$x \cdot (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2 \cdot (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} = (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$	$-3 \cdot x \cdot (1 + x^2)^{-\frac{5}{2}}$
$f^{(n)}(0)$	1	0	1	0

Une chose est sûre : par composition, f est de classe C^∞ .
 Pour tout x , on a $f(x).f'(x) = x$.

On applique la formule de Leibniz car f et f' sont de classe suffisante.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)}(x) \cdot (f')^{(k)}(x) = \begin{cases} x & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}.$$

Le membre de droite dépend de n , mais il s'en va très vite.

Ceci va permettre de calculer de proche en proche : $f^{(n+1)}(x) = \frac{-1}{f(x)} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)}(x) \cdot f^{(k+1)}(x)$.

En particulier : $f^{(n+1)}(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)}(0) \cdot f^{(k+1)}(0)$.

En particulier aussi : $f^{(4)}(0) = - \sum_{k=0}^2 \binom{3}{k} \cdot f^{(3-k)}(0) \cdot f^{(k+1)}(0)$

$$f^{(4)}(0) = -f^{(3)}(0) \cdot f'(0) - 3 \cdot f''(0) \cdot f''(0) - 3 \cdot f'(0) \cdot f^{(3)}(0)$$

$$f^{(4)}(0) = -3$$

De même, $f^{(5)}(0) = 0$, $f^{(6)}(0) = 45$ et ainsi de suite

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f^{(n)}(0)$	1	0	1	0	-3	0	45	0	-1575	0	99225

Bien malin qui proposera alors une formule toute prête pour tout n pair.

Pour n impair, en fait, il n'y a aucun effort à faire.

On peut certes monter une belle récurrence, elle passe.

Mais f est paire. Ses dérivées successives sont donc paires et impaires.

Il suffit de partir de $\forall x, f(-x) = f(x)$ et de dériver n fois « par rapport à x » pour utiliser une locution physicienne.

On obtient $(-1)^n \cdot f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$.

En particulier en 0 : $(-1)^n \cdot f^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$

$$(-1)^{2n+1} \cdot f^{(2n+1)}(0) = f^{(2n+1)}(0)$$

$$f^{(2n+1)}(0) = 0$$

Autre approche | Si φ est paire et dérivable, alors φ' est impaire : $\forall x, \varphi(-x) = \varphi(x)$

◦56◦

♣ On pose abusivement $\binom{n}{k} = \prod_{p=1}^k \frac{n-p+1}{p}$ le coefficient binomial de Newton (*même pour n non entier, mais quand même pour k entier*).

Quel est le plus grand élément de la liste $\left| \binom{1/3}{k} \right|$ quand k va de 0 à 20 ?

Donnez le développement limité d'ordre 4 en $1/2$ de $x \mapsto \binom{x}{4}$.

Quel est le module de $\binom{1+i}{4}$. Donnez un équivalent de $\sqrt[n]{\left| \binom{1+i}{k} \right|}$ quand k tend vers l'infini.

♠ Donnez un équivalent de $\left| \binom{1+i}{k} \right|$ quand k tend vers l'infini.

♣² Il paraît que le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $x \mapsto \binom{2x}{x}$ est $1 + \frac{\pi^2}{6} \cdot x^2 + 2 \cdot \zeta(3) \cdot x^3 + \frac{19}{360} \cdot \pi^4 \cdot x^4 + o(x^4)_{x \rightarrow 0}$.

◦57◦

Donnez un équivalent en $a \cdot n^\alpha$ de $(n+1)^p - (p+n) \cdot n^{p-1}$ quand n tend vers l'infini.

Pour $(n+1)^p - (p+n) \cdot n^{p-1}$, on développe par formule de Newton :

$$(n+1)^p = n^p + p \cdot n^{p-1} + \frac{p \cdot (p-1)}{2} \cdot n^{p-2} + \sum_{k=3}^p \binom{p}{k} \cdot n^{p-k}$$

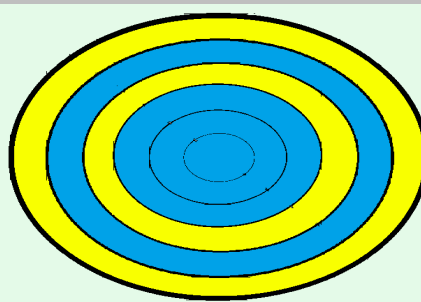
On soustrait : $(n+1)^p - (p+n) \cdot n^{p-1} = \frac{p \cdot (p-1)}{2} \cdot n^{p-2} + \sum_{k=3}^p \binom{p}{k} \cdot n^{p-k}$. Les termes de la somme sont tous d'un

exposant moins élevé que n^{p-2} qui est donc « celui qui l'emporte en $+\infty$ » :

$$(n+1)^p - (p+n).n^{p-1} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p \cdot (p-1)}{2} \cdot n^{p-2} \text{ a vaut } \frac{p \cdot (p-1)}{2} \text{ et } \alpha \text{ vaut } p-2.$$

♣ Il fallait découper le gâteau (ci contre vu du dessus) en deux parts égales. Au lieu d'effectuer une découpe "en argument", on a effectué une découpe "en module". Sur le schéma, on a des cercles concentriques de rayons entiers 1 à 6. Montrez que les deux parts colorées sont égales.

◦58◦ Re-répartissez ce découpage en deux parts égales.



On a un disque qu'on découpe en couronnes successives. Les rayons vont de r à $6.r$.

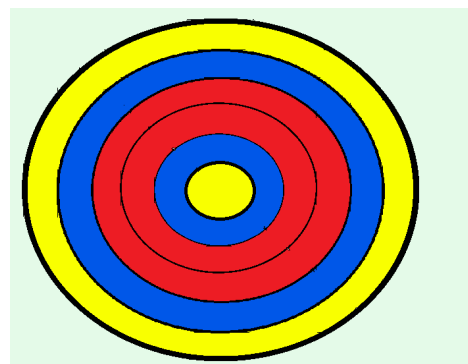
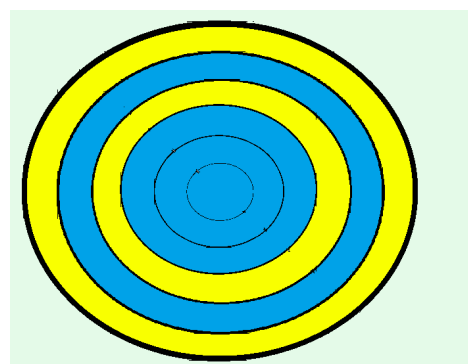
Le $r^{ième}$ disque a pour aire $\pi.k^2.r^2$. La $r^{ième}$ couronne a donc pour aire $\pi.k^2.r^2 - \pi.(k-1)^2.r^2$ c'est à dire $(2.k-1).\pi.r^2$.

numéro de la couronne	1	2	3	4	5	6	
aire	$1.\pi.r^2$	$3.\pi.r^2$	$5.\pi.r^2$	$7.\pi.r^2$	$9.\pi.r^2$	$11.\pi.r^2$	
jaune				$7.\pi.r^2$		$11.\pi.r^2$	$(11+7)$
bleu	$1.\pi.r^2$	$3.\pi.r^2$	$5.\pi.r^2$		$9.\pi.r^2$		$(1+3+5+9)$

Les deux protagonistes ont droit à $18.\pi.r^2$.

numéro de la couronne	1	2	3	4	5	6	
aire	$1.\pi.r^2$	$3.\pi.r^2$	$5.\pi.r^2$	$7.\pi.r^2$	$9.\pi.r^2$	$11.\pi.r^2$	
jaune	$1.\pi.r^2$					$11.\pi.r^2$	12
bleu		$3.\pi.r^2$			$9.\pi.r^2$		12
rouge			$5.\pi.r^2$	$7.\pi.r^2$			12

Chacun a un tiers de la surface totale. la clef étant dans $1+11=3+9=5+7$.



◦59◦

♥♣ $\mathbb{F}$ est le corps des entiers de **range**(7) pour l'addition et la multiplication modulo 7, et E est $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$. Montrez qu'aucune forme bilinéaire antisymétrique ϕ sur $E \times E$ ne vérifie $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 5$.

Soit Φ une forme bilinéaire antisymétrique vérifiant $\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 5$ calculez $\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$.

Montrez qu'il y a 49 vecteurs dans E et sept forme bilinéaires antisymétriques de $E \times E$ dans $\mathbb{F}$.

Une forme bilinéaire symétrique ψ vérifie $\psi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \psi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 5$, montrez qu'on peut calculer $\psi\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Il y a sept coefficients, et donc 7^2 vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec sept choix pour a et autant pour b .

Notons $\vec{i}$ le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j}$ le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \phi(\vec{i} + 2.\vec{j}, 5.\vec{i} + 3.\vec{j})$.

On développe par bilinéarité en éliminant les $\phi(\vec{i}, \vec{i})$ et $\phi(\vec{j}, \vec{j})$: $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 3.\phi(\vec{i}, \vec{j}) + 10.\phi(\vec{j}, \vec{i})$.

Mais on sait $\phi(\vec{j}, \vec{i}) - \phi(\vec{i}, \vec{j})$. Il reste $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 7.\phi(\vec{j}, \vec{i}) = 0$ (puisque 7 est nul !).

Il est donc impossible d'avoir $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 0$.

Si on repart de $\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 5$, on obtient cette fois $2.\Phi(\vec{i}, \vec{i}) + 3.\Phi(\vec{i}, \vec{j}) + 4.\Phi(\vec{j}, \vec{i}) + 6.\Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 5$
et donc $\Phi(\vec{j}, \vec{i}) = 5$ (ou $\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = 2$).

On développe alors $\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = 2.0 + 5.0 + 5.2 - 2.2 = 6$

Pour déterminer une forme bilinéaire antisymétrique, il faut et il suffit de déterminer $\phi(\vec{i}, \vec{j})$ avec sept valeurs possibles.

Pour la forme bilinéaire symétrique, on aurait besoin de connaître $\psi(\vec{i}, \vec{i})$, $\psi(\vec{i}, \vec{j})$ et $\psi(\vec{j}, \vec{j})$.

Et on ne nous donne que $\psi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 5$ et $\psi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 5$
 $\psi(\vec{i}, \vec{i}) + 5.\psi(\vec{i}, \vec{j}) + 6.\psi(\vec{j}, \vec{j}) = 5$ $2.\psi(\vec{i}, \vec{i}) + 4.\psi(\vec{i}, \vec{j}) = 5$

Et on cherche $\psi\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ c'est à dire $4.\psi(\vec{i}, \vec{j}) + \psi(\vec{j}, \vec{j})$.

Mais peut être peut on le retrouver par combinaison

6 fois	$\psi(\vec{i}, \vec{i})$	$+5.\psi(\vec{i}, \vec{j})$	$+6.\psi(\vec{j}, \vec{j})$
plus 4 fois	$2.\psi(\vec{i}, \vec{i})$	$+4.\psi(\vec{i}, \vec{j})$	
égale	$14.\psi(\vec{i}, \vec{i})$	$+46.\psi(\vec{i}, \vec{j})$	$+36.\psi(\vec{j}, \vec{j})$
c'est à dire		$+4.\psi(\vec{i}, \vec{j})$	$+\psi(\vec{j}, \vec{j})$

On a donc $\psi\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 6.\psi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) + 4.\psi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 6.5 + 4.5 = 1$

Cela dit, on l'avait avec $\psi\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 4.\psi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 4.\psi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ avec a et b bien choisis.