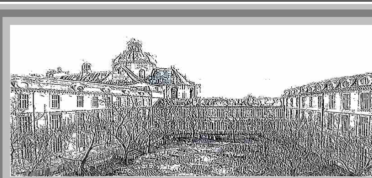
LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 9 février
M.P.S.I.2



2023 2024

DS06

Ce sujet, inspiré d'éléments de Mines-Ponts MP 1995, Centrale TSI 2001, Polytechnique MP 1994 traite des déterminant de Hankel.

Si c est une suite complexe, on définit pour tout n la matrice $H_n = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2.n} \end{pmatrix}$ (matrice de Hankel) et le déterminant $\Delta_n = \det(H_n)$.

Premiers exemples

I∼0) Écrivez un script Python qui prend en entrée un entier n, une liste C (qu'on supposera au moins de longueur $2.n+1$) et retourne la matrice H_n (liste de listes). $\boxed{\text{2 pt.}}$

I∼1) Explicitez la suite (Δ_n) si (c_n) est une suite géométrique (premier terme c_0 et raison r). Calculez aussi $Tr(H_n)$ pour tout n. $\boxed{\text{2 pt.}}$

I∼2) Explicitez la suite (Δ_n) si (c_n) est la suite de Fibonacci (premier terme $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ et $\forall n,\ c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$). Montrez aussi $Tr(H_n) = \sum_{k=0}^{2.n-1} F_k$ pour tout n. $\boxed{\text{2 pt.}}$ Écrivez (F_n) comme combinaison de deux suites géométriques. Trouvez les cinq réels a, b, c, r et r' vérifiant $\forall n,\ Tr(H_n) = a.(r)^n + b.(r')^n + c$. $\boxed{\text{4 pt.}}$

I∼3) Explicitez la suite (Δ_n) si (c_n) est la suite (n^2) (trouvez la combinaison sur les quatre premières colonnes). Calculez aussi $Tr(H_n)$ pour tout n. $\boxed{\text{3 pt.}}$

I∼4) Pour cette question, (c_n) est la suite $(n!)$. Montrez $\Delta_n = \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2 \times \det(B_n) = \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2$ où B_n est la matrice de taille $n+1$ de terme général $\binom{i+k}{k}$ (indexation pythonienne). $\boxed{\text{4 pt.}}$

Cas de nullité

II∼0) Montrez que la suite (c_n) est nulle si et seulement si la suite (Δ_n) est nulle. $\boxed{\text{2 pt.}}$

II∼1) Une suite (c_n) est dite pseudo-périodique d'ordre p (p entier strictement positif) si il existe une liste de coefficients $[\lambda_1, \dots,\ \lambda_p]$ vérifiant $\forall n \geqslant p,\ c_n = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j.c_{n-j}$. Montrez que si la suite (c_n) est pseudo-périodique, alors la suite (Δ_n) est nulle à partir du rang p. $\boxed{\text{2 pt.}}$

Réciproque(exemple)

III∼0) On commence par un exemple. On se donne une suite (c_n) et on suppose $H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 9 & 22 \\ 2 & 9 & 22 & 77 \\ 9 & 22 & 77 & 210 \end{pmatrix}$. Calculez $H_3.\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculez Δ_n pour n de 0 à 3. $\boxed{\text{2 pt.}}$

III∼1) Trouvez λ_1 à λ_3 vérifiant $c_n = \lambda_1.c_{n-1} + \lambda_2.c_{n-2} + \lambda_3.c_{n-3}$ pour tout n de 3 à 6 (inclus). $\boxed{\text{2 pt.}}$

III∼2) On suppose aussi $\Delta_4 = 0$. En calculant $H_4.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis son déterminant, montrez $c_7 = \sum_{j=1}^{3} \lambda_i.c_{7-i}$ $\boxed{\text{2 pt.}}$

III~3) On suppose pour tout n plus grand que 4 : $\Delta_n = 0$. Montrez alors par récurrence sur n

$$c_n = \lambda_1.c_{n-1} + \lambda_2.c_{n-2} + \lambda_3.c_{n-3}$$

pour tout n plus grand que 4. $\boxed{\text{3 pt.}}$

Réciproque(généralisation)

IV~0) On se donne une suite (c_n) telle que la suite (Δ_n) soit nulle à partir d'un certain rang q strictement positif. On suppose donc $\Delta_{q-1} \neq 0$ et $\Delta_n = 0$ pour tout n supérieur ou égal à q.
Déduisez qu'il existe une infinité de vecteurs de taille $q+1$ non nuls vérifiant $M_q.V_q = 0_{q+1}$. $\boxed{\text{1 pt.}}$

IV~1) Montrez qu'il existe un vecteur U_q de taille $q+1$, de dernière composante 1 vérifiant $M_q.U_q = 0_{q+1}$. $\boxed{\text{1 pt.}}$

IV~2) Déduisez qu'il existe $\lambda_1, \dots \lambda_q$ vérifiant $\forall n \in \{q, \dots 2.q\}$, $u_n = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j.u_{n-j}$. $\boxed{\text{1 pt.}}$

IV~3) Montrez que cette formule est alors valable pour tout n de $\mathbb{N}$ au delà de $2.q-1$. $\boxed{\text{4 pt.}}$

Retour sur l'exemple

V~0) Pour ces questions, (c_n) est définie par $c_n = 2.c_{n-1} + 5.c_{n-2} - 6.c_{n-3}$ pour tout n supérieur ou égal à 3. Montrez : $c_n \leqslant \mu.4^n$ pour tout n (avec $\mu = Max(|c_0|,\ |c_1/4|,\ |c_2/16|)$). $\boxed{\text{2 pt.}}$

V~1) On pose $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n.x^n$ pour tout N. Montrez :

$$S_N(x) - c_0 - c_1.x - c_2.x^2 = (2.x + 5.x^2 - 6.x^3).S_N(x) + (-2.c_0.x - 2.c_1.x^2 - 5.c_0.x^2) +$$

$$+(-2.c_N - 5.c_{N-1} + 6.c_{N-2}).x^{N+1} + (-5.c_N + 6.c_{N-1}).x^{N+2} + 6.c_N.x^{N+3}$$

V~2) Déduisez que pour x dans $]-1/4,\ 1/4[$, $S_N(x)$ converge quand N tend vers $+\infty$ vers une fraction rationnelle en x que vous préciserez. $\boxed{\text{2 pt.}}$

V~3) Décomposez celle ci en éléments simples. $\boxed{\text{2 pt.}}$

V~4) Démontrez l'existence de $2.\sum_{n=0}^{+\infty}(-2.x)^n$ et $-3.\sum_{n=0}^{+\infty}(3.x)^n$ pour x dans $]-1/4,\ 1/4[$ et donnez la valeur de ces deux séries. $\boxed{\text{2 pt.}}$

V~5) Retrouvez (c_n) comme combinaison de suites géométriques. $\boxed{\text{3 pt.}}$

Factorisation de Cholesky

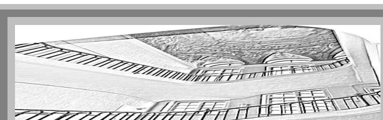
VI~0) On reprend pour un petit exercice la matrice de Hankel de la suite factorielle : $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 24 \\ 2 & 6 & 24 & 120 \\ 6 & 24 & 120 & 720 \end{pmatrix}$.

Trouvez T triangulaire supérieure à diagonale positive[1] vérifiant $M_3 = {}^t\, T.T$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

VI~1) Inversez T en résolvant le système $T.X = Y$ d'inconnue X dans $\mathbb{R}^4$ et de paramètre Y dans $\mathbb{R}^4$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

VI~2) Inversez M_3. $\boxed{\text{2 pt.}}$

LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2023 DS06 2024
54- points

Quel est le plus petit entier naturel non nulparlequel on peut multiplier $2^{2020}.3^{2021}.4^{2022}.5^{2023}.6^{2024}$ pour en faire un carré parfait $\boxed{\text{2 pt.}}$

Résolvez $16^{\frac{x-1}{x}}.5^x = 100$ d'inconnue réelle x . $\boxed{\text{2 pt.}}$ J'aime pas trop les 14 février tout l'temps seul à force de m'faire griller.

1. $t_i^k = 0$ pour $i > k$ et $t_i^i \geqslant 0$

LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 9 février
M.P.S.I.2

2023 2024
DS06
CORRECTION

Script Python. DS06

Le terme général de position `i`, `k` de la matrice cherchée est tout simplement `C[i+k]` en indexation pythonienne. On peut tout traiter en une ligne.

```
def hankel(C : list, n : int) : #list of list of float
....return [[C[i+k] for k in range(n+1)] for i in range(n+1)]]
```

On peut détailler en

```
def H(C : list, n : int) : #list of list of float
....H = [ ]
....for i in range(n+1) :
........L = [ ]
........for k in range(n+1) :
............L.append(C[i+k])
........H.append(L)
....return(H)
```

Le présupposé $2.n+1 \leqslant len(C)$ évite les débordements.

Cas particuliers. DS06

Pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison r, les trois premiers déterminants sont u_0 puis $\begin{vmatrix} u_0 & r.u_0 \\ r.u_0 & r^2.u_0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} u_0 & r.u_0 & r^2.u_0 \\ r.u_0 & r^2.u_0 & r^3.u_0 \\ r^2.u_0 & r^3.u_0 & r^4.u_0 \end{vmatrix}$ et ainsi de suite.

Mais dès le déterminant de taille 2 , on trouve 0 car, par définition même d'une suite géométrique, la seconde colonne est un multiple de la première.

Pour ce qui est de la trace, elle contient $n+1$ termes qui ne sont que des carrés ($u_0.r^{i+k}$ avec $i=k$).
C'est donc $u_0.\sum_{k=0}^{n}(r^2)^k$ et pour r différent de 1 on trouve $u_0.\dfrac{r^{2.k+2}-1}{r^2-1}$.

Pour la suite de Fibonacci, on trouve $\begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}$. Seul le second déterminant est non nul.
Dès le troisième, on a $C_2 = C_0 + C_1$ par définition même de la suite de Fibonacci, et ce quelle que soit la taille de la matrice.
Cette fois, la trace ne contient qu'un terme sur deux de la suite de Fibonacci : $\sum_{k=0}^{n} F_{2.k}$.
Ça ne coïncide pas avec ce qui est demandé ? On n'a qu'un terme sur deux par rapport à ce qui est demandé ?
Mais si on rappelle que chaque F_{2k} s'écrit $F_{2.k-1}+F_{2.k-2}$ (sauf le premier, mais il est nul), on a alors $\sum_{k=1}^{n} F_{2.k-1} + \sum_{k=1}^{n} F_{2.k-2}$. l'un donne la somme des termes d'indices impairs de F_1 à $F_{2.n-1}$ et l'autre donne la somme de F_0 à $F_{2.n-2}$.
En fusionnant on a bien la somme de F_0 à $F_{2.n-1}$.

J'espère ne pas croiser trop de récurrences pour cette question, on n'est plus en train de passer la bac !

On veut calculer le terme général de la suite de Fibonacci ? On fait directement appel au cours avec l'équation caractéristique $\lambda^2 = \lambda + 1$ de racines $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. On sait que F_n est une combinaison de la forme

$$\exists (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n,\ F_n = a.\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + b.\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$$

Les conditions initiales $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ donnent $\boxed{\forall n,\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big)}$ *(inutile de retenir une formule par cœur, tout dépend du choix de condition initiale des premiers lapins)*. C'est bien une combinaison de deux suites géométriques.

On peut aussi repasser par $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+2} \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r & r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r & r' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r' \end{pmatrix}$ *où r et r′ sont les deux racines données ci dessus.*

On n'a plus qu'à sommer ces formules :

$$Tr(H_n) = \frac{1}{\sqrt{5}}.\sum_{k=0}^{2.n-1}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}.\sum_{k=0}^{2.n-1}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^k$$

On a deux séries géométriques

$$Tr(H_n) = \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{2.n} - 1}{\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) - 1} - \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{2.n} - 1}{\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) - 1}$$

On simplifie et il reste, tous calculs faits $\boxed{\sum_{k=0}^{2.n-1} F_k = \frac{5+\sqrt{5}}{10}.\Big(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}.\Big(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\Big)^n - 1}$

On a bien $a.(r)^n + b.(r')^n + c$ avec

$a = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$	$b = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$	$c = 1$	$r = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$	$r' = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$
			carré du nombre d'or	

Pour la suite n^2, on ne devine pas tout de suite l'histoire, mais $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \end{vmatrix}$ est nul car il existe une combinaison entre les quatre premières colonne.

Ces colonnes sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ i^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ \vdots \\ (i+1)^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ \vdots \\ (i+2)^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ \vdots \\ (i+3)^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ et la combinaison est $C_0 - 3.C_1 + 3.C_2 - C_3 = 0_{n+1}$. Il suffit de le vérifier sur la ligne d'indice i pour tout i.

$$i^2 - 2.(i+1)^2 + 3.(i+2)^2 - (i+3)^2 = 0$$

Comme les trois colonnes forment une famille liée, le déterminant est nul.

Enfin, la trace est encore une somme de carrés :

$$Tr(H_n = \sum_{k=0}^{n}(2.k)^2 = 4.\frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$$

	géométrique	Fibonacci	carrés	factorielle
Déterminant	$(u_0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\dots)$	$(0,\ -1,\ ,\ 0,\ 0,\ 0,\dots)$	$(0,\ -1,\ 8,\ 0,\ 0,\ 0,\dots)$	$\Big(1,\ 1,\ 4,\dots\Big(\prod_{k=0}^{n} k!\Big)^2,\dots\Big)$
Trace	$u_0.\dfrac{a^{2.n+2}-1}{a^2-1}$	$\sum_{k=0}^{2.n-1} F_k$	$2.\dfrac{n.(n+1).(2.n+1)}{3}$	

Traitons effectivement le cas de la matrice H_n dans le cas de la suite factorielle.
On écrit la matrice et on factorise chaque chaque colonne k par $k!$:

$$\begin{vmatrix} 0! & 1! & \dots & k! & \dots & n! \\ 1! & 2! & \dots & (k+1)! & \dots & (n+1)! \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ i! & (i+1)! & \dots & (i+k)! & \dots & (n+k)! \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ n! & (n+1)! & \dots & (n+k)! & \dots & (2n)! \end{vmatrix} = \Big(\prod_{k=0}^{n} k!\Big). \begin{vmatrix} 0! & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1! & 2 & \dots & \frac{(k+1)!}{k!} & \dots & \frac{(n+1)!}{n!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ i! & \frac{(i+1)!}{1!} & \dots & \frac{(i+k)!}{k!} & \dots & \frac{(n+k)!}{n!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ n! & \frac{(n+1)!}{1!} & \dots & \frac{(n+k)!}{k!} & \dots & \frac{(2n)!}{n!} \end{vmatrix}$$

et maintenant on factorise chaque ligne i par $i!$

$$\begin{vmatrix} 0! & 1! & \dots & k! & \dots & n! \\ 1! & 2! & \dots & (k+1)! & \dots & (n+1)! \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ i! & (i+1)! & \dots & (i+k)! & \dots & (n+k)! \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ n! & (n+1)! & \dots & (n+k)! & \dots & (2n)! \end{vmatrix} = \Big(\prod_{k=0}^{n} k!\Big).\Big(\prod_{i=0}^{n} i!\Big). \begin{vmatrix} 0! & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1!}{0!.1!} & \frac{2!}{1!.1!} & \dots & \frac{(k+1)!}{k!.1!} & \dots & \frac{(n+1)!}{n!.1!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{i!}{0!.i!} & \frac{(i+1)!}{1!.i!} & \dots & \frac{(i+k)!}{k!.i!} & \dots & \frac{(n+k)!}{n!.i!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{n!}{0!.n!} & \frac{(n+1)!}{1!.n!} & \dots & \frac{(n+k)!}{k!.n!} & \dots & \frac{(2n)!}{n!.n!} \end{vmatrix}$$

Les variables étant muettes, on a bien $\Big(\prod_{k=0}^{n} k!\Big)^2$ en facteur devant. Et le terme général de la matrice est bien $\dfrac{(i+k)!}{i!.k!}$.

Résumé : factoriser ligne par $i!$ et colonne par $k!$.

Il reste à prouver que la matrice de coefficient général binomial a pour déterminant 1. On le voit en petites tailles :

$$\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix},, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix}$$

Mais comment le prouver ? On constate que la règle de construction donne qu'un terme est somme de deux termes adjacents : $a_i^k = a_{i-1}^k + a_{k-1}^i$ (c'est notre relation

$$\binom{i+k}{k} = \binom{i+k-1}{k} + \binom{i+k-1}{k-1}$$

On va soustraire chaque colonne sur la suivante pour mettre des 0, à partir de la fin.
Regardons sur un exemple avec n petit :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 5 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 15 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 10 & 10 & 15 \\ 1 & 5 & 15 & 20 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 5 & 10 & 20 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 10 & 15 \\ 1 & 1 & 4 & 20 & 35 \end{vmatrix}$$

Le terme général de la matrice obtenue avec $C_k = C_k - C_{k-1}$ est alors (à partir de la colonne 1 puisqu'il faut en garder une) :

$$\binom{i+k}{k} - \binom{i+(k-1)}{k-1} = \binom{(i-1)+k}{k}$$

On retrouve la matrice mais décalée d'une ligne vers le bas (on en a perdu une). Et la première ligne en emplie de 0 sauf en position $(0,\ 0)$.

On développe par rapport à la première ligne, le facteur vaut 1, la pondération vaut $(-1)^0$, le cofacteur est $\det(B_{n-1})$.
Bref : $\det(B_n) = \det(B_{n-1})$ et par récurrence immédiate : $\det(B_n)$ vaut 1 pour tout n.

Bilan après les deux étapes : $\boxed{\Delta_n = \Big(\prod_{k=0}^{n} k!\Big)^2}$

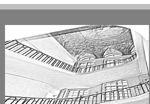
Si on doit décomposer en produit de facteurs premiers Δ_{10}, on doit déjà calculer

$$\prod_{k=0}^{10} k! = \begin{array}{cccccccccc} 1 &&&&&&&&& \\ 1 & 2 &&&&&&&& \\ 1 & 2 & 3 &&&&&&& \\ 1 & 2 & 3 & 4 &&&&&& \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 &&&&& \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 &&&& \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 &&& \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 && \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ = & = & = & = & = & = & = & = & = & = \\ 1 & 2^9 & 3^8 & 4^7 & 5^6 & 6^5 & 7^4 & 8^3 & 9^2 & 10 \end{array}$$

et pour le déterminant le prof de maths trouve

$$\Big(\big(2\big)^9.\big(3\big)^8.\big(2^2\big)^7.\big(5\big)^6.\big(2.3\big)^5.\big(7\big)^4.\big(2^3\big)^3.\big(3^2\big)^2.\big(2.5\big)\Big)^2 = 2^{76}.3^{34}.5^{14}.7^8$$

> *le prof de physique trouve trouve* $4,43 \times 10^{55}$
> *le prof de SII trouve* 40×10^{54}
> *le prof d'arts plastiques trouve* 44 337 041 641 882 947 649 156 022 595 410 930 014 617 600 000 000 000 000.



Cas de la suite nulle. DS06

Évidemment, si la suite (c_n) est la suite nulle, tous les déterminants sont nuls, car formés de 0 partout.

Réciproquement, on suppose que tous les déterminants tels que

$$\begin{vmatrix} u_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & u_1 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \\ u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{vmatrix}$$

sont nuls. le premier donne $u_0 = 0$. Le second donne $(-u_1)^2 = 0$ et donc $u_1 = 0$.

En reportant dans le suivant : $\begin{vmatrix} 0 & 0 & u_2 \\ 0 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix} = 0$, u_2 est nul à son tour. Et ainsi de suite.

On sent venir la récurrence sur n. A forte hérédité.

On suppose donc que tous les Δ_n sont nuls.
On a montré que u_0 était nul.
On se donne n et on suppose que tous les u_k pour k de 0 à $n-1$ sont nuls.
On regarde alors le déterminant Δ_n. Il est nul par la grande hypothèse. mais par l'hypothèse de récurrence, il est de la forme qui suit

$$0 = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_{n-1} & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n-1} & u_n & \dots & u_{2.n-2} & u_{2.n-1} \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2.n-1} & u_{2.n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & u_n \\ 0 & 0 & \dots & u_n & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & u_n & \dots & u_{2.n-2} & u_{2.n-1} \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2.n-1} & u_{2.n} \end{vmatrix}$$

La matrice n'est pas triangulaire au sens propre du terme. Mais quitte à ré-arranger les colonnes, elle l'est. Son déterminant est (au signe près) $(a_n)^{n+1}$.

> *Deux pièges ici : dire* $(a_n)^{n+1}$ *ou* $-(a_n)^{n+1}$ *sans surveiller le signe.*
> *Parler de* $(a_n)^n$ *alors que la matrice est bien de format* $n+1$.

Bref, on a $(a_n)^{n+1} = \pm 0$ et par intégrité, a_n est nul.

Comme on est au début du devoir, il est attendu une vraie récurrence et pas juste la mention « par récurrence sur n ». De plus, il faut préciser que c'est une récurrence à forte hérédité.

Cas des suites pseudo-périodiques. DS06

Dans notre cours (et dans bien d'autres), ce sont les suites récurrentes linéaires d'ordre p. Comme celle de Fibonacci justement. Ou même, comme la suite (n^2) qui vérifie bien $(n+3)^2 = 3.(n+2)^2 - 3.(n+1)^2 + n^2$.

Regardons la matrice M_N pour N supérieur ou égal à p avec en tête l'hypothèse $c_n = \lambda_1.c_{n-1} + \lambda_2.c_{n-2} + \ldots + \lambda_p.c_{n-p}$ pour tout n :

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_2 & \ldots & c_p & \ldots & c_N \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{p+1} & \ldots & c_{N+1} \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{p+2} & \ldots & c_{N+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_N & c_{N+1} & \ldots & c_{p+N} & \ldots & c_{2.N} \end{pmatrix}$$

La colonne d'indice p (la $p+1^{iemme}$ donc, qui commence par c_p) est combinaison des précédentes. Proprement

$$\forall i,\ c_{p+i} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j.c_{p+i-j}$$

Le déterminant est bien nul.

Pourquoi « à partir du rang p » ?
Parce qu'avant, il n'y a pas assez de colonnes pour remonter jusqu'à c_{n-p} !

On va ensuite montrer la réciproque en commençant par un exemple.

Exemple. DS06

On ne nous a donné que la matrice H_3 ? Mais on a les précédentes en rognant

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix},\ H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 22 \end{pmatrix},\ H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 9 & 22 \\ 2 & 9 & 22 & 77 \\ 9 & 22 & 77 & 210 \end{pmatrix}$$

Les déterminants se calculent : 0, -1, 6 et le dernier est nul.

Certes, on peut se lancer dans un calcul par développement, mais on nous livre

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 9 & 22 \\ 2 & 9 & 22 & 77 \\ 9 & 22 & 77 & 210 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui prouve bien que la matrice n'est pas inversible (et nous donne même une relation de dépendance linéaire qui peut servir).

On cherche une relation de dépendance linéaire sur les termes de la suite. Elle doit bien se lire sur les colonnes. Puisque la matrice est celle associée à la suite (c_n), regardons comme par hasard

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui nous donne justement

$$\begin{array}{rrrcl} -6.c_0 & +5.c_1 & +2.c_2 & = & c_3 \\ -6.c_1 & +5.c_2 & +2.c_3 & = & c_4 \\ -6.c_2 & +5.c_3 & +2.c_4 & = & c_5 \\ -6.c_3 & +5.c_4 & +2.c_5 & = & c_6 \end{array}$$

On note qu'ici, c'est le déterminant nul de Δ_3 qui nous donne cette relation de dépendance linéaire.
L'hypothèse « les déterminants suivants sont nuls » va permettre de la propager.

On va calculer comme proposé

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 9 & 22 \\ 1 & 2 & 9 & 22 & 77 \\ 2 & 9 & 22 & 77 & 210 \\ 9 & 22 & 77 & 210 & a_7 \\ 22 & 77 & 210 & a_7 & a_8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 22 & 0 & 0 \\ 9 & 22 & 77 & 0 & d \\ 22 & 77 & 210 & d & e \end{pmatrix}$$

avec $d = c_7 - 2.c_6 - 5.c_5 + 6.c_4$ (tiens tiens) et $e = c_8 - 2.c_7 - 5.c_6 + 6.c_5$.
Calculons le déterminant de cette matrice. C'est $\Delta_4.1$ si on regarde le premier membre (matrice H_4 et matrice triangulaire).
Mais dans le membre de droite, en développant convenablement, on trouve

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 22 & 0 & 0 \\ 9 & 22 & 77 & 0 & d \\ 22 & 77 & 210 & d & e \end{vmatrix} = -d. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \\ 2 & 9 & 22 & 0 \\ 9 & 22 & 77 & d \end{vmatrix} = -d^2. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 22 \end{vmatrix} = -d^2.\Delta_2 = -6.d^2$$

On déduit par intégrité que d est nul. C'est la relation attendue qui passe au rang suivant.

$$\begin{array}{rrrcl} -6.c_0 & +5.c_1 & +2.c_2 & = & c_3 \\ -6.c_1 & +5.c_2 & +2.c_3 & = & c_4 \\ -6.c_2 & +5.c_3 & +2.c_4 & = & c_5 \\ -6.c_3 & +5.c_4 & +2.c_5 & = & c_6 \\ -6.c_4 & +5.c_5 & +2.c_6 & = & c_7 \end{array}$$

On va avancer plus loin avec n au moins égal à 4. On suppose que la relation $c_k = 2.c_{k-1} + 5.c_{k-2} - 6.c_{k-3}$ est vraie pour tout k de 3 à n.
On considère la matrice H_{n-2} et une matrice triangulaire judicieuse, puis on effectue le produit suivant

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n-2} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \dots & c_{n-1} \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & \dots & c_n \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-3} & c_{n-2} & c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-3} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n-4} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Les trois premières colonnes récupèrent les trois premières colonnes de H. Ensuite, tant que l'on est avec des indices plus petits que n, on récupère des 0 car on a la combinaison parfaite (dans la liste des $c_k = 2.c_{k-1} + 5.c_{k-2} - 6.c_{k-3}$).
Mais quand on arrive à un rang trop élevé, il reste par exemple $c_{n+1} - 2.c_n + 5.c_{n-1} - 6.c_{n-2}$ qu'on va noter α.
Et il reste d'autres termes dont on ignore tout comme $c_{n+2} - 2.c_{n+1} + 5.c_n - 6.c_{n-1}$ et les suivants. On ne va pas es noter car leur rôle n'a aucune importance.

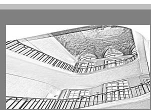
$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n-2} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \dots & c_{n-1} \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & \dots & c_n \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-3} & c_{n-2} & c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-3} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n-4} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & \dots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-3} & c_{n-2} & c_{n-1} & 0 & \alpha & \dots & ? \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_n & \alpha & ? & \dots & ? \end{pmatrix}$$

Si on utilise la notion de matrice par blocs : $H_{n-2}.T = \begin{pmatrix} H_2 & 0 \\ \vdots & T \end{pmatrix}$ où T est une matrice triangulaire de taille .

En développant un nombre de fois suffisant par rapport à la colonne où il n'y a à chaque fois qu'un α, on obtient que le déterminant vaut $(-1)^{truc}.\alpha^{n-4}. \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$.
Mais ce déterminant est nul, puisque dans le premier membre on a $\det(H_{n-2}).\det(triangulaire)$.

On en déduit par intégrité $\alpha = 0$ c'est à dire $c_{n+1} - 2.c_n + 5.c_{n-1} - 6.c_{n-2} = 0$.
C'est la relation attendue au rang $n+1$.

Si vous avez réussi à mettre ceci en forme avec le bon décompte du nombre de colonnes et des exposants, je dis bravo.
Si déjà vous avez compris qu'il fallait une récurrence à grande hérédité, je dis aussi « bien ».
Et si vous avez juste dit « de même », je vois que vous avez compris mais que vous abusez.



Cas général. DS06

On a suppose $\Delta_q = 0$ *(pour n supérieur ou égal à q, le déterminant est nul)*. La matrice H_q est donc non inversible.
C'est qu'il existe une relation de dépendance linéaire sur ses colonnes.

Ou si vous préférez « un vecteur non nul dans son noyau ».

Et dès qu'on en a un, on a tous ses multiples.

Par exemple, si on a la relation de dépendance linéaire $C_0 + 2.C_1 - 3.C_2 + 5.C_3 = 0_4$ on prend le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Et ensuite, on a aussi $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -15 \\ 55 \end{pmatrix}$ *et plein d'autres.*

On en a donc une infinité.

On en veut un dont la dernière composante soit égale à 1 ? Il suffit de choisir le bon multiple.

Si on avait $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, on a aussi $\begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ -3/5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Trop facile !
A un détail près.

Si le vecteur trouvé est $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors j'aurai beau chercher ses multiples, aucun ne pourra avoir pour dernière composante 1.
La clef était de diviser le vecteur par sa dernière composante, mais si elle est nulle, c'est impossible.

Ai je un argument pour dire que la combinaison fait intervenir la dernière colonne ?

Si tel n'était pas le cas, on aurait une relation de dépendance linéaire sur $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{q-1} & * \\ c_1 & c_2 & \dots & c_q & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{q-1} & c_q & \dots & c_{2q-2} & * \\ c_q & c_{q+1} & \dots & c_{2q-1} & * \end{pmatrix}$ (sans utiliser la dernière colonne).

Mais alors on aurait la même relation sur les colonnes raccourcies $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{q-1} & * \\ c_1 & c_2 & \dots & c_q & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{q-1} & c_q & \dots & c_{2q-2} & * \\ * & * & & * & * \end{pmatrix}$ et ceci donnerait $\det(H_{q-1}) =$. Ce qui contredit notre hypothèse.

A présent, que fait on de cette information de la forme $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & & c_{q-1} & c_q \\ c_1 & c_2 & & c_q & c_{q+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{q-1} & c_q & \dots & c_{2q-2} & c_{2q-1} \\ c_q & c_{q+1} & \dots & c_{2q-1} & c_{2q} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{q-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

On la lit ligne par ligne en passant un terme de l'autre côté :

$$\begin{array}{ccccc} -x_0.c_0 & -x_1.c_1 & \dots & -x_{q-1}.c_{q-1} & = & c_q \\ -x_0.c_1 & -x_1.c_2 & \dots & -x_{q-1}.c_q & = & c_{q+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -x_0.c_q & -x_1.c_{q-1} & \dots & -x_{q-1}.c_{2.q-1} & = & c_{2.q} \end{array}$$

En renommant nos coefficients $-x_i$ comme étant des λ_{q-i}, on a exactement les $q+1$ relations demandées.

On va chercher ensuite à les propager avec « déterminant de Δ_n nul ».

On suit la méthode que l'on a utilisée dans le cas particulier de la petite dimension.

On prend la matrice de taille $q+3$ (H_{q+2}) et on la multiplie à droite par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_q & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ & & & & -1 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

avec un bloc I_q et un bloc de combinaisons.

On obtient une matrice par blocs là aussi $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & & c_{q-1} & c_q & & \\ c_1 & c_2 & & c_q & c_{q+1} & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ c_{q-1} & c_q & \dots & c_{2q-2} & c_{2q+1} & 0 & d \\ c_q & c_{q+1} & \dots & c_{2q+1} & c_{2q+2} & d & e \end{pmatrix}$ avec $d = c_{2.q+1} - \sum_{k=1}^{q} c_{2.q+1-q}$ dont le déterminant est le produit $d^2.\Delta_{q-1}$

Comme son déterminant est le produit de Δ_{q+2} (nul) par celui de la matrice de combinions, on trouve que d est nul, et la propriété est passée de c_q, c_{q+1} jusqu'à $c_{2.q}$ à $c_{2.q+1}$. C'est un début.

On recommence en augmentant le nombre de colonnes et de lignes.
C'est un peu lourd.

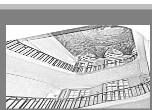
Je vous donne le texte exact de Mines-Ponts :

> *Soient trois entiers fixés p, m et n vérifiant les inégalités :* $1 \leqslant p \leqslant m+1$ *et* $2.m+2 \leqslant n$.
> *Soit C une suite vérifiant la propriété :*
> *il existe p éléments de* $\mathbb{R}$ λ_1*, jusqu'à* λ_p *tels que pour tout entier k compris entre* $m+1$ *et* $n-1$ ($m+1 \leqslant k \leqslant n-1$) *la relation* $c_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j.c_{k-j} = \lambda_1.c_{k-1} + \dots + \lambda_p.c_{k-p}$ *ait lie.*
> *Déterminez au signe près l'expression du déterminant* Δ_{n-m-1} *en fonction du déterminant* Δ_m *et de la quantité* $a = c_n - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j.c_{n-j}$.
> *Déduisez que si le déterminant* Δ_m*n'est pas nul et si le déterminant* $\Delta_n - m - 1$ *est nul, il vient* $c_n = \sum_{\lambda_j.c_{n-j}}$.

Et la correction :

> *Comme* $1 \leqslant p \leqslant m+1$ *et* $2.m+2 \leqslant n$*, on a* $n-m-1 \geqslant m+1$*. Pour k décroissant de n - m - 1 à m + 1, on effectue l'opération élémentaire* $C_k \leftarrow C_k - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j.C_{k-j}$ *. On obtient alors par blocs* $M_{n-m-1} = \begin{pmatrix} M_m & 0 \\ ? & D' \end{pmatrix}$
> *où* D' *est un déterminant antidiagonal* $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ 0 & 0 & & a & ? \\ \vdots & & & \dots & \vdots \\ 0 & a & & ? & ? \\ a & ? & & ? & ? \end{vmatrix}$.

On en déduit que $\Delta_{n-m-1} = \mp a^{n-2m-1}.\Delta_m$*, donc si* $\Delta_m \neq 0$ *et* Δ_{n-m-1}*, alors* $a = 0$*, c'est-à-dire* $c_n = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j.c_{n-j}$.



Série géométrique. DS06

On va montrer la majoration $|c_n| \leqslant 4^n.\mu$ par récurrence sur n. Peut être même par récurrence forte.

On commence avec $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$:
- $|c_0| \leqslant \mu$ puisque $\mu = Max(|c_0|, \ldots)$
- $|c_1| \leqslant 4.\mu$ puisque $\mu = Sup\Big(\ldots, \dfrac{|c_1|}{4}, \ldots\Big)$
- $|c_1| \leqslant 16.\mu$ puisque $\mu = Sup\Big(\ldots, \dfrac{|c_2|}{16}\Big)$

Quand on est plus petit que l'un des nombres d'une liste (et même ici égal à un des nombres d'une liste), on est plus petit que le maximum.
Proprement : $a \leqslant Max(a, b, c)$, $b \leqslant Max(a, b, c)$ *et* $c \leqslant Max(a, b, c)$.

L'initialisation a dû se faire sur trois termes, car ensuite on va avoir besoin de passer de $n-2$, $n-1$, n à $n+1$.

On se donne un entier n et on suppose que tous les c_k de $k = 0$ à $k = n$ vérifient $|c_k| \leqslant 4^k.\mu$ *(attention, c'est bien* $4^k.\mu$*et pas* $4^n.\mu$ *et c'est pour chaque* k *de* 0 *à* n*).*
On s'intéresse à c_{n+1} qu'on veut majorer. On écrit

$$|c_{n+1}| = |2.c_n + 5.c_{n-1} - 6.c_{n-2}| \leqslant 2.|c_n| + 5.|c_{n-1}| + 6.|c_{n-2}|$$

On a utilisé l'inégalité triangulaire, et on se dit que ça ne doit pas être mauvais, car de toutes façons, on ignore les signes de chaque terme.
On exploite ensuite l'hypothèse de récurrence aux rangs n, $n-1$ et $n-2$:

$$|c_{n+1}| \leqslant 2.4^n.\mu + 5.4^{n-1}.\mu + 6.4^{n-1}.\mu$$

On factorise par μ et par 4^{n-2}

$$|c_{n+1}| \leqslant (2.4^2 + 5.4 + 6).4^{n-1}.\mu = 58.4^{n-2}.\mu$$

On majore encore un peu car on a un objectif : $4^{n+1}.\mu$ c'est à dire $4^3.4^{n-2}.\mu$ avec $4^3 = 64$

$$|c_{n+1}| \leqslant 58.4^{n-2}.\mu \leqslant 64.4^{n-2}.\mu = 4^{n+1}.\mu$$

On a réussi à passer de $(H_{n-2}\ et\ H_{n-1}\ et\ H_n)$ à H_{n+1}. C'est ça l'hérédité.

On peut certes établir

$$S_N(x) - c_0 - c_1.x - c_2.x^2 = (2.x + 5.x^2 - 6.x^3).S_N(x) + (-2.c_0.x - 2.c_1.x^2 - 5.c_0.x^2) +$$

$$+(-2.c_N - 5.c_{N-1} + 6.c_{N-2}).x^{N+1} + (-5.c_N + 6.c_{N-1}).x^{N+2} + 6.c_N.x^{N+3}$$

par récurrence sur N.
Pour N égal à 2, le premier membre est nul. Et le second donne

$$(2.x + 5.x^2 - 6.x^3).(c_0 + c_1.x + c_2.x^2) + (-2.c_0.x - 2.c_1.x^2 - 5.c_0.x^2) + (-2.c_2 - 5.c_1 + 6.c_0).x^3 + (-5.c_2 + 6.c_1).x^4 + 6.c_2.x^5$$

Les neuf termes se simplifient deux à deux.
Et l'hérédité passe bien. mais ce serait du gaspillage de passer par une telle méthode. Pourquoi pas NumPy et SciPy tant qu'on y est ?

On part du premier membre proposé :

$$S_N(x) - c_0 - c_1.x - c_2.x^2 = \sum_{n=3}^{N} c_n.x^n$$

On remplace car à partir du rang 3, la formule de récurrence est utilisable

$$S_N(x) - c_0 - c_1.x - c_2.x^2 = \sum_{n=3}^{N} (2.c_{n-1} + 5.c_{n-2} - 6.c_{n-3}).x^n$$

On sépare en trois sommes et on ré-indexe

$$S_N(x) - c_0 - c_1.x - c_2.x^2 = 2.\sum_{n=3}^{N} c_{n-1}.x^n + 5.\sum_{n=3}^{N} c_{n-2}.x^n - \sum_{n=3}^{N} c_{n-3}.x^n$$

$$S_N(x) - c_0 - c_1.x - c_2.x^2 = 2.\sum_{p=2}^{N-1} c_p.x^{p+1} + 5.\sum_{p=1}^{N-2} c_p.x^{p+2} - \sum_{p=0}^{N-3} c_n.x^{p+3}$$

On sort les puissances de x attendues et on tente d'aligner nos sommes en $\sum_{n=0}^{N}$

$$\begin{array}{rcccc} & & & & +6.x^3.c_N.x^N \\ & & & -5.x^2.c_N.x^N & +6.x^3.c_{N-1}.x^{N-1} \\ & & -2.x.c_N.x^N & -5.x^2.c_{N-1}.x^{N-1} & +6.x^3.c_{N-2}.x^{N-2} \\ S_N(x) - c_0 - c_1.x - c_2.x^2 & = & 2.x.\sum_{p=0}^{N} c_p.x^p & +5.x^2.\sum_{p=0}^{N} c_p.x^p & -6.x^3.\sum_{p=0}^{N} c_n.x^{p+3} \\ & & -2.x.c_0 & -5.x^2.c_0 & \\ & & -2.x.c_1.x & & \end{array}$$

L'une des lignes donne justement $(2.x + 5.x^2 - 6.x^3).S_N(x)$ et le reste n'est que petits termes à compenser précisément écrits dans la formule.

Que fait on alors de cette formule ?
On isole d'un côté les termes en $S_N(x)$: $(1 - 2.x - 5.x^2 + 6.x^3).S_N(x)$.
De l'autre côté, on réunit les termes aux exposants petits :

$$(1 - 2.x - 5.x^2 + 6.x^3).S_N(x) = (c_0 + c_1.x + c_2.x^2) + (-2.c_0.x - 2.c_1.x^2 - 5.c_0.x^2) + \dots$$

puis ceux avec des grands exposants et on divise

$$S_N(x) = \frac{c_0 + (c_1 - 2.c_0).x + (c_2 - 2.c_1 - 5.c_0).x^2}{1 - 2.x - 5.x^2 + 6.x^3} +$$

$$+ \frac{(-2.c_N - 5.c_{N-1} + 6.c_{N-2}).x^{N+1} + (-5.c_N + 6.c_{N-1}).x^{N+2} + 6.c_N.x^{N+3}}{1 - 2.x - 5.x^2 + 6.x^3}$$

On a le droit de diviser pour x dans $]-1/4,\ 1/4[$ car sur cet intervalle, le dénominateur ne s'annule pas.
Peut on faire tendre N vers l'infini sans avoir des formes indéterminées ?
Certes, pour x entre $-1/4$ et $1/4$, chaque x^N ou x^{N+1} ou x^{N+2} tend vers 0 quand N tend vers l'infini.
Mais il y a un $c_N$devant. Et lui, il peut devenir énorme. D'ailleurs, on a juste pu le dominer que par $\mu.4^N$.

Mais justement, $|x^N.c_N| \leqslant |x|^N.4^N.\mu = (4.|x|)^N.\mu$. Le réel $4.|x|$ est entre 0 et 1. La suite géométrique $((4.|x|)^n)$ tend vers 0 et par encadrement, chaque $x^N.c_N$ et autre tend vers 0. Toute la seconde ligne s'en va, et$S_n(x)$ converge. On a même sa limite :

$$S(x) = \frac{c_0 + (c_1 - 2.c_0).x + (c_2 - 2.c_1 - 5.c_0).x^2}{1 - 2.x - 5.x^2 + 6.x^3}$$

Réflexe débilissime de Terminale.
Pour prouver qu'une suite converge, je vais montrer qu'elle est croissante majorée, puis je calculerai sa limite.
C'est le réflexe hérité des suites $u_{n+1} = f(u_n)$. C'est bien, mais ça ne sert que dans ces cas là.
Ici, on nous demande de montrer qu'elle converge ? Il suffit de montrer qu'elle a une limite !
Converger, c'est juste « avoir une limite ».
Montrer : $u_n = reel + truc_n avectruc_n qui$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, c'est montrer que u_n converge vers reel !

Pour décomposer cette limite en éléments simples (puisque c'est bien une fraction rationnelle), on factorise déjà son dénominateur

$$6.x^3 - 5.x^2 - 2.x + 1 = (x-1).(6.x^2 + x - 1) = (x-1).6.\Big(x + \frac{1}{2}\Big).\Big(x - \frac{1}{3}\Big) = (x-1).(2.x+1).(3.x-1)$$

Le numérateur est d'un petit degré, on n'a pas de partie polynômiale, et les trois pôles sont simples

$$S(x) = \frac{c_0 + (c_1 - 2.c_0).x + (c_2 - 2.c_1 - 5.c_0).x^2}{1 - 2.x - 5.x^2 + 6.x^3} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x + \frac{1}{2}} + \frac{\gamma}{x - \frac{1}{3}}$$

On trouve les trois coefficients par la méthode des pôles (des points pour ceux qui aiment les calculs comme en physique, le désespoir de ceux qui plantent dès qu'il y a plus de deux multiplications à faire) :

$$S(x) = \frac{1}{6}.\frac{-6.c_0 - c_1 + c_2}{x-1} + \frac{1}{30}.\frac{3.c_0 - 4.c_1 + c_2}{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{30}.\frac{2.c_0 - c_1 - c_2}{x - \frac{1}{3}}$$

Que vient faire ensuite une série géométrique ?

$$2.\sum_{n=0}^{+\infty}(-2.x)^n = 2.\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-2.x)^n = 2.\lim_{N\to+\infty}\frac{1-(-2.x)^{N+1}}{1-(-2.x)} = \frac{2}{1+2.x}$$

On note qu'on a utilisé $|x| < \frac{1}{4}$ ce qui permet à la suite $((2.x)^N)_N$ de tendre vers 0.
Et l'autre ? C'est pareil, puisque là encore $3.x$ est plus petit que 1 en valeur absolue

$$-3.\sum_{n=0}^{+\infty}(3.x)^n = -3.\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(3.x)^n = -3.\lim_{N\to+\infty}\frac{1-(3.x)^{N+1}}{1-(3.x)} = \frac{-3}{1-3.x}$$

On synthétise et on ajoute celle qui manque pour avoir nos trois éléments simples

$2.\sum_{n=0}^{+\infty}(-2.x)^n = \frac{2}{1+2.x} = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$	$-3.\sum_{n=0}^{+\infty}(3.x)^n = \frac{-3}{1-3.x} = \frac{1}{x-\frac{1}{3}}$	$-\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$

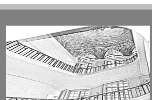
Il est temps de tout mettre bout à bout (toujours pour x entre m-1/4 et 1/4)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n.x^n = S(x) = \frac{-6.c_0 - c_1 + c_2}{6}.\Big(-\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\Big) + \frac{3.c_0 - 4.c_1 + c_2}{30}.\Big(2.\sum_{n=0}^{+\infty}(-2.x)^n\Big) + \frac{2.c_0 - c_1 - c_2}{30}.\Big(-3.\sum_{n=0}^{+\infty}(3.x)^n\Big)$$

Il ne reste plus qu'à regrouper dans le membre de droite et à (abusivement ?) identifier le coefficient de x^n pour trouver une formule explicite pour c_n

$$c_n = coeff(x^n, S(x)) = \frac{-6.c_0 - c_1 + c_2}{6}.\Big(-1\Big) + \frac{3.c_0 - 4.c_1 + c_2}{30}.\Big(2.(-2)^n\Big) + \frac{2.c_0 - c_1 - c_2}{30}.\Big(-3.(3)^n\Big)$$

Je ne pousse pas le calcul jusqu'au bout, j'ai trop peur qu'une erreur se soit glissée quelque part et que le résultat ne soit pas exactement le bon.
Enfin, je devrais dire « ne soit pas le bon ».



Matrice de Hankel de la factorielle, factorisation dite de Cholesky (mathématicien français, polytechnicien). DS06

On cherche T de la forme $\begin{pmatrix} a & a' & a'' & a''' \\ 0 & b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c & c' \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ (oui, que serait sinon son format ?) vérifiant

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a' & b & 0 & 0 \\ a'' & b' & c & 0 \\ a''' & b'' & c' & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & a' & a'' & a''' \\ 0 & b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c & c' \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 24 \\ 2 & 6 & 24 & 120 \\ 6 & 24 & 120 & 720 \end{pmatrix}$$

On résout case par case

$a^2 = 1$	déjà vu	déjà vu	déjà vu
$a.a' = 1$	$(a')^2 + b^2 = 2$	déjà vu	déjà vu
$a.a'' = 2$	$a'.a'' + b.b' = 6$	$(a'')^2 + (b')^2 + c^2 = 24$	déjà vu
$a.a''' = 6$	$a'.a''' + b.b'' = 24$		$(a''')^2 + (b'')^2 + (c')^2 + d^2 = 720$

(on retrouve chaque équation en double, par symétrie de la matrice H_3)
Comme les quatre termes diagonaux sont positifs, on n'a pas le choix : a vaut 1.
La première ligne tombe ensuite directement : $a' = 1$, $a'' = 2$ et $a''' = 6$ (à chaque fois, deux équations nous le disent).
On reporte dans $(a')^2 + b^2 = 2$ et avec la contrainte de positivité, b aussi vaut 1.
On extrait alors $b' = 4$ et $b'' = 18$.
La relation $6^2 + 4^2 + c^2 = 24$ sauve la face : c^2 vaut 4 et c vaut 2.

Bref, avec des calculs pas atroces, on trouve $\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$

On note qu'on retrouve alors $\det(H_3) = \det({}^tT).\det(T) = (\det(T))^2 = 144$.

On résout le système $T.X = Y$ d'inconnue X en commençant par l'équation « du bas » : x_4 vaut $y_4/6$; on reporte dans la ligne du dessus ($2.x_3 + 18.x_4 = y_3$) et on trouve $x_3 = \dfrac{y_3}{2} - \dfrac{3.y_4}{4}$ et ainsi de suite

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +2.x_2 & +2.x_3 & +6.x_4 & = & y_1 \\ & x_2 & +4.x_3 & +18.x_4 & = & y_2 \\ & & 2.x_3 & +18.x_4 & = & y_3 \\ & & & 6.x_4 & = & y_4 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrrcrrrr} x_1 & & & & = & y_1 & -y_2 & +y_3 & -y_4 \\ & x_2 & & & = & & y_2 & -2.y_3 & +3.y_4 \\ & & x_3 & & = & & & y_3/2 & -3.y_4/4 \\ & & & x_4 & = & & & & y_4/6 \end{array}$$

Ceci nous permet de déduire la matrice inverse de T : $\boxed{T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}}$

Pour cette question comme la précédente, on pouvait proposer et vérifier.

On a écrit $H_3 =^t T.T$ avec$T$ (et ${}^tT$) inversible. On rappelle ensuite les règles connues dans le cours : $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ et $({}^tT)^{-1} =^t (T^{-1})$

$$(H_3)^{-1} = ({}^tT.T)^{-1} = T^{-1}.({}^tT)^{-1} = T^{-1}.{}^t(T^{-1})$$

$$(H_3)^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 & -\frac{1}{6} \\ -6 & 14 & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{11}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

On a ici inversé H_3sans passer par les cofacteurs, ni les formules de Cramer, ni la résolution de gros système.

Pour information, j'ai la réponse en taille 5 : $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 & 24 \\ 0 & 1 & 4 & 18 & 96 \\ 0 & 0 & 2 & 18 & 144 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 96 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$,

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/24 \end{pmatrix}$ *et* $(H_4)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 5 & \frac{-5}{6} & \frac{1}{24} \\ -10 & 30 & -\frac{35}{2} & \frac{19}{6} & -\frac{1}{6} \\ 5 & -\frac{35}{2} & \frac{23}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{5}{6} & \frac{19}{6} & -\frac{9}{4} & \frac{17}{36} & -\frac{1}{36} \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{576} \end{pmatrix}$

Si vous devinez quelquechose, je dis bravo.