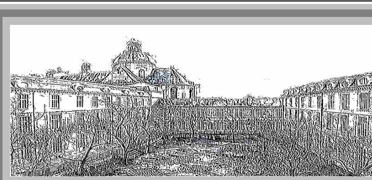
LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi février
M.P.S.I.2



2023 2024

IS18

♡ 0 ♡ Montrez qu'une application linéaire f de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$ est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\overrightarrow{0_E}$. 3 pt.

♡ 1 ♡ Soit f et g linéaires (f de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$ et g de $(F,+,.)$ dans $(G,+,.)$). Montrez : $Ker(f) \subset Ker(g\circ f)$. A-t-on $Ker(g) \subset Ker(g\circ f)$? 2 pt.

♯ 0 ♯ J'ai tapé `a = 2**(0.2)`, puis `x = 1+a+a**2+a**3+a**4` et enfin `n = (1+1/x)**30`. J'ai obtenu presque un entier. Lequel ? 2 pt.

◊ 0 ◊ Montrez pour x et y strictement positifs : $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}+4 \geqslant 3.\Big(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\Big)$. 3 pt. Piste possible : $t=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

◊ 1 ◊ Montrez : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{2^t}.dt = \frac{2}{(\ln(2))^3}$. 3 pt.

♣ 0 ♣ A cette soirée dans un bar du Marais, tout le monde était en couple (hétéro ou homo). 70% des femmes étaient avec leur épouse. Et 40% des hommes étaient avec leur mari. Quel était le pourcentage de femmes ? 3 pt.

◊ 2 ◊ L'élève Yedvitesse-Etatah-Droite ne connaît plus la formule de Zhu-Shi-Jie.On va l'aider à la retrouver en posant (pour N fixé) pour tout k : $S_k=\displaystyle\sum_{n=k}^{N}\binom{n}{k}$. On lui demande alors de calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}S_k.X^k$ et de retrouver alors la formule $S_k=\dbinom{N+1}{k+1}$. 3 pt.

◊ 3 ◊ On doit résoudre $\left\{\begin{array}{cccccc} x & +6.y & +5.z & = & 2 \\ 2.x & +3.y & +6.z & = & 3 \\ x & +y & +2.z & = & c \end{array}\right|$.

On commence sur $(\mathbb{R},+,.)$. Montrez que le système a une seule solution, et exprimez x sous la forme $\lambda.c+\mu$. 2 pt.

◊ 4 ◊ On recommence sur $(\mathbb{Z}_{11.\mathbb{Z}},+,.)$. Calculez x sous la forme $\lambda'.c+\mu'$. 1 pt.

♣ 1 ♣ On recommence sur $(\mathbb{Z}_{7.\mathbb{Z}},+,.)$. Ajustez c pour que le système ait des solutions $(x,\ y,\ z)$. Donnez les toutes. Et donnez leur somme. 4 pt.

◊ 5 ◊ ϕ est une forme bilinéaire antisymétrique sur l'espace des matrices réelles symétriques de taille 2 sur 2.

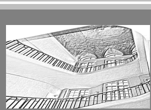
On sait $\left| \phi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=1 \right| \phi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\2&1\end{pmatrix}\right)=3 \left| \phi\left(I_2,\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=4 \right|$

Calculez $\left| \phi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) \right| \phi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right) \left| \phi\left(\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix},I_2\right) \right|$ pour tout triplet $(a,\ b,\ c)$.

Donnez une base de l'espace des solutions de $\phi\left(M,\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=0$ d'inconnue M dans $(S_2(\mathbb{R}),+,.)$.

◊ 6 ◊ Résolvez $\left\{\begin{array}{cccccc} x & +y & +z & -4.t & = & a \\ x & +y & -4.z & +t & = & b \\ x & -4.y & +z & +t & = & c \\ -4.x & +y & +z & +t & = & d \end{array}\right|$ d'inconnues $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ et inversez $\begin{pmatrix}1&1&1&-4\\1&1&-4&1\\1&-4&1&1\\-4&1&1&1\end{pmatrix}$. 3 pt.

◊ 7 ◊ Calculez l'inverse puis la comatrice de la comatrice de $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. 3 pt.



Questions de cours. IS18

On suppose $Ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$ et on doit montrer que f est injective.
On prend donc $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ et on suppose $f(\overrightarrow{a}) = f(\overrightarrow{b})$. Notre objectif est alors $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$.
On transforme $f(\overrightarrow{a}) = f(\overrightarrow{b})$ en $f(\overrightarrow{a}) - f(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0_F}$ et par linéarité $f(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0_F}$.
Ceci signifie que $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ est dans $Ker(f)$. Or, par hypothèse, $Ker(f)$ n'a qu'un élément. On a donc $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0_E}$ et donc $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$.

On suppose f injective. On doit montrer que dans $Ker(f)$ il n'y a que $\overrightarrow{0_E}$.
Déjà, $\overrightarrow{0_E}$ est dans $Ker(f)$ par linéarité ($f(\overrightarrow{0_E}) = f(0.\overrightarrow{u}) = 0.f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0_F}$).
Prenons réciproquement un vecteur $\overrightarrow{a}$ dans $Ker(f)$ (objectif : c'est $\overrightarrow{0_E}$).
On traduit : $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0_F}$. On reconnaît $f(\overrightarrow{a}) = f(\overrightarrow{0_E})$ et par injectivité $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0_E}$.

On a donc $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ et
$$\begin{array}{lclcl} Ker(f) & = & \{\overrightarrow{a} \in E \mid & f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0_F}\} & \subset E \\ Ker(g\circ f) & = & \{\overrightarrow{a} \in E \mid & g\circ f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0_G}\} & \subset E \\ Ker(g) & = & \{\overrightarrow{b} \in F \mid & g(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0_G}\} & \subset F \quad (*) \end{array}$$
A elle seule, la ligne $*$ nous permet de dire qu'il n'y a aucun rapport entre $Ker(g\circ f)$ et $Ker(g)$. L'un est un sous-espace de E et l'autre un sous-espace de F.
Ensuite, si on prend $\overrightarrow{a}$ dans $Ker(f)$, on a $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0_F}$ et en composant et en utilisant la linéarité
$$g\circ f(\overrightarrow{a}) = g(f(\overrightarrow{a})) = g(\overrightarrow{0_F}) = \overrightarrow{0_G}$$
et c'est ce qu'on attendait : $\overrightarrow{a} \in Ker(g\circ f)$. Par composition, le noyau ne peut que grossir.

On interprète les instructions en vraies formules mathématiques, et on calcule si nécessaire

`a = 2**(0.2)`	$a = \sqrt[5]{2} = 2^{1/5}$	
`x = 1+a+a**2+a**3+a**4`	$x = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4$	$x = \dfrac{1-a^5}{1-a} = \dfrac{1-2}{1-\sqrt[5]{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2}-1}$
`n = (1+1/x)**30.`	$n = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{30}$	$n = (1 + (\sqrt[5]{2}-1))^{30} = (2^{1/5})^{30} = 2^6 = 64$

Et 64 est bien un entier. Un vrai, et pas une approximation Pythonienne.

Si on pose $t = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ alors on a $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} = t^2 - 2$ (vous avez bien vu l'allure du double produit). On calcule alors la différence
$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 - 3.\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = t^2 - 2 + 4 - 3.t = t^2 - 3.t + 2 = (t-2).(t-1)$$
Or, t est toujours plus grand que 2. En effet, on a
$$t - 2 = \frac{x^2+y^2}{x.y} - 2 = \frac{x^2+y^2-2.x.y}{x.y} = \frac{(x-y)^2}{x.y}$$
Et pour t plus grand que 2 (plus grande racine du trinôme), le trinôme est positif.

Il y avait quatre modèles de couples possibles. Notons par des lettres de a à c le nombre de couples de chaque type :

H-H	H-F	F-F
a	b	c

On récupère alors le nombre d'hommes : $2.a + b$, de femmes : $b + 2.c$.
ce qu'on cherche est le pourcentage $\dfrac{femmes}{total} = \dfrac{b+2.c}{2.(a+b+c)}$.

On traduit aussi les données :

soixante dis pour cent des filles avec leur épouse	$\dfrac{2.c}{b+2.c} = \dfrac{70}{100}$
quarante pour cent des hommes avec leur mari	$\dfrac{2.a}{b+2.c} = \dfrac{40}{100}$

.

On a donc un petit système qu'on ne peut pas résoudre totalement, pour la bonne raison que l'on ne connaît pas le nombre total d'individus. Tout ne sera que rapports et pourcentages : $70.b = 60.c$ et $40.b = 120.a$. On exprime tout à l'aide de b : $c = \dfrac{7}{6}.b$ et $a = \dfrac{1}{3}.b$.

On calcule alors le pourcentage attendu :

$$\frac{femmes}{total} = \frac{b + 2.\dfrac{7.b}{6}}{2.\Big(\dfrac{b}{3} + b + \dfrac{7.b}{6}\Big)} = \frac{2}{3}$$

Et histoire d'être convaincant, on donne un exemple

H-H	H-F	F-F
20	60	70

200 femmes		100 hommes	
140 avec leur épouse	60 avec leur mari	60 avec leur épouse	40 avec leur mari
$\dfrac{140}{200} = 70\%$			$\dfrac{40}{100} = 40\%$

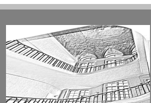
On va déjà intégrer $t \longmapsto t^2.2^{-t}$ à horizon fini :

$$\int_0^A t^2.2^{-t}.dt = \Big[t^2.\frac{-e^{-\ln(2).t}}{\ln(2)}\Big] - \int_0^A 2.t.\frac{-e^{-\ln(2).t}}{\ln(2)}.dt$$

On intègre autant de fois qu'il faut par parties (ah c'était donc ça !)

$$\int_0^A t^2.2^{-t}.dt = \Big[-t^2.\frac{e^{-\ln(2).t}}{\ln(2)} + 2.t.\frac{e^{-\ln(2).t}}{(\ln(2))^2} - 2.\frac{e^{-\ln(2).t}}{(\ln(2))^3}\Big]_0^A$$

Le terme en 0 nous donne le $\dfrac{2}{(\ln(2))^3}$ et la limite en $+\infty$ donne 0 par croissances comparées.



Formule de Zhu-Shi-Jie. IS18

On va donc calculer de deux façons $\sum_{k=0}^{N} S_k.X^k$ en permutant les sommes

$$\sum_{k=0}^{N} S_k.X^k = \sum_{k=0}^{N}\Big(\sum_{n=k}^{N}\binom{n}{k}\Big).X^k = \sum_{0\leqslant k\leqslant n\leqslant N}\binom{n}{k}.X^k$$

$$\sum_{k=0}^{N} S_k.X^k = \sum_{n=0}^{N}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.X^k\Big) = \sum_{0\leqslant n\leqslant N}(1+X)^n = \frac{(1+X)^{N+1}-1}{(1+X)-1}$$

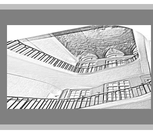
On développe par la formule du binôme et on enlève un terme

$$(1+X)^{N+1} - 1 = \sum_{p=1}^{N+1}\binom{N+1}{p}.X^p$$

on divise par X et on ré-indexe

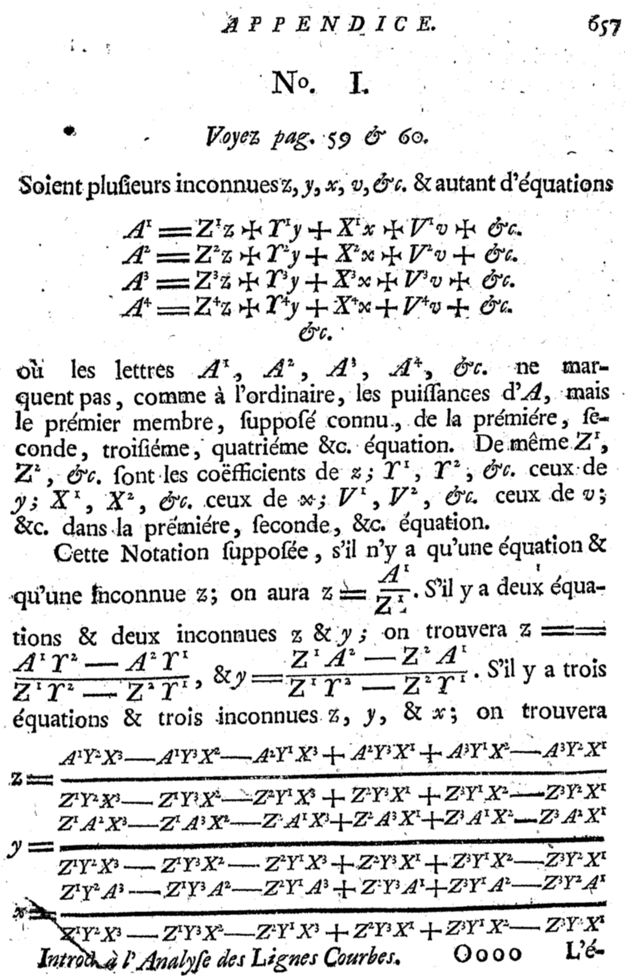
$$\sum_{k=0}^{N} S_k.X^k = \frac{(1+X)^{N+1}-1}{X} = \sum_{k=0}^{N}\binom{N+1}{k+1}.X^k$$

et on peut identifier le terme en X^k dans chacun des polynômes $S_k = \dbinom{N+1}{k+1}$.



Un système 3 sur 3.

IS18



APPENDICE. 657

No. I.

Voyez pag. 59 & 60.

Soient pluſieurs inconnues z, y, x, v, &c. & autant d'équations

$$A^1 = Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \text{\&c.}$$
$$A^2 = Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \text{\&c.}$$
$$A^3 = Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + \text{\&c.}$$
$$A^4 = Z^4 z + Y^4 y + X^4 x + V^4 v + \text{\&c.}$$
&c.

où les lettres A^1, A^2, A^3, A^4, &c. ne marquent pas, comme à l'ordinaire, les puiſſances d'A, mais le prémier membre, ſuppoſé connu, de la prémiére, ſeconde, troiſiéme, quatriéme &c. équation. De même Z^1, Z^2, &c. ſont les coëfficients de z; Y^1, Y^2, &c. ceux de y; X^1, X^2, &c. ceux de x; V^1, V^2, &c. ceux de v; &c. dans la prémiére, ſeconde, &c. équation.

Cette Notation ſuppoſée, s'il n'y a qu'une équation & qu'une inconnue z; on aura $z = \frac{A^1}{Z^1}$. S'il y a deux équations & deux inconnues z & y; on trouvera $z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$, & $y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$. S'il y a trois équations & trois inconnues z, y, & x; on trouvera

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 - Z^2Y^1A^3 + Z^2Y^3A^1 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

Introd. à l'Analyſe des Lignes Courbes. Oooo L'é-

Le système $\left\{\begin{array}{cccccc} x & +6.y & +5.z & = & 2 \\ 2.x & +3.y & +6.z & = & 3 \\ x & +y & +2.z & = & c \end{array}\right|$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ c \end{pmatrix}$$

et comme $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ est non nul (il vaut 7) , on a une unique solution.

On peut certes inverser la matrice par les méthodes du cours (produits vectoriels, pivot, cofacteurs) et trouver

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7} . \begin{pmatrix} 0 & -7 & 21 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 5 & -9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ c \end{pmatrix}$$

On a alors $\boxed{x = 3.c - 3}$ On peut aussi écrire avec Gabriel Cramer

$$x = \frac{1}{7} . \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \\ c & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Quand on travaille modulo 11, les formules sont les mêmes, mais comme à chaque fois, il faut prendre le poil de recul qui fait toute la différence : c'est quoi diviser par 7 ? C'est multiplier par son inverse. Et l'inverse de 7 modulo 11, c'est 8. Mais on n'en a même pas besoin.

Il suffit de dire que -3 est égal à 8 : $x = 3.c + 8$.

En revanche, modulo 7 tout change. le déterminant est nul. La matrice n'est plus inversible. Le système n'est plus un système de Cramer.

Et si l'équation de compatibilité n'est pas vérifiée, il n'y a pas de solution.

Comme on veut des solutions, il faut et il suffit que la dernière ligne soit combinaison linéaire des autres (tant pour le premier membre que pour le second).

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & +6.y & +5.z & = & 2 & L1 \\ 2.x & +3.y & +6.z & = & 3 & L2 \\ x & +y & +2.z & = & c & L3 \end{array}\right| \textit{avec } L3 = 3.L1 + 6.L2 \textit{ qu'on peut deviner et vérifier}$$

$3.L1 + 6.L2$	$3.x + 12.x$	$+18.y + 18.y$	$15.z + 36.z$	$= 6 + 18$
$L3$	$1.x$	$+1.y$	$+2.z$	$= c$

Mais si, je l'ai « devinée » en posant $L3 = \alpha.L1 + \beta.L2$

J'ai écrit $\left\{\begin{array}{cccccc} \alpha.x & +6.\alpha.y & +5.\alpha.z & = & 2.\alpha & \alpha.L1 \\ 2.\beta.x & +3.\beta.y & +6.\beta.z & = & 3.\beta & \beta.L2 \\ x & +y & +2.z & = & c & L3 \end{array}\right|$ *et exigé* $\begin{array}{cccccc} \alpha & +2.\beta & = & 1 & (\textit{pour } x) \\ 6.\alpha & +3.\beta & = & 1 & (\textit{pour } y) \end{array}$.

J'ai résolu (modulo 7) : $\alpha = 3$ *et* $\beta = 6$.

J'ai vérifié dans l'autre condition (pour z) : $5.\alpha + 6.\beta = 15 + 36 = 51 = 49 + 2 = 2$.

Il me restait à exiger $c = 2.\alpha + 3.\beta = 6 + 18 = 24 = 3$.

On va donc exiger $c = 3$. Il suffit alors de trouver une solution pour les avoir toutes.

On résout alors le système où il n'y a plus que deux équations en donnant à z un rôle auxiliaire.

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +6.y & +5.z & = 2 & L1 \\ 2.x & +3.y & +6.z & = 3 & L2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & & = 6 & \\ & y & = 4 & +5.z \end{array}\right|$$

On peut aussi imposer $z = 0$ pour avoir une solution particulière et chercher ensuite le noyau en résolvant $\left\{\begin{array}{lllll} x & +6.y & +5.z & = 0 & H1 \\ 2.x & +3.y & +6.z & = 0 & H2 \end{array}\right|.$

On peut aussi dire qu'on sait que le système est dégénéré, et qu'il doit être compatible.
On résout donc les deux premières équations en inconnues x et y (z acquiert le statut d'inconnue secondaire) :

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & +6.y & = & -5.z & + 2 & L1 \\ 2.x & +3.y & = & -6.z & + 3 & L2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.z+2 \\ z+3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 2.z+2 \\ z+3 \end{pmatrix}$$

On inverse $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-9} . \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 3. \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 15 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (on peut vérifier).

On trouve donc $\left\{\begin{array}{llll} x & = & & 6 \\ y & = & 5.z & +4 \end{array}\right|$ et il est temps de reporter dans la dernière :

$$c = (6) + (5.z + 4) + 2.z = 21.z + 10 = 10 = 3$$

On peut aussi suivre la méthode du pivot

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & +6.y & +5.z & = & 2 & L1 \\ 2.x & +3.y & +6.z & = & 3 & L2 \\ x & +y & +2.z & = & c & L3 \end{array}\right| (1) \qquad \left\{\begin{array}{llllll} x & +6.y & +5.z & = & 2 & L1 \\ & -9.y & -4.z & = & 3-4 & L2-2.L1 \\ & -5.y & -3.z & = & c-2 & L3-L1 \end{array}\right| (2)$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & +6.y & +5.z & = & 2 & L1 \\ & 5.y & +3.z & = & 6 & L'2 \\ & 2.y & +4.z & = & c+5 & L'3 \end{array}\right| (3) \qquad \left\{\begin{array}{llllll} x & +6.y & +5.z & = & 2 & L1 \\ & 5.y & +3.z & = & 6 & L'2 \\ & 0 & 0 & = & c+11 & L'2+L'3 \end{array}\right| (4)$$

On trouve la valeur de c : $\boxed{c = 3}$ (pour avoir $c + 11 + 0$).
On donne une valeur à z et on reporte : $y = (6 - 3.z).5^{-1} = (6 + 4.z).3 = 18 + 12.z = 4 + 5.z$.
On continue pour x (avec $x = 2 - 6.y - 5.z = 2 + y + 2.z$) : $\begin{pmatrix} 6 \\ 4+5.z \\ z \end{pmatrix}$.

La solution particulière $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ *peut être validée* : $\left\{\begin{array}{lllllllll} 6 & +6.4 & +5.0 & = & 30 & = & 2 & L1 \\ 2.6 & +3.4 & +6.0 & = & 24 & = & 3 & L2 \\ 6 & +4 & +2.0 & = & 10 & = & 3 & L3 \end{array}\right|$

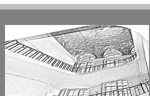
Les solutions homogènes z. $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ *le sont aussi* $\left\{\begin{array}{lllllllll} 0 & +6.5 & +5.1 & = & 35 & = & 0 & L1 \\ 2.0 & +3.5 & +6.1 & = & 21 & = & 0 & L2 \\ 0 & +5 & +2.1 & = & 7 & = & 0 & L3 \end{array}\right| (1).$

Comme z peut prendre 7 valeurs, on a $\boxed{\text{sept solutions}}$
Et que se passe-t-il quand on somme ? Je donne la liste et je calcule ?

6	6	6	6	6	6	6	total	42=0
4	2	0	5	3	1	6	total	21=0
0	1	2	3	4	5	6	total	21=0

la somme est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mais non ! On va avoir sept fois la solution particulière. Et sept fois, ça fait 0.
Ensuite, on a $(0+1+2+3+4+5+6). \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ce qui fait là encore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (le facteur 21 est nul).
Bref, même sans avoir trouvé les solutions on savait que la somme était nulle.



Forme bilinéaire antisymétrique sur les matrices symétriques. IS18

Il faut déjà s'y retrouver. On travaille sur les matrices symétriques, donc de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. On est sur un espace vectoriel de dimension 3.

On va calculer des $\phi(A,\ B)$ avec A et B symétriques. Et on sait $\phi(A,\ B) = -\phi(B,\ A)$ et même $\phi(A,\ A) = 0$ pour toute matrice A.

On va exploiter nos relations : par exemple $\phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = 1$ donne par moitié de bilinéarité

$$1 = \phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) + \phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = 0 + \phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

On a répondu à un morceau de la question. On poursuit

$$3 = \phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}) = 2.\phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) + \phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

On a donc $\phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = 1$ et $\phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1$. On continue

$$4 = \phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) + \phi(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = 1 + \phi(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

On en tient trois :

$\phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = 1$	$\phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1$	$\phi(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = 3$

Les autres doivent tomber par antisymétrie.

$\phi(A,B)$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	0	-1	-1
$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	1	0	3
$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	-3	0

On peut donc développer par bilinéarité

$$\phi(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = a.\phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) + b.\phi(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) + c.\phi(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

$$\phi(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = a.\phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) + b.\phi(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) + b.\phi(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) + c.\phi(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

Tous calculs faits : $\boxed{\phi(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = a - 4.b - c}$

On développe ensuite de la même façon $\boxed{\phi(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = a + 3.c}$ On va donc exiger $a = -3.c$ et on peut choisir b comme on veut.

Ce sont donc les matrices de la forme $\begin{pmatrix} -3.c & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et on les décompose suivant une base de deux vecteurs : $(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ à & 0 \end{pmatrix})$ (le deuxième vecteur de base est une solution évidente par antisymétrie.

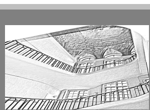
Seule difficulté, mais elle est de taille pour certains :
comprendre que les vecteurs sont ici des matrices carrées, et qu'il y a des définitions à appliquer, juste en étendant ce qu'(on sait faire sur des vecteurs de $(\mathbb{R}^3, +, .)$. C'est comme devoir quitter la lecture des SMS très terre à terre de ses potes (physiciens) pour lire de la fiction ou de la poésie (les maths).

Le système $\left\{\begin{array}{cccccc} x & +y & +z & -4.t & = & a \\ x & +y & -4.z & +t & = & b \\ x & -4.y & +z & +t & = & c \\ -4.x & +y & +z & +t & = & d \end{array}\right|$ équivaut à $\left\{\begin{array}{cccccc} x & +y & +z & -4.t & = & a \\ x & +y & -4.z & +t & = & b \\ x & -4.y & +z & +t & = & c \\ -4.x & +y & +z & +t & = & d \\ -x & -y & -z & -t & = & a+b+c+d \end{array}\right|$.

On résout par combinaisons et équivalences $x = -\dfrac{a+b+c+2.d}{5}$, $y = -\dfrac{a+b+2.c+d}{5}$,

$z = -\dfrac{a+2.b+c+d}{5}$ et ensin $t = 4.\sqrt{3}+\pi^e$. Sauf peut être pour t.
On en déduit la matrice inverse cherchée qu'on peut ptoposer et vérifier

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & \end{pmatrix} = \frac{1}{5}.\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$



Comatrice et inverse. IS18

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ se découpe en trois colonnes $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On calcule trois produits vectoriels $\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

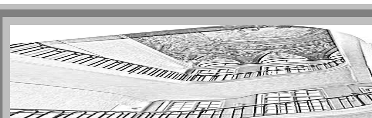
On écrit les trois termes en ligne et on divise par le déterminant (égal à 1) : $\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Quant à la comatrice et sa propre comatrice, en calculant les petits déterminants déjà calculés

$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$Com(M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$Com(Com(M)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Est il normal d'avoir ici $Com(Com(M)) = M$?
Oui, et normalement, on a $Com(Com(M))$ proportionnelle à M^{-1} car on sait que $Com(M)$ est à peu de choses près l'inverse de $Com(M)$ qui est elle même à peu de choses près l'inverse de M.

LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2023 2024
IS18
32- points