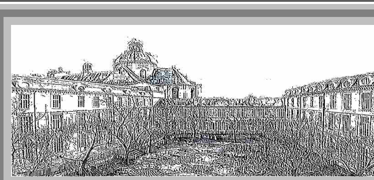
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 4 mars
M.P.S.I.2



2023 2024

TD20

∘0∘ Si a, b, c, d, e, f et g sont sept nombres, écrivez avec une formule la plus courte (avec 21 symboles $\neq$) qu'ils sont tous distincts.

∘1∘ $-\sharp-$ Un nombre est dit `parfait` si il est égal à la somme de ses diviseurs propres *(dans ses diviseurs propres, il n'y a pas l'entier lui même)*.
Le programme ci-contre doit être corrigé, juste faites le :

```
def Parfait(n) :
....for k in range(n) :
........if n%k == 0 :
............S =+ k
....return S == n
```

Exemples : $6 = 1 + 2 + 3$ et $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$
Sachant que est $2^{17} - 1$ est premier, montrez que $(2^{17} - 1).2^{17-1}$ (égal à `8 589 869 056`) est parfait.

Un nombre `presque parfait` est la somme de certains de ses diviseurs. Justifiez que 204 est presque parfait. Justifiez que 158 ne l'est pas.
Sujet d'info avancé : écrivez un programme qui teste si `n` donné est presque parfait.

∘2∘ z est un complexe plus petit que 1 en module.
Montrez : $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} z^k$. Montrez $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \dfrac{z}{1-z}$.

∘3∘ ♡ Déterminez le p.g.c.d. de 2^{2015} et 2^{531}.
Déterminez le p.g.c.d. de 2^{2015} et $2^{2015} - 1$.
Déterminez le p.g.c.d. de $2^{2015} - 1$ et $2^{531} - 1$ (divisions euclidiennes successives ?)

∘4∘ $(G, *)$ et $(H, \sharp)$ sont deux groupes. f est une application de $(G, *)$ dans $(H, \sharp)$ vérifiant $\forall (a, b) \in G,\ f(a * b) = f(a) \sharp f(b)$.
Montrez $f(e_G) = e_H$ (image du neutre = le neutre).
On pose $K = \{a \in G \mid f(a) = e_H\}$. Montrez que K est un sous groupe de $(G, *)$.
On pose $I = \{f(a) \mid a \in G\}$ (c'est à dire $y \in I \Leftrightarrow \exists a \in G,\ y = f(a)$. Montrez que I est un sous groupe de $(H, \sharp)$.
Montrez que si G est de cardinal fini, alors on a $Card(G) = Card(K) \times Card(I)$.

∘5∘ ♣ J'ai calculé tous les restes des divisions euclidiennes de 2018 par les entiers de 1 à 2018 (`[2018%k for k in range(1, 2019)]`). Quel est le plus petit obtenu ? Quel est le plus grand obtenu.
Ça se traite sans Python.

∘6∘ ♡ Donnez le $p.g.c.d.$ de 1 234 et 4 321, et donnez une identité de Bézout.
Donnez le $p.g.c.d.$ de 12 345 et 54 321, et donnez une identité de Bézout.

∘7∘ ♡ Donnez une identité de Bézout entre 270 et 105 dont un coefficient soit plus grand que 1000.

∘8∘ Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 2020 dont le p.g.c.d. avec 2020 est 2 ?
Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 2020 dont le p.g.c.d. avec 2020 est 10 ?

∘9∘ Le théorème de $Be\mathbb{Z}out$ c'est $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2,\ \Big((\exists (u,\ v) \in \mathbb{Z}^2,\ a.u + b.v = 1) \Leftrightarrow (a \wedge b = 1) \Big)$.
Mais on a aussi $Be\mathbb{N}out$ et $Be\mathbb{Q}out$ $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2,\ \Big((\exists (u,\ v) \in \mathbb{N}^2,\ a.u + b.v = 1) \Leftrightarrow (Be\mathbb{N}out) \Big)$
$\forall (a, b) \in \mathbb{Z},\ \Big((\exists (u,\ v) \in \mathbb{Q}^2,\ a.u + b.v = 1) \Leftrightarrow (Be\mathbb{Q}out) \Big)$

∘10∘ Résolvez $X^2 + 23.X + 24 = 0$ dans l'ensemble range(39) pour l'addition et la multiplication modulo 39

∘11∘ Peut on trouver trois entiers naturels a, b et c vérifiant le système $a \wedge b = 12$ (p.g.c.d.), $b \vee c = 120$ (p.p.c.m.) et

$c \wedge a = 5$?

∘12∘ On veut résoudre $(p.g.c.d.(a,\ b))^2 + a.b = 101$. Montrez que le $p.g.c.d.$ vaut 1. Résolvez.
Et pour $(p.g.c.d.(a,\ b))^2 + a.b = 400$?

∘13∘ Calculez le p.g.c.d. et le p.p.c.m. de $X^5 - X^4 + 2.X^3 + 1$ et de $X^5 + X^4 + 2.X^2 - 1$.
Appliquez un algorithme d'Euclide.

∘14∘ ♡ On définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation $\prec$ par $(a \prec b) \Leftrightarrow (a\ divise\ a + b)$.
Est elle réflexive ? Est elle symétrique ? Est elle antisymétrique ? Est elle transitive ?

∘15∘ Soit $(G, *)$ un groupe et A un sous-groupe de G. On définit :
$N(A) = \{x \in G \mid \forall a \in A,\ x * a * x^{-1} \in A\}$ et $C(A) = \{x \in G \mid \forall a \in A,\ x * a * x^{-1} = a\}$.
Montrez que ce sont des sous-groupes de $(G, *)$.
Déterminez $N(A)$ et $C(A)$ pour $A = \{e\}$ *(sous groupe réduit au neutre)*.

∘16∘ ♡ Donnez une liste de onze entiers consécutifs dont aucun n'est premier.
Montrez que de $2019! + 2$ à $2019! + 2018$, il y a 2017 nombres, et qu'aucun d'entre eux n'est un nombre premier.
Écrivez un script `Python` qui pour N donné trouve la première liste de N entiers consécutifs dont aucun n'est premier *(on supposera qu'on dispose d'une fonction qui teste si un nombre donné est premier)*.

∘17∘ ♣ Résolvez $i.z = z.i$ d'inconnue z dans $\mathbb{H}$.
Résolvez $i.z = z.j$ d'inconnue z dans $\mathbb{H}$.
Montrez que dans $\mathbb{H}$ les six quaternions i, $-i$, j, $-j$, k et $-k$ sont racines du polynôme $X^2 + 1$.
Montrez que ce sont les seules *(indication : on rappelle que le module d'un quaternion $a + b.i + c.j + d.k$ est $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ et qu'on a $|z^2| = |z|^2$)*.
Quelles factorisations sont correctes :

$X^2 + 1 = (X + i).(X - i)$	$X^2 + 1 = (X - i).(X - j)$
$X^2 + 1 = (X - i).(X + i)$	$X^2 + 1 = (X + i).(X - i).(X + j).(X - j).(X + k).(X - k)$

∘18∘ ♡ Déterminez $Sup\{x - [x] \mid x \in [0,\ 5/2]\}$.
La borne supérieure est le plus petit majorant, par forcément dans l'ensemble.

∘19∘ $(G, *)$ est un groupe. On enlève un élément, ça reste un groupe. Qui est G ?
$(G, *)$ est un groupe. On enlève deux élément, ça reste un groupe. Qui est G ? (deux solutions)
On pourra utiliser le théorème de Lagrange : le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe.

∘20∘ Déterminez $Inf\{Arctan(t).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$ et $Sup\{Arctan(t).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$.

∘21∘ ♡ J'ai calculé le p.g.c.d. de 2017 (premier !) et a par algorithme d'Euclide. Évidemment, j'ai trouvé 1.
Les quotients successifs ont été 4, 2, 4, 1,3, 3 et 3.
Qui est a ?

∘22∘ Résolvez dans $\mathbb{N}^2$ le système « $p.g.c.d.(a, b) = 84$ et $a + b = 2016$ ».

∘23∘ **Un sous-groupe de** $(\mathbb{R}, +)$ **dense dans** $\mathbb{R}$**.** On admet que π est irrationnel.
1- Montrez que $\{a + 2.b.\pi \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ *(noté G)* est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

2- On pose $H = G \cap]-\infty,\ 0[$. Montrez que c'est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée. On suppose que H a un plus grand élément, qu'on va noter α. Montrez par récurrence que pour tout n, $-n.\alpha$ est dans G.

3- Montrez alors que $G \cap]0, -\alpha[$ est vide. Montrez par récurrence sur n que chaque $]-n.\alpha, -(n+1).\alpha[\cap G$ est vide.
Déduisez que 1 et $2.\pi$ sont tous deux de la forme $p.\alpha$ et $q.\alpha$ pour p et q entiers convenables. Concluez que π est rationnel. (? !)

4- Déduisez que la borne supérieure de H n'est pas atteinte. Déduisez qu'il existe une suite strictement croissante (a_n) d'éléments de G qui converge vers α. Que fait la suite $(a_n - a_{n+1})$? Est-elle dans G ?

5- Déduisez que pour tout ε strictement positif il existe au moins un élément dans $]0,\ \varepsilon[\cap G$. Combien y en a-t-il en fait ?

6- On se donne un intervalle $[a,\ b]$ non réduit à un point. Montrez qu'il existe un élément γ de G dans $]0,\ b-a[$. Montrez alors que $\left[\dfrac{b}{\gamma}\right].\gamma$ est dans G et aussi dans $[a,\ b]$.

7- Combien y a-t-il de points de G dans $[a,\ b]$?

8- On se donne λ dans $]-1,\ 1[$. On se donne ε strictement positif. On pose $I = [Arcsin(\lambda-\varepsilon),\ Arcsin(\lambda+\varepsilon)]$. Montrez qu'il existe au moins un élément g de G dans I. Déduisez $|\sin(g)-\lambda| \leqslant \varepsilon$. Déduisez qu'il existe n dans $\mathbb{N}$ vérifiant $|\sin(n)-\lambda| \leqslant \varepsilon$. Montrez qu'il existe aussi n' dans $\mathbb{N}$ vérifiant $|\sin(n')-\lambda| \leqslant \varepsilon/2$.

9- Déduisez qu'il existe une sous-suite de la suite $(\sin(k))_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers λ.

10- Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(\sin(k))$?

∘24∘ 2019 et 752 sont évidemment premiers entre eux. Pouvez vous donner une identité de Bézout qui les lie avec au moins un des entiers plus grands que 5000.

∘25∘ On veut calculer le p.g.c.d. de 151 et 42. Euclide dit :

$$\begin{array}{ccccc} 151 & = & 3\times & 42 & +25 \\ 42 & = & 1\times & 25 & +17 \\ 25 & = & 1\times & 17 & +8 \\ 17 & = & 2\times & 8 & +1 \\ 8 & = & 8\times & 1 & \end{array}$$

Regardez et commentez ce qui suit :

$$\frac{151}{42} = 3+\frac{25}{42} = 3+\frac{1}{\frac{42}{25}} = 3+\frac{1}{1+\frac{17}{25}} = 3+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{25}{17}}} = 3+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{17}{8}}}} = 3+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{8}}}}$$

On oublie le dernier : $\dfrac{151}{42} \simeq 3+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}} = 3+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\frac{3}{2}}} = 3+\dfrac{1}{\frac{5}{3}} = \dfrac{18}{5}$.

Et maintenant, que vaut le résultat du produit en croix : $151\times 5 - 42\times 18$?
Testez sur d'autres exemples. Justifiez le résultat obtenu.

∘26∘ ♡ Trouvez tous les entiers qui sont à la fois congrus à 2 modulo 7, à 7 modulo 13 et à 13 modulo 2.

∘27∘ ♣ Quelle est la liste d'entiers naturels de somme 2018 dont le produit est le plus grand possible ?
♡ Quelle est la liste d'entiers naturels de somme 2018 dont le produit est le plus petit possible ?

∘28∘ Il y a cinq arbres en rond dans la cour. Sur chaque arbre, un corbeau. Toutes les dix secondes, deux corbeaux passent de leur arbre à un arbre voisin (droite ou gauche). En combien de temps est il possible que tous les corbeaux soient rassemblés sur un même arbre ?
Cette fois, il y a dix arbres, un corbeau par arbre, et deux corbeaux qui bougent à chaque fois. Combien de temps pour (peut-être) les rassembler tous sur un même arbre.

∘29∘ ♡ -a- Déterminez $Sup\{\cos(x)+\sin(y) \mid (x,\ y)\in\mathbb{R}^2\}$.
-b- Déterminez $Sup\{\cos(x)+\sin(x) \mid x\in\mathbb{R}\}$.
-c- Déterminez $Sup\{\cos^2(x)+\sin^2(y) \mid (x,\ y)\in\mathbb{R}^2\}$.
-d- Déterminez $Sup\{\cos^2(x)+\sin^2(x) \mid (x,\ y)\in\mathbb{R}^2\}$.
-e- Déterminez $Sup\{\cos^2(x)+2.\sin^2(x) \mid x\in\mathbb{R}\}$.

$\circ 30 \circ$ On vous a dit "effectue le produit de i, j et k, dans $\mathbb{H}$ (Hamilton). Mais on ne vous a pas dit dans quel ordre. Combien de valeurs différentes pouvez vous obtenir ?
On vous a dit "effectue le produit de $1+i$, $1+j$ et $1+k$, dans $\mathbb{H}$". Mais on ne vous a pas dit dans quel ordre. Combien de valeurs différentes pouvez vous obtenir ?
On vous a dit "effectue le produit de $2.i$, $i+j$ et $i+k$, dans $\mathbb{H}$". Mais on ne vous a pas dit dans quel ordre. Combien de valeurs différentes pouvez vous obtenir ?

$\circ 31 \circ$ Peut on dire que $\sum_{k=0}^{n} \pm k$ est égal à $\pm \sum_{k=0}^{n} k$ par linéarité ? Et si on considérait que cette somme est $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k.k$ (quand $(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$ est choisi comme on veut dans $\{-1, 1\}^n$) ? Elle peut aller de $-\dfrac{n.(n+1)}{2}$ à $\dfrac{n.(n+1)}{2}$ en ne prenant que des valeurs entières. Mais prend elle toutes les valeurs entières ?
Pour quelles valeurs de n existe-t-il un choix de signes $(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$ tel que la somme donne 0 ?

$\circ 32 \circ$ Entre 1 et 1 105, il y a 221 multiples de 5 ; il y a 65 multiples de 17, et enfin 85 multiples de 13.
Dois je en déduire que entre 1 et 1 105, il y a $1105 - (221 + 65 + 85)$ nombres premiers avec 1105 ?

$\circ 33 \circ$ ♡ Résolvez le système $\left\{ \begin{array}{lcll} n & = & 3 & [5] \\ n & = & 7 & [9] \\ n & = & 1 & [4] \end{array} \right\|$ d'inconnue entière n.

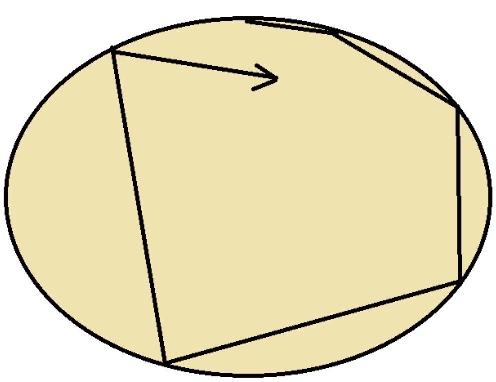
$\circ 34 \circ$ ♡ En appliquant l'algorithme d'Euclide, j'ai trouvé les quotients successifs
1, 34, 2, 2, 2, 1 et 2
et le dernier reste non nul valait 3. Qui étaient les deux nombres initiaux ?
Même question, avec le même dernier reste et pour quotients 0, 4, 1, 1, 30 et 11.

$\circ 35 \circ$ Exprimez le $p.g.c.d.$ de a^2 et b^2 à l'aide du $p.g.c.d.$ de a et b.
Exprimez le $p.g.c.d.$ de $2.a$ et $2.b$ à l'aide du $p.g.c.d.$ de a et b.
Exprimez le $p.g.c.d.$ de $a!$ et $b!$ à l'aide du $p.g.c.d.$ de a et b si nécessaire.

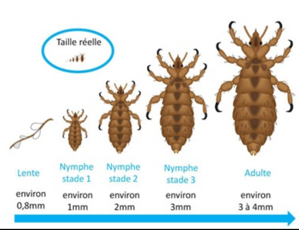
$\circ 36 \circ$ Peut on avoir $p.g.c.d.(a,\ b) = 2016$, $p.g.c.d.(b,\ c) = 2017$ et $p.g.c.d.(c,\ a) = 2018$?
Si oui, combien de solutions ?
Information : $2^5.3^2.7$, tandis que 2017 et 673 sont premiers.

$\circ 37 \circ$ On pose $A = \{a,\ b,\ c\}$ et $B = \{b,\ c,\ d\}$. Donnez un élément qui est dans $P(A \cup B)$ mais pas dans $P(A) \cup P(B)$.
Combien y a-t-il d'éléments dans $P(A) \cup P(B)$? Combien y a-t-il d'éléments dans $P(A \times B)$?Combien y a-t-il d'éléments dans $P(A) \times P(B)$?

$\circ 38 \circ$ Nous sommes cent personnes assises en rond *(pardon en cercle)* dans la cour. Un pou qui est sur mon crâne et qui en a assez de patiner décide de sauter sur la tête de mon voisin. Mais de là, il saute à nouveau, mais cette fois, en avançant de deux têtes. Puis de trois. Puis de quatre. Puis de cinq *(ce pou est croisé avec une puce)*. A chaque fois, il saute une tête de plus.



C'est ainsi qu'en dix sauts, il est sur un individu presque diamétralement opposé. Finira-t-il par revenir sur ma tête ? Existe-t-il un emplacement du cercle d'individus où vous serez assuré(e) d'échapper au pou ?



∘39∘ ♡ Pouvez vous trouver une partie A de $\mathbb{R}$ vérifiant

a	$Sup\{x \mid x \in A\} = 1$ et $Sup\{x^2 \mid x \in A\} = 2$
b	$Sup\{x \mid x \in A\} = 2$ et $Sup\{x^2 \mid x \in A\} = 1$
c	$Sup\{x \mid x \in A\} = 1$ et $Sup\{\sin(x) \mid x \in A\} = 1$
d	$Sup\{x \mid x \in A\} = 1$ et $Sup\{x - y \mid x \in A,\ y \in A\} = 5$

∘40∘ ♣ Devant vous n pièces, toutes orientées côté pile. A chaque fois, vous avez le droit de retourner toutes les pièces sauf une. Le but est qu'en un certain nombre d'opérations, toutes les pièces affichent leur côté face. Avec n égal à 2, c'est évidemment facile $(P - P) \to (P - F) \to (F - F)$. Donnez une solution en quatre coups pour n égal à 4. Donnez une solution en six coups pour n égal à 6. Montrez qu'il n'y a pas de solution pour n égal à 5.
Finalement, quelles sont les valeurs de n pour lesquelles il y a une solution *(et pour vous, $n = 0$ est solution ?)*.
♯ Et si vous écriviez le programme Python qui pour n donné dans la liste des possibles affiche les étapes successives *(programme récursif ?)*.

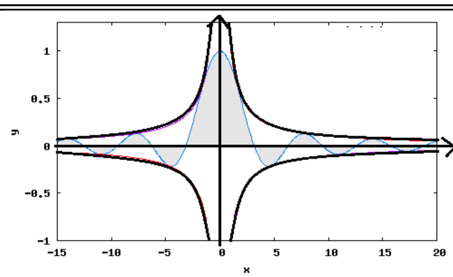
∘41∘ Calculez module et argument de $\sqrt{2+\sqrt{2}} + i.\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

∘42∘ **Ce chacal urine. Le baron guéri. Bon, rions ! Me voilà, trolls affriolants ! Un raton. Essai de défi transcendant. Élu gratiné. Y grec ! Magyare stalinienne. Sylvie a dessiné. L'apaisé s'y amusa, ils virent César hélas ! Fard de gala en déshérence.** Là, on est sur des lignes de R.E.R. à moins de dix minutes de **prias** ou aux terminus.

∘43∘ On pose `M = [[-8, 6, 3], [-9, 7, 3], [0, 0, 1]]`. Donnez son polynôme caractéristique et son spectre. On pose $A = \dfrac{M + 2.I_3}{3}$ et $B = \dfrac{I_3 - M}{3}$. Calculez $A.B$, $B.A$, A^2, B^2 et A^n pour tout n. Exprimez M à l'aide de A et B. Déduisez la forme de M^n.

∘44∘ En quel point du graphe de $x \longmapsto x^2$ la tangente au graphe passe-t-elle par $(1, -2)$? En quel point du graphe de $x \longmapsto x^2$ la tangente au graphe est elle à égale distance de $(1, -2)$ et de $(0, 0)$?

∘45∘ On définit : $f = x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$. Montrez qu'on prolonge f par continuité en 0. Montrez que f est dérivable en 0 *(limite de taux d'accroissements)*. Calculez aussi $f''(0)$ après en avoir prouvé l'existence par limité de taux d'accroissements.
On admet que f est de classe C^∞. En utilisant la formule de Leibniz pour $f.Id$, calculez $f^{(n)}(0)$ pour tout n.



∘46∘ Donnez (si vous la trouvez) la limite de $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini.

∘47∘ ♡ Montrez que $\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1}$ est équivalent à $\dfrac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini.
Est-il équivalent à $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ quand n tend vers l'infini ?

Lycee Charlemagne | MPSI2 | Annee 2023/24

CCP 2009 MP 3 heures

I∼0) p et q sont deux entiers naturels. Montrez que $((1,0),\ (X,0), \ldots, (X^{p-1},0),\ (0,1),\ (0,X), \ldots (0, X^{q-1}))$ est une base de $\mathbb{C}_{p-1}[X] \times \mathbb{C}_{q-1}[X]$ (base notée $\mathbb{B}$, espace vectoriel noté E).

I∼1) A et B sont deux polynômes, de degrés respectifs q et p, qu'on écrira sous forme factorisée $A(X) = \lambda_A.\prod_{j=1}^{q}(X - \alpha_j)$ et $B(X) = \lambda_B.\prod_{j=1}^{p}(X - \beta_j)$ mais aussi développée sur la base canonique $A(X) = \sum_{k=0}^{q} a_k.X^k$ et $B(X) = \sum_{k=0}^{p} b_k.X^k$. On définit f sur E par $f((P,Q)) = A.P + B.Q$. Montrez que f est linéaire. Montrez que $Im(f)$ est inclus dans $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.

I∼2) On rappelle qu'on pose $Ker(f) = \{(P, Q) \in E \mid f((P, Q)) = 0\}$. Montrez que $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$.

I∼3) Montrez que f est injective, si et seulement si $Ker(f)$ est égal à $\{(0,\ 0)\}$.

I∼4) Montrez que si A et B ont une racine commune r si et seulement $Ker(f)$ n'est pas réduit à $(0,\ 0)$.

I∼5) Montrez que l'ensemble des $f(C)$ quand C décrit $\mathbb{B}$ est une famille génératrice de $Im(f)$.

I∼6) Montrez que c'est une base de $Im(f)$ si et seulement si $Ker(f)$ est réduit à $\{(0, 0)\}$.

I∼7) Montrez que f est bijective de E dans $(\mathbb{C}_{p+q-1}[X], +, .)$ si et seulement si $Ker(f)$ est réduit à $\{(0, 0)\}$.

$II \sim 0$ On construit la matrice $M_{A,B}$:

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\ a_q & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_p & & \vdots \\ & & a_q & & & \ddots & \vdots \\ & & & a_q & & & b_q \end{pmatrix}$$

Elle est de format $p + q$ sur $p + q$ et les positions non remplies sont des 0.
Par exemple $A = 1 + 2.X + 3.X^2$
et $B = 4 + 5.X + 6.X^2 + 7.X^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculez le déterminant de cette matrice $M_{A,B}$ donnée en exemple à droite.

II∼0) Calculez le déterminant de la matrice dans le cas $A = X^2 - 3.X + 2$ et $B = X^3 - 2.X^2 - 5.X + 6$.

II∼1) Écrivez une procédure `Python` qui prend en entrées deux listes de coefficients `A` et `B` (sur l'exemple ci dessus `[1, 2, 3]` et `[3, 4, 5]`) et retourne la matrice $M_{A,B}$ sous forme de liste de listes.

II∼2) On appelle résultant de A et B le déterminant de la matrice $M_{A,B}$. Qui est le résultat de A et A ? Le résultant est il un opérateur commutatif ?

II∼3) Calculez le résultant de A et A' quand A est le polynôme $a.X^2 + b.X + c$.

II∼4) Calculez le résultant de A et A' quand A est le polynôme $X^3 + a.X + b$.

III∼0) Montrez que si le couple de polynômes $(P,\ Q)$ a pour composantes sur la base E le vecteur U, alors le polynôme $f((P,\ Q))$ a pour composantes $M_{A,B}.U$ sur la base canonique de $(\mathbb{C}_{p+q-1}[X], +, .)$.

IV∼0) Montrez que $X^2 - s.X + p$ et $X^2 - s'.X + p'$ ont une racine commune au moins si et seulement si $p^2 + p.s'^2 + p'.s^2 + p'^2$ est égal à $2.p.p' + (p + p').s.s'$.

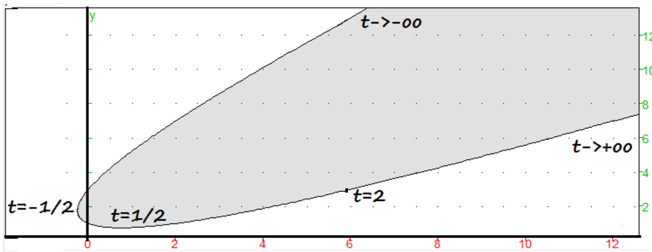
V∼0) Dans cette partie : $A = X^4 + X^3 + 1$ et $B = X^3 - X + 1$. Écrivez la matrice $M_{A,B}$ (format ?), calculez son déterminant. Montrez que A et B n'ont pas de racine commune.

V∼1) Montrez qu'en utilisant la matrice $M_{A,B,}$ on peut trouver un couple de polynômes $(P_0,\ Q_0)$ vérifiant $A.P_0 + B.Q_0 = 1$. D'ailleurs, trouvez en un, par la méthode que vous voulez.

V∼2) Déterminez tous les couples solutions dans $(\mathbb{C}[X])^2$ de $A.P + B.Q = 1$ *(pensez que vous avez une solution particulière, et écrive $(P - P_0).A = (Q_0 - Q).B$).*

VI∼0) En utilisant les polynômes $A = X^2 - 3$ et $B = (y - X)^2 - 7$, trouvez un polynôme de degré 4 à coefficients entiers admettant pour racine $\sqrt{3} + \sqrt{7}$.

VII∼0) On a représenté graphiquement pour vous ci contre l'arc paramétré Γ « mouvement d'une particule en fonction du temps » : $\left\{ \begin{array}{ccccc} x(t) & = & t^2 & +t & \\ y(t) & = & t^2 & -t & +1 \end{array} \right|$ *(la construction d'arcs paramétrés était encore au programme en 2009)*. On se donne deux polynômes P et Q à coefficients réels et l'on pose pour tout triplet $(x,\ y,\ t)$ de $\mathbb{R}^3$:$A(t) = P(t) - x$ et $B(t) = Q(t) - y$. Établissez que si un point M de coordonnées $(x,\ y)$ appartient à la courbe de représentation paramétrique $\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & P(t) \\ y(t) & = & Q(t) \end{array} \right|$ alors les fonctions polynômes ont une racine commune.



VII$\sim$1) Déduisez qu'un point M de coordonnées $(x,\ y)$ appartenant à la courbe Γ vérifie $x^2+y^2-2.x.y-4.y+3=0$. Mettez l'équation $x^2+y^2-2.x.y-4.y+3=0$ sous la forme $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}.S.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0$ où S est une matrice symétrique. Donnez le polynôme caractéristique de S et son nombre de valeurs propres réelles..

∘48∘ *Sujet du vingtième siècle. Première partie (sur quatre) d'un sujet (E.N.S. filière PC) consistant, destiné à démontrer un théorème établi par Roger Apery*[1] *en 1978 :* $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$ *est irrationnel.*

I$\sim$0) La suite (a_n) est définie par $a_1=2$ et pour tout n : $\boxed{a_{n+1}=(a_n)^2-a_n+1}$ Calculez a_n pour n de 1 à 5. Montrez que c'est une suite d'entiers naturels strictement croissante, divergente.

I$\sim$1) Écrivez un script Python qui prend en entrée n et retourne a_n.

I$\sim$2) Montrez pour n supérieur ou égal à 2 : $2^{2^{n-2}}+1\leqslant a_n\leqslant 2^{2^{n-1}}$.

II$\sim$0) Déduisez pour n plus grand que 7 : $\frac{\ln(a_n)}{a_n}\leqslant\frac{1}{2^{19+n}}$.

II$\sim$1) Déduisez que la série de terme général $\frac{\ln(a_n)}{a_n}$ converge, et écrivez un script qui calcule sa somme à 10^{-5} près (on trouvera 1.08239).

II$\sim$2) Déduisez que la suite $\left(\prod_{n=1}^{N}\sqrt[a_n]{a_n}\right)$ est majorée, et donnez un majorant $\boxed{w}$ le plus petit possible avec trois chiffres exacts.

III$\sim$0) Montrez pour tout N de $\mathbb{N}^*$: $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n}=1-\frac{1}{a_{N+1}-1}$.

III$\sim$1) Pour tout n on pose $\boxed{C(n)=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\left[\frac{n}{a_i}\right]!\right)}}$ où k est l'unique entier vérifiant $a_k\leqslant n<a_{k+1}$. Calculez $C(10)$.

La formule $C(n)=n!.\prod_{i=1}^{+\infty}\left(\left[\frac{n}{a_i}\right]!\right)^{-1}$ serait elle cohérente ?

III$\sim$2) Écrivez un script `Python` qui pour n donné calcule $C(n)$.

III$\sim$3) Montrez, en pensant aux coefficients du multinôme que chaque $C(n)$ est entier.

III$\sim$4) Montrez : $C(n)\leqslant n^n.\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{a_i}\right]^{-[n/a_i]}$ et respirez un grand coup.

1. *mathématicien français, fils d'immigré grec, 1916-1994, lycée Faidherbe à Lille, lycée Louis le Grand (il habitait alors à Paris le quartier de la Goutte d'Or), E.N.S., premier à l'agrégation de maths, un des membres fondateurs en 1941 du Front National (non, celui de 1941, dans le cours d'histoire : on vous en a parlé « Front National (de la Résistance) », confondez pas !), sur sa pierre tombale au colombarium du Père Lachaise, il est gravé* $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\ldots\neq\frac{p}{q}$*,*

III∼5) Montrez que si a et n sont des entiers vérifiant $0 < a \leqslant n$, alors on a $\dfrac{\left(\dfrac{n}{a}\right)^{n/a}}{\left[\dfrac{n}{a}\right]^{[n/a]}} \leqslant \left(\dfrac{e.n}{a}\right)^{(a-1)/a}$ [2].

III∼6) Déduisez : $C(n) \leqslant n^{k+1}.e^k.w^n$ (oui, il y a des n et des k, c'est logique, et w a bien été défini plus haut).

IV∼0) p est un nombre premier inférieur ou égal à n. On pose $q = \left[\dfrac{\ln(n)}{\ln(p)}\right]$. Montrez : $p^q \leqslant n < p^{q+1}$.

IV∼1) Montrez pour tout m entre 1 et n que l'exposant de p dans $m!$ est $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} \left[\frac{m}{p^j}\right]$.

IV∼2) Déduisez l'exposant de p dans $C(n)$.

IV∼3) Montrez pour tout réel x de $[1, +\infty[$ et tout k de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \left[\frac{x}{a_i}\right] \leqslant [x]$ (indication : montrez déjà $\left[\dfrac{x}{a}\right] = \left[\dfrac{[x]}{a}\right]$).

V∼0) Pour tout n, on note $\boxed{d_n}$ le p.p.c.m. des entiers de 2 à n (par exemple $d_6 = 60$), calculez d_{11}.

V∼1) Écrivez un script Python qui prend en entrée n et calcule d_n.
V∼2) Déduisez des parties précédentes que $C(n)$ est un multiple de d_n.
V∼3) Montrez qu'à partir d'un rang n_0 on a $d_n \leqslant 3^n$.

∘49∘ Existe-t-il M vérifiant $Com(M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Même question avec $Com(M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

∘50∘ ♡ Sachant $a + b = 3$ et $6^a + 6^b = 42$, calculez $a^6 + b^6$.

∘51∘ $\dfrac{4}{3.5} + \dfrac{9}{8.10} + \dfrac{25}{24.26} + \dfrac{64}{63.65} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(F_n)^2}{((F_n)^2 - 1).((F_n)^2 + 1)} = ?$.
Et si vous ne trouvez pas, écrivez au moins le programme qui calcule cette somme de 2 à N donné.

∘52∘ Pour tout n, on pose $F_n = 2^{(2^n)} + 1$. Calculez F_1à F_4. Vérifiez qu'ils sont premiers.
Montrez que F_5 est divisible par 641.
Montrez : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} F_k = F_n - 2$.
Montrez que si un entier p divise F_n et F_N ($n < N$) alors p divise 2.
Déduisez que $F_n$et F_N sont premiers entre eux.
Pour tout n, on note p_n le plus petit nombre premier qui divise F_n.
Montrez que la suite des (p_n) est une suite contenant une infinité de termes.
Écrivez tant qu'on y est un script Python qui détermine p_n pour n donné.

∘53∘ Inversez $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ par la méthode du pivot de Gauss.

∘54∘ On suppose qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers congrus à 3 modulo 4 : notés de p_1 à p_N. On définit alors $4.p_1 \ldots p_N - 1$ *(noté Q)*. Montrez que Q admet au moins un diviseur premier. Montrez que Q admet au moins un diviseur premier congru à 3 modulo 4. Montrez que ce diviseur ne peut pas être l'un des p_i.
Déduisez : il y a une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

∘55∘ On rappelle la définition de l'ordre d'un élément dans un groupe $(G, *)$ de neutre e : $Ord(a) = Inf\{n > 0 \mid a^n = 1\}$ (si un tel n existe).
On suppose que $(G, *)$ est commutatif
a est d'ordre 5 et b d'ordre 7.
Montrez que $a * b$ est d'ordre 35.
Montrez que ce n'est plus forcément vrai si $(G, *)$ n'est pas commutatif.

---

2. indication : montrez déjà $\dfrac{n - a + 1}{a} \leqslant \left[\dfrac{n}{a}\right]$

∘56∘ ♡ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\dfrac{\displaystyle\sum_{\substack{k\leqslant 2.n\\ k\ pair}} k}{\displaystyle\sum_{\substack{k\leqslant 2.n\\ k\ impair}} k}$.

∘57∘ ♡ N est un entier naturel fixé. Montrez que les suites $\left(\dfrac{2^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\dfrac{2^n}{N+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{2^N}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

∘58∘ Calculez $S_n = \displaystyle\sum_{0\le p\le q\le n} 2^p.3^q$. Calculez $O_n = \displaystyle\sum_{\substack{0\le p\le n\\ 0\le q\le n}} 2^q.3^p$. Calculez $H_n = \displaystyle\sum_{0\le q\le n} 2^q.3^q$. Calculez $E_n = \displaystyle\sum_{0\le p\le n} 2^{2.p}.3^{3.p}$.
Calculez $L_n = \displaystyle\sum_{0\le p\le q\le n} 2^q.3^q$ (attention, q a son rôle, c'est un compteur).

∘59∘ Partant de `A`, je propose les variantes suivantes ; indiquez le résultat pour chacune

A
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = b, a%b
....return a
```
B
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = a%b, b
....return a
```
C
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = a, a%b
....return a
```
D
```
def gcd(a, b) :
....while b == 0 :
........(a, b) = (b, a%b)
....return a
```
E
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = b, b%a
....return a
```
F
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........(a, b) == (b, a%b)
....return a
```
G
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a = b
........b = a%b
....return a
```
H
```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........b = a%b
........a = b
....return a
```
I
```
def gcd(a, b) :
....while b == 0 :
........a, b = b, a%b
....return a
```

∘60∘ Montrez : $\sqrt{2.\sqrt{3.\sqrt{4}}} + \sqrt{4.\sqrt{3.\sqrt{2}}} \leqslant 5,5$.

∘61∘ Calculez $3+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{15+\dfrac{1}{1}}}$ et $3+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{15}}$ à 10^{-7} près.

Qui sont $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dots}}}$, $2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dots}}}$ et $2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\dots}}}}}$?

Donnez le dévelmoppement en fraction continuée de $\sqrt{5}$.

∘62∘ Montrez que pour résoudre $\left|\begin{array}{ccc} n = \alpha & [7] \\ n = \beta & [12]\end{array}\right|$ il suffit de savoir résoudre $\left|\begin{array}{cc} n = 1 & [7] \\ n = 0 & [12]\end{array}\right|$ et $\left|\begin{array}{cc} n = 0 & [7] \\ n = 1 & [12]\end{array}\right|$.
Trouvez l'inverse de 12 dans $\mathbb{Z}_{7.\mathbb{Z}}$ et déduisez les solutions de $\left|\begin{array}{cc} n = 1 & [7] \\ n = 0 & [12]\end{array}\right|$.
Trouvez l'inverse de 7 dans $\mathbb{Z}_{12.\mathbb{Z}}$ et déduisez les solutions de $\left|\begin{array}{cc} n = 0 & [7] \\ n = 1 & [12]\end{array}\right|$.
Montrez que pour résoudre $\left|\begin{array}{cc} n = \alpha & [7] \\ n = \beta & [15] \\ n = \gamma & [16]\end{array}\right|$ il suffit de savoir résoudre $\left|\begin{array}{cc} n = 1 & [7] \\ n = 0 & [15] \\ n = 0 & [16]\end{array}\right|$ et deux autres systèmes similaires.

Trouvez l'inverse de 15, de 16 et de 15.16 dans $\mathbb{Z}_{7.\mathbb{Z}}$ et déduisez les solutions de $\left| \begin{array}{ccll} n & = & 1 & [7] \\ n & = & 0 & [15] \\ n & = & 0 & [16] \end{array} \right|$.

Résolvez $\left| \begin{array}{ccll} n & = & 1 & [7] \\ n & = & 2 & [15] \\ n & = & 4 & [16] \end{array} \right|$.

◦63◦ Un nombre dernier est un nombre qui a beaucoup de diviseurs ; c'est à dire qui a plus de diviseurs que tous les entiers plus petits que lui. Écrivez un programme qui liste des quarante premiers entiers derniers *(et pas des quarante derniers nombres premiers)*.

◦64◦ Sachant qu'il y a 168 nombres premiers entre 1 et 1000, lequel de ces quatre nombres est leur somme :

11569	76127	57298	81744

◦65◦ Vous avez les entiers de 1 à 200 *(inclus)*. Vous en tirez cinq. Combien de tirages possibles ?
Combien de tirages contiennent exactement deux nombres pairs et exactement deux nombres premiers.
pour information, le 46^{ieme} nombre premier est 199.
Les raisonnements qui suivent sont faux,, pourquoi ?

$\bullet_1$ Il y a cent nombres pairs, d'où $\binom{200}{100}$ et 46 nombres premiers : on additionne $\binom{200}{46}$: $\binom{200}{100} + \binom{200}{46}$.

$\bullet_2$ Il y a cent nombres pairs, d'où $\binom{100}{2}$ et 46 nombres premiers : on additionne $\binom{46}{2}$: $\binom{100}{2} + \binom{46}{2}$.

$\bullet_3$ Il y a cent nombres pairs, d'où $\binom{100}{2}$ et 46 nombres premiers : on multiplie $\binom{46}{2}$: $\binom{100}{2} \times \binom{46}{2}$.

$\bullet_4$ Il y a cent nombres pairs, d'où $\binom{200}{100}$ et 46 nombres premiers dans ce qu'il reste : on additionne $\binom{200}{46}$: $\binom{200}{100}.\binom{100}{46}$.

$\bullet_5$ Il y a cent nombres pairs, d'où $\binom{200}{100}$ et 46 nombres premiers dans ce qu'il reste, et il faut prendre un dernier élément dans ce qu'il reste encore : $\binom{100}{2}.\binom{46}{2}.\binom{54}{1}$ *(il y a bien* 54 *nombres impairs, non premiers)*.

Trouvez la vraie réponse.

◦66◦ Un nombre second est un nombre produit de deux nombres premiers distincts. Écrivez un script qui pour `N` donné calcule combien entre `0` et `N` il y a de nombres seconds *(en supposant que vous avez un programme* **`prem`** *qui teste si un nombre est premier)*.
L'ensemble des nombres seconds est il stable par addition ? Par multiplication ?

◦67◦ Le corps de base est l'ensemble des entiers de 0 à $p-1$ (p est un nombre premier au moins égal à 5, je sais). On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. L'application linéaire est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Déterminez la dimension du noyau de f et de l'image de f (elle peut dépendre de p).
Déterminez aussi la dimension du noyau et de l'image de $M \longmapsto A.M$ de $M_{2,2}(\{0,\ldots p-1\})$ dans lui même.

◦68◦ On se donne n réels a_1 à a_n. Pour tout k, on note $S_k = \sum_{i=0}^{n}(a_i)^k$ et σ_k la k^{ieme} fonction symétrique des racines $\sigma_k = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} a_{i_1}.a_{i_2}\ldots a_{i_k}$.
Exprimez à l'aide des S_k

$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 4.\sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 & 0 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 \\ 4.\sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 5.\sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$

Exprimez à l'aide des σ_k :

$\begin{vmatrix} S_1 & 1 \\ S_2 & S_1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & 3 \\ S_4 & S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & 0 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & 3 & 0 \\ S_4 & S_3 & S_2 & S_1 & 4 \\ S_5 & S_4 & S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$

Donnez *(même sans preuve)* la formule générale, mais pas avec des points de suspension, mais une formule pour le terme général de la matrice dont on calcule le déterminant.