LYCEE CHARLEMAGNE

Mardi 5 mars

M.P.S.I.2

2023 2024

IS20

♡ 0 ♡ On suppose que (u_n) converge vers a et (v_n) converge vers b. Écrivez les deux définitions. 1 pt.
Montrez $|u_n - a + v_n - b| \leqslant \varepsilon$ pour n assez grand (à préciser en fonction de votre quantification juste au-dessus). Concluez que $(u_n + v_n)$ converge vers $a + b$. 2 pt.

♡ 1 ♡ Énoncez et démontrez le lemme de Gauss. 2 pt.

Vrai, ou faux :	$\forall (a,\ b) \in \mathbb{Z}^2,\ a = b\ [5] \Rightarrow 2^a = 2^b\ [5]$	$\forall (a,\ b) \in \mathbb{Z}^2,\ a = b\ [15] \Rightarrow 12.a = 12.b\ [15]$.
1 pt chacune	$\forall (a,\ b) \in \mathbb{Z}^2,\ a = b\ [15] \Leftrightarrow 12.a = 12.b\ [15]$	$\forall (a,\ b) \in \mathbb{Z}^2,\ a = b\ [15] \Leftrightarrow 13.a = 13.b\ [15]$

♡ 2 ♡ $f = x \longmapsto \dfrac{e^{x^2}}{x}$. Calculez $f'(\sqrt{\ln(2)})$. 2 pt.

♡ 3 ♡ Donnez la limite quand n tendvers l'infini de $\sqrt{n^2 + 4.n + 3} - \sqrt{n^2 + 3.n + 4}$. 2 pt.

♡ 4 ♡ Je dis que $\left(\dfrac{2.n+5}{n+8}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2 quand n tend vers $+\infty$. Prouvez le en explicitant N_ε pour ε donné. 2 pt.

♡ 5 ♡ Donnez une base du plan d'équations $x + y - z + t = 0$ et $2.x + y + z - 2.t = 0$ dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$. 2 pt.

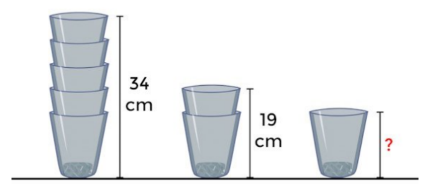
♣ 0 ♣ A est un ensemble donné. Pour deux ensembles X et Y , on pose $X \equiv Y\ [A]$ si on a « $X = Y$ ou $X\Delta Y = A$ ». Montrez que cette « congruence modulo A » est une relation d'équivalence. 2 pt. Résolvez $X = \{Ahmed,\ Delphine\}\ [\emptyset]$ dans dans $P(\{Ahmed,\ Blaise,\ Colombine,\ Delphine,\ Eliott\})$. 1 pt. Même question avec $X = \{Ahmed,\ Delphine\}\ [\{Ahmed,\ Eliott\}]$. 1 pt.

Résolvez $\left\{\begin{array}{lcll} X & = & \{Ahmed,\ Delphine\} & [\{Ahmed,\ Blaise,\ Colombine\}] \\ X & = & \{Ahmed,\ Eliott\} & [\{Delphine,\ Eliott\}] \end{array}\right.$ dans $P(\{A,\ B,\ C,\ D,\ E\})$. 1 pt.

♯ 0 ♯ On définit (pour cet exercice) la signature d'un entier

```
def signature(n) :
....S = [ ]
....for d in range(1, n) :
........c = n%d
........if (not c in S) :
............S.append(c)
....return S
```

Résolvez $\left\{\begin{array}{rcll} 3.x & = & 7 & [11] \\ 7.x & = & 11 & [3] \\ 11.x & = & 3 & [7] \end{array}\right.$ d'inconnue x dans $\mathbb{Z}$. 4 pt.



Trouvez la hauteur d'un verre. 2 pt.

Montrez que 3 et 4 ont la même signature. 1 pt. Donnez la signature de 25. 2 pt.
Quel entier a pour signature `[0, 1, 2, 4, 3]` ? Même question pour `[0, 1, 3, 4, 5, 9, 8, 7, 6, 2]`. 3 pt.

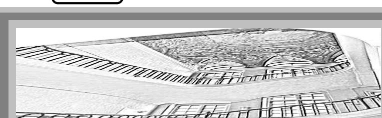
♠ 0 ♠ On cherche des nombres premiers congrus à 1 modulo 25. Trouvez en un. 1 pt.

♠ 1 ♠ Écrivez un script qui cherche les n premiers nombres premiers congrus à 1 modulo 25. 3 pt.

♠ 2 ♠ On suppose qu'on a trouvé r nombres premiers p_1 à p_r congrus à 1 modulo 25. On pose alors $a = 2.dsp \prod_{k=1}^{r} p_k$ et $c = a^5$. Montrez : $c = 2\ [5]$. 1 pt.

♠ 3 ♠ On pose $m = 1 + c + c^2 + c^3 + c^4$. Calculez $(c - 1).(c^3 + 2.c^2 + 3.c + 4)$. Montrez que m et $c - 1$ sont premiers entre eux. 2 pt.

♠ 4 ♠ Montrez que si q est un facteur premier de m alors on a $q = 1\ [25]$. 2 pt. Déduisez qu'il y a une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 25. 2 pt.



LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 5 mars
M.P.S.I.2

2023 2024
IS20
CORRECTION

Convergence de suites. IS20

La convergence de $\left(\dfrac{2.n+5}{n+8}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 2, c'est $\left|\dfrac{2.n+5}{n+8}-2\right|\leqslant\varepsilon$ pour n « assez grand ».
On se donne ε et on veut $\left|\dfrac{2.n+5-2.n-16}{n+8}\right|\leqslant\varepsilon$ c'est à dire (sans valeur absolue) $\dfrac{11}{n+8}\leqslant\varepsilon$.
En raisonnant par équivalences (qui seront utilisées dans le sens « explication ») : $n+8\geqslant\dfrac{11}{\varepsilon}$. On a donc

$$\forall n\geqslant\frac{11}{\varepsilon}-8,\ |u_n-2|\leqslant\varepsilon$$

On posera donc naturellement $N_\varepsilon=\dfrac{11}{\varepsilon}-8$ et même $N_\varepsilon=\left[\dfrac{11}{\varepsilon}\right]-7$ si on tient à avoir un entier. Et pourquoi pas $N_\varepsilon=\left[\dfrac{11}{\varepsilon}\right]$ si on n'a pas peur de payer un peu plus.

On prend maintenant deux suites (u_n) et (v_n) de limites respectives α et β (comme ce ne sont ni les mêmes suites ni les mêmes limites, on a besoin d'entiers distincts $N_\varepsilon$et M_ε

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N_\varepsilon,\ |u_n-\alpha|\leqslant\varepsilon$$
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists M_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant M_\varepsilon,\ |v_n-\beta|\leqslant\varepsilon$$

Comme on veut majorer $|u_n-\alpha+v_n-\beta|$ on va majorer $|u_n-\alpha|+|v_n-\beta|$ et on sait le majorer à partir du rang $N_\varepsilon$pour l'un et à partir du rang M_ε pour l'autre. Et pour avoir les deux, c'est le rang $Max(N_\varepsilon,\ M_\varepsilon)$.
problème, on a une majoration par $2.\varepsilon$au total. Mais si on demande à majorer chacun des deux par $\varepsilon/2$?
On majore alors par $\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}$ ce qui fait ε :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists S_\varepsilon=Max(N_{\varepsilon/2},\ M_{\varepsilon/é})\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant S_\varepsilon,\ |u_n-\alpha+v_n-\beta|\leqslant|u_n-\alpha|+|v_n-\beta|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Et c'est bien $N_{\varepsilon/2}$ et pas $N_\varepsilon/2$ qui ne serait même pas entier et ne garantirait rien pour les majorations.

Congruences. IS20

$\forall(a,\ b)\in\mathbb{N}^2,\ a=b\ [5]\Rightarrow 2^a=2^b\ [5]$: faux.
Contre-exemple. $0=5\ [5]$ mais $2^0=1$ et $2^5=2\ [5]$.

On a en fait $2^4=1\ [5]$ (c'est Fermat qui le dit). C'est donc $\forall(a,\ b)\in\mathbb{N}^2,\ a=b\ [4]\Rightarrow 2^a=2^b\ [5]$.

$\forall(a,\ b)\in\mathbb{Z}^2,\ a=b\ [15]\Rightarrow 12.a=12.b\ [15]$: vrai.
Si $b-a$ est un multiple de 15, alors $12.(b-a)$ l'est aussi.

$\forall(a,\ b)\in\mathbb{Z}^2,\ a=b\ [15]\Leftrightarrow 12.a=12.b\ [15]$: faux.
Si $12.(b-a)$ est un multiple de 15, c'est juste que $b-a$ est un multiple de 5.
Contre-exemple : $12.0=12.5\ [15]$ mais $0\neq 5\ [15]$.

$\forall(a,\ b)\in\mathbb{Z}^2,\ a=b\ [15]\Leftrightarrow 13.a=13.b\ [15]$: vrai.
Dans le sens direct, on multiplie par 13.
Dans l'autre sens, on multiplie par 7 (l'inverse de 13 modulo 15).
Ou alors on passe de 15 divise $13.(b-a)$ à 15 divise $b-a$ car 13 et 15 sont premiers entre eux.

Calcul. IS20

$f = x \longmapsto \dfrac{e^{x^2}}{x}$ est dérivable sur son domaine de définition : $]-\infty,\ 0[\cup]0,\ +\infty[$ (contenant $\ln(2)$), de dérivée

$$x \longmapsto \frac{2.x.e^{x^2}}{x} - \frac{e^{x^2}}{x^2}$$

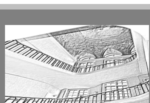
La valeur en $\sqrt{\ln(2)}$ donne $e^{\ln(2)} - \frac{e^{\ln(2)}}{\ln(2)}$ c'est à dire $2 - \dfrac{2}{\ln(2)}$.

$$\sqrt{n^2+4.n+3} - \sqrt{n^2+3.n+4} = \frac{(n^2+4.n+3)-(n^2+3.n+4)}{\sqrt{n^2+4.n+3}+\sqrt{n^2+3.n+4}} = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+4.n+3}+\sqrt{n^2+3.n+4}} \sim \frac{n}{2.\sqrt{n^2}}$$

Le quotient est équivalent au réel $\dfrac{1}{2}$. Il tend vers $\dfrac{1}{2}$.

On se place dans$(\mathbb{R}^4, +, .)$, de dimension 4. On se donne deux contraintes, on obtient un plan, espace de dimension 2.
$x+y-z+t=0$ et $2.x+y+z-2.t=0$ se résout et donne $x=-2.z+3.t$ et $y=3.z-4.t$ (par exemple).
Les vecteurs sont de la forme $\begin{pmatrix} -2.z+3.t \\ 3.z-4.t \\ z \\ t \end{pmatrix}$ qu'on écrit $z.\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans le plan (on peut vérifier) et permettent de décomposer tous les autres d'une façon unique.
Ils forment une base de ce plan.

D'autres bases sont possibles.
Prenez deux vecteurs dans le plan, non colinéaires, et vous avez une base puisque ce sous-espace est « trivialement » de dimension $4-2$.



Congruences simultanées. IS20

On commence par alléger les congruences inutiles, puis on multiplie pour que x soit tout seul

$$\left\{\begin{array}{ccll} 3.x & = & 7 & [11] \\ 7.x & = & 11 & [3] \\ 11.x & = & 3 & [7] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccll} 3.x & = & 7 & [11] \\ x & = & 4 & [3] \\ 4.x & = & 3 & [7] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccll} 4.3.x & = & 4.7 & [11] \\ x & = & 4 & [3] \\ 2.4.x & = & 2.3 & [7] \end{array}\right.$$

On vérifie en effet les équivalences, s'il le faut avec des vieux outils de Terminale.
$3.x = 7[11]$ signifie $(3.x-7)$ est divisible par 11 (et plus lourdingue : « est de la forme $11.k$ avec k entier »).
On multiplie par 4 $4.(3.x-7)$ est divisible par 11 (et plus lourdingue : « est de la forme $11.4.k$ avec k entier »).

Réciproquement, si 11 divise $4.(3.x-7)$ alors par le lemme de gauss, il divise $3.x-7$.
On a bien une équivalence.

On a maintenant une vraie congruence simultanée à traiter

$$\left\{\begin{array}{ccll} x & = & 6 & [11] \\ x & = & 4 & [3] \\ x & = & 6 & [7] \end{array}\right.$$

qu'on ramène à quatre études

	$\left\{\begin{array}{ccll} x & = & 1 & [11] \\ x & = & 0 & [3] \\ x & = & 0 & [7] \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{ccll} x & = & 0 & [11] \\ x & = & 1 & [3] \\ x & = & 0 & [7] \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{ccll} x & = & 0 & [11] \\ x & = & 0 & [3] \\ x & = & 1 & [7] \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{ccll} x & = & 0 & [11] \\ x & = & 0 & [3] \\ x & = & 0 & [7] \end{array}\right.$
	particulière	particulière	particulière	homogènes
essai	$\left\{\begin{array}{ccll} 21 & = & 10 & [11] \\ 21 & = & 0 & [3] \\ 21 & = & 0 & [7] \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{ccll} 77 & = & 0 & [11] \\ 77 & = & 2 & [3] \\ 77 & = & 0 & [7] \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{ccll} 33 & = & 0 & [11] \\ 33 & = & 0 & [3] \\ 33 & = & 5 & [7] \end{array}\right.$	$(231).\mathbb{Z}$
proposition	-21	154	99	

On combine linéairement : une solution particulière est 1084.

On peut alléger : $\boxed{\{160 + 231.k \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

mais j'allais vite aussi avec $\left\{\begin{array}{rcll} x & = & 6 & [11] \\ x & = & 1 & [3] \\ x & = & 6 & [7] \end{array}\right|$. La première et la dernière donnent directement : $x = 6 + 77.k$ avec$k$ décrivant $\mathbb{Z}$. Il suffit ensuite de tester les premières valeurs de k pour que le reste modulo 3 soit le bon : 6 non, $6 + 77$ non, $6 + 2.77$ oui.

Signature d'un entier. IS20

On calcula la signature d'un entier en créant une liste vide, et en y collant n%1, n%2, n%3, n%4 et ainsi de suite jusqu'à n%(n-1) (le premier vaut 1 et le dernier aussi). Mais on n'ajoute un terme qui si il n'est pas déjà dans la liste.

On calcule la signature de 3 et de 4 :
pour 3 les diviseurs d sont dans l'ordre 1 et 2, les restes 0 et 1, et la liste construite est [0, 1]
pour 0 les diviseurs d sont dans l'ordre 1, 2 et 3, les restes 0, 0 et 1, et la liste construite est [0, 1].

On calcule la signature de 25 avec 25 diviseurs successifs et divers restes

`d`	`c = 25 % d`	`test not(c in S)`	`L`					
1	0	True	[0]		11	3	True	[0, 1, 4, 7, 5, 3]
2	1	True	[0, 1]		12	1	False	[0, 1, 4, 7, 5, 3]
3	1	False	[0, 1]		13	12	True	[0, 1, 4, 7, 5, 3, 12]
4	1	False	[0, 1]		14	11	True	[0, 1, 4, 7, 5, 3, 12, 11]
5	0	False	[0, 1]		15	10	True	[0, 1, 4, 7, 5, 3, 12, 11, 10]
6	1	False	[0, 1]		16	9	True	[0, 1, 4, 7, 5, 3, 12, 11, 10, 9]
7	4	True	[0, 1, 4]		17	8	True	
8	1	False	[0, 1, 4]		18	7	False	
9	7	True	[0, 1, 4, 7]		19	6	False	
10	5	True	[0, 1, 4, 7, 5]		20	5	True	

Je vous laisse terminer signature de `25 : [0, 1, 4, 7, 5, 3, 12, 11, 10, 9, 8, 6, 2]`

L'entier de signature `[0, 1, 2, 4, 3]`

n ne peut pas être trop grand. En effet, si l'entier n est impair, égal à 2.k+1, alors on aura (n % (k+1)) = k.

Des congruences et le lemme chinois sur des ensembles. IS20

Réflexive Pour toute partie X on a $X = X\ [A]$ puisque $X = X$.
Symétrique On se donne deux parties X et Y. On suppose $X = Y\ [A]$.
On a soit $X = Y$, soist $X\Delta Y = A$. Dans les deux cas, on retrouve $Y = X\ [A]$.

Transitive On se donne trois parties et on fait deux hypothèses : $X = Y\ [A]$ et $Y = Z\ [A]$. On traduit par distribution les quatre cas, et on trouve la conclusion pour chacun :

	$X = Y$	$X\Delta Y = A$
$Y = Z$	$X = Z$ $X = Z\ [A]$	$X\Delta Z = A$ $X = Z\ [A]$
$Y\Delta Z = A$	$X\Delta Z = A$ $X = Z\ [A]$	$(X\Delta Y)\Delta(Y\Delta Z) = A\Delta A$ $(X\Delta Z) = \emptyset$ $X = Z$ $X = Z\ [A]$

On pouvait aussi, pour la case de Nice-Marseille... écrire $(X\Delta Y = A) \Leftrightarrow (X = Y\Delta A)$ puis $(Y\Delta Z = A) \Leftrightarrow (A\Delta Y = Z)$. Efficace, non ?

Peut être allez vous le me faire avec des patates.

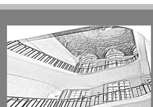
Bref, on a une relation d'équivalence, comme la congruence.
Mais finalement, les seules parties congrues à X « modulo A » sont X et $A\Delta A$ ».

La première équation $X = B\ [A]$ donne $X = B$ ou $X = B\Delta A$.
$X = \{Ahmed,\ Delphine\}\ [\emptyset]$ a deux solutions : $X = \{Ahmed,\ Delphine\}$ et $X = \emptyset\Delta\{Ahmed,\ Delphine\} = \{Ahmed,\ Delphine\}$. Finalement, une seule solution.

C'est comme pour $x = \alpha\ [0]$.

$X = \{Ahmed,\ Delphine\}\ [\{Ahmed,\ Eliott\}]$ a deux solutions : $X = \{Ahmed,\ Delphine\}$ et $X = \{Ahmed,\ Eliott\}\Delta\{Ahmed,\ Delp$
$\{Eliott,\ Delphine\}$.
La conclusion est $S = \big\{\{Ahmed, Delphine\},\ \{Eliott, Delphine\}\big\}$.

Pour le système de congruences simultanées, on sépare en quatre cas et on regarde si on a des solutions.
$X = \{A,\ D\}\ [\{A,\ B,\ C\}]$ donne deux possibilités $X = \{A,\ D\}$ ou $X = \{B,\ C,\ D\}$.
$X = \{A,\ E\}\ [\{D,\ E\}]$ donne deux possibilités $X = \{A,\ E\}$ ou $X = \{A,\ D\}$.
Le système a une unique solution : $S = \big\{\{Ahmed,\ Delphine\}\big\}$.



Nombres premiers modulo 25. IS20

1 n'est pas premier. 26 n'est pas premier. 51 n'est pas premier (c'est 7×13), 76 est pair et non premier, mais 101 est premier (tester les diviseurs de 2 à 13).

```
def premiers(n) : #int -> list of int
....L = [ ]
....p = 1
while len(L) < n :
........p += 25
........if premier(p) :
............L.append(p)
....return L
```

```
def premier(n) : #int -> boolean
....for d in range(2, p) :
........if p%d == 0 :
............return False
....return True
```

Comme chaque p_k est congru à 1 modulo 5, leur produit l'est aussi (compatibilité). On multiplie par 2, a est congru à 2 modulo 25.
On simplifie : $a = 2\ [5]$. On élève à la puissance 5 : $a^5 = 2^5 = 32 = 2\ [5]$.

On développe et simplifie

$$(c-1).(c^3 + 2.c^2 + 3.c + 4) = c^4 + c^3 + c^2 + c - 4 = m - 5$$

On déduit : $1.m - (c-1).(c^3 + 2.c^2 + 3.c + 4) = 5$
C'est une identité de Bézout qui nous dit non pas que le p.g.c.d. de $c-1$ est m vaut 5 mais qu'il divise 5.
A ce stade, le p.g.c.d. cherché vaut 1 ou 5.
Mais 5 ne divise pas $c-1$ puisque $c-1$ est congru à 1 modulo 5.
Par élimination, le p.g.c.d. vaut 1.

Si un entier premier q divise m, il divise $\dfrac{c^5-1}{c-1}$ puisque telle est l'expression de m (série géométrique).
Il divise donc $(c-1).m$ égal à $c^5 - 1$.
Là il me manque un morceau.

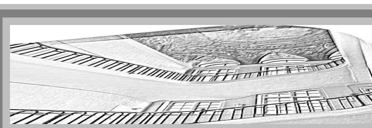
L'entier m a forcément desfacteurs premiers.
On en prend donc un qu'on note q. Il est congru à 1 modulo 25.
Mais ce n'est pas un des p_k puisque p_k divise c, et par produit divise $c.(1 + c + c^2 + c^3)$; il ne peut donc pas diviser $1 + c.(1 + c + c^2 + c^3)$.
C'est donc que c'est un nouveau nombre premier congru à 1 modulo 25.

Chaque fois qu'on a n nombres premiers congrus à 1 modulo 25, on peut trouver un $(n+1)^{eme}$.

On en a donc autant qu'on veut, c'est à dire une infinité.

Inspiré d'un oral de Polytechnique dans lequel on remplace 5 par n'importe quel nombre premier impair et 25 par p^r avec r quelconque.
ref, on a une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 121.
On a une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 13^5 et tout et tout.

LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2023 IS20 2024
35- points