LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 27 février
M.P.S.I.2

2023 2024

IS19

♡ 0 ♡ Sachant $a-\sqrt{a}=7$ calculez $a-\dfrac{7}{\sqrt{a}}$. 2 pt.

♡ 1 ♡ Montrez pour toute matrice carré de taille n : $\det(Com(M))=(\det(M))^{n-1}$. 3 pt.

♡ 2 ♡ On pose $f=t\longmapsto e^{(e^t)}$. Montrez : $\forall t,\ f'(t)=e^t.f(t)$ puis $\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(n+1)}(0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.f^{(k)}(0)$. 3 pt.

♢ 0 ♢ Montrez qu'on peut retrouver un et un seul des deux coefficients : $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ & & 5 \end{vmatrix}=5$. Oui, on raisonne modulo un nombre premier (mais lequel ?). 3 pt.

♡ 3 ♡ La formule de Faa-Di-Bruno dit ce qui suit ; écrivez la et justifiez la pour $n=3$. 3 pt.

$$(f\circ u)^{(n)}=\sum_{m_1+2.m_2+3.m_3+\ldots+n.m_n=n}\frac{n!}{m_1!.m_2!\ldots m_n!}.\left(f^{(m_1+m_2+\ldots+m_n)}\circ u\right).\left(\frac{u'}{1!}\right)^{m_1}.\left(\frac{u''}{2!}\right)^{m_2}\ldots\left(\frac{u^{(n)}}{n!}\right)^{m_n}$$

♡ 4 ♡ En calculant de deux façons $((1+X)^n)'$ retrouvez la formule liant $\binom{n}{k}$ et $\binom{n-1}{k-1}$. 2 pt.

♡ 5 ♡ $A=2^5.3^9.4^5.5^4.6^7$. Quel est le plus petit entier naturel non nul par lequel multiplier A pour en faire un carré parfait ? 1 pt. Quel est le plus petit entier naturel non nul par lequel multiplier A pour en faire un cube parfait ? 1 pt. Quel est le plus petit entier naturel non nul par lequel multiplier A pour en faire à la fois un carré parfait et un cube parfait ? 1 pt.

♣ 0 ♣ Le cours dit : si p est premier, alors p divise tous les $\binom{p}{k}$ pour k de 1 à $p-1$. Mais a-t-on une réciproque ? 91 n'est pas premier (trouvez ses deux facteurs premiers), mais il me semble que les binomiaux que voici sont tous multiples de 91 :

$\binom{91}{1}=91$	$\binom{91}{2}=91\times 45$	$\binom{91}{3}=91\times 1\,335$	$\binom{91}{4}=91\times 29\,370$	$\binom{91}{5}=91\times 511\,038$	$\binom{91}{6}=91\times 7\,324\,878$

« Et ainsi de suite dit le physicien. » Montrez lui qu'il a tort. 2 pt.

♯ 0 ♯ Et si vous écrivez un programme qui pour n donné calcule la proportion de $\binom{n}{k}$ divisibles par n ? 2 pt.

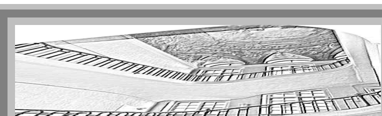
♣ 1 ♣ Pour indiquer que j'ai trois nombres distincts $(a,\ b,\ c)$ je peux écrire en une seule ligne et trois symboles $\neq$: « $a\neq b\neq c\neq a$ ». Pour indiquer que j'ai cinq nombres distincts $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$ je peux écrire en une seule ligne et dix symboles $\neq$

$$a\neq b\neq c\neq d\neq e\neq a\neq c\neq e\neq b\neq d\neq a$$

Justifiez que tout y est, qu'on ne peut pas faire plus court. 1 pt. Justifiez qu'il est impossible de le faire pour quatre nombres avec une seule ligne et six symboles $\neq$. 2 pt. Justifiez qu'il est impossible de le faire pour six nombres avec une seule ligne et quinze symboles $\neq$. 3 pt.

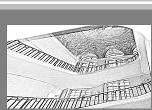
♢ 1 ♢ $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}1\\4\\0\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\7\\-4\end{pmatrix}$. Montrez : $Vect(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})=Vect(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$. 3 pt.

♣ 2 ♣ On travaille dans $(\mathbb{Z}_{11.\mathbb{Z}},+,.)$: $Com(M)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\\1&2&0\end{pmatrix}$ et $Com(N)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\\1&2&1\end{pmatrix}$. Montrez que l'une des deux équations n'a pas de solution. Trouvez les solutions de l'autre. 4 pt.



LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 27 février
M.P.S.I.2

2023 2024
IS19
CORRECTION



Questions rapides. IS19

On peut résoudre l'équation $a-\sqrt{a}=7$ en posant déjà $\alpha=\sqrt{a}$ et trouver $\alpha^2-\alpha-7=0$ puis $\sqrt{a}=\alpha=\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$ (on ne garde que la racine positive). On reporte alors dans la formule

$$a-\frac{7}{\sqrt{a}}=\Big(\frac{1+\sqrt{29}}{2}\Big)^2-\frac{2}{1+\sqrt{29}}=\Big(\frac{30+2.\sqrt{29}}{4}\Big)-\frac{2.(1-\sqrt{29})}{1-29}=\ldots=8$$

On peut aussi calculer sans même connaître a (ni même s'être assuré qu'il existe) :

$$a-\frac{7}{\sqrt{a}}=7+\sqrt{a}-\frac{7}{\sqrt{a}}=\frac{7.\sqrt{a}+a-7}{\sqrt{a}}=\frac{7.\sqrt{a}+(\sqrt{a})}{\sqrt{a}}=\frac{8.\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=8$$

La formule du cours dit : $M.^t(Com(M))=\det(M).I_n$. On passe au déterminant en exploitant les propriétés classiques $\det(A.B)=\det(A).\det(B)$ et $\det(^tB)=\det(B)$: $\det(M).\det(Com(M))=(\det(M))^n$ car le terme $\det(M)$ est présent n fois sur la diagonale.
On simplifie par $\det(M)$ et il reste bien $\det(Com(M))=(\det(M))^{n-1}$.

Mais il y a un « mais ». Que fait on si $\det(M)$ est nul ? On ne peut pas simplifier. Il faut alors prouver que $\det(Com(M))$ est nul aussi.
Si $\det(M)$ est nul, la formule du cours donne $M.^tCom(M)=0_{n,n}$. Colonne par colonne, on obtient que les colonnes de $^tCom(M)$ sont toutes dans le noyau de M. Elles sont donc dans un espace de dimension plus petite que n. Elles forment une famille liée, et $\det(^tCom(M))$ est donc nul.

> *Si au moins vous avez pensé à la question et vu qu'il y avait un problème, de toutes façons, vous avez le point.*
> *Sinon, si vous avez simplifié par $\det(M)$ sans envisager le cas $\det(M)=0$ vous n'avez que deux points !*

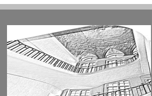
La question $\forall t,\ f'(t)=e^t.f(t)$ est un cadeau pour voir si vous savez calculer.
Et la question $\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(n+1)}(0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.f^{(k)}(0)$. est là pour voir si vous savez raisonner.
Si vous tentez une récurrence, je vous flingue. C'est une relation en un point, comment pourrait on la re-dériver ?
Ce n'est pas la peine d'avoir fait une terminale si c'est pour vouloir à tout prix rester au même niveau zéro, en disant « il y a un entier n donc je fais une récurrence ».
Non, la clef, c'est la formule de Leibniz. On dérive n fois la relation $f'=\exp.f$

$$f^{(n+1)}=(f')^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\exp^{(n-k)}.f^{(k)}=\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.f^{(k)}\Big).\exp$$

Il ne reste plus qu'à calculer en 0.

On développe le déterminant de format 3 sur 3 et on trouve l'équation $-a-11.b+130=5$
Si on ne raisonne pas modulo un nombre premier, on ne peut pas déterminer nos deux nombres, ils sont liés entre eux.
Si on raisonne modulo 17 par exemple, on a $16.a+6.b+6=0$. a et b sont liés par une relation, on ne peut déterminer aucun des deux.
Le seul entier modulo lequel il est pertinent de raisonner est 11 car alors il n'y a plus de b dans l'équation.
Mais alors il reste a qui vérifie $-a+9=5$ c'est à dire $a=4$. Et b peut prendre la valeur que l'on veut.

$$\forall b,\ \begin{vmatrix}4&2&1\\1&7&3\\4&b&5\end{vmatrix}=5$$



Formule de Faa-Di-Bruno. IS19

Pour n égal à 3, que donne la condition $m_1 + 2.m_2 + 3.m_3 = 3$?

on attend trois termes	$1.3+2.0+3.0=3$	$1.1+2.1+3.0=3$	$1.0+2.0+3.1=3$
multinomial	$\dfrac{3!}{3!.0!.0!}=1$	$\dfrac{3!}{1!.1!.0!}=6$	$\dfrac{3!}{0!.0!.1!}=6$
dérivée composée	$f^{(3+0+0)}\circ u$	$f^{(1+1+0)}\circ u$	$f^{(0+0+1)}\circ u$
produit de dérivées	$\left(\dfrac{u'}{1!}\right)^3.\left(\dfrac{u''}{2!}\right)^0.\left(\dfrac{u^{(3)}}{3!}\right)^0$	$\left(\dfrac{u'}{1!}\right)^1.\left(\dfrac{u''}{2!}\right)^1.\left(\dfrac{u^{(3)}}{3!}\right)^0$	$\left(\dfrac{u'}{1!}\right)^0.\left(\dfrac{u''}{2!}\right)^0.\left(\dfrac{u^{(3)}}{3!}\right)^1$

On attend donc juste trois termes

$$(f\circ u)^{(3)} = (f^{(3)}\circ u).(u')^3 + 3.(f''\circ u).(u'.u'') + (f'\circ u).(u^{(3)})$$

On vérifie en dérivant trois fois

première		$(f'\circ u)\times u'$		
seconde	$(f''\circ u)\times(u')^2$		$+(f'\circ u)\times u''$	
troisième	$(f^{(3)}\circ u)\times(u')^3$	$+(f''\circ u)\times(2.u'.u'')$	$+((f''\circ u)\times u')\times u''$	$+(f'\circ u)\times u^{(3)}$

La coïncidence est parfaite. Et la solution du tricheur consiste à dériver trois fois, encadrer le résultat et dire « et la formule de Faa-Di-Bruno donne bien la même chose », sans expliquer les choix de m_1, m_2 et m_3.

Remarque : pour $n = 4$ il y a plus de possibilités

$1.4+2.0+3.0=4$	$1.0+2.2+3.0=4$
$1.2+2.1+3.0=4$	$1.1+2.0+3.1=4$

Formule comité-président. IS19

On part de $(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.X^k$ et on dérive en effaçant un terme (dérivée de constante), mais on développe aussi la dérivée :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}.k.X^{k-1} = n.(1+X)^{n-1} = n.\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}.X^i$$

On identifie de chaque côté le terme en X^{k-1} (on pose donc $i = k-1$ à droite) : $\boxed{k.\binom{n}{k} = n.\binom{n-1}{k-1}}$

Des carrés parfaits et des cubes parfaits. IS19

On commence par écrire A sous forme propre

$$A = 2^5.3^9.4^5.5^4.6^7 = 2^5.3^9.(2^{10}).5^4.(2.3)^7 = 2^{22}.3^{16}.5^4$$

C'est déjà un carré parfait. Il suffit donc de le multiplier par 1 : $\boxed{A\times 1 = (2^{11}.3^8.5^2)^2}$

En revanche, on n'a pas encore un cube

$$A = (2^{21}.2).(3^{15}.3).(5^3.5) = (2^7.3^5.5)^3.2.3.5$$

Il manque donc un facteur $\boxed{2^2.3^2.5^2}$ Au collège, on dira que ça fait 900 ; le physicien dira que ça fait $900,00$ à 10^{-2} près ; l'ingénieur dira que ça fait mille ; et le politicien dira que ça fait trop.

Et pour un nombre qui soit à la fois un carré et un cube, on a besoin d'exposants multiples de 6

$$A = (2^{18}.2^4).(3^{12}.3^4).(5^4) = (2^3.3^2)^6.2^4.3^4.5^4$$

Il nous manque $2^2.3^2.5^2$ (un carré parfait, et c'est logique, car A était déjà un carré) : $\boxed{A\times 900 = (2\,160)^6}$

Binomiaux divisibles par p. IS19

Bon, on fera confiance au physicien pour ses calculs de binomiaux. Mais on a $91 = 7 \times 13$. On va donc regarder le terme $\binom{91}{7}$ pour avoir un facteur 7 au dénominateur :

$$\binom{91}{7} = \frac{91.90.89.88.87.86.85}{1.2.3.4.5.6.7} = \frac{91}{7}.\frac{90.89.88.87.86.85}{2.3.4.5.6}$$

Le $\frac{91}{7}$ se simplifie en 13 et au numérateur 90.89.88.87.86.85 il n'y a plus de facteur 7 (les multiples de 7 sont 84 et 91 justement). Le binomial $\frac{91}{7}$ n'est pas multiple de 91. Il ne faut pas généraliser sans réfléchir.

Pour n donné, on va créer un compteur qui va déterminer combien des $\binom{n}{k}$ sont divisibles par n.
La solution horrible est à droite (comme toujours),

surtout si ensuite elle écrit

```
def binomial(n, k) :
....return facto(n)//(facto(k)*facto(n-k))
```

auquel cas je ne peux plus rien pour vous.

La solution intelligente est à gauche. Et encore, elle oublie qu'on peut s'arrêter au milieu mais ensuite on doit prendre garde à la parité de n

```
def proportion(n : int) : #float
....bin, c = 1, 0
....for k in range(n+1) :
........bin = bin*(n-k)//(k+1)
........if bin%n == 0 :
............c += 1
....return c/(n+1)
```

```
def proportion(n : int) : #float
....c = 0
....for k in range(n+1) :
........if binomial(n, k)%n == 0 :
............c += 1
....return c/(n+1)
```

Des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^4, +, .)$. IS19

Comme $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont non colinéaires, ils engendrent un plan. Il en est de même de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.Il suffira de montrer une inclusion pour avoir l'égalité.
On va exprimer $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ comme combinaisons de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. Ceci prouvera qu'ils sont dans $Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ et que par transitivité, leurs combinaisons y seront aussi. Il suffit de résoudre de petits systèmes par conditions nécessaires, puis de vérifier les deux autres lignes

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{a} + 3.\overrightarrow{b} \text{ et } \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$$

On peut d'ailleurs profiter de ces formules pour avoir (sans effort, en inversant) l'inclusion dans l'autre sens

$$\begin{array}{rcll} \overrightarrow{u} & = & \overrightarrow{a} & -3.\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{v} & = & 2.\overrightarrow{a} & -\overrightarrow{b} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcll} \overrightarrow{a} & = & (-\overrightarrow{u} & +3.\overrightarrow{v})/5 \\ \overrightarrow{b} & = & (-2.\overrightarrow{u} & +\overrightarrow{v})/5 \end{array}$$

Comatrices. IS19

Si l'équation $Com(M) = A$ a des solutions, alors on a $\det(Com(M)) = \det(A)$ et donc $\det(A) = (\det(Com(M)))^2$.
Pour $Com(M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, on veut donc $(\det(M))^2 = 8$ (j'ai calculé $2 + 4 - 3 - 8$). Or, la liste des carrés modulo 11 est ci dessous.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^2	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

et 8 n'en fait pas partie. Il n'y a donc pas de solution.

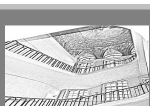
Au fait, être un carré, ce n'est pas « être positif » ici, puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre.

Pour l'autre $Com(M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, on veut cette fois $(\det(M))^2 = 9$ *(j'ai calculé* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 = 9$*)*.
Il y a des racines : 3 et 8 (connu aussi en tant que -3). On peut poser $\det(M) = 3$ dans ce qui suit, et on changera les signes à la fin pour l'autre solution.
Mais ceci ne prouve pas qu'il y a des solutions. Cela dit, on sait :

$$M^{-1} = \frac{{}^t(Com(M))}{\det(M)} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}}{3} = 4.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 4 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

On inverse alors sachant $\det(A^{-1}) = 4$, par les formules usuelles (et on vérifie)

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 4 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \; ou \; \begin{pmatrix} -2 & -8 & -4 \\ -4 & 0 & -7 \\ -4 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 7 \\ 7 & 0 & 4 \\ 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$



Enchaînement de non égalités. IS19

Si il y a cinq nombres distincts, il y a $\binom{5}{2}$ paires $\{x, y\}$ avec $x \neq y$ à mettre en valeur. Il faut donc 10 symboles $\neq$.
C'est le cas avec

$$a \neq b \neq c \neq d \neq e \neq a \neq c \neq e \neq b \neq d \neq a$$

On peut aussi pointer sur un tableau

	a	b	c	d	e
a		$\neq$	$\neq$		
b			$\neq$	$\neq$	
c				$\neq$	$\neq$
d	$\neq$				$\neq$
e	$\neq$	$\neq$			

et même dans l'ordre où on les a écrites

	a	b	c	d	e
a		1	6		
b			2	9	
c				3	7
d	10				4
e	5	8			

.

On les a toutes et on ne peut pas faire plus court, puisqu'il faut 10 symboles.
On peut le faire dans d'autres ordres il est vrai :

$$a \neq b \neq e \neq a \neq c \neq b \neq d \neq e \neq c \neq d \neq a$$

Je vous indique comment je l'ai obtenue.

Si on a quatre nombres, il faut effectivement six symboles

	a	b	c	d
a		$\neq$	$\neq$	$\neq$
b			$\neq$	$\neq$
c				$\neq$
d				

.

On aurait donc une formule du type

$$\circ \neq \circ \neq \circ \neq \circ \neq \circ \neq \circ \neq \circ$$

Il en faudra trois reliant a à une des autres lettres : $a \neq b$, $a \neq c$, $a \neq d$ (et quand même pas $a \neq a$). On ne pourra pas avoir la forme

$$\circ \neq a \neq \circ \neq a \neq \circ \neq \circ \neq a$$

où des a se suivent de trop près. En effet, la formule $a \neq x \neq a$ est du gaspillage qui coche deux fois la même case du tableau (une fois de chaque côté de la diagonale).

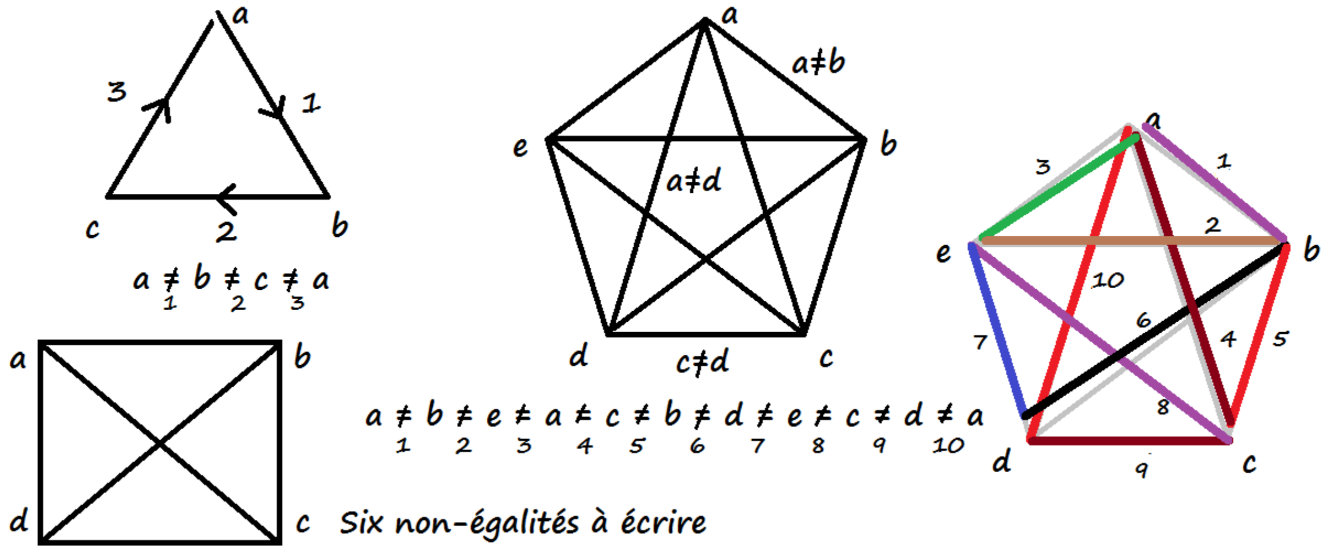
Il faut donc séparer les a suffisamment et $a \neq \circ \neq \circ \neq a \neq \circ \neq \circ \neq a$ ne permet pas de placer les autres lettres convenablement.

Mais en fait, c'est juste un problème de graphes.

Les n sommets sont nos nombres. Les arêtes sont les $\binom{n}{2}$ sont nos non-égalités à écrire.

Il faut passer une fois et une seule par chaque arête.

C'est possible pour n impair, et le schéma ci-dessous donne l'explication et un exemple pour $n = 5$. Et aussi pour $n = 3$.



Avec quatre nombres, il faut six arêtes. Mais chaque fois qu'on arricve sur un sommet il faut en repartir (sauf pour le premier et le dernier). Il faut donc sur tous les sommets (sauf le premier et le dernier) un nombre pair d'arêtes. Ce n'est pas possible pour n égal à 4.

De même pour $n = 6$. Dechaque sommet partent cinq arêtes. Il faut que chacun soit donc départ ouarrivée de la formule. Ce n'est pas possible.

je vous laisse écrire une formule pour sept nombres.