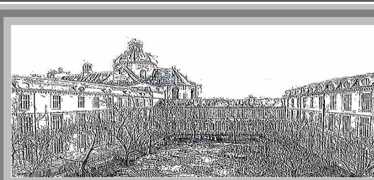
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 11 mars
M.P.S.I.2



2023 2024

TD21

∘0∘ Déterminez la borne supérieure de $\left\{\frac{n}{n.m+1}\;\middle|\;(n,\ m)\in(\mathbb{N}^*)^2\right\}$ après avoir prouvé que cet ensemble est majoré et minoré.
Pouvez vous déterminer la borne supérieure de $\left\{\frac{n}{n.m+1}\;\middle|\;(n,\ m)\in\mathbb{N}^2\right\}$?

∘1∘ Pourquoi est ce que si on pose $A\times B=\{a\times b\mid a\in A,\ b\in B\}$ on n'a pas forcément $Sup(A\times B)=Sup(A)\times Sup(B)$.

∘2∘ Déterminez $Inf\left\{(-1)^n+2^{-n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$ et $Sup\left\{(-1)^n+2^{-n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$ (si ils existent).

∘3∘ ♡ J'ai appliqué l'algorithme d'Euclide à deux polynômes $A(X)$ et $B(X)$. Les quotients sont dans l'ordre X^2+1, $X+2$ et $X+1$. Le dernier reste non nul est $X-3$. Pouvez vous retrouver A et B ?

∘4∘ Un théorème affirme : pour tout couple d'entiers $(a,\ b)$ distincts, il existe une infinité d'entiers naturels n vérifiant $a+n$ et $b+n$ sont premiers entre eux.
Écrivez un script Python qui pour a et b donnés cherche une liste de cent entiers n vérifiant ceci.
Donnez le couple $(a,\ b)$ avec a et $b$entre 1 et 1000 pour lequel le dernier terme de cette liste est le plus grand.

∘5∘ Peut on trouver trois entiers naturels a, b et c vérifiant le système $a\wedge b=12$ (p.g.c.d.), $b\vee c=120$ (p.p.c.m.) et $c\wedge a=5$?

∘6∘ ♡ Avez vous besoin de calculer $\begin{vmatrix}150&235&195\\164&23&3\\246&41&27\end{vmatrix}$ pour me prouver qu'il est multiple de 30 ?

∘7∘

Montrez que est A inversible (indication : calculez son déterminant modulo 2).
Justifiez $Com(A^2)=(Com(A))^2$:

$$A=\begin{pmatrix}1&4&6&4&2\\2&3&6&8&4\\2&4&5&0&2\\4&6&0&3&8\\2&2&6&4&3\end{pmatrix}$$

∘8∘

Le colleur doit il sanctionner l'élève qui a écrit ces formules au tableau ?


```
def Samy(a) :
....return(sum(int(c) for c in str(a)))

def Vera(n) :
....return(Samy(n) > Samy(n*n))

n = 0
while not(Vera(n)) :
....n += 1
print(n)
```

La réponse est 39. Expliquez.

∘9∘ Montrez : $\forall\varepsilon>0,\ \forall n,\ \left(\left(n\geqslant\left[\sqrt{3+\frac{4}{\varepsilon}}\right]+1\right)\Rightarrow\left(\left|a_n-1\right|\leqslant\varepsilon\right)\right)$ sachant $a_n=\frac{n^2+1}{n^2-3}$.

∘10∘ On pose $P_1=X^3+2.X^2+3.X$, $P_2=X^2+X+2$, $P_3=X^3+X-1$, $P_4=X^3+4.X^2+5.X+4$.
Montrez que $(P_1,\ P_2)$ est libre, de même que $(P_3,\ P_4)$. La famille $(P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4)$ est elle libre ?

∘11∘

On se place dans $((\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$. Montrez qu'il y a $7^4 - 1$ familles libres de un vecteur.

♣0♣ Montrez qu'il y a $(7^4 - 1).(7^4 - 7).(7^4 - 7^2)$ familles libres de trois vecteur. Combien y-a-t-il de familles liées de deux vecteurs ?

♣1♣ Combien y a-t-il de familles génératrices de $((\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$ formées de trois vecteurs ?

♣2♣ Combien y a-t-il de familles libres de $((\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$ formées de deux vecteurs ?

♣3♣ Montrez pour $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$ libre :

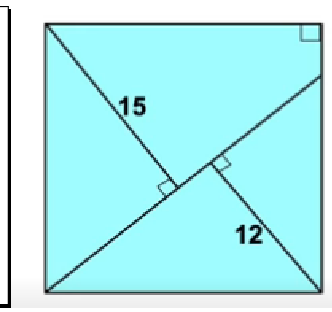
$$Vect(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) = Vect(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}) \Leftrightarrow (\exists(\alpha, \beta, \gamma, \delta), \ \overrightarrow{b_1} = \alpha.\overrightarrow{a_1} + \beta.\overrightarrow{a_2}, \ \overrightarrow{b_2} = \gamma.\overrightarrow{a_1} + \delta.\overrightarrow{a_2} \ et \ \alpha.\delta \neq \beta.\gamma)$$

♣4♣ Déduisez qu'il y a $\dfrac{(7^4 - 1).(7^4 - 7)}{(7^2 - 1).(7^2 - 7)}$ plans dans $((\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$.

∘12∘

```
def Scooby(n) :
....def gene(i, k) :
........if i+k < n :
............return(2)
........return(1)
....return([[gene(i, k) for k in range(n)] for i in range(n)])
```

Exprimez le déterminant de `Scooby(n)` en fonction de n.
Calculez l'aire du carré ci contre. (pas de rapport entre les deux exercices)



∘13∘

Un enchainement de questions préliminaires indépendantes les unes des autres[1] *vous permettra ensuite, en les emboitant, de démontrer des résultats d'arithmétique sur la piste des entiers friables*[2]*. Méfiez vous de la question piège.*

I∼0) f est une application continue, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$ *(n_0 est un entier naturel non nul donné)*. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k)$ et $\gamma_n = S_n - \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t).dt$. Montrez que la suite (γ_n) est positive, décroissante et convergente.

I∼1) Déduisez l'existence d'un réel C vérifiant $\displaystyle\sum_{2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} = \ln(\ln(n)) + C + o(1)$ quand n tend vers l'infini.

I∼2) Calculez $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t.(\ln(t))^2}$ et déduisez que la série $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k.(\ln(k))^2}\right)$ converge quand N tend vers l'infini.

II∼0) Calculez $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}.dt$. Prouvez l'existence de $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k.(k-1)}$ *(sa somme sera notée K, et ne me demandez pas à la fin du devoir « c'est qui K ? »).*

III∼0) Montrez pour tout n supérieur ou égal à 2 : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \geqslant n.\ln(n) - n + 1$.

III∼1) Déduisez : $\ln(n!) = n.\ln(n) + O(n)$ quand n tend vers l'infini. C'est l'anniversaire de Sucri, venez au bureau, embrassez le sur son front vert et vous gagnez un point.

IV∼0) Soit λ strictement positif. Justifiez que pour tout n il existe un unique réel x de $]0, +\infty[$ vérifiant $x.\ln(x) - \lambda.x = \ln(n)$ *(ce réel x sera noté r_n).*

IV∼1) Montrez que r_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini, prouvez $r_n = o(\ln(n))$ et prouvez enfin $r_n \sim \dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$ quand n tend vers l'infini.

---

1. *l'espérance du produit de vos notes aux questions sera le produit des espérances des notes aux questions*
2. *un entier est dit friable si ses facteurs premiers sont nombreux et petits*

V∼0) Si E est un de partie de $\mathbb{N}^*$, on pose $E_n = E \cap [1,\ n]$ et $d_n(E) = \dfrac{Card(E_n)}{n}$. Si cette suite $d_n(E)$ converge, on dit que E a une densité *(et cette densité sera la limite de cette suite* $(d_n(E))$*)*. Prouvez que toute partie finie a une densité *(valeur de la densité ?)*. a est un entier naturel donné, montrez que l'ensemble des multiples de a a une densité *(valeur ?)*. L'ensemble $\{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ des carrés parfaits a-t-il une densité *(si oui, quelle valeur ?)*.

V∼1) Montrez que si deux parties disjointes A et B ont une densité, alors A^c et $A \cup B$ ont une densité et donnez leur valeur.

VI∼0) Montrez pour tout m de $\mathbb{N}^*$: $2.\dbinom{2.m+1}{m} \leqslant 2^{2.m+1}$.

VI∼1) Montrez que l'entier $\Big(\prod\limits_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1 \\ p\in P}} p\Big)$ divise $\dbinom{2.r+1}{r}$ *(P est l'ensemble des nombres premiers)*.

VI∼2) Montrez par récurrence forte sur n supérieur ou égal à 2 : $\prod\limits_{\substack{p\leqslant n \\ p\in P}} p \leqslant 4^n$ *(on distinguera suivant que $n+1$ est ou non un nombre premier, de la forme $2.r+1$ et on coupera alors $\substack{p\leqslant n+1 \\ p\in P}$ en $\substack{p\leqslant r+1 \\ p\in P}$ et $\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1 \\ p\in P}$)*. Déduisez : $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n \\ p\in P}} \ln(p) \leqslant n.\ln(4)$.

VII∼0) (a_n) et (ε_n) sont deux suites réelles. On pose $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Montrez $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k.\varepsilon_k = \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k.(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + \varepsilon_n.A_n$ pour tout n.

VIII∼0) Pour tout entier naturel n et tout nombre premier p, on note $v_p(n)$ la « valuation $p-$adique de n, c'est à dire l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20 !
2	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1	0	4	0	1	0	18
3	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	8
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2

On note pour tout entier naturel k non nul α_k (respectivement β_k) le nombre d'entiers d de N_n tels que p^k divise d (respectivement tels que $v_p(d) = k$). Montrez : $\alpha_k = \left[\dfrac{n}{p^k}\right]$. La II-1 est un piège, Sucri n'est jamais né en février ! Exprimez les β_k à l'aide de α_i et vice versa.

VIII∼1) Justifiez : $v_p(n!) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k.\beta_k$. Déduisez : $v_p(n!) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left[\dfrac{n}{p^k}\right]$.

VIII∼2) Déduisez : $\dfrac{n}{p} - 1 \leqslant v_p(n!) \leqslant \dfrac{n}{p-1} = \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{p.(p-1)}$.

Finis les préliminaires, on passe au problème.

IX∼0) Montrez pour tout n : $\ln(n!) = \sum\limits_{\substack{p\leqslant n \\ p\in P}} v_p(n!).\ln(p)$.

Déduisez l'encadrement $\dfrac{\ln(n!)}{n} - K \leqslant \sum\limits_{\substack{p\leqslant n \\ p\in P}} \dfrac{\ln(p)}{p} \leqslant \dfrac{\ln(n!)}{n} + \ln(4)$.

IX∼1) Déduisez $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n \\ p\in P}} \dfrac{\ln(p)}{p} = \ln(n) + O(1)$.

X∼0) On définit l'application χ *(fonction indicatrice de P)* : $\chi(k) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & k \quad premier \\ 0 & sinon & \end{array} \right|$.

On pose $a_k = \chi(k).\dfrac{\ln(k)}{k}$ et $A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$. Montrez : $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n \\ p\in P}} \dfrac{1}{p} = \sum\limits_{k=2}^{n-1} \dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(1+k)}.A_k + \dfrac{A_n}{\ln(n)}$.

X∼1) Montrez : $\dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(k+1)}.A_k = \dfrac{1}{k.\ln(k)} + O\Big(\dfrac{1}{k.(\ln(k))^2}\Big)$.

X∼2) Déduisez : $\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}}\frac{1}{p}=\ln(\ln(n))+O(1)$.

XI∼0) Pour tout entier naturel n, on note $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers distincts qui divisent n.
Écrivez un script Python qui prend en entrée n et retourne $\omega(n)$.

XI∼1) L'une de ces données est erronée : laquelle ?

n	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
$\omega(n)$	3	2	3	2	3	5	2	1	3	1

XI∼2) Soit n un entier dont la décomposition en produit de facteurs premiers est $n=\prod_{k=1}^{r}(p_k)^{\alpha_k}$ avec les p_k distincts et les α_k strictement positifs. Montrez : $\omega(n)=r\leqslant\frac{\ln(n)}{\ln(2)}$.

XI∼3) Montrez : $n\geqslant 2.\prod_{k=1}^{r-1}(2.k+1)\geqslant 2^r.(r-1)!$ et prouvez l'inégalité $\ln(n)\geqslant(r-1).\ln(r-1)-(r-1)$. Déduisez la domination $\omega(n)=O\Big(\frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}\Big)$.

XI∼4) N est fixé dans $\mathbb{N}^*$ et on met sur range(1, N+1) *(noté E_N)* la probabilité uniforme *(« chacun des N entiers est pris avec la probabilité $\frac{1}{N}$ »)*. On définit alors la variable aléatoire *(fonction de E_N dans $\mathbb{R}$)* $X_{N,r}(d)=\left\{\begin{array}{lll}1 & si & r\ divise\ d\\ 0 & sinon & \end{array}\right|$ et $X_N=\sum_{p\in E_n\cap P}X_{N,p}$. Justifiez $\forall n\in E_N,\ X_N(n)=\omega(n)$.

XI∼5) Montrez : $E(X_{N,r})=\frac{1}{N}.\Big[\frac{N}{r}\Big]$ *(voyez l'espérance comme une valeur moyenne de la fonction, c'est tout)*.

XI∼6) Prouvez $E((X_N)^2)=E(X_N)+\sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in P^2,\ p\neq q}}\frac{1}{N}.\Big[\frac{N}{p.q}\Big]$. Déduisez : $Var(X_N)=O(\ln(\ln(N)))$.

XI∼7) Montrez : $\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}.Card\Big\{n\in E_N\mid|\omega(n)-\ln(\ln(N))|\geqslant(\ln(\ln(N))^{2/3}\Big\}=0$.

> Interprétation avec $N=10^{99}$: le plus souvent, un entier à cent chiffres maximum aura entre 3 et 8 diviseurs premiers distincts.

Rappel : $a_n=o(b_n)$ c'est $\frac{a_n}{b_n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

$a_n\sim b_n$ c'est $\frac{a_n}{b_n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini *(et donc $a_n-b_n=o(a_n)$)*.

$a_n=O(b_n)$ c'est $\frac{a_n}{b_n}$ est borné quand n décrit $\mathbb{N}$.

Théorème — La fonction π qui à un réel x associe $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, est équivalente lorsque x tend vers $+\infty$, au quotient $\frac{x}{\ln(x)}$.

Le théorème des nombres premiers a été conjecturé dans la marge d'une table de logarithmes par Gauss en 1792 ou 1793 alors qu'il avait seulement 15 ou 16 ans *(selon ses propres affirmations ultérieures)* et par Adrien-Marie Legendre *(ébauche en l'An VI du calendrier républicain, soit 1797-1798, conjecture précise en 1808)*.

Le Russe Pafnouti Tchebychev a établi en 1851 que si x est assez grand, $\pi(x)$ est compris entre $0,92129.\frac{x}{\ln(x)}$ et $1,10556.\frac{x}{\ln(x)}$.

Le théorème a finalement été démontré indépendamment par Hadamard et La Vallée Poussin en 1896 à l'aide de méthodes d'analyse complexe, utilisant en particulier la fonction ζ de Riemann.

Source : concours BECEAS.
Concours pour cinq écoles d'actuariat et statistiques (ISFA Lyon, Dauphine, Strasbourg, ISUP-Paris Sorbonne (là où deux ex-MPSI2 sont partis l'an dernier)).

L'actuariat, c'est la branche dans laquelle les ingénieurs continuent à faire des maths de haut niveau *(plutôtdes statistiques, c'est vrai, mais pas comme au lycée)*.

Un actuaire est un professionnel spécialiste de l'application du calcul des probabilités et de la statistique aux questions d'assurances, de prévention, de comptabilité et analyse financière associée, et de prévoyance sociale. À ce titre, il analyse l'impact financier du risque et estime les flux futurs qui y sont associés. L'actuaire utilise des techniques issues principalement de la théorie des probabilités et de la statistique, pour décrire et modéliser de façon prédictive certains événements futurs tels que, par exemple, la durée de la vie humaine, la fréquence des sinistres ou l'ampleur des pertes pécuniaires associées.

Salaire de 35.000 euros à l'embauche, jusqu'à 150.000 ensuite pour les actuaires passés par Poytechnique.

∘14∘ L'élève affirme : a divise c et b divise c, donc $a.b$ divise c.
Montrez que c'est faux, mais montrez que c'est vrai si on ajoute l'hypothèse « a et b sont premiers entre eux ».

∘15∘ On pose $f = x \longmapsto \frac{4^x}{4^x+2}$. Calculez $f\left(\frac{1}{1997}\right) + f\left(\frac{2}{1997}\right) + f\left(\frac{3}{1997}\right) + \dots f\left(\frac{1996}{1997}\right)$ en regroupant les termes deux à deux judicieusement.

∘16∘ Dans cet établissement, il y a trois cent cinquante élèves etquatre classes : trois classes de 50 élèves et une classe de 100 élèves.
Calculez le nombre moyent d'élèves par classe du point de vue de l'administration.
Interrogez les élèves un par un et demandez à chacun : « combien d'élèves y a-t-il dans ta classe ? », puis faites la moyenne des résultats obtenus.
Pourquoi ne trouvez pas $\frac{50+50+50+100}{4}$ comme tout à l'heure.

Existerait il une solution où la moyenne du point devue de l'administration soit égale à la moyenne obtenue par sondage auprès des élèves ?

Existerait il une solution où la moyenne du point devue de l'administration soit strictement supérieure à la moyenne obtenue par sondage auprès des élèves ?

∘17∘ Pouvez vous trouver un groupe $(G, *)$ et trois sous-groupes stricts de $(G, *)$ E, F et H vérifiant $E \cup F \cup H = G$?

∘18∘ On pose $A = \{2.a^2 + 3.b^2 \mid (a,\ b) \in \mathbb{N}^2\}$ et $B = \{\alpha^2 + 6.\beta^2 \mid (\alpha,\ \beta) \in \mathbb{N}^2\}$.
Montrez que B est stable par multiplication.
Montrez que le produit de deux éléments de A est dans B.
Montrezque le produit d'un élément de A et d'un élemet de B est dans A.
On pourra passer par $|\sqrt{2}.a + i.\sqrt{3}b|$ et $|\alpha + i.\sqrt{3}\beta|$.

∘19∘ On définit : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$. Montrez que 2 est valeur propre de A. Montrez que 3 est valeur propre de A.
Donnez une base du plan d'équations $\left\{ \begin{array}{ccccc} x & +2.y & & -t & =0 \\ & y & +2.z & -t & =0 \end{array} \right|$ et montrez que ce plan est stable par A. Donnez une base d'un autre plan, stable par A. Combien de plans stables par A pouvez vous trouver ?

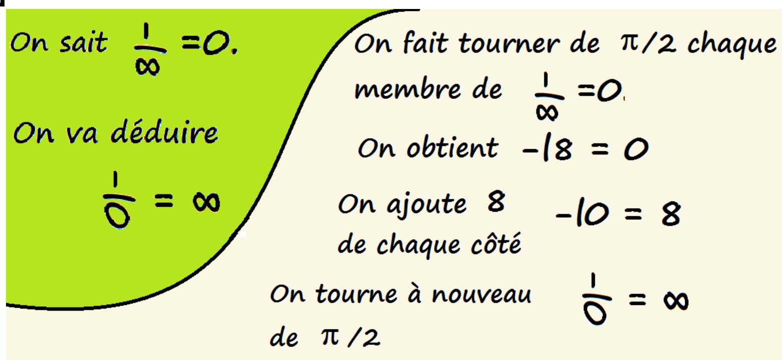
∘20∘ Montrez que si f est une application continue strictement positive de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$, alors l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{f(t)+f(1-t)}.dt$ vaut $1/2$.

∘21∘ ♡ On sait que la suite $\left(\frac{n+3}{n+6}\right)$ *(notée u)* converge vers 1. Prouvez le en explicitant N_ϵ pour avoir $|u_n - 1| \leqslant \varepsilon$ à partir du rang N_ϵ.
On sait que la suite $\left(\frac{\sin(e^n)}{n+6}\right)$ *(notée v)* converge vers 0. Prouvez le en explicitant N_ϵ pour avoir $|v_n - 0| \leqslant \varepsilon$ à partir du rang N_ϵ.
/♡ On sait que la suite $\left(\frac{n^2 + 3.\sin(n)}{n^2 - \ln(n)}\right)$ *(notée w)* converge vers 1. Prouvez le en explicitant N_ϵ pour avoir $|w_n - 1| \leqslant \varepsilon$ à partir du rang N_ϵ.

S'il y a un contre-exemple à chercher, essaye avec $((-1)^n)$.
Trois petits points ne font pas une preuve.
Juste. Justifié. Efficace.
« Forcément », « naturellement » traduisent en fait l'ignorance.
Si on a fait tendre n vers l'infini dans une limite, il n'y a plus de n dans le résultat.
Si l'ensemble image est patit, le noyau sera grand.
Tu devras avoir autant d'équations de chaque côté de $\Leftrightarrow$.
Pour majorer ou minorer une somme, pense déjà à « nombre de termes fois le plus grand/petit ».
Quand deux sigmas s'additionnent, on peut prendre la même variable de sommation. Quand deux sigmas se multiplient, on prend deux variables de sommation différentes. La somme $\sum_{k=1}^{n} a_k.b_k$n'a en général rien à voir avec $\sum_{k=1}^{n} a_k.\sum_{k=1}^{n} b_k$.
$(\cos(2.t))'$ n'a pas de sens. f peut être croissante, décroissante, périodique. $f(x)$ est juste un nombre, il ne croît pas.
Tu ne simplifieras pas par a si tu ne sais pas si a est non nul. Tu ne soustrairas pas des inégalités entre elles.
Une équation ou une inéquation est une question (« trouver x pour que... »). Sinon, il y a des égalités et des inégalités, c'est tout.
Une question telle que « montrez que f est un endomorphisme de E » appelle une réponse en plusieurs points : morphisme et endo.
Si l'hypothèse une une limite ou un équivalent, vous n'obtiendrez jamais une conclusion en « pour tout n ». Au mieux une conclusion en « pour tout n à partir d'un certain rang », avec un encadrement et non plus une égalité.
Pense à intercaler des termes : $a-b=a-\alpha+\alpha-b$ avec α bien choisi.
Le symbole $\Longrightarrow$ ne se galvaude pas. Si vous voulez écrire « donc », eh bien écrivez « donc ». Et au lieu de « donc », citez l'argument (on somme, on dérive, cas particulier, par passage à la limite...).
Les trois piliers de l'intégration : linéarité, croissance et Chasles.
Ne crains pas d'avancer lentement, crains seulement de t'arrêter.
Jamais de sigma « mous ».
Si je tiens la fonction, je ne tiens pas sa dérivée. Si je tiens sa dérivée, je maîtrise la fonction.
Penser aux idées simples : sommes télescopiques, décompositions en éléments simples, intégration par parties, formule de Leibniz, factorisation de a^n-b^n, formules de Viète, théorème d'encadrement, majoration terme à terme, comparaison série intégrale, principe des tiroirs, quantité conjuguée, inégalité triangulaire (première et seconde)
Tu ne soustrairas point des équivalents de même ordre. Tu ne passeras pas les équivalents aux exponentielles.
Nommer les objets, c'est déjà prendre le pouvoir sur eux.
Gauss, Bézout et Euclide. Avec ça, tu tiens presque toute l'arithmétique élémentaire. Sur les entiers, comme sur les polynômes. Mais le lemme de Gauss ne dit pas n'importe quoi.
« Montrez qu'il existe un unique a vérifiant.. ; », ce n'est pas une question. C'est deux questions : existence et unicité.
Une suite qui converge vers a peut très bien ne jamais prendre la valeur a.
Ne confonds pas « borne supérieure » et « plus grand élément ». Ne dis pas « le majorant » mais « un majorant ».
Pour « identifier », il faut presque toujours un argument de type « base » ou « somme directe » , sinon c'est presque toujours une bêtise.
La relation $f(x)=g(x)$ n'entraîne pas $f'(x)=g'(x)$ si elle n'a lieu que pour un x particulier.
Ne te perds pas entre les étages (f ou $f(x)$, $u_n$ou (u_n), pas de $(f(0))'$...).
Une formule en « pour tout n » se démontre souvent sans récurrence, et sert dans la suite pour des récurrences.
Tu ne diviseras jamais par 0. Une suite ne peut pas être équivalente à 0.
Si tu as bien cherché un exercice... ...même si tu n'as rien trouvé... ...tu t'es bien préparé pour les concours.
Les réponses aux questions posées tu encadreras. Les arguments tu souligneras. Tes notations tu mettras en valeur.
Si tu sens que ton argument est bancal, crois moi, le correcteur le saura encore mieux que toi...
On justifie la convergence d'une série en étudiant, dominant.. ; son terme général, et pas avec des $\sum$ (sauf pour la série géométrique).
$x.\ln(x)$ en 0 est la forme indéterminée classique. Et 1^∞ est une forme indéterminée (classique $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$).

∘22∘ ♡ Que fait la suite $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{\sqrt{3}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}},\dots)$?

∘23∘



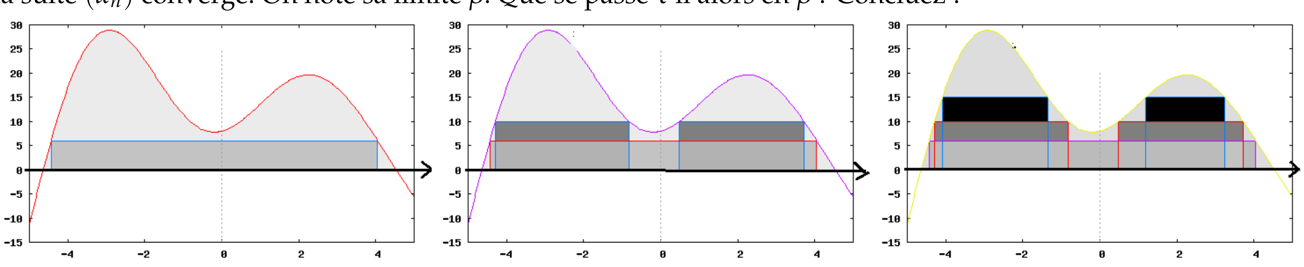
∘24∘ On demandait de calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, un élève a mal recopié et a calculé $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. Son déterminant est il plus grand que le déterminant demandé ? Quelle est la valeur de la différence $|eleve - demande|$. *Si vous calculez réellement les deux déterminants de taille 4, vous n'aurez pas tort, mais vous ne serez pas digne de rester en MPSI2.*

∘25∘ Un élève n'a pas bien recopié la définition de la convergence d'une suite réelle u vers un réel a. Indiquez qui sont les suites vérifiant les propriétés suivantes :

a	$\forall \varepsilon \geqslant 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_\epsilon \Rightarrow \left\|u_n - a\right\| \leqslant \varepsilon$
b	$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \left\|u_n - a\right\| \leqslant \varepsilon$
c	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_\epsilon \text{ et } \left\|u_n - a\right\| \leqslant \varepsilon$
d	$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \left\|u_n - a\right\| \leqslant \varepsilon$
e	$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \left\|u_n - a\right\| \leqslant \varepsilon$

∘26∘ On note (E) l'équation $x + 1 + \frac{1}{x} = 0$, dont une racine sera notée x justement.
On multiplie par x^2 : $x^3 + x^2 + x = 0$.
On factorise : $x^3 + x.(x+1) = 0$.
On remplace $x+1$ par $\frac{-1}{x}$: $x^3 + x.\frac{1}{x} = 0$.
On trouve $x^3 = -1$ qu'on résout : $x = -1$.
On reporte dans l'équation (E) : $1 + 1 + 1 = 0$. Problème ?

∘27∘ ♠ Soit f une application continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. On va montrer que f est majorée *(c'est quelle quantification : $\forall x \in [a,\ b],\ \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$ ou $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a,\ b],\ f(x) \leqslant M$?)*. On pose pour tout n : $A_n = \{x \in [a,\ b] \mid f(x) \geqslant n\}$. On suppose que f n'est pas majorée *(quantifiez)*. Montrez alors que les A_n sont des parties de $\mathbb{R}$ non vides, majorées. On pose alors $\alpha_n = Sup(A_n)$ pour tout n. Montrez alors pour tout n : $A_{n+1} \subset A_n$ et $a \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$. Déduisez que la suite (α_n) converge. On note sa limite β. Que se passe-t-il alors en β ? Concluez ?



Montrez que f est aussi minorée.

∘28∘ Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt[\ln(n)]{\frac{\ln(n)}{n}}$.
Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n^{1/\sqrt{n}}$.
Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt{n}^{1/n}$.

Trouvez le plus de coefficients du développement asymptotique :
$\sqrt{n^4+n^3}-n^2 = a.n+b+\dfrac{c}{n}+\dfrac{d}{n^2}+o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}$.

∘29∘ ♡ Calculez cette intégrale « exponentielle » $\displaystyle\int_0^1 2^x.3^{-x}.4^x.5^{-x}.dx$.

∘30∘ ♡ On définit $f = x \longmapsto \exp([\ln(x)])$. Prolongez la par continuité en 0 (encadrement, pas d'epsilon). Est elle alors dérivable ?
Calculez $\displaystyle\int_0^1 f(t).dt$.

La traitresse aime se faire mousser. Le Var est damné. Le facteur secoue sa bote au milieu de la poste. On manque de plus pour votre cas. L'urgentiste connait bien les thème des dures luttes.

∘31∘ ♡ Montrez en explicitant N_ϵ que la suite $\left(\ln\left(\dfrac{2.n+1}{2.n+3}\right)\right)$ converge vers 0.
Montrez en explicitant N_ϵ que la suite $\left(\ln\left(\dfrac{2.n+1}{n+3}\right)\right)$ converge vers $\ln(2)$.
$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n-\lambda|\leqslant\varepsilon)$.

∘32∘ Colonne 1 : quelles propriétés passent de la suite (u_n) aux deux sous-suites $(u_{2.n})$ et $(u_{2.n+1})$.
Colonne 2 : quelles propriétés passent des deux sous-suites $(u_{2.n})$ et $(u_{2.n+1})$ à la suite (u_n).

propriété	colonne 1	colonne 2
croissante		
monotone		
périodique		
bornée		
convergente		
non convergente		
dont la série converge		
la différence de deux termes consécutifs tend vers 0		

∘33∘ ♡ On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Montrez que cette suite est strictement croissante et ne peut pas converger.
Que déduisez vous ? Que fait ce script ? Pourquoi fallait il mettre `u = 1.` ?

```
u, n = 1., 0
while u < 10 :
....u += 1/u
....n += 1
```

∘34∘ ♡ Soit (a_n) une suite réelle. On suppose que $(a_{2.n+20})$, $(a_{2.n+9})$ et $(a_{13.n^2})$, convergent. Montrez qu'elles ont la même limite et que la suite (a_n) converge aussi.
On suppose que $(a_{2.n})$, $(a_{3.n+1})$, $(a_{5.n+7})$, $(a_{11.n+5})$ et $(a_{13.n+2})$, convergent. Montrez qu'elles ont la même limite mais que la suite (a_n) ne converge pas forcément.

∘35∘ ♡ On donne $a_n = n+4+\dfrac{1}{n}+o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)_{n\to+\infty}$. Donnez la limite de $a_{2.n}-2.a_n$ et de $n.(a_{n+1}-2.a_n+a_{n-1})$ quand n tend vers l'infini.

∘36∘ ♡ Trouvez P vérifiant : $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \dfrac{1}{X-1}+\dfrac{1}{X-3}+\dfrac{1}{X-2}$. Trouvez Q vérifiant : $\dfrac{Q'(X)}{Q(X)} = \dfrac{1}{X-1}+\dfrac{2}{X-3}+\dfrac{3}{X-2}$.

∘37∘ Si a est une suite réelle, on définit deux sur-suites *(mot non homologué)* :
$\ddot{a} = (a_0,\ a_0,\ a_1,\ a_1,\ a_2,\ a_2,\ a_3,\ a_3,\ldots)$ *(on voit les deux points au dessus ? en tout cas, chaque terme est cité deux fois)*
et $\ddddot{a} = (a_1,\ a_2,\ a_2,\ a_3,\ a_3,\ a_3,\ a_4,\ a_4,\ a_{\prime},\ a_4,\ a_5\ldots)$ *(le terme a_n est cité n fois)*.

Quelles propriétés passent

	de a à $\ddot{a}$	de $\ddot{a}$ à a	de a à $\ddddot{a}$	de $\ddddot{a}$ à a	de $\ddddot{a}$ et $\ddot{a}$ à a
croissante					
périodique					
convergente					
géométrique					
divergente vers $+\infty$					