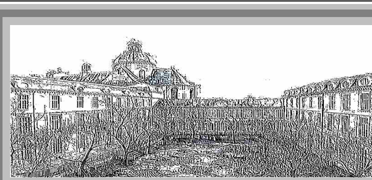
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 11 mars
M.P.S.I.2



2023 2024

TD21

∘0∘

∘1∘ Déterminez la borne supérieure de $\left\{\frac{n}{n.m+1} \;\middle|\; (n,\, m) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$ après avoir prouvé que cet ensemble est majoré et minoré.
Pouvez vous déterminer la borne supérieure de $\left\{\frac{n}{n.m+1} \;\middle|\; (n,\, m) \in \mathbb{N}^2\right\}$?

Le premier est majoré par 1 *(et minoré par 0)* et sa borne supérieure est 1 vers laquelle on tend pour $m = 1$ et n qui tend vers l'infini.
La borne inférieure est 0, avec n égal à 1 et m qui tend vers l'infini.

Le second est minoré par 0 *(borne inférieure atteinte d'ailleurs)*.
Mais il n'est pas majoré ! Prenez $m = 0$ et laissez filer n.

∘2∘ Pourquoi est ce que si on pose $A \times B = \{a \times b \mid a \in A,\ b \in B\}$ on n'a pas forcément $Sup(A \times B) = Sup(A) \times Sup(B)$.

Déjà, $A \times B$ n'est peut être même plus majoré.
Prenons $A =]-\infty,\ 0]$ et $B = \{-1\}$.
L'ensemble $A \times B$ est alors $[0,\ +\infty[$. Plus de borne supérieure.

Sinon, même avec A et B bornés.
$A = [-3,\ 1]$ et $B = [-4,\ 1]$. Chacun a pour borne supérieure 1 *(atteinte)*, et $A \times B$ a pour borne supérieure 12 *(atteinte aussi)*.

∘3∘ Déterminez $Inf\left\{(-1)^n + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ et $Sup\left\{(-1)^n + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ (si ils existent).

On détermine des éléments de l'ensemble, suivant la parité de n :

$1+1$		$1+\frac{1}{4}$		$1+\frac{1}{16}$		$1+\frac{1}{64}$
	$-1+\frac{1}{2}$		$-1+\frac{1}{8}$		$-1+\frac{1}{32}$	

La borne supérieure est 2. Atteinte pour $n = 0$.
Chaque $(-1)^n + 2^{-n}$ se majore bien par $1 + 1$.

La borne inférieure est -1. Non atteinte, mais limite d'une suite d'éléments de l'ensemble..
Quoi qu'il en soit $(-1)^n \geqslant -1$ et $2^{-n} \geqslant 0$, donc en sommant $(-1)^n + 2^{-n} \geqslant -1$. .
la suite $(-1)^{2.p+1} + 2^{-2.p-1}$ converge vers -1

∘4∘ ♡ J'ai appliqué l'algorithme d'Euclide à deux polynômes $A(X)$ et $B(X)$. Les quotients sont dans l'ordre X^2+1, $X+2$ et $X+1$. Le dernier reste non nul est $X-3$. Pouvez vous retrouver A et B ?

On a une suite de divisions : $\begin{array}{ccccc} A(X) & = & B(X) & .(X^2+1) & +R_1(X) \\ B(X) & = & R_1(X) & .(X+2) & +R_2(X) \\ R_1(X) & = & R_2(X) & .(X+1) & \end{array}$.

Le dernier reste non nul est $X-3$. C'est lui $R_2(X)$. On trouve donc R_1 par la dernière ligne : $R_1 = X^2 - X - 6$.
On retrouve $B(X)$ par la précédente : $X^3 + X^2 - 7.X - 15$.
Et la première donne $A(X) = X^5 + X^4 - 6.X^3 - 13.X^2 - 8.X - 21$.
On ne sait pas forcément si c'est $A(X) = X^5 + X^4 - 6.X^3 - 13.X^2 - 8.X - 21$ et $B(X) = X^3 + X^2 - 7.X - 15$ ou le contraire, mais on connaît « A et B ».

L'exercice peut être posé niveau bac, avec des entiers.

◦5◦ Un théorème affirme : pour tout couple d'entiers $(a,\ b)$ distincts, il existe une infinité d'entiers naturels n vérifiant $a+n$ et $b+n$ sont premiers entre eux.
Écrivez un script Python qui pour a et b donnés cherche une liste de cent entiers n vérifiant ceci.
Donnez le couple $(a,\ b)$ avec a et $b$entre 1 et 1000 pour lequel le dernier terme de cette liste est le plus grand.

Pour tester si deux entiers sont premiers entre eux, on calcule leur pgcd par algorithme d'Euclide (divisions euclidiennes jusqu'à avoir un reste nul, et on retourne l'entier précédent, c'est a). Mais en fait, on regarde si le pgcd trouvé vaut 1 :

```
def pgcd(a, b) :
....while b > 0 :
........a, b = b, a%b
....return a
```

```
def PremiersEntreEux(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = b, a%b
....return (a==1)
```

Ensuite, on exploite ce test, et tant que la longueur de la liste n'a pas atteint 100, on continue à chercher.
Faut il penser à vérifier au début si a et b sont distincts ?

```
def Liste(a, b) :
....L = [ ]
....n = 0
....while len(L)<100 :
........if PremiersEntreEux(a+n, b+n) :
............L.append(n)
............n += 1
....return L
```

Et maintenant, pour que le centième entier de la liste soit le plus grand possible ?

On va prendre tous les couples $(a,\ b)$	`for a in range(1, 1001) :` `....for b in range(1, 1001) :`
(avec a différent de b et en fait b plus petit que a)	`for a in range(1, 1001) :` `....for b in range(1, a) :`

On va créer un record à battre.	`aRec, bRec = 2, 1`
	`Record = Liste(aRec, bRec)[-1]`
	`for a in range(1, 1001) :`
	`....for b in range(1, a) :`

On va le comparer au denier test de Liste(a, b).	`aRec, bRec = 2, 1`
	`Record = Liste(aRec, bRec)[-1]`
	`for a in range(1, 1001) :`
	`....for b in range(1, a) :`
	`........Candidat = Liste(a, b)[-1]`

Si le record n'est pas battu, on passe aucun couple suivant.	`aRec, bRec = 2, 1`
	`Record = Liste(aRec, bRec)[-1]`
	`for a in range(1, 1001) :`
	`....for b in range(1, a) :`
	`........Candidat = Liste(a, b)[-1]`
	`........if Candidat > Record :`

Si le record est battu, c'est lui qu'on mémorise.	`aRec, bRec = 2, 1`
	`Record = Liste(aRec, bRec)[-1]`
	`for a in range(1, 1001) :`
	`....for b in range(1, a) :`
	`........Candidat = Liste(a, b)[-1]`
	`........if Candidat > Record :`
	`............Record = Candidat`
	`............aRec, bRec = a, b`

Record : 443 atteint pour les couples [a, b] suivants :

[[2, 1], [3, 1], [4, 2], [7, 1], [8, 2], [31, 1], [32, 2], [50, 20], [211, 1], [212, 2], [258, 48], [284, 74]]

∘6∘ Peut on trouver trois entiers naturels a, b et c vérifiant le système $a \wedge b = 12$ (p.g.c.d.), $b \vee c = 120$ (p.p.c.m.) et $c \wedge a = 5$?

∘7∘ ♡ Avez vous besoin de calculer $\begin{vmatrix} 150 & 235 & 195 \\ 164 & 23 & 3 \\ 246 & 41 & 27 \end{vmatrix}$ pour me prouver qu'il est multiple de 30 ?

Réponse : oui, car j'adore calculer et ce n'est pas un connard de prof de maths de merde qui m'empêchera de faire tout ce dont j'ai été frustré parce que j'ai eu Maths Sup au lieu de Paces, alors que toute ma vie, j'ai rêvé d'apprendre des trucs par cœur, de faire des calculs idiots dont on m'a garanti que plus tard j'en comprendrai la profondeur et le sens.
Alors, voilà, il vaut $-584\,580$ et foutez moi la paix.

Sinon, par multilinéarité, c'est 5. $\begin{vmatrix} 30 & 47 & 39 \\ 164 & 23 & 3 \\ 246 & 41 & 27 \end{vmatrix}$

et c'est 3. $\begin{vmatrix} 150 & 235 & 65 \\ 164 & 23 & 1 \\ 246 & 41 & 9 \end{vmatrix}$

et aussi 2. $\begin{vmatrix} 75 & 235 & 195 \\ 82 & 23 & 3 \\ 123 & 41 & 27 \end{vmatrix}$

Et comme c'est un entier (oui, ça on le sait depuis le début), multiple à la fois de 2, de 3 et de 5, c'est un multiple de leur p.p.c.m.

∘8∘

Montrez que est A inversible (indication : calculez son déterminant modulo 2).
Justifiez $Com(A^2) = (Com(A))^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

On note a_i^k le terme général de la matrice A. Par exemple $a_1^4 = 4$ (indexation non pythonienne).
On note α_i^k le terme général de la matrice A modulo 2. Par exemple $a_1^4 = 0$ (indexation non pythonienne).
On rappelle : $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}.a_3^{\sigma(3)}.a_4^{\sigma(4)}.a_5^{\sigma(5)}$.
Et si on réduit modulo 2 ?
La réduction modulo 2 est compatible avec les sommes et les produits [1].
On a donc avec la notation pythonienne des modulo

$$\det(A)\%2 = \sum_{\sigma \in S_n} (Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}.a_3^{\sigma(3)}.a_4^{\sigma(4)}.a_5^{\sigma(5)})\%2 = \sum_{\sigma \in S_n} (Sgn(\sigma)\%2).(a_1^{\sigma(1)}\%2)\ldots(a_5^{\sigma(5)}\%2)$$

Bref, avec la notation introduite : $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_1^{\sigma(1)} \ldots \alpha_5^{\sigma(5)}$.

Le « déterminant modulo 2 » de la matrice est le déterminant de « la matrice modulo 2 ».

Et si on réduit A modulo 2, on a la matrice I_5 (les termes diagonaux sont impairs, et les termes hors diagonale sont pairs).
Mais $\det(I_5) = 1$.
On a donc $\boxed{\det(A) = 1 \ mod\ 2}$
Il est impair, et ne peut pas valoir 0.
La matrice A est inversible.

De plus, son inverse sera à coefficients rationnels.

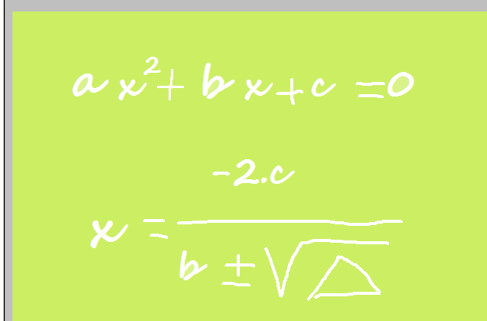
1. je veux dire $(a+b)\ mod\ 2 = (a\ mod\ 2) + (b\ mod\ 2)$ et $(a \times b)\ mod\ 2 = (a\ mod\ 2) \times (b\ mod\ 2)$

Ce serait difficile de comparer $Com(A^2)$ et $(Com(A))^2$ en restant sur les définitions par cofacteurs.
Mais maintenant que A est inversible, on peut écrire $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.{}^t(ComA))$ puis $(A^{-1})^2 = \left(\frac{1}{\det(A)}\right)^2.\left({}^t(ComA))\right)^2$
et même $(A^{-1})^2 = \frac{1}{(\det(A))^2}.{}^t\left(ComA)\right)^2$ par propriétés usuelles de la transposition et du déterminant.
Mais on a aussi $(A^2)^{-1} = \frac{1}{\det(A^2)}.{}^t(Com(A^2))$.
Enfin, la base du calcul algébrique nous donne $(A^{-1})^2 = (A^2)^{-1}$ (noté aussi A^{-2}).
On peut identifier et simplifier par $\det(A))^2$ et on a bien ${}^t\left(Com(A^2)\right) ={}^t \left(\left(Com(A)\right)^2\right)$. On efface les transpositions, et c'est fini.

Le résultat n'est pas propre à cette matrice.
On prouve pour tout couple de matrices inversibles $Com(A.B) = Com(A).Com(B)$. Et c'est même valable pour des matrices non inversibles, par « passage à la limite ».
En revanche, je ne vous conseille pas de tenter une preuve par récurrence sur n, même si le résultat est agréable en dimension 2.

◦9◦

Le colleur doit il sanctionner l'élève qui a écrit ces formules au tableau ?




```
def Samy(a) :
....return(sum(int(c) for c in str(a)))

def Vera(n) :
....return(Samy(n) > Samy(n*n))

n = 0
while not(Vera(n)) :
....n += 1
print(n)
```

La réponse est 39. Expliquez.

On résout $a.x^2 + b.x + c = 0$ d'inconnue x. La réponse est $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$, on connaît bien.

Mais que penser de $\frac{-2.c}{b \pm \sqrt{\Delta}}$? Faisons appel à la quantité conjuguées (ε vaut 1 ou -1) :

$$\frac{-2.c}{b+\varepsilon.\sqrt{\Delta}} = \frac{-2.c.(b-\varepsilon.\sqrt{\Delta})}{b^2-(\varepsilon.\sqrt{\Delta})^2} = \frac{-2.c.(b-\varepsilon.\sqrt{\Delta})}{b^2-\Delta} = \frac{-2.c.(b-\varepsilon.\sqrt{\Delta})}{b^2-(b^2-4.a.c)} = \frac{-2.c.(b-\varepsilon.\sqrt{\Delta})}{4.a.c} = \frac{-(b-\varepsilon.\sqrt{\Delta})}{2.a}$$

On a donc bien $\frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2.a}$.
La formule de l'élève est la bonne !

Sauf dans le cas $c = 0$, mais on ne va pas ergoter, dans ce cas, une racine est nulle, et l'autre est facile à trouver.

Le script **`Samy`** prend un entier n, en fait une chaine de caractères (**`str(n)`**), dont il prend les éléments un par un. Il en refait des entiers et les additionne.
Bref, **`Samy(a)`** calcule la somme des chiffres de l'entier **`a`**.

`Vera` prend la relève et compare **`Samy(n)`** et **`Samy(n*n)`**. C'est à dire qu'elle regarde si la somme des chiffres de n^2 est plus petite que la somme des chiffers de **`n`**. Par exemple $Samy(13) = 4$ et $Samy(169) = 16$. C'est le carré qui gagne.
Par exemple $Samy(39) = 12$ et $Samy(39^2) = Samy(1521) = 9$. C'est 39 qui gagne face à son carré.

Vera retourne un test, donc un booléen.

On commence à $n = 0$. Et n augmente tant que $Samy(n)$ est plus petit que $Samy(n^2)$.

Bref, on cherche le premier entier n tel que la somme des chiffres de n soit strictement plus grande que la somme des chiffres de n^2. Et on trouve 39.

Le suivant sera 48 puisque $Samy(48) = 12$ et $Samy(48^2) = Samy(2034) = 9$.

On peut dresser un tableau pour confirmer nos dires.

1 -> 1	2 ->2	3->3	4->4	5->5	6->6	7->7	8->8	9->9	10->1	11->2	12->3	13->4	14->5	15
1->1	4->4	9->9	16->7	25->7	36->9	49->13	84->12	81-9	100->1	121->4	144->9	163->10	196->16	22

et ainsi de suite.

∘10∘ Montrez : $\forall \varepsilon > 0,\ \forall n,\ \left(\left(n \geqslant \left[\sqrt{3+\frac{4}{\varepsilon}}\right]+1\right) \Rightarrow \left(\left|a_n - 1\right| \leqslant \varepsilon\right)\right)$ sachant $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^2-3}$.

On doit passer (pour n et ε quelconques) de $\left(n \geqslant \left[\sqrt{3+\frac{4}{\varepsilon}}\right]+1\right)$ et $\left(\left|a_n - 1\right| \leqslant \varepsilon\right)$.

Regardons notre objectif : $\left|a_n - 1\right| = \left|\frac{n^2+1}{n^2-3} - 1\right| = \frac{4}{|n^2-3|}$.

Supposons n plus grand que $n \geqslant \left[\sqrt{3+\frac{4}{\varepsilon}}\right]+1\Big)$, on a alors $n \geqslant \sqrt{3+\frac{4}{\varepsilon}}$ puis $n^2 \geqslant 3 + \frac{4}{\varepsilon}$.

On a alors $n^2 - 3 \geqslant \dfrac{4}{\varepsilon}$ (lui même positif). On peut donc passer aux inverses : $\left|\dfrac{1}{n^2-3}\right| = \dfrac{1}{n^2-3} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$.

∘11∘ On pose $P_1 = X^3 + 2.X^2 + 3.X$, $P_2 = X^2 + X + 2$, $P_3 = X^3 + X - 1$, $P_4 = X^3 + 4.X^2 + 5.X + 4$.
Montrez que $(P_1,\ P_2)$ est libre, de même que $(P_3,\ P_4)$. La famille $(P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4)$ est elle libre ?

Quand il n'y a que deux vecteurs dans une famille, elle est libre si et seulement si ils sont non proportionnels.
C'est bien le cas pour $(X^3 + 2.X^2 + 3.X,\ X^2 + X + 2)$,
De même pour $(X^3 + X - 1,\ X^3 + 4.X^2 + 5.X + 4)$.

Mais pour la famille de quatre, on n'en sait rien.
Mais on a de la chance. Ce sont quatre vecteurs dans l'espace vectoriel $Vect(X^3, X^2, X, 1)$ de dimension 4.
On va donc écrire un déterminant et le calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

on a détecté deux lignes égales !
La famille $(P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4)$ est liée.

On peut même écrire $P_4 = P_1 + 2.P_2$, ce qui montre bien que cette famille est liée.

∘12∘

On se place dans $((\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$. Montrez qu'il y a $7^4 - 1$ familles libres de un vecteur.
♣ 0 ♣ Montrez qu'il y a $(7^4-1).(7^4-7).(7^4-7^2)$ familles libres de trois vecteur. Combien y-a-t-il de familles liées de deux vecteurs ?
♣ 1 ♣ Combien y a-t-il de familles génératrices de $((\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$ formées de trois vecteurs ?
♣ 2 ♣ Combien y a-t-il de familles libres de $((\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$ formées de deux vecteurs ?
♣ 3 ♣ Montrez pour $(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2})$ libre :

$$Vect(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2}) = Vect(\overrightarrow{b_1},\ \overrightarrow{b_2}) \Leftrightarrow (\exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta),\ \overrightarrow{b_1} = \alpha.\overrightarrow{a_1} + \beta.\overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{b_2} = \gamma.\overrightarrow{a_1} + \delta.\overrightarrow{a_2} \text{ et } \alpha.\delta \neq \beta.\gamma)$$

♣ 4 ♣ Déduisez qu'il y a $\dfrac{(7^4-1).(7^4-7)}{(7^2-1).(7^2-7)}$ plans dans $((\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$.

Dans $(\mathbb{Z}_{7.\mathbb{Z}}, +, .)$ il y a 7^4 vecteurs et un seul est nul.
Il y a donc une famille liée de un vecteur, et $7^4 - 1$ familles libres de un vecteur.

On cherche les familles libres de deux vecteurs ($\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$).
Le premier doit être non nul : 7^4-1 choix pour $\overrightarrow{a}$.
Le second doit juste ne pas être colinéaire au premier $\overrightarrow{b}\neq\lambda.\overrightarrow{a}$.
Combien de multiples de $\overrightarrow{a}$? Un par choix de λ. Et m\lambda peut valoir 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou même 0 ($\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ que l'on va donc refuser aussi).
On a donc $(7^4-1).5è^4-7)$ familles libres de deux vecteurs.

Et pour trois vecteurs ($\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$) ?
On choisit $\overrightarrow{a}$ comme on veut, mais non nul : 7^4-1 chois.
On choisit $\overrightarrow{b}$ non colinéaire à $\overrightarrow{a}$: 7^4-7 choix.
Reste à choisir $\overrightarrow{c}$. On doit refuser tous les $\alpha.\overrightarrow{a}+\beta.\overrightarrow{b}$ (les vecteurs coplanaires à $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$).
On a 7^2 choix de couple $(\alpha,\ \beta)$, donc 7^2 vecteur dans $Vect(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})$, et 7^4-7^2 vecteurs dans $E-Vect(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})$.
On a donc cette fois $(7^4-1).(7^4-7).(7^4-7^2)$ familles libres de trois vecteurs.

Je vous laisse démontrer qu'il y a $(7^4-1).(7^4-7).(7^4-7^2).(7^4-7^3)$ familles libres de quatre vecteurs (des bases).
Enfin, de manière purement logique, il y a $(7^4-1).(7^4-7).(7^4-7^2).(7^4-7^3).(7^4-7^4)$ familles libres de cinq vecteurs.
Et ça fait bien 0.

Comme il a $(7^4)^3$ familles de trois vecteurs, il y a $7^{12}-(7^4-1).(7^2-7).(7^4-7^2)$ familles liées de trois vecteurs.

Il n'y a pas de famille génératrice de $((\mathbb{Z}_{7.\mathbb{Z}})^4,+,.)$ formées de trois vecteurs.

La question est maintenant : combien de familles engendrent le même plan ?
On prend deux vecteurs $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$ formant une famille libre. ils engendrent un plan.

Passons à un sens d'implication.

Supposons $Vect(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2})=Vect(\overrightarrow{b_1},\ \overrightarrow{b_2})$.
Les vecteurs $\overrightarrow{b_1}$ et $\overrightarrow{b_2}$ sont dans $Vect(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2})$.
Ils s'écrivent donc sous la forme $\overrightarrow{b_1}=\alpha.\overrightarrow{a_1}+\beta.\overrightarrow{a_2}$ et $\overrightarrow{b_2}=\gamma.\overrightarrow{a_1}+\delta.\overrightarrow{a_2}$.
On tient une partie de la réponse. Mais pourquoi $\alpha.\delta\neq\beta.\gamma$?
Si tel n'était pas le cas, $\overrightarrow{b_1}$ et $\overrightarrow{b_2}$ auraient un déterminant nul sur la base $(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2})$.
Ils seraient colinéaires et n'engendreraient qu'une droite.
On aurait donc bien $Vect(\overrightarrow{b_1},\ \overrightarrow{b_2})\subset Vect(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2})$ mais pas $Vect(\overrightarrow{b_1},\ \overrightarrow{b_2})=Vect(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2})$.

Passons à l'autre sens.

Supposons $(\exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta),\ \overrightarrow{b_1}=\alpha.\overrightarrow{a_1}+\beta.\overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{b_2}=\gamma.\overrightarrow{a_1}+\delta.\overrightarrow{a_2}\ et\ \alpha.\delta\neq\beta.\gamma)$. Déjà,

$$\overrightarrow{b_1}=\alpha.\overrightarrow{a_1}+\beta.\overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{b_2}=\gamma.\overrightarrow{a_1}+\delta.\overrightarrow{a_2}$$

$\overrightarrow{b_1}$ et $\overrightarrow{b_2}$ sont dans $Vect(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2})$.
Par transitivité (ou par combinaison) : $Vect(\overrightarrow{b_1},\ \overrightarrow{b_2})\subset Vect(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2})$.

Mais la non nullité de $\alpha.\delta-\beta.\gamma$ permet de renverser :

$$\overrightarrow{a_2}=\frac{\delta.\overrightarrow{b_1}-\beta.\overrightarrow{b_2}}{\alpha.\delta-\beta.\gamma},\ \overrightarrow{a_2}=\frac{-\gamma.\overrightarrow{b_1}+\alpha.\overrightarrow{b_2}}{\alpha.\delta-\beta.\gamma}$$

(résolution de système 2 sur 2).
On a donc l'autre inclusion $Vect(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2})\subset Vect(\overrightarrow{b_1},\ \overrightarrow{b_2})$.

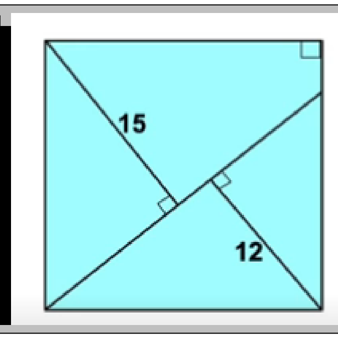
On tient notre réponse finale.
On a $(7^4-7^0).(7^4-7^1)$ familles libres de deux vecteurs.
Pour chaque quadruplet $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ vérifiant $\alpha.\delta\neq\beta.\gamma$ on a le même plan.
Il faut donc diviser $(7^4-7^0).(7^4-7^1)$ par le nombre de matrices 2 sur 2 inversibles.
Une telle matrice est faite d'un premier vecteur colonne non nul : 7^2-1 choix,

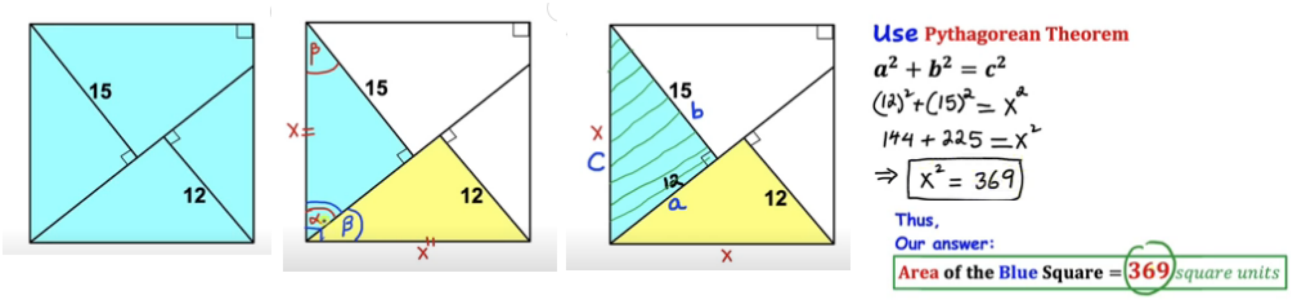
et d'un second vecteur non colinéaire au premier : $7^2 - 7$ choix.
On a donc bien $\dfrac{(7^4-7^0).(7^4-7^1)}{(7^2-7^0).(7^2-7^1)}$ plans dans $((\mathbb{Z}_{7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$.

∘13∘

```
def Scooby(n) :
....def gene(i, k) :
........if i+k < n :
............return(2)
........return(1)
....return([[gene(i, k) for k in range(n)] for i in range(n)])
```

Exprimez le déterminant de `Scooby(n)` en fonction de n.
Calculez l'aire du carré ci contre. (pas de rapport entre les deux exercices)





Notons x le côté du carré.
Avec le triangle du bas : $\sin(\beta) = \dfrac{12}{x}$.
Avec le triangle de gauche : $\sin(\alpha) = \dfrac{15}{x}$.
Or, α et β se complètent pour donner $\dfrac{\pi}{2}$.
On a donc $\sin(\alpha) = \cos(\beta)$.
La relation $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ donne donc $\dfrac{12^2}{x^2} + \dfrac{15^2}{x^2} = 1$ et donc $x^2 = 12^2 + 15^2$.
Et x^2 est l'aire cherchée.

∘14∘

Un enchainement de questions préliminaires indépendantes les unes des autres[2] *vous permettra ensuite, en les emboitant, de démontrer des résultats d'arithmétique sur la piste des entiers friables*[3]. *Méfiez vous de la question piège.*

I∼0) f est une application continue, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$ (*n_0 est un entier naturel non nul donné*). On pose $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$ et $\gamma_n = S_n - \int_{n_0}^{n} f(t).dt$. Montrez que la suite (γ_n) est positive, décroissante et convergente.

La positivité de $S_n - \int_{n_0}^{n} f(t).dt$ repose effectivement sur une comparaison série intégrale.

Mais on ne peut pas juste le dire. Il y a en effet un léger problème.
Dans S_n il y a $n - n_0 + 1$ termes, alors que l'intégrale de n_0 à n a juste $n_0 - n$ segments de longueur 1.

On remplace chaque $f(k)$ par $\int_k^{k+1} f(k).dt$ et on minore, par décroissance de f sur chaque $[k, k+1]$:

2. *l'espérance du produit de vos notes aux questions sera le produit des espérances des notes aux questions*
3. *un entier est dit friable si ses facteurs premiers sont nombreux et petits*

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) = \sum_{k=n_0}^{n} \int_k^{k+1} f(k).dt \geqslant \sum_{k=n_0}^{n} \int_k^{k+1} f(t).dt = \int_{n_0}^{n+1} f(t).dt$$

On soustrait une intégrale qui s'arrête en n :

$$S_n - \int_{n_0}^{n} f(t).dt \geqslant \int_{n_0}^{n+1} f(t).dt - \int_{n_0}^{n} f(t).dt = \int_{n}^{n+1} f(t).dt$$

Comme f est positive *(et l'intervalle dans le bon sens)*, cette intégrale est positive.

Et comme indiqué, il reste un terme de trop.

Pour la décroissance, on se donne n et on compare γ_n et γ_{n+1} en calculant la différence par relation de Chasles et comparaison série-intégrale

$$\gamma_n - \gamma_{n+1} = S_n - \int_{n_0}^{n} f(t).dt - S_{n+1} + \int_{n_0}^{n+1} f(t).dt = \int_{n}^{n+1} f(t).dt - f(n+1)$$

$$\gamma_n - \gamma_{n+1} = \int_{n}^{n+1} f(t).dt - \int_{n}^{n+1} f(n+1).dt = \int_{n}^{n+1} (f(t) - f(n+1)).dt$$

La fonction sous le signe somme est positive par décroissance de f sur $[n,\ n+1]$. La différence est positive.

La suite est décroissante, minorée par 0.
Elle converge vers son plus grand minorant.

I∼1) Déduisez l'existence d'un réel C vérifiant $\sum_{2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} = \ln(\ln(n)) + C + o(1)$ quand n tend vers l'infini.

Prenons justement l'application $t \longmapsto \frac{1}{t.\ln(t)}$. Elle a pour dérivée $t \longmapsto -\frac{1+\ln(t)}{t^2.(\ln(t))^2}$.
Cette dérivée est négative sur l'intervalle $[2,\ +\infty[$.
On peut donc déduire que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} - \int_2^n \frac{dt}{t.\ln(t)}$ converge quand n tend vers l'infini, vers une limite qu'on va appeler C.
Mais l'intégrale se calcule *(forme en $\frac{u'}{u}$)* : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} - \ln(\ln(n)) + \ln(\ln(2))$ converge vers une limite λ.
Par soustraction, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} - \ln(\ln(n))$ converge vers une limite C.
On écrit ceci $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} - \ln(\ln(n)) = C + o(1)_{n\to+\infty}$.
Et on fait passer de l'autre côté.

Attention, on est en sciences, on écrit $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} - \ln(\ln(n)) \longrightarrow_{n\to+\infty} C$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} - \ln(\ln(n)) - C \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} - \ln(\ln(n)) - C = o(1)$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} = \ln(\ln(n)) + C + o(1)$$

mais pas $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} \longrightarrow_{n\to+\infty} \ln(\ln(n)) + C$ *qui n'a strictement aucun sens.*

I∼2) Calculez $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t.(\ln(t))^2}$ et déduisez que la série $\Big(\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k.(\ln(k))^2}\Big)$ converge quand N tend vers l'infini.

L'intégrale « à horizon fini » $\int_2^n \frac{dt}{t.(\ln(t))^2}$ se calcule et vaut $\Big[\frac{-1}{\ln(t)}\Big]_{t=2}^{n}$. Elle converge vers $\frac{1}{\ln(2)}$ quand n tend vers l'infini.

On regarde la monotonie de $t \longmapsto \dfrac{1}{t.(\ln(t))^2}$. On dérive et on a $t \longmapsto -\dfrac{2+\ln(t)}{t^2.(\ln(t))^3}$. C'est bon.

Comment perdre des points aux concours :
appliquer la formule de la première question... sans vérifier que l'application est décroissante.
Juste parce qu'on a vu un résultat écrit, en oubliant que $p \Rightarrow q$ c'est si p alors q (et on ne sait rien si pas(p)).

La différence $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.(\ln(k))^2} - \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{\ln(n)}$ converge quand n tend vers l'infini.
Par addition, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.(\ln(k))^2}$ converge quand n tend vers l'infini.

On pouvait aussi dire que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.(\ln(k))^2}$ était croissante, et majorée par comparaison série intégrale.

II∼0) Calculez $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}.dt$. Prouvez l'existence de $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k.(k-1)}$ *(sa somme sera notée K, et ne me demandez pas à la fin du devoir « c'est qui K ? »).*

Pour l'intégrale, on commence à horizon fini A et on fera tendre A vers l'infini.
On intègre par parties, on décompose en éléments simples :

$$\int_2^A \frac{\ln(t).dt}{(t-1)^2} = \Big[\ln(t).\frac{1}{1-t}\Big]_2^{+A} + \int_2^A \frac{dt}{t.(1-t)} = \Big[\ln(t).\frac{1}{1-t}\Big]_2^{+A} + \int_2^A \Big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\Big).dt$$

$$\int_2^A \frac{\ln(t).dt}{(t-1)^2} = \Big[\ln(t).\frac{1}{1-t} + \ln(t-1) - \ln(t)\Big]_2^{+A}$$

La valeur en 2 ne pose pas de problème.
C'est la limite à l'infini qui va nous gêner. Déjà $\dfrac{\ln(A)}{1-A}$ tend vers 0 par comparaison des croissances.
Mais les deux logarithmes ensemble, ils font quoi ? $\ln(A-1) - \ln(A)$?
Sous cette forme, pas grand chose *(l'infini moins l'infini)*.
Mais sous la forme $\ln\Big(\dfrac{A-1}{A}\Big)$ *(et même $\ln\Big(1-\dfrac{1}{A}\Big)$ si vous y tenez)*, il tend vers 0.

Bref, finalement $\boxed{\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}.dt = 2.\ln(2)}$

On peut voir $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k.(k-1)}$ comme une famille sommable.
Il suffit de la majorer par une famille sommable de référence.
Notre amie $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ ne peut pas nous aider ici, de même que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k.(k-1)}$ qui a encore plus de raisons d'être notre amie.
De même, majorer $\ln(k)$ par k . Ceci nous livre une majoration par $\dfrac{1}{k-1}$ et la famille des $\dfrac{1}{k-1}$ n'est pas sommable *(harmonique)*.

Passons par une idée intermédiaire entre les deux, et majorons $\ln(k)$ par $\sqrt{k}$.
On a $0 \leqslant \dfrac{\ln(k)}{k.(k-1)} \leqslant \dfrac{\sqrt{k}}{k.(k-1)}$.
Le terme général $\dfrac{\sqrt{k}}{k.(k-1)}$ est équivalent à $\dfrac{1}{k^{3/2}}$. Comme $\dfrac{3}{2}$ est strictement plus grand que 1, la série de terme général $\dfrac{1}{k^{3/2}}$converge.

Par théorème sur les séries à termes positifs équivalents en $+\infty$, la série de terme général $\dfrac{\sqrt{k}}{k.(k-1)}$ converge.

Par domination sur les séries à termes positifs, la série de terme général $\dfrac{\ln(k)}{k.(k-1)}$ converge.

Pouvait on aussi comparer avec une intégrale. Tout en n'ayant pas de primitive explicite. Pas cool.

Mais une comparaison avec $\int \frac{\ln(t).dt}{(t-1)^2}$ pouvait valoir le coup.

D'ailleurs, c'est moi qui ai ajouté la question sur $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t).dt}{(t-1)^2}$ *pour vous faciliter le travail.*
Ai-je réussi.

On rappelle $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}.dt = 2.\ln(2)$

Maintenant, par comparaison série intégrale, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{(n-1)^2}$existe.

Par domination $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{(n-1).n}$ existe aussi.

III∼0) Montrez pour tout n supérieur ou égal à 2 : $\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \geqslant n.\ln(n) - n + 1$.

On refait une majoration série intégrale pour $\sum_{k=2}^{n} \ln(k)$? Oui, surtout quand on voit $n.\ln(n) - n$ à droite.

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln(k).dt \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln(t).dt = \int_{2-1}^{n} \ln(t).dt = [t.\ln(t) - t]_1^n = n.\ln(n) - n + 1$$

On a écrit au bon moment que le logarithme est une application croissante.

III∼1) Déduisez : $\ln(n!) = n.\ln(n) + O(n)$ quand n tend vers l'infini. C'est l'anniversaire de Sucri, venez au bureau, embrassez le sur son front vert et vous gagnez un point.

On a juste une minoration, et on veut passer à une formule asymptotique. Il faut un encadrement *(rappelons que $O(n)$ veut dire « suite bornée en valeur absolue par un multiple de n).*

Dans la somme il y a $n-1$ termes, et le plus grand est le dernier. On peut donc majorer classiquement :

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(n) = n.\ln(n)$$

On a maintenant $n.\ln(n) - n + 1 \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leqslant n.\ln(n)$ et même$-n + 1 \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - n.\ln(n) \leqslant 1$

$$-1 + \frac{1}{n} \leqslant \frac{\sum_{k=2}^{n} \ln(k) - n.\ln(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

Le terme du milieu est donc borné. On écrit que c'est un $O(1)$.

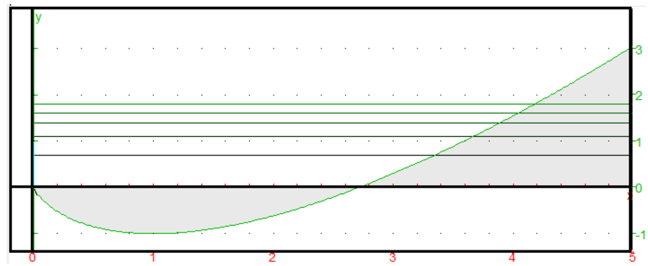
On multiplie par n et on passe l'autre terme là où on l'attend : $\sum_{k=2}^{n} \ln(k) = n.\ln(n) + O(n)$.

IV∼0) Soit λ strictement positif. Justifiez que pour tout n il existe un unique réel x de $]0, +\infty[$ vérifiant $x.\ln(x) - \lambda.x = \ln(n)$ *(ce réel x sera noté r_n).*

λ est fixé, et c'est x qui va varier.
On étudie donc $x \longmapsto x.\ln(x) - \lambda.x$ *(qu'on va appeler h)* et on la dérive : $x \longmapsto \ln(x) + 1 - \lambda$.
Cette application n'est pas monotone ! On ne va pas pouvoir utiliser le théorème de l'homéomorphisme ?

Disons quand même que h est décroissante puis croissante, avec changement se sens de variations en $e^{\lambda-1}$.

Certaines équations $h(x) = a$ auront plusieurs solutions. Mais ici, c'est $h(x) = \ln(n)$ qui nous intéresse. Et $\ln(n)$ est positif.
Or, $h(x)$ est du signe de $\ln(x) - \lambda$.
Il faut donc chercher des solutions sur $]e^{\lambda},\ +\infty[$, là où h est positive.
Et justement, sur cet intervalle, elle est croissante. Strictement.



x	$]0,\ e^{\lambda-1}]$	$]e^{\lambda-1},\ e^{\lambda}]$	$]e^{\lambda-1},\ +\infty[$	
$h'(x)$	$\ominus$	$\oplus$		
$h(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$ $\nearrow$	$+\infty$ $\ln(n)$ 0
	pas de solution		une seule solution	

En fait, pour rédiger, on citera • la continuité de h pour l'existence d'une solution
• la stricte croissance de h pour l'unicité de la solution.
Et pour que tout devienne clair, on étudie h de $[we^{\lambda},\ +\infty[$ dans $[0,\ +\infty[$ et on note alors h^{-1} sa réciproque.

On pose alors $r_n = h^{-1}(\ln(n))$.

IV~1) Montrez que r_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini, prouvez $r_n = o(\ln(n))$ et prouvez enfin $r_n \sim \dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$ quand n tend vers l'infini.

h est croissante, donc h^{-1} l'est aussi.
La suite $(h^{-1}(\ln(n)))$ l'est aussi.

De là à ce qu'elle diverge vers $+\infty$.

Mais comme elle est croissante, elle n'a que deux possibilités : converger ou tendre vers $+\infty$.

On va éliminer la possibilité (r_n) converge.
Si tel était le cas, elle tendrait vers un réel μ.
Mais alors $r_n.\ln(r_n) - \lambda.r_n$ convergerait vers $\mu.\ln(\mu) - \lambda.\mu$.
Dans le même temps, $r_n.\ln(r_n) - \lambda.r_n$ est égal à $\ln(n)$ et diverge vers $+\infty$.

Par élimination, (r_n) diverge vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.

Partons de $r_n.(\ln(r_n) - \lambda) = \ln(n)$ et divisons par $\ln(n)$: $\dfrac{r_n.(\ln(r_n) - \lambda)}{\ln(n)} = 1$ et même $\dfrac{r_n}{\ln(n)} = \dfrac{1}{\ln(r_n) - \lambda}$.
Comme $r_n$tend vers l'infini, $\ln(r_n)$ tend aussi vers l'infini, le quotient tend vers 0.
On a donc $\dfrac{r_n}{\ln(n)} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$. C'est la définition de $r_n = o(\ln(n))$.

On veut montrer que r_n est équivalent à $\dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$ passons par la définition : $\dfrac{r_n.\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$ tend il vers 1. On calcule :

$$\frac{r_n.\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(r_n) - \lambda} = \frac{\ln(r_n.\ln(r_n) - \lambda.r_n)}{\ln(r_n) - \lambda}$$

Oh il fallait y penser : remettre la définition de $r_n$dans elle même en remplaçant un $\ln(n)$ par $r_n.(\ln(r_n) - \lambda)$. On a maintenant

$$\frac{r_n.\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = \frac{\ln(r_n) + \ln(.\ln(r_n) - \lambda)}{\ln(r_n) - \lambda} = \frac{1 + \dfrac{\ln(\ln(r_n) - \lambda)}{\ln(r_n)}}{1 - \dfrac{\lambda}{\ln(r_n)}}$$

Au dénominateur, $\dfrac{\lambda}{\ln(r_n)}$ tend vers 0 car $r_n$tend vers l'infini.

Au numérateur, en posant $u_n = \ln(r_n)$ on a $\dfrac{\ln(u_n - \lambda)}{u_n}$.Par croissances comparées, ceci tend vers 0.

Numérateur et dénominateur tendent vers 1.
Le quotient tend vers 1. C'est ce que l'on voulait !

Je dois reconnaître qu'il faut avoir fait plusieurs raisonnements de ce genre pour en mener un spontanément tout seul.

V∼0) Si E est un de partie de $\mathbb{N}^*$, on pose $E_n = E \cap [1,\ n]$ et $d_n(E) = \dfrac{Card(E_n)}{n}$. Si cette suite $d_n(E)$ converge, on dit que E a une densité *(et cette densité sera la limite de cette suite $(d_n(E))$)*. Prouvez que toute partie finie a une densité *(valeur de la densité ?)*. a est un entier naturel donné, montrez que l'ensemble des multiples de a a une densité *(valeur ?)*. L'ensemble $\{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ des carrés parfaits a-t-il une densité *(si oui, quelle valeur ?)*.

Soit F une partie finie de cardinal p.
Le cardinal de $F \cap [1,\ n]$ est donc entre 0 et p.

Et dès que n a dépassé le dernier élément de F, on a $Card(F \cap [1,\ n]) = p$.

On divise par n : $d_n(F)$ est entre 0 et $\dfrac{p}{n}$.
On fait tendre n vers l'infini.
Par encadrement, $d_n(F)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Toute partie finie a pour densité 0.

On prend l'ensemble des multiples de a *(par exemple, pour $a = 1$ c'est $\mathbb{N}$ et pour $a = 2$ c'est l'ensemble des nombres pairs)*.
Pour n donné, on se demande : combien de multiples de a entre 1 et n.
Ce sont des nombres de la forme $k.a$ avec $1 \leqslant k.a \leqslant n$.
Il y a en a un pour chaque k et k peut prendre des valeurs entières entre $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{n}{a}$.
Bref, il y a $\left[\dfrac{k}{a}\right]$ *(on refuse 0)*.
On a donc $d_n(a.\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{n}.\left[\dfrac{n}{a}\right]$.

Vers quoi tend ce réel quand n tend vers l'infini.

On a envie de le faire à la physicienne et de virer les parties entières.
Il reste juste $\dfrac{1}{a}$ (réel ne dépendant plus de n).

Et c'est la bonne réponse. Mais il faut un argument de matheuse.
On encadre la partie entière : $x - 1 \leqslant [x] \leqslant x$ *(on part de x et on descend jusqu'à trouver un entier, donc on descend au plus de 1)*.

On applique en $x = \dfrac{n}{a}$ puis on multiplie par n :

$$\frac{1}{n}.\Big(\frac{n}{a} - 1\Big) \leqslant \frac{1}{n}.\left[\frac{n}{a}\right] = d_n(A) \leqslant \frac{1}{n}.\frac{n}{a} = a$$

Par encadrement, $d_n(a.\mathbb{N})$ converge vers $\dfrac{1}{a}$ quand n tend vers l'infini.

On s'en serait douté, en moyenne un nombre sur a est un multiplie de a.

Les carrés parfaits sont trop peu nombreux et se raréfient avec n. On va leur trouver une densité nulle.
On se donne n et on compte le nombre de k^2 entre 1 et n.
La condition donne $1 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$.
On interprète : il y a $[\sqrt{n}]$ carrés parfaits entre 1 et n.

On a donc $d_n(C) = \dfrac{[\sqrt{n}]}{n}$. On sent que ceci va tendre vers 0 quand n va tendre vers l'infini.
Il suffit comme toujours dans ces cas d'encadrer : $0 \leqslant d_n(C) = \dfrac{[\sqrt{n}]}{n} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{n}$.

L'ensemble des carrés a une densité nulle.

V∼1) Montrez que si deux parties disjointes A et B ont une densité, alors A^c et $A\cup B$ ont une densité et donnez leur valeur.

Si A est une partie, alors par définition même, on a $Card(A\cap[1,\ n])+Card(\overline{A}\cap[1,\ n])=Card([1,\ n])$.
On passe aux cardinaux, et on divise par n : $d_n(A)+d_n(\overline{A})1$ et même $d_n(\overline{A})=1-d_n(A)$.
Le second membre a une limite, donc le premier aussi.

Le complémentaire de A a une densité, et c'est1 moins la densité de A.

Le cours donne la formule $Card(E\cup F)=Card(E)+Card(F)-Card(E\cap F)$.
Pour des ensembles $A\cap[1,\ n]$ et $B\cap[1,\ n]$, disjoints *(car A et B le sont)*, on a

$$Card((A\cup B)\cap[1,\ n])=Card((A\cap[1,\ n])\cup(B\cap[1,\ n]))=Card(A\cap[1,\ n])+Card(B\cap[1,\ n])-0$$

On divise par n, on fait tendre vers l'infini.
Le membre de droite a une limite *(somme des densités)*, le membre de gauche en a une aussi.

La densité de $A\cup B$ existe, et est la somme des densités *(si A et B sont disjoints en tout cas)*.

On a toutes les presque propriétés voulues pour parler d'une probabilité sur $\mathbb{N}$.
La densité de $\mathbb{N}$ vaut 1 (cas $a=1$), la mesure des densités est additive pour un nombre fini d'ensembles.
Mais elle est perdue avec les ensembles infinis.
Chaque singleton a une densité nulle (ensemble fini). La réunion (infinie) de tous les singletons donne $\mathbb{N}$ de masse 1 tandis que la somme des densités donne 0.

VI∼0) Montrez pour tout m de $\mathbb{N}^*$: $2.\binom{2.m+1}{m}\leqslant 2^{2.m+1}$.

On peut se lancer dans la preuve de $2.\binom{2.m+1}{m}\leqslant 2^{2.m+1}$ par récurrence sur n.

Je suis presque sûr que vous saurez le faire. Et j'ai même vu un corrigé qui le faisait.

Mais c'est bien plus simple. Regardons le membre de droite. C'est la célèbre somme de tous les binomiaux sur une ligne.

$$2^{2.m+1}=(1+1)^{2.m+1}=\sum_{k=0}^{2.m+1}\binom{2.m+1}{k}$$

On isole les deux termes du milieu *(égaux par symétrie de la ligne)*. Et les autres sont positifs.

$$2.\binom{2.m+1}{m}=\sum_{k=m}^{m+1}\binom{2.m+1}{k}\leqslant\sum_{k=0}^{2.m+1}\binom{2.m+1}{k}=(1+1)^{2.m+1}=2^{2.m+1}$$

VI∼1) Montrez que l'entier $\left(\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}}p\right)$ divise $\binom{2.r+1}{r}$ *(P est l'ensemble des nombres premiers)*.

Regardons à présent $\binom{2.r+1}{r}$ c'est à dire $\dfrac{(2.r+1)!}{r!.(r+1)!}$.
Non, pas sous cette forme ! On n'est plus en Terminable.
On se souvient d'où vient de nombre : $\binom{n}{k}=\dfrac{n.(n-1).(n-2)\dots(n-k+1)}{1.2.3\dots k}$ avec k termes en haut comme en bas.

$$\binom{2.r+1}{r}=\frac{(2.r+1).(2.r).(2.r-1)\dots(r+2)}{1.2.3\dots r}=\frac{\textit{les entiers de } r+2 \textit{ a } 2.r+1}{\textit{les entiers de } 1 \textit{ a } r}$$

D'autre part, on a $\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}}p$. C'est le produit des entiers premiers de $r+2$ à $2.r+1$. Si on n'y voit pas une ressemblance avec le binomial.

Chacun des nombres premiers p de ce produit est présent une fois au numérateur.
Et jamais au dénominateur.
Chacun des entiers p de $\prod\limits_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p$ est présent dans le quotient.

Plus proprement, on écrit $\prod\limits_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p$ divise $\prod\limits_{r+1<k\leqslant 2.r+1} k$.

$\prod\limits_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p$ divise donc $\binom{2.r+1}{r}.r!$.

Mais $\prod\limits_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p$ est premier avec $r!$ *(aucun facteur premier en commun)*.

Par lemme de Gauss, $\prod\limits_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p$ divise donc $\binom{2.r+1}{r}$.

Pour comprendre, parce que c'est joli et classique en arithmétique :
- 11.13.17.19 *est un diviseur de* 11.12.13.14.15.16.17.18.19.20
- 11.13.17.19 *n'a aucun facteur caché dans* 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10
- 11.13.17.19 *divise donc* $\dfrac{11.12.13.14.15.16.17.18.19.20}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$ *(c'est à dire* $\binom{20}{10}$*)*

VI∼2) Montrez par récurrence forte sur n supérieur ou égal à 2 : $\prod\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} p \leqslant 4^n$ *(on distinguera suivant que $n+1$ est ou non un nombre premier, de la forme $2.r+1$ et on coupera alors* $\substack{p\leqslant n+1\\ p\in P}$ *en* $\substack{p\leqslant r+1\\ p\in P}$ *et* $\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}$*)*. Déduisez : $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \ln(p) \leqslant n.\ln(4)$.

Allons y pour l'initialisation de $\prod\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} p \leqslant 4^n$ avec n égal à 2 : $\prod\limits_{\substack{p\leqslant 2\\ p\in P}} p = 2$ et $4^2 = 16$

On se donne n quelconque et on suppose $\prod\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} p \leqslant 4^n$.

On veut alors majorer $\prod\limits_{\substack{p\leqslant n+1\\ p\in P}} p$.

Il y a un facteur de plus dans ce produit. Et encore.
Si $n+1$ est composé *(non premier)*, alors $\prod\limits_{\substack{p\leqslant n+1\\ p\in P}} p = \prod\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} p$. On majore par 4^n et donc par 4^{n+1} à plus forte raison.

Si $n+1$ est premier, alors $\prod\limits_{\substack{p\leqslant n+1\\ p\in P}} p = (n+1).\prod\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} p$ et on voit mal comment utiliser l'hypothèse de récurrence : $\prod\limits_{\substack{p\leqslant n+1\\ p\in P}} p = (n+1).\prod\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} p \leqslant (n+1).4^n$ et ce n'est pas 4^{n+1}.

L'idée va être de dire que n est impair *(il est premier, et 2 a déjà été traité)*.
On l'écrit $2.r+1$ et coupe le produit $\prod\limits_{\substack{p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p = \prod\limits_{\substack{p\leqslant r+1\\ p\in P}} p.\prod\limits_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p$.

Par hypothèse de récurrence forte : $\prod\limits_{\substack{p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p \leqslant 4^{r+1}.\prod\limits_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p$.

Ensuite, on sait que le produit $\prod\limits_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p$ divise $\binom{2.r+1}{r}$, donc il est majoré par $\binom{2.r+1}{r}$.

Par hypothèse de récurrence forte : $\prod\limits_{\substack{p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p \leqslant 4^{r+1}.\prod\limits_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p \leqslant 4^{r+1}.\binom{2.r+1}{r}$.

Mais la majoration par formule du binôme a donné $\binom{2.r+1}{r} \leqslant 2^{2.r}$.

$$\prod\limits_{\substack{p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p = \prod\limits_{\substack{p\leqslant r+1\\ p\in P}} p.\prod\limits_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p \leqslant 4^{r+1}.\prod\limits_{\substack{r+1<p\leqslant 2.r+1\\ p\in P}} p \leqslant 4^{r+1}.\binom{2.r+1}{r} \leqslant 4^{r+1}.2^{2.r} = 4^{2.r+1} = 4^{n+1}$$

Une démonstration diantrement astucieuse, due sauf erreur à Pavel Erdös.

On passe ensuite au logarithme pour un demi point : $\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\in P}} \ln(p) \leqslant n.\ln(4)$.

VII~0) $(0a_n)$ et (ε_n) sont deux suites réelles. On pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Montrez $\sum_{k=1}^{n} a_k.\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k.(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + \varepsilon_n.A_n$ pour tout n.

La formule $\sum_{k=1}^{n} a_k.\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k.(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + \varepsilon_n.A_n$ est la transformation d'Abel. Elle figure dans le cours de seconde année, et dans les exercices de Sup.
Et c'est une intégration par parties, si on écrit $a_n = A_n - A_{n-1}$ on peut écrire abusivement $a = A'$.
On doit alors prouver $\sum_{k=1}^{n} A'_k.\varepsilon_k = -\sum_{k=1}^{n-1} A_k.\varepsilon'_k + \varepsilon_n.A_n$

Mais allons y classiquement, en partant du membre de gauche, avec la convention $A_0 = 0$ qui permet d'écrire $a_k = A_k - A_{k-1}$ dans tous les cas.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}).\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} A_k.\varepsilon_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1}.\varepsilon_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} A_k.\varepsilon_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k.\varepsilon_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} A_k.\varepsilon_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k.\varepsilon_{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.\varepsilon_k = A_n.\varepsilon_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k.\varepsilon_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k.\varepsilon_{k+1} = A_n.\varepsilon_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k.(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})$$

VIII~0) Pour tout entier naturel n et tout nombre premier p, on note $v_p(n)$ la « valuation $p-$adique de n, c'est à dire l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20 !
2	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1	0	4	0	1	0	18
3	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	8
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2

On note pour tout entier naturel k non nul α_k (respectivement β_k) le nombre d'entiers d de N_n tels que p^k divise d (respectivement tels que $v_p(d) = k$). Montrez : $\alpha_k = \left[\frac{n}{p^k}\right]$. La II-1 est un piège, Sucri n'est jamais né en février ! Exprimez les β_k à l'aide de α_i et vice versa.

Combien d'entiers entre 1 et n sont divisibles par p^k ? Tous les nombres de la forme $p^k.q$ avec $1 \leqslant p^k.q \leqslant n$.
On a juste sur q la condition $\frac{1}{p^k} \leqslant q \leqslant \frac{n}{p^k}$ *(et q est entier)*.
Mais combien d'entiers entre 0 *(non inclus)* et $\frac{n}{p^k}$? Exactement $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ justement !

Pour α et β il suffit de bien lire la définition.
La relation $v_p(n) = k$ signifie que p^k divise n mais pas p^{k+1}.
La relation p^k divise n signifie $v_p(n) \geqslant k$ *(on peut avoir $n = p^k.q$ avec encore des facteurs p dans l'entier naturel q)*.

On a donc $\boxed{\alpha_k = \sum_{k\leqslant i} \beta_i \text{ et } \beta_k = \alpha_k - \alpha_{k+1}}$

Dans la formule $\alpha_k = \sum_{k\leqslant i} \beta_i$, l'entier naturel i va de k à l'infini, mais en fait, les β_i sont nuls dès que i est trop grand.
Il ne s'agit donc ni de série ni de famille sommable mais juste de somme.

VIII~1) Justifiez : $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} k.\beta_k$. Déduisez : $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$.

$n!$ est le produit de tous les entiers i de 1 à n.
On imagine que chaque entier est écrit comme produit de facteurs premiers.
Comme les exposants s'additionnent quand on effectue des produits, on a $v_p(a.b) = v_p(a) + v_p(b)$ pour tout couple d'entiers, et en généralisant :

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{n} v_p(i)$$

Dans cette somme, on réunit les $v_p(i)$ en fonction de leur valeur *(groupement de termes dans une somme ici finie)*.
Ceux pour lesquels $v_p(i)$ vaut 1, ceux pour lesquels $v_p(i)$ vaut 2, ceux pour lesquels $v_p(i)$ vaut 3 et ainsi de suite.
Comme on ne sait as à quel moment on s'arrête, on va regrouper « jusqu'à l'infini », même si à partir d'un certain k, $v_p(i)$ n'atteindra jamais k.

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ v_p(i)=k}} v_p(i) \Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ v_p(i)=k}} k \Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k.k$$

Ça devait très bien sa raconter avec juste des mots si on tournait bien ses phrases.

On repart de la formule précédente, mais on remplace β_k par $\alpha_k - \alpha_{k+1}$ et on décale les indices *(ce sont des sommes nulles à partir d'un certain rang, on peut ré-indexer, regrouper...)*.

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k.k = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k.k - \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{k+1}.k = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k.k - \sum_{k=2}^{+\infty} \alpha_k.(k-1)$$

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k.k - \sum_{k=2}^{+\infty} \alpha_k.k + \sum_{k=2}^{+\infty} \alpha_k = \alpha_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k$$

Il ne reste qu'à remplacer les α_k par leur formule en partie entière et on a $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$.

> *Toutes les sommes s'arrêtaient à un certain rang, mais ce rang est trop lourd à écrire à l'aide de n.*
> *Sinon, on avait déjà croisé cette formule quand il s'était agi de savoir « quel est l'exposant de 2 et de 5 dans 2022!, et par combien de zéros se termine l'écriture décimale de 2022!.*

VIII∼2) **Déduisez :** $\frac{n}{p} - 1 \leqslant v_p(n!) \leqslant \frac{n}{p-1} = \frac{n}{p} + \frac{n}{p.(p-1)}$.

On va encadrer simplement : $x - 1 \leqslant [x] \leqslant x$ *(on commence à la connaître celle là, et sinon, on passe son chemin)*.

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right] \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{p^k} = n.\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{n}{p-1}$$

On a calculé la somme de la série géométrique de raison $\frac{1}{p}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^k} = \lim_{K\to+\infty} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{p^k} = \lim_{K\to+\infty} \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p^{K+1}}}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{\frac{1}{p}}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{p-1}$$

> *De l'autre côté il n'est pas pertinent d'écrire* $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right] \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{p^k} - 1\right)$. *On a une somme (infinie ?) de* -1.

Non, il suffit de regarder un terme : $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right] = \left[\frac{n}{p}\right] + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$.
Toutes les parties entières sont positives. On a donc

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right] \geqslant \left[\frac{n}{p}\right] \geqslant \frac{n}{p} - 1$$

> *Pour voir l'exposant de p dans $n!$, on se contente de dire « combien de termes de $1.2.3\ldots n$ sont des multiples de p ? »*

Ensuite, je donne combien de points à qui sait passer de $\dfrac{n}{p-1}$ à $\dfrac{n}{p}+\dfrac{n}{p.(p-1)}$? Il suffit de partir du membre de droite.
Ou même, de partir d'une décomposition en éléments simples où on fait passer un terme de l'autre côté.

Finis les préliminaires, on passe au problème.

IX∼0) Montrez pour tout n : $\ln(n!) = \sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} v_p(n!).\ln(p)$.

Tout entier naturel se décompose en produit de facteurs premiers, avec justement comme exposant les valuations :

$$N = \prod_{p\in P} p^{v_p(N)}$$

avec la grande majorité des exposants égaux à 0.
On peut appliquer ceci à $N = n!$ et on exactement $\ln(n!) = \sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} v_p(n!).\ln(p)$.

Déduisez l'encadrement $\dfrac{\ln(n!)}{n} - K \leqslant \sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \dfrac{\ln(p)}{p} \leqslant \dfrac{\ln(n!)}{n} + \ln(4)$.

On a encadré en préliminaires $v_p(n)$ pour tout p *(majorant* $\dfrac{n}{p}+\dfrac{n}{p.(m-1)}$*)*. On multiplie par $\ln(p)$, on divise par n et on somme :

$$\frac{\ln(n!)}{n} = \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} v_p(n!).\frac{\ln(p)}{n} \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{\ln(p)}{p} + \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{\ln(p)}{p.(p-1)}$$

Mais la somme $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \dfrac{\ln(p)}{p.(p-1)}$ se majore par $\sum\limits_{2\leqslant k} \dfrac{\ln(k)}{k.(k-1)}$ en prenant tous les entiers et pas juste les entiers premiers.
C'est ce majorant qui s'appelle K *(question préliminaire où je vous disais justement « ne venez pas me demander qui est K ensuite)*.

De l'autre côté, c'est encore plus direct en utilisant $v_p(n) \geqslant \dfrac{n}{p} - 1$:

$$\frac{\ln(n!)}{n} = \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} v_p(n!).\frac{\ln(p)}{n} \geqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \Big(\frac{\ln(p)}{p} - \frac{\ln(p)}{n}\Big) = \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{\ln(p)}{p} - \frac{1}{n}.\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} 1$$

et justement, la question avec des binomiaux nous a donné $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \ln(p) \leqslant n.\ln(4)$.

$$\frac{\ln(n!)}{n} = \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} v_p(n!).\frac{\ln(p)}{n} \geqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \Big(\frac{\ln(p)}{p} - \frac{\ln(p)}{n}\Big) = \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{\ln(p)}{p} - \frac{1}{n}.n.\ln(4)$$

On fait passer de l'autre côté dans chaque inégalité et on a ce qui est demandé

$$\frac{\ln(n!)}{n} - K \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{\ln(p)}{p} \leqslant \frac{\ln(n!)}{n} + \ln(4)$$

IX∼1) Déduisez $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \dfrac{\ln(p)}{p} = \ln(n) + O(1)$.

Mais on a prouvé au tout début que la suite $(\ln(n!) - n.\ln(n))$ est un $O(n)$.
Ou si vous préférez : $\dfrac{\ln(n!)}{n} - \ln(n)$ est bornée.
Comme déjà ci dessus $\dfrac{\ln(n!)}{n} - \sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \dfrac{\ln(p)}{p}$ est bornée, on déduit que $\ln(n) - \sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \dfrac{\ln(p)}{p}$ est bornée.
Ceci s'écrit $\ln(n) - \sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \dfrac{\ln(p)}{p} = 0(1)$.

X~0) On définit l'application χ *(fonction indicatrice de P)* : $\chi(k) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & si \quad k \quad premier \\ 0 & sinon \end{array} \right|$.
On pose $a_k = \chi(k).\dfrac{\ln(k)}{k}$ et $A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$. Montrez : $\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \dfrac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(1+k)}.A_k + \dfrac{A_n}{\ln(n)}$.

Il faut assimiler la fonction χ puis la fonction a puis la série A. Mais la formule

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(1+k)}.A_k + \frac{A_k}{\ln(n)}$$

n'est autre que la transformation d'Abel établie en préliminaire :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k.(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + \varepsilon_n.A_n$$

avec $\varepsilon_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$ et $A_1 = 0$. On a en effet

$$\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} = \frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)} = \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{\ln(k).\ln(k+1)} = \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(k+1)}$$

X~1) Montrez : $\dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(k+1)}.A_k = \dfrac{1}{k.\ln(k)} + O\Big(\dfrac{1}{k.(\ln(k))^2}\Big)$.

Ensuite, on constate qu'on a montré juste avant $A_n = \ln(n) + 0(1)$ puisque $A_n = \sum_{k=1}^{n} \chi(k).\dfrac{\ln(k)}{k}$ dans laquelle on ne garde finalement que les k premiers.
On écrit ensuite $\ln(k+1) = \ln(k) + \ln\Big(1+\dfrac{1}{k}\Big) = \ln(k) + O(1)$ puisque le terme $\ln\Big(1+\frac{1}{k}\Big)$ tend vers 0 *(il est donc borné)*.
Chaque $\dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(k+1)}.A_k$ s'écrit donc

$$\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(k+1)}.A_k = \Big(\frac{1}{k.(\ln(k))^2} + O\Big(\frac{1}{k.(\ln(k))^3}\Big)\Big).\Big(\ln(k)+0(1)\Big) = \frac{1}{k.\ln(k)} + O\Big(\frac{1}{k.(\ln(k))^2}\Big)$$

X~2) Déduisez : $\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \dfrac{1}{p} = \ln(\ln(n)) + O(1)$.

On somme et la somme des $O\Big(\dfrac{1}{k.(\ln(k))^2}\Big)$ donne une série convergente. Donc un $O(1)$ *(ce que vous appelez un « nombre fini » dans votre jargon)*.
En tant que série convergente, elle reste bornée. On a donc

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(k+1)}.A_k = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)} + 0(1)$$

Enfin on utilise à nouveau ce qu'on a montré en début de devoir par comparaison série intégrale : $\sum_{2}^{n} \dfrac{1}{k.\ln(k)} = \ln(\ln(n)) + C + o(1)$.

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(k+1)}.A_k = \ln(\ln(n)) + 0(1)$$

On reporte dans la transformée d'Abel

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k).\ln(1+k)}.A_k + \frac{A_k}{\ln(n)} = \ln(\ln(n)) + 0(1) + \frac{A_k}{\ln(n)}$$

Mais $\dfrac{A_n}{\ln(n)}$ est bornée.
Il reste $\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}} \dfrac{1}{p} = \ln(\ln(n)) + 0(1)$.

A titre indicatif, il y a 9592 *nombres premiers entre* 2 *et* 10^5*, et la somme de leurs inverses vaut* 2.7052.
Et $\ln(\ln(10^5)) = 2,4434$.
La série des inverses des nombres premiers diverge quand même.

XI∼0) Pour tout entier naturel n, on note $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers distincts qui divisent n.
Écrivez un script Python qui prend en entrée n et retourne $\omega(n)$.

On doit juste compter parmi les entiers de 2 à n lesquels sont premiers et divisent n.
Pour ce qui est de diviser n, le test est $n\%d == 0$.
Pour ce qui est de savoir si un entier est premier, on va imaginer plusieurs choses :

Vous disposez d'une fonction efficace teste si un entier est premier.

```
def omega(n) : #int -> int
....c = 0
....for d in range(2, n+1) :
........if n%d == 0 and EstPremier(d) :
............c += 1
....return(c)
```

On crée soi même une fonction qui teste la primilaité (pas forcément la plus efficace)

```
def EstPremier(p) : #int -> boolean
....for k in range(2, p) :
........if p%k == 0 :
............return(False)
....return(False)
```

On dispose d'une liste triée des entiers premiers, a priori « illimitée ».

```
def omega(n) :
....c, i = 0, 0
....while Premier[i] =< n :
........if n%Premier[i] == 0 :
............c += 1
........i += 1
....return(c)
```

On fabrique cette liste des nombres premiers

```
Premier = [2]
p = 3
while len(Premier) < 500 :
....EstPremier = True
....for d in Premier :
........if p%d == 0 :
............EstPremier = False
....if EstPremier :
........Premier.append(p)
....p += 2
```

Un bisou de Sucri à qui en fait une version récursive.

XI∼1) L'une de ces données est erronée : laquelle ?

n	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
$\omega(n)$	3	2	3	2	3	5	2	1	3	1

L'erreur dans

n	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
$\omega(n)$	3	2	3	2	3	5	2	1	3	1

viendrait de qui ?

Ceux qui ont juste 1 sont des nombres premiers. Pourquoi pas.

2020 aurait juste trois facteurs ? On lui connaît déjà le 2 et le 5 : $\dfrac{2020}{2.2.4} = 101$ qui est premier. Trois facteurs premiers présents, c'est bon.

2025 est multiple de 5 et de 9 *(final en 25, et somme des chiffres)*. on divise : $\dfrac{2025}{9.25} = 9$.
Finalement, 2025 n'a que deux facteurs premiers : 3 et 5.
C'est bien lui le fautif.

n	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
$\omega(n)$	3	2	3	2	3	5	2	1	3	1
	$2^2.5^1.101^1$	$43^1.47^1$	$2^1.3^1.337^1$	$7^1.17^2$	$2^3.11^1.23^1$	$3^4.5^2$	$2^1.1013^1$	2027^1	$2^2.3^1.13^2$	2029^1

XI∼2) Soit n un entier dont la décomposition en produit de facteurs premiers est $n = \prod_{k=1}^{r} (p_k)^{\alpha_k}$ avec les p_k distincts et les α_k strictement positifs. Montrez : $\omega(n) = r \leqslant \dfrac{\ln(n)}{\ln(2)}$.

Dans la formule $n = \prod_{k=1}^{r} (p_k)^{\alpha_k}$, les $p_k$sont distincts, et ont un « vrai » exposant strictement positif. ce sont donc les facteurs premiers de n, chacun compté une seule fois.
Le nombre de termes est bien $\omega(n)$.
Chacun des p_k,est supérieur ou égal à 2, et chaque exposant est supérieur ou égal à 1 :

$$n = \prod_{k=1}^{r} (p_k)^{\alpha_k} \geqslant \prod_{k=1}^{r} (2)^{\alpha_k} \geqslant \prod_{k=1}^{r} (2)^1 = 2^r$$

On passe au logarithme *(croissant)* : $\ln(n) \geqslant r.\ln(2)$. On fait passer $\ln(2)$ de l'autre côté.

XI∼3) Montrez : $n \geqslant 2.\prod_{k=1}^{r-1} (2.k+1) \geqslant 2^r.(r-1)!$ et prouvez l'inégalité $\ln(n) \geqslant (r-1).\ln(r-1) - (r-1)$. Déduisez la domination $\omega(n) = O\Big(\dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}\Big)$.

Sans perte de généralité, on suppose les p_k triés par ordre croissant.
p_1 vaut donc au moins 2.
Les suivants sont impairs, de la forme $2.j+1$. Et le j^{ieme} nombre premier impair est au moins le j^{ieme} nombre impair : $p_j \geqslant (2.j+1)$.
On peut donc minorer

$$n = (p_1)^{\alpha_1}.\prod_{k=1}^{r-1} (p_{k+1})^{\alpha_{k+1}} \geqslant (2)^{\alpha_1}.\prod_{k=1}^{r-1} (2.k+1)^{\alpha_{k+1}} \geqslant 2^1.\prod_{k=1}^{r-1} (2.k+1)^1 \geqslant 2.\prod_{k=1}^{r-1} (2.k) = 2^r.\prod_{k=1}^{r-1} k = 2^r.(r-1)!$$

XI∼4) N est fixé dans $\mathbb{N}^*$ et on met sur range(1, N+1) *(noté E_N)* la probabilité uniforme *(« chacun des N entiers est pris avec la probabilité $\dfrac{1}{N}$ »)*. On définit alors la variable aléatoire *(fonction de E_N dans $\mathbb{R}$)* $X_{N,r}(d) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad r \textit{ divise } d \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$ et $X_N = \sum_{p \in E_n \cap P} X_{N,p}$. Justifiez $\forall n \in E_N,\ X_N(n) = \omega(n)$.

XI∼5) Montrez : $E(X_{N,r}) = \dfrac{1}{N}.\Big[\dfrac{N}{r}\Big]$ *(voyez l'espérance comme une valeur moyenne de la fonction, c'est tout)*.

XI∼6) Prouvez $E((X_N)^2) = E(X_N) + \sum_{\substack{1 \leqslant p,q \leqslant N \\ (p,q) \in P^2,\ p \neq q}} \dfrac{1}{N}.\Big[\dfrac{N}{p.q}\Big]$. Déduisez : $Var(X_N) = O(\ln(\ln(N)))$.

XI∼7) Montrez : $\lim_{N \to +\infty} \dfrac{1}{N}.Card\Big\{n \in E_N \mid |\omega(n) - \ln(\ln(N))| \geqslant (\ln(\ln(N))^{2/3}\Big\} = 0$.

Interprétation avec $N = 10^{99}$: le plus souvent, un entier à cent chiffres maximum aura entre 3 et 8 diviseurs premiers distincts.

Rappel : $a_n = o(b_n)$ c'est $\dfrac{a_n}{b_n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
$a_n \sim b_n$ c'est $\dfrac{a_n}{b_n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini *(et donc $a_n - b_n = o(a_n)$)*.
$a_n = O(b_n)$ c'est $\dfrac{a_n}{b_n}$ est borné quand n décrit $\mathbb{N}$.

Théorème — La fonction π qui à un réel x associe $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, est équivalente lorsque x tend vers $+\infty$, au quotient $\dfrac{x}{\ln(x)}$.

Le théorème des nombres premiers a été conjecturé dans la marge d'une table de logarithmes par Gauss en 1792 ou 1793 alors qu'il avait seulement 15 ou 16 ans *(selon ses propres affirmations ultérieures)* et par Adrien-Marie Legendre *(ébauche en l'An VI du calendrier républicain, soit 1797-1798, conjecture précise en 1808)*.

Le Russe Pafnouti Tchebychev a établi en 1851 que si x est assez grand, $\pi(x)$ est compris entre $0,92129.\frac{x}{\ln(x)}$ et $1,10556.\frac{x}{\ln(x)}$.

Le théorème a finalement été démontré indépendamment par Hadamard et La Vallée Poussin en 1896 à l'aide de méthodes d'analyse complexe, utilisant en particulier la fonction ζ de Riemann.

Source : concours BECEAS.
Concours pour cinq écoles d'actuariat et statistiques (ISFA Lyon, Dauphine, Strasbourg, ISUP-Paris Sorbonne (là où deux ex-MPSI2 sont partis l'an dernier)).

L'actuariat, c'est la branche dans laquelle les ingénieurs continuent à faire des maths de haut niveau *(plutôtdes statistiques, c'est vrai, mais pas comme au lycée)*.

Un actuaire est un professionnel spécialiste de l'application du calcul des probabilités et de la statistique aux questions d'assurances, de prévention, de comptabilité et analyse financière associée, et de prévoyance sociale. À ce titre, il analyse l'impact financier du risque et estime les flux futurs qui y sont associés. L'actuaire utilise des techniques issues principalement de la théorie des probabilités et de la statistique, pour décrire et modéliser de façon prédictive certains événements futurs tels que, par exemple, la durée de la vie humaine, la fréquence des sinistres ou l'ampleur des pertes pécuniaires associées.

Salaire de 35.000 euros à l'embauche, jusqu'à 150.000 ensuite pour les actuaires passés par Poytechnique.

◦15◦

L'élève affirme : a divise c et b divise c, donc $a.b$ divise c.
Montrez que c'est faux, mais montrez que c'est vrai si on ajoute l'hypothèse « a et b sont premiers entre eux ».

Contre-exemple le plus simple : $a = b = c = 2$. On a bien $2|b2$ et $2|2$ mais on n'a pas $(2 \times 2)|2$.

◦16◦

On pose $f = x \longmapsto \dfrac{4^x}{4^x+2}$. Calculez $f\left(\dfrac{1}{1997}\right) + f\left(\dfrac{2}{1997}\right) + f\left(\dfrac{3}{1997}\right) + \dots f\left(\dfrac{1996}{1997}\right)$ en regroupant les termes deux à deux judicieusement.

La clef :

$$f(1-x) + f(x) = \frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2} + \frac{4^x}{4^x+2} = \frac{4}{4+2.4^x} + \frac{4^x}{4^x+2} = \frac{2}{2+4^x} + \frac{4^x}{4^x+2} = \frac{2+4^x}{2+4^x} = 1$$

Notre somme, faite de 1996 termes s'écrit $\sum_{k=1}^{1996} f\left(\dfrac{k}{1997}\right)$ et se renverse en $\sum_{p=1}^{1997} f\left(\dfrac{1997-p}{1997}\right)$.

On la demi somme

$$\sum_{k=1}^{1996} f\left(\frac{k}{1997}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{1996} f\left(\frac{k}{1997}\right) + \sum_{k=1}^{1996} f\left(1 - \frac{k}{1997}\right)}{2} = \frac{\sum_{k=1}^{1996} 1}{2} = \frac{1996}{2} = 998$$

◦17◦

Dans cet établissement, il y a trois cent cinquante élèves etquatre classes : trois classes de 50 élèves et une classe de 100 élèves.
Calculez le nombre moyent d'élèves par classe du point de vue de l'administration.
Interrogez les élèves un par un et demandez à chacun : « combien d'élèves y a-t-il dans ta classe ? », puis faites la moyenne des résultats obtenus.
Pourquoi ne trouvez pas $\dfrac{50+50+50+100}{4}$ comme tout à l'heure.

Existerait il une solution où la moyenne du point devue de l'administration soit égale à la moyenne obtenue par sondage auprès des élèves ?

Existerait il une solution où la moyenne du point devue de l'administration soit strictement supérieure à la moyenne obtenue par sondage auprès des élèves ?

Point de vue de l'adminstration : quatre calsses de volume respectif 50, 50, 50 et 100

$$moyenne = \frac{50+50+50+100}{4} = \frac{250}{4} = \frac{125}{2} = 62,5$$

Point de vue des élèves : deuxcent cinquante réponses ainsi réparties :

réponse	on est cinquante	on est cent
effectif	150	100

$$moyenne = \frac{50 \times 150 + 100 \times 100}{250} = 70$$

Ce n'est pas la même moyenne. Mais ce n'est pas la même définition.
Nombre moyen d'élève dans chaque classe.
Nombre moyen de camarades de classe d'un élève.

Si il n'y a qu'une classe faite de 250 élèves, les deux moyennes vont coïncider.
Ou si on a cinq classes de 50 élèves.
Mais sinon, les moyennes ne seront pas les mêmes.

Pour sentir venir la réponse, on prend la situation extrème : une classe de un élève et une classe de $N-1$ élèves.
On calcule la moyenne admnistrative : $\dfrac{1+(N-1)}{2} = \dfrac{N}{2}$, puis la moyenne élèves : $\dfrac{1.1+(N-1).(N-1)}{N} = \dfrac{N^2-2.N+2}{N}$.
On a $\dfrac{N}{2} \leqslant \dfrac{N^2-2.N+2}{N}$.
On pouvait même aller encore plus loin avec une classe de N élèves et une classe vide.
L'adminstration dit $\dfrac{N}{2}$ élkèves par classe, et les élèves disent N élèves par classe.

On va supposer qu'on a n classes d'effectifs a_1 à a_n.
La moyenne administrative est

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

On pose ensuite la questions aux élèves

réponse	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
nombre de réponses	a_1	a_2	$\ldots$	a_n

et on calcule la moyenne de camarades de classe

$$\frac{(a_1)^2+(a_2)^2+\ldots+(a_n)^2}{a_1+a_2+\ldots a_n}$$

On va comparer et montrer que la première est toujours plus petite que la seconde

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqslant \frac{(a_1)^2+(a_2)^2+\ldots+(a_n)^2}{a_1+a_2+\ldots a_n}$$

C'es un cas particulier de l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 \leqslant \big((a_1)^2+(a_2)^2+\ldots+(a_n)^2\big).(1^2+1^2+\ldots+1^2)$$

entre les deux vecteurs $(1,\ 1,\ \ldots 1)$ et $(a_1, a_2, \ldots a_n)$.

Et le résultat est même valable avec des classes à effectif négatif !

∘18∘ Pouvez vous trouver un groupe $(G, *)$ et trois sous-groupes stricts de $(G, *)$ E, F et H vérifiant $E \cup F \cup H = G$?

On prend l'addition modulo 2 sur $\{0,\ 1\}^2$:

	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 0)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 1)	(0, 1)	(0, 0)	(1, 1)	(1, 0)
(1, 0)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 0)	(0, 1)
(1, 1)	(1, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)

On a bien un groupe. Les trois ensembles suivants $E = \{(0,0),\ (1,0)\}$, $F = \{(0,0),\ (0,1)\}$, et $H = \{(0,0),\ (1,1)\}$ sont trois sous-groupes.
Leur réunion re-donne le groupe entier.

∘19∘ On pose $A = \{2.a^2+3.b^2 \mid (a,\ b) \in \mathbb{N}^2\}$ et $B = \{\alpha^2+6.\beta^2 \mid (\alpha,\ \beta) \in \mathbb{N}^2\}$.
Montrez que B est stable par multiplication.
Montrez que le produit de deux éléments de A est dans B.
Montrezque le produit d'un élément de A et d'un élemet de B est dans A.
On pourra passer par $|\sqrt{2}.a+i.\sqrt{3}b|$ et $|\alpha+i.\sqrt{3}\beta|$.
Compil DS2013.

∘20∘

On définit : $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$. Montrez que 2 est valeur propre de A. Montrez que 3 est valeur propre de A.
Donnez une base du plan d'équations $\left\{\begin{array}{ccccc} x & +2.y & & -t & =0 \\ & y & +2.z & -t & =0 \end{array}\right|$ et montrez que ce plan est stable par A.
Donnez une base d'un autre plan, stable par A. Combien de plans stables par A pouvez vous trouver ?

Il suffit de trouver des vecteurs propres en résolvant $M.U = 2.U$ soit encore $(M-2.I_4).U = 0_4$:
Mais en fait, c'est évident :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour 3, c'est plus délicat :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

il a fallu résoudre $\begin{array}{cccccc} 2.x & & -4.z & +t & = & 3.x \\ & -y & -4.z & 2.z & = & 3.y \\ & & z & & = & 3.z \\ & -4.y & -8.z & 5.t & = & 3.t \end{array}$ donnant $z=0$ et $\begin{array}{ccccc} 2.x & & +t & = & 3.x \\ & -y & 2.z & = & 3.y \\ & -4.y & 5.t & = & 3.t \end{array}$

x et t sont égaux, on reporte, et le système dégénère en imposant juste $x = 2.y = t$.

Deux équations dans $(\mathbb{R}^4,+,.)$, c'est un plan.

Les vecteurs sont de la forme $\begin{pmatrix} 4.z-t \\ t-2.z \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

On sépare en $z.\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On tient une base. Et d'ailleurs, sans se fatiguer, on pouvait dire aussi : « dimension 2, donc il suffit de piocher dans ce plan deux vecteurs linéairement indépendants, et on aura une base ». Il suffit de savoir être flemmard en algèbre linéaire.

Plutôt que de montrer que l'image de toute vecteur du plan est dans le plan, il suffit de le montrer pour une base du plan. Ça fait moins de variables à trainer.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bon, là c'est clair

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

encore un qui fait le coup du vecteur propre ! c'est facile.

En fait, le plan P est le sous-espace propre de valeur propre 1. Tous ses vecteurs vérifient $M.U = U$.

Le plan $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$ est stable par A puisque pour tout vecteur de la forme $\alpha.E_2 + \beta.E_3$ (vous comprenez la notation), on a $A.(\alpha.E_2+\beta.E_3)=(2.\alpha).E_2+(3.\beta).E_3$. Il est resté dans le plan.

Remarque : | Le plan est facile à trouver sous sa description $Vect(E_2, E_3)$.

On veut des plans stables. Il suffit de prendre $Vect(E_2, E_1)$ où E_1 est un vecteur propre de valeur propre 1. Et il y en a une infinité avec des directions toutes différentes, vivant dans le plan P.

◦21◦ Montrez que si f est une application continue strictement positive de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{f(t)+f(1-t)}.dt$ vaut $1/2$.

Qu'est on tenté de faire quand on voit t et $1-t$? Surtout quand t va de 0 à 1 ? De renverser en posant $u=1-t$ (comme on pose $i=n-k$ dans une somme comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}.b_k$).

On a alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{f(t)+f(1-t)}.dt=\int_{u=1}^{u=0}\frac{f(1-u)}{f(1-u)+f(u)}.(-du)$.

On renverse par relation de Chasles, et on nomme I notre intégrale :

$\displaystyle I=\int_0^1 \frac{f(t)}{f(t)+f(1-t)}.dt=\int_0^1\frac{f(u)}{f(u)+f(1-u)}.du$.

La variable étant muette, on peut sommer les deux par linéarité :

$\displaystyle 2.I=\int_0^1\frac{f(x)+f(1-x)}{f(x)+f(1-x)}.dx=1$ et l'exercice est fini.

◦22◦ ♡ On sait que la suite $\left(\dfrac{n+3}{n+6}\right)$ *(notée u)* converge vers 1. Prouvez le en explicitant N_ϵ pour avoir $|u_n-1|\leqslant\varepsilon$ à partir du rang N_ϵ.

On sait que la suite $\left(\dfrac{\sin(e^n)}{n+6}\right)$ *(notée v)* converge vers 0. Prouvez le en explicitant N_ϵ pour avoir $|v_n-0|\leqslant\varepsilon$ à partir du rang N_ϵ.

/♡ On sait que la suite $\left(\dfrac{n^2+3.\sin(n)}{n^2-\ln(n)}\right)$ *(notée w)* converge vers 1. Prouvez le en explicitant N_ϵ pour avoir $|w_n-1|\leqslant\varepsilon$ à partir du rang N_ϵ.

Bonus de bonus : des conseils, piqués pour certains à Pierre-Jean Desnoux.

S'il y a un contre-exemple à chercher, essaye avec $((-1)^n)$.	
Trois petits points ne font pas une preuve.	
Juste. Justifié. Efficace.	
« Forcément », « naturellement » traduisent en fait l'ignorance.	
Si on a fait tendre n vers l'infini dans une limite, il n'y a plus de n dans le résultat.	
Si l'ensemble image est patit, le noyau sera grand.	
Tu devras avoir autant d'équations de chaque côté de $\Leftrightarrow$.	
Pour majorer ou minorer une somme, pense déjà à « nombre de termes fois le plus grand/petit ».	
Quand deux sigmas s'additionnent, on peut prendre la même variable de sommation. Quand deux sigmas se multiplient, on prend deux variables de sommation différentes. La somme $\sum_{k=1}^{n} a_k.b_k$n'a en général rien à voir avec $\sum_{k=1}^{n} a_k.\sum_{k=1}^{n} b_k$.	
$(\cos(2.t))'$ n'a pas de sens. f peut être croissante, décroissante, périodique. $f(x)$ est juste un nombre, il ne croît pas.	
Tu ne simplifieras pas par a si tu ne sais pas si a est non nul. Tu ne soustrairas pas des inégalités entre elles.	
Une équation ou une inéquation est une question (« trouver x pour que... »). Sinon, il y a des égalités et des inégalités, c'est tout.	

Une question telle que « montrez que f est un endomorphisme de E » appelle une réponse en plusieurs points : morphisme et endo.
Si l'hypothèse une une limite ou un équivalent, vous n'obtiendrez jamais une conclusion en « pour tout n ». Au mieux une conclusion en « pour tout n à partir d'un certain rang », avec un encadrement et non plus une égalité.
Pense à intercaler des termes : $a-b=a-\alpha+\alpha-b$ avec α bien choisi.
Le symbole $\Longrightarrow$ ne se galvaude pas. Si vous voulez écrire « donc », eh bien écrivez « donc ». Et au lieu de « donc », citez l'argument (on somme, on dérive, cas particulier, par passage à la limite...).
Les trois piliers de l'intégration : linéarité, croissance et Chasles.
Ne crains pas d'avancer lentement, crains seulement de t'arrêter.
Jamais de sigma « mous ».
Si je tiens la fonction, je ne tiens pas sa dérivée. Si je tiens sa dérivée, je maîtrise la fonction.
Penser aux idées simples : sommes télescopiques, décompositions en éléments simples, intégration par parties, formule de Leibniz, factorisation de a^n-b^n, formules de Viète, théorème d'encadrement, majoration terme à terme, comparaison série intégrale, principe des tiroirs, quantité conjuguée, inégalité triangulaire (première et seconde)
Tu ne soustrairas point des équivalents de même ordre. Tu ne passeras pas les équivalents aux exponentielles.
Cette variable a-t-elle été présentée ? Une lettre muette est en fait une lettre absente ($\sum_{k=0}^{n}$ ..., $\int_a^b \ldots dx$).
Nommer les objets, c'est déjà prendre le pouvoir sur eux.
Gauss, Bézout et Euclide. Avec ça, tu tiens presque toute l'arithmétique élémentaire. Sur les entiers, comme sur les polynômes. Mais le lemme de Gauss ne dit pas n'importe quoi.
« Montrez qu'il existe un unique a vérifiant.. ; », ce n'est pas une question. C'est deux questions : existence et unicité.
Une suite qui converge vers a peut très bien ne jamais prendre la valeur a.
Ne confonds pas « borne supérieure » et « plus grand élément ». Ne dis pas « le majorant » mais « un majorant ».
Pour « identifier », il faut presque toujours un argument de type « base » ou « somme directe » , sinon c'est presque toujours une bêtise.
La relation $f(x)=g(x)$ n'entraîne pas $f'(x)=g'(x)$ si elle n'a lieu que pour un x particulier.
Ne te perds pas entre les étages (f ou $f(x)$, $u_n$ou (u_n), pas de $(f(0))'$...).
Une formule en « pour tout n » se démontre souvent sans récurrence, et sert dans la suite pour des récurrences.
Tu ne diviseras jamais par 0. Une suite ne peut pas être équivalente à 0.
Si tu as bien cherché un exercice... ...même si tu n'as rien trouvé... ...tu t'es bien prépéaré pour les concours.
Les réponses aux questions posées tu encadreras. Les arguments tu souligneras. Tes notations tu mettras en valeur.
Si tu sens que ton argument est bancal, crois moi, le correcteur le saura encore mieux que toi...
On justifie la convergence d'une série en étudiant, dominant.. ; son terme général, et pas avec des $\sum$ (sauf pour la série géométrique).
$x.\ln(x)$ en 0 est la forme indéterminée classique. Et 1^∞ est une forme indéterminée (classique $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$).

◦23◦ ♡ Que fait la suite $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{\sqrt{3}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}},\ldots)$?

$\sqrt{x}$ c'est $x^{\frac{1}{2}}$. Ensuite , $\sqrt{\sqrt{x}}$ c'est $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ c'est à dire $x^{\frac{1}{4}}$.

Et si on met n racines carrées : $x^{\frac{1}{2^n}}$.
On étudie donc ici $(n+1)^{\frac{1}{2^n}}$.

Passons au logarithme : $\dfrac{\ln(n+1)}{2^n}$.
Pour ce qui est de la limite, c'est vite réglé : 0 pour ce quotient. Et donc 1 pour la suite.

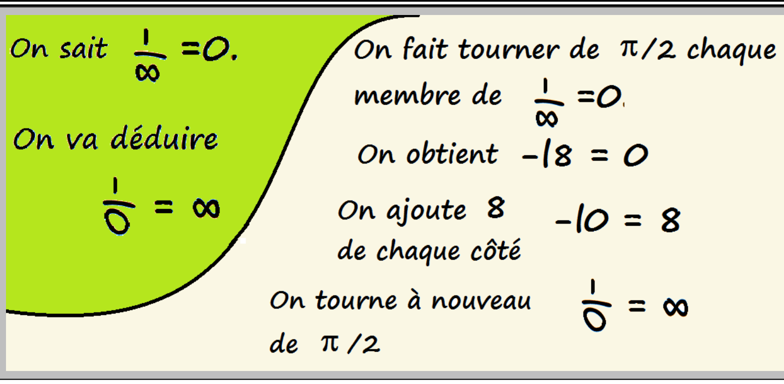
Pour ce qui est de la monotonie : $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{2^x}$ a pour dérivée $x \longmapsto \dfrac{1-\ln(x).\ln(2).x}{x.2^x}$. On trouve le signe « à la louche ».
Pardon, on voulait $x \longmapsto \dfrac{\ln(x+1)}{2^x}$. Bon, c'est $x \longmapsto 2.\dfrac{\ln(x+1)}{2^{x+1}}$, donc on connaît déjà les variations.
De 1 à $\sqrt{2}$ on monte, mais après on redescend...

En fait, simplement, on constate :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)^{\frac{1}{2^{n+1}}}}{(n+1)^{\frac{1}{2^n}}} = \left(\frac{n+2}{(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

La position de ce réel par rapport à 1 dépend juste de la position de $\dfrac{n+2}{n^2+2.n+1}$ par rapport à 1.
On retrouve la décroissance mentionnée à partir du rang 1.

◦24◦



◦25◦ On demandait de calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, un élève a mal recopié et a calculé $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. Son déterminant est il plus grand que le déterminant demandé ? Quelle est la valeur de la différence $|eleve - demande|$. *Si vous calculez réellement les deux déterminants de taille 4, vous n'aurez pas tort, mais vous ne serez pas digne de rester en MPSI2.*

Quelle est la différence entre les deux formules ?

Dans l'une : $+5.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ et dans l'autre $-5.\begin{vmatrix} 2 & 3 & & 1 \\ 2 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & & 3 \end{vmatrix}$.

La différence vaut $10.\begin{vmatrix} 2 & 3 & & 1 \\ 2 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & & 3 \end{vmatrix}$.

Après, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ & \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10.$

◦26◦ Un élève n'a pas bien recopié la définition de la convergence d'une suite réelle u vers un réel a. Indiquez qui sont les suites vérifiant les propriétés suivantes :

a	$\forall \varepsilon \geqslant 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow \lvert u_n - a \rvert \leqslant \varepsilon$
b	$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \lvert u_n - a \rvert \leqslant \varepsilon$
c	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_\varepsilon \text{ et } \lvert u_n - a \rvert \leqslant \varepsilon$
d	$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \lvert u_n - a \rvert \leqslant \varepsilon$
e	$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \lvert u_n - a \rvert \leqslant \varepsilon$

a	$\forall \varepsilon \geqslant 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow \lvert u_n - a \rvert \leqslant \varepsilon$
	On a le droite de prendre $\varepsilon = 0$! A partir du rang N_0 la suite est constante égale à a. Ce qui correspond à ce que les plus mauvais croient être la convergence vers a...

b	$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$
	Toute suite vérifie ça. Qu'elle converge ou non ! Un $\exists$ suivi d'une implication, c'est si facile à avoir ! Par exemple $\exists n\ (n \geqslant 7 \Rightarrow n = 43)$ est totalement vrai. Il suffit de prendre $n = 2$ et on a faux implique on s'en fout.... je sais, c'est toujours contraire à ce que les élèves pensent car ils lisent trop vite les assertions mathématiques, en oubliant que l'essentiel, c'est... les variables (tiens, je l'ai déjà dit). Pour tout N il suffit donc de prendre $n = N - 1$ et l'implication est vraie.

c	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_\epsilon\ et\ \|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$
	Ceci est faux. A cause du et. Cette affirmation semble prétendre qu'une fois N_ε connu, eh bien, tous les entiers sont plus grands que N_ε et en plus on a l'inégalité. Mais ! Si tous les entiers sont plus grands que N_ε, c'est donc que N_ε vaut 0 ! C'est la quantification qui le dit. Mais maintenant que l'assertion vient de forcer la main ainsi, on $\|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$ pour tout n. Et pour tout ε. Vous savez quoi ? L'élève a écrit que la suite était constante égale à a. Il ne s'en doutait pas. Pour juste un mot...

Vous comprenez pourquoi un correcteur s'arrache les cheveux quand il lit vos quantifications qui ressemble aux vraies mais contiennent souvent un truc de travers...

d	$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$
	A partir du rang N qui ne dépend que de lui même, on a$\|u_n - a\|$ qui est plus petit n'importe quel ε. La suite est constante égale à a à partir du rang N. Et ce rang N est donné par la quantification.

e	$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N\ \Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$
	Même chose qu'au dessus.

Et malgré tout, après cet exercice, qui va quantifier correctement, sans oublier un symbole ici ou là, et sans transformer un $\Rightarrow$ en « du coup » ?

∘27∘

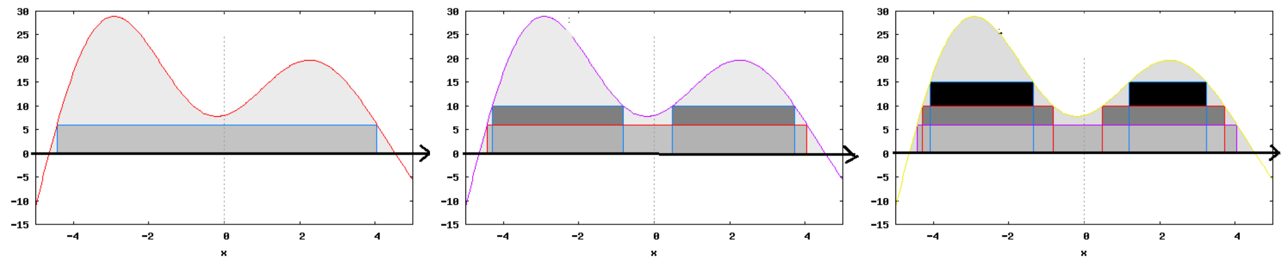
On note (E) l'équation $x + 1 + \dfrac{1}{x} = 0$, dont une racine sera notée x justement.
On multiplie par x^2 : $x^3 + x^2 + x = 0$.
On factorise : $x^3 + x.(x+1) = 0$.
On remplace $x + 1$ par $\dfrac{-1}{x}$: $x^3 + x.\dfrac{1}{x} = 0$.
On trouve $x^3 = -1$ qu'on résout : $x = -1$.
On reporte dans l'équation (E) : $1 + 1 + 1 = 0$. Problème ?

Bon, on est dans quel ensemble ?
Si on est dans $\mathbb{R}$ ce n'est pas un problème.
L'équation initiale n'a pas de racine. On peut déduire ce qu'on veut alors, sur le modèle « Faux implique Faux ».
On peut dire aussi qu'on a montré « si il y a une racine réelle, ce ne peut être que -1, mais à cause des conditions nécessaires, il faut reporter, et on constante que -1 n'est pas racine ».

Si on est sur $\mathbb{C}$,le passage $x^3 = -1 \Rightarrow x = -1$ est faux.
On a juste $x^3 = -1 \Leftarrow x = -1$. Mais sinon, il y a aussi les deux racines de $x^2 + x + \dfrac{1}{x}$, comme par hasard...

◦28◦

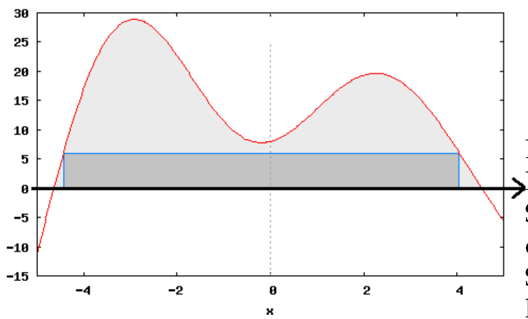
♠ Soit f une application continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. On va montrer que f est majorée *(c'est quelle quantification : $\forall x \in [a,\ b],\ \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$ ou $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a,\ b],\ f(x) \leqslant M$?)*. On pose pour tout n : $A_n = \{x \in [a,\ b] \mid f(x) \geqslant n\}$. On suppose que f n'est pas majorée *(quantifiez)*. Montrez alors que les A_n sont des parties de $\mathbb{R}$ non vides, majorées. On pose alors $\alpha_n = Sup(A_n)$ pour tout n. Montrez alors pour tout n : $A_{n+1} \subset A_n$ et $a \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$. Déduisez que la suite (α_n) converge. On note sa limite β. Que se passe-t-il alors en β ? Concluez ?



Montrez que f est aussi minorée.

On va montrer « toute application continue de $[a,\ b]$ (segment) dans $\mathbb{R}$est majorée. Sans utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass. Mais évidemment, on va utiliser ce qui caractérise $\mathbb{R}$: toute partie non vide majorée admet un plus petit majorant.

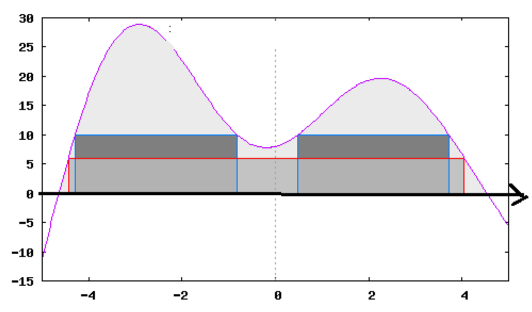
On raisonne par l'absurde. On suppose f non majorée : $\forall M,\ \exists x \in [a,\ b],\ f(x) > M$.



En prenant $M = n$ on a au moins un élément x dans chaque A_n.
Pas le même pour tous les A_n quand même, faut pas pousser.
Sur ce dessin, on a représenté l'ensemble A_1, là où la fonction dépasse 1.
Sa borne supérieure est visible à la fin de l'ensemble A_1, le long de l'axe des abscisses.

Chaque A_n est une partie non vide, minorée par a. Elle admet une borne supérieure, que l'on nomme a_n.
Par continuité de f , on a $\alpha_n \in A_n$.

Pour tout n, on a $A_{n+1} \subset A_n$. En effet, quand on prend une abscisse x vérifiant $f(x) \geqslant n+1$, on a forcément $f(x) \geqslant n$.
Il s'ensuit, en passant à la borne supérieure : $Sup(A_{n+1}) \leqslant Sup(A_n)$.
Proprement : le réel α_n majore tous les éléments de A_n donc tous les éléments de A_{n+1}.
En tant que « un majorant de A_{n+1} », il est plus grand que « le plus petit majorant de A_{n+1} ».
On a donc $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$ (avec égalité éventuelle a priori, même si de fait, c'est difficile d'avoir cela).



Sur ce schéma, on lit l'inclusion de A_2dans A_1 et on voit la borne supérieure « descendre ».

La suite (α_n) est décroissante comme on vient de le voir. Et elle est minorée par a car tous les $\alpha_n$sont dans $[a,\ b]$.
Par principe de la borne supérieure (ou plutôt de la borne inférieure), elle converge vers son plus grand minorant.
On note β la limite de la suite (α_n).
Par continuité de f en β on a $f(\alpha_n) \longrightarrow_{n\to+\infty} f(\beta)$.
Mais dans le même temps, chaque α_n est dans $A_n$et vérifie $f(\alpha_n) \geqslant n$. Ceci donne $f(\alpha_n) \longrightarrow_{n\to+\infty} +\infty$.
Les deux résultats se contredisent. Le raisonnement par l'absurde se termine.
Toute application continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ est majorée.
En l'appliquant à $-f$: Toute application continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ est minorée.

∘29∘ Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt[\ln(n)]{\dfrac{\ln(n)}{n}}$.
Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n^{1/\sqrt{n}}$.
Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt{n}^{1/n}$.
Trouvez le plus de coefficients du développement asymptotique :
$\sqrt{n^4+n^3}-n^2 = a.n+b+\dfrac{c}{n}+\dfrac{d}{n^2}+o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}$.

On va utiliser largement $a^b=(e^{\ln(a)})^b=e^{b.\ln(a)}$ et ramener à caque fois à l'étude de $b.\ln(a)$ (et on passera ensuite à l'exponentielle).

On rappelle aussi $\sqrt[k]{x}=x^{1/k}$ et donc $\ln(\sqrt[k]{x})=\dfrac{\ln(x)}{k}$.

On calcule le logarithme de $\sqrt[\ln(n)]{\dfrac{\ln(n)}{n}}$

$$\frac{\ln\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}{\ln(n)}=\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}-\frac{\ln(n)}{\ln(n)}$$

Le premier terme est de la forme $\dfrac{\ln(t)}{t}$ avec $t=\ln(n)$ qui tend vers $+\infty$. Il tend donc vers 0. L'autre terme vaut 1. Globalement, le logarithme tend vers -1 et la limite cherchée vaut e^{-1}.

Le nombre $n^{1/\sqrt{n}}$a pour logarithme $\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$. Les croissances comparées lui donnent une limite nulle, et la limite de $n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ est donc 1.

En revanche $\sqrt{n}^{1/n}$ a pour logarithme $\dfrac{1}{n.}.\ln(\sqrt{n})$ ce qui fait $\dfrac{\ln(n)}{2.n}$. Toujours les croissances comparées : la limite est nulle.
$(\sqrt{n})^{1/n}$ tend vers 1.

$$\sqrt{n^4+n^3}-n^2=\frac{n^4+n^3-(n^2)^2}{\sqrt{n^4+n^3}+n^2}=\frac{n^3}{n^2.\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}\sim\frac{n^3}{2.n^2}=\frac{n}{2}$$

Première étape donc : $\sqrt{n^4+n^3}-n^2=\dfrac{n}{2}+o(n)_{n\to+\infty}$.

On soustrait alors ce terme pour voir ce qu'il reste.

$$\sqrt{n^4+n^3}-n^2-\frac{n}{2}=\frac{n^4+n^3-\left(n^2+\dfrac{n}{2}\right)^2}{\sqrt{n^4+n^3}+n^2+\frac{n}{2}}=\frac{-n^2/4}{n^2.\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n^2+\frac{n}{2}}\sim\frac{-n^2/4}{2.n^2}=-\frac{1}{8}$$

Deuxième étape donc : $\sqrt{n^4+n^3}-n^2=\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{8}+o(1)_{n\to+\infty}$.

Et pourquoi ne pas recommencer ?

$$\sqrt{n^4+n^3}-n^2-\frac{n}{2}+\frac{1}{8}=\frac{n^4+n^3-\left(n^2+\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{8}\right)^2}{\sqrt{n^4+n^3}+n^2+\frac{n}{2}}=\frac{\dfrac{n}{8}-\dfrac{1}{64}}{n^2.\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}\sim\frac{n/8}{2.n^2}=\frac{1}{16.n}$$

Troisième étape donc : $\sqrt{n^4+n^3}-n^2=\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16.n}+o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)_{n\to+\infty}$.

Et en poursuivant de la même façon :

$$\sqrt{n^4+n^3}-n^2=\frac{n}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16.n}-\frac{5}{128.n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}$$

Il y a d'autres façons d'obtenir ce développement.

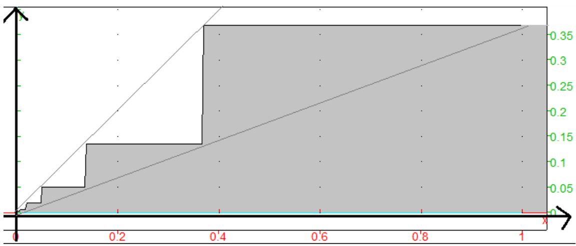
$$\sqrt{n^4+n^3}=n^2.\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{\frac{1}{2}}=n^2.\Big(1+\frac{1}{2}.\frac{1}{n}+\frac{\frac{1}{2}.\Big(\frac{1}{2}-1\Big)}{2}.\Big(\frac{1}{n}\Big)^2+\frac{\frac{1}{2}.\Big(\frac{1}{2}-1\Big).\Big(\frac{1}{2}-2\Big)}{6}.\Big(\frac{1}{n}\Big)^3+\frac{\frac{1}{2}.\Big(\frac{1}{2}-1\Big).\Big(\frac{1}{2}-2\Big).\Big(\frac{1}{2}-3\Big).}{24}.\Big(\frac{1}{n}$$

◦30◦ ♡ Calculez cette intégrale « exponentielle » $\int_0^1 2^x.3^{-x}.4^x.5^{-x}.dx$.

Il suffit d'écrire $2^x.3^{-x}.4^x.5^{-x} = e^{x.\ln(2)}.e^{-x.\ln(3)}.e^{x.\ln(4)}.e^{-x.\ln(5)}$.
On pose alors $A = \ln(2) + \ln(4) - \ln(3) - \ln(5)$ et on intègre en $\dfrac{e^{A.x}}{A}$.
On trouve $\dfrac{7}{15.\ln(15/8)}$.

◦31◦ ♡ On définit $f = x \longmapsto \exp([\ln(x)])$. Prolongez la par continuité en 0 (encadrement, pas d'epsilon). Est elle alors dérivable ?
Calculez $\int_0^1 f(t).dt$.

f n'est pas définie en 0, mais largement à droite de 0 : sur $]0, +\infty[$, on va donc regarder si $\lim_{x\to 0^+} e^{[\ln(x)]}$ existe. Et si elle existe, on verra sa valeur.



On utilise la formule $t - 1 \leqslant [t] \leqslant t$ pour tout t (stricte à gauche, et alors ?).
On a donc $\ln(x) - 1 \leqslant [\ln(x)] \leqslant \ln(x)$ puis $e^{\ln(x)-1} \leqslant e^{[\ln(x)]} \leqslant e^{\ln(x)}$ et donc $\dfrac{x}{e} \leqslant f(x) \leqslant x$.
Comme $\dfrac{x}{e}$ et x tendent vers 0 quand x tend vers 0, par encadrement, $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.
On posera donc $f(0) = 0$. Prolongée par continuité.
En revanche, f est discontinue en chaque e^{-n} pour n dans $\mathbb{N}$.

Pour ce qui est de la dérivabilité, le réflexe est de revenir à la définition *(pas au calcul, il n'y en a pas de possible ici)*.
On regarde si les taux d'accroissement ont une limite en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{e^{[\ln(x)]}}{x}$$

L'astuce consiste à écrire que ceci vaut $e^{[\ln(x)]-\ln(x)}$.
Que fait cette différence quand x tend vers 0 ? Elle passe son temps à se promener entre 0 et -1. Elle n'aura pas de limite.
Proprement, on prend des x dont le logarithme est entier : $x_n = e^{-n}$: $\dfrac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = e^0$. Un tel taux tend vers 1.
Puis on prend des x dont le logarithme est « demi-entier » : $y_n = e^{-n-0{,}5}$: $\dfrac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = e^{-0{,}5}$. Un tel taux tend vers $1/\sqrt{e}$.
Le critère séquentiel assure que $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ n'a pas de limite en 0. f n'est pas dérivable en 0 *(à droite, parce qu'à gauche, la question ne se pose même pas)*.

Et pour le calcul de l'intégrale ? Il faut appliquer la relation de Chasles, et pas qu'un peu.
On découpe tout $[0, 1]$ et même $]0, 1]$ en fait, avec les points de discontinuité e^{-n}.

$$]0, 1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]e^{-n-1}, e^{-n}]$$

Sur chaque intervalle $]e^{-n-1}, e^{-n}]$, f est constante, égale à e^{-n-1}.
Et chaque intervalle est de longueur $e^{-n} - e^{-n-1}$.
On a un rectangle d'aire $(e^{-n} - e^{-n-1}).e^{-n-1}$.
On somme cette infinité de rectangles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n-1}.(e^{-n} - e^{-n-1})$$

(je n'aime pas la notation $\sum_{n=0}^{+\infty}$, mais je crains qu'avec la vraie notation $\sum_{n\geqslant 0}$ ne vous permette pas d'y voir une infinité de termes).

On simplifie en $\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n}$. On a une série géométrique de raison e^{-2} différente de 1 :

$$\left(1-\frac{1}{e}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n-1} = \left(1-\frac{1}{e}\right).\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{e}-\frac{1}{e^{(2.n+2)}}}{1-\frac{1}{e^2}}$$

L'intégrale vaut $\frac{1}{1+e}$.

◦32◦

♡ Montrez en explicitant N_ϵ que la suite $\left(\ln\left(\frac{2.n+1}{2.n+3}\right)\right)$ converge vers 0.
Montrez en explicitant N_ϵ que la suite $\left(\ln\left(\frac{2.n+1}{n+3}\right)\right)$ converge vers $\ln(2)$.
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon)$.

	$\left[\frac{3-e^\varepsilon}{2.e^\varepsilon-2}\right]+1 \leqslant n$		$\left[\frac{6-e^\varepsilon}{2.(e^\varepsilon-1)}\right]+1 \leqslant n$
$\Rightarrow$	$\frac{3-e^\varepsilon}{2.e^\varepsilon-2} \leqslant n$	$\Rightarrow$	$6-e^\varepsilon \leqslant 2.(e^\varepsilon-1).n$
$\Rightarrow$	$3-e^\varepsilon \leqslant (2.e^\varepsilon-2).n$	$\Rightarrow$	$2.n+6 \leqslant e^\varepsilon.(2.n+1)$
$\Rightarrow$	$2.n+3 \leqslant e^\varepsilon.(2.n+1)$	$\Rightarrow$	$\frac{2.n+6}{2.n+1} \leqslant e^\varepsilon$
$\Rightarrow$	$\frac{2.n+3}{2.n+1} \leqslant e^\varepsilon$	$\Rightarrow$	$\ln\left(\frac{2.n+6}{2.n+1}\right) \leqslant \varepsilon$
$\Rightarrow$	$\ln\left(\frac{2.n+3}{2.n+1}\right) \leqslant \varepsilon$	$\Rightarrow$	$0 \leqslant -\ln\left(\frac{2.n+1}{2.n+6}\right) \leqslant \varepsilon$
$\Rightarrow$	$0 \leqslant -\ln\left(\frac{2.n+1}{2.n+3}\right) \leqslant \varepsilon$	$\Rightarrow$	$\left|\ln\left(\frac{2.n+1}{2.n+6}\right)\right| \leqslant \varepsilon$
$\Rightarrow$	$\left|\ln\left(\frac{2.n+1}{2.n+3}\right)\right| \leqslant \varepsilon$	$\Rightarrow$	$\left|\ln\left(\frac{2.n+1}{n+3}\right)-\ln(2)\right| \leqslant \varepsilon$

◦33◦

Colonne 1 : quelles propriétés passent de la suite (u_n) aux deux sous-suites $(u_{2.n})$ et $(u_{2.n+1})$.
Colonne 2 : quelles propriétés passent des deux sous-suites $(u_{2.n})$ et $(u_{2.n+1})$ à la suite (u_n).

propriété	colonne 1	colonne 2
croissante		
monotone		
périodique		
bornée		
convergente		
non convergente		
dont la série converge		
la différence de deux termes consécutifs tend vers 0		

◦34◦

♡ On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Montrez que cette suite est strictement croissante et ne peut pas converger.
Que déduisez vous ?

```
u, n = 1., 0
while u < 10 :
....u += 1 / u
....n += 1
```

Que fait ce script ? Pourquoi valait il mieux mettre `u = 1.` ?

Il faut montrer que tous les termes de la suite existent. On va montrer qu'ils sont tous positifs.
Pour celà, on effectue une récurrence :
MP_n : $u_n$existe et est strictement positif.
C'est vrai pour u_0.
Et si $u_n$existe et est strictement positif, alors son inverse existe, est positif, et la somme $u_n + \frac{1}{u_n}$est strictement positive.

La récurrence ne pouvait se contenter d'essayer de propager « $u_n$existe », car l'existence de u_n ne prouve pas que u_{n+1} existera aussi.
De même, $u_n \neq 0$ ne garnatita as $u_{n+1} \neq 0$.

Tous les u_n sont positifs. Mais alors pour tout n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

On reconnaît que la suite est croissante.

Là, raisonnement classique, par élimination.
Peut elle converger ?
Si elle converge vers une limite L, alors par passage à la limite dans $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, on obtient $L = L + \frac{1}{L}$.
La suite ne peut pas converger.

Mais elle pourrait diverger sans pour autant tendre vers $+\infty$. En oscillant.

Mais elle est croissante.
Et une suite croissante n'a qu'une alternative : converger ou tendre vers $+\infty$.
Par éimination, elle diverge vers $+\infty$.

Ce script calcule de proche en proche les termes de la suite, et cherche le premier indice pour lequel la suite va dépasser 10.

On initialise avec `u = 1.` au lieu de `u = 1` afin d'être sûr que les divisions ne seront pas des divisions euclidiennes (on force à dire « `u` est un flottant). Sinon, suivant la version de Python, on a `u = 2` puis `u = 2+(1//2) = 2+0` et la suite stagne à 2.
Atteindre `2` à `9` se fait assez rapidement :

Pour 10 c'est un peu plus long. Mais pas trop :

dépasser 2	à partir de $n = 1$		dépasser 7	à partir de $n = 23$
dépasser 3	à partir de $n = 4$		dépasser 8	à partir de $n = 31$
dépasser 4	à partir de $n = 7$		dépasser 9	à partir de $n = 39$
dépasser 5	à partir de $n = 12$		dépasser 10	à partir de $n = 49$
dépasser 6	à partir de $n = 17$		dépasser 20	à partir de $n = 198$

∘35∘

♡ Soit (a_n) une suite réelle. On suppose que $(a_{2.n+20})$, $(a_{2.n+9})$ et $(a_{13.n^2})$, convergent. Montrez qu'elles ont la même limite et que la suite (a_n) converge aussi.
On suppose que $(a_{2.n})$, $(a_{3.n+1})$, $(a_{5.n+7})$, $(a_{11.n+5})$ et $(a_{13.n+2})$, convergent. Montrez qu'elles ont la même limite mais que la suite (a_n) ne converge pas forcément.

On note α, β et γ les limites des trois sous-suites $(a_{2.n+20})$, $(a_{2.n+9})$ et $(a_{13.n^2})$.
On va montrer qu'elles sont égales, en trouvant une sous-suite commune à $(a_{2.n+20})$ et $(a_{13.n^2})$
une sous-suite commune à $(a_{2.n+9})$ et $(a_{13.n^2})$
La suite $(a_{13.(2.p+2)^2})$ est extraite de $(a_{2.n+20})$ avec $n = 26.p^2 + 52.p + 16$
elle converge donc vers α
est extraite de $(a_{13.n^2})$ avec $n = 2.p + 2$
elle converge donc vers γ
Par unicité de la limite : $\alpha = \gamma$.

Pour les autres, la suite $(a_{13.(2.p+1)^2})$ permet d'obtenir $\beta = \gamma$.

Par transitivité de l'égalité : $\alpha = \beta$.
Or, avec $(a_{2.n+20})$ et $(a_{2.n+9})$ on couvre tous les entiers à partir d'un certain rang.
Par recollement, la suite globale converge (ici, ce n'est pas la limite d'une somme, mais du recollement de deux suites).

H_0	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P_\varepsilon,\ \forall n,\ n \geqslant P_\varepsilon \Rightarrow \lvert a_{2.n+20} - \alpha \rvert \leqslant \varepsilon$
H_1	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists I_\varepsilon,\ \forall n,\ n \geqslant I_\varepsilon \Rightarrow \lvert a_{2.n+9} - \alpha \rvert \leqslant \varepsilon$
$\boxed{?}$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists T_\varepsilon,\ \forall k,\ k \geqslant T_\varepsilon \Rightarrow \lvert a_k - \alpha \rvert \leqslant \varepsilon$

Il suffit, pour ε donné, de prendre $T_\varepsilon = Max(2.P_\varepsilon + 10,\ 2.I_\varepsilon + 9)$ et de vérifier, en écrivant k sous la forme $2.n + 20$ ou $2.n + 9$ suivant sa parité.

Avec $(a_{2.n})$, $(a_{3.n+1})$, $(a_{5.n+7})$, $(a_{11.n+5})$ et $(a_{13.n+2})$ on ne couvre pas toute la suite.
Certains termes(et même carrément une sous-suite) nous échappent.
Avec des $p.p.c.m.$, on peut relier ces suites entre elles.

Mais cherchons les entiers

congrus à 1	modulo 2
congrus à 0	modulo 3
congrus à 0	modulo 5
congrus à 0	modulo 11
congrus à 0	modulo 13

Ils sont de la forme $(3 \times 5 \times 11 \times 13).k$ avec k impair.

On décide donc de poser

a_n	$= p$	si $\exists p,\ n = 3.5.11.13.(2.p+1)$
	$= 0$	sinon

Les six sous-suites convergent vers 0. Mais la suite globale ne converge pas, car au moins une de ses sous-suites tend vers l'infini.

∘36∘

♡ On donne $a_n = n + 4 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)_{n\to+\infty}$. Donnez la limite de $a_{2.n} - 2.a_n$ et de $n.(a_{n+1} - 2.a_n + a_{n-1})$ quand n tend vers l'infini.

On écrit $a_{2.n} = 2.n + 4 + \frac{1}{2.n} + o\left(\frac{1}{2.n}\right)$ puisque $2.n$ tend bien vers l'infini.

On compare avec $2.a_n = 2.n + 8 + \frac{1}{n} + 2.o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On soustrait : $a_{2.n} - 2.a_n = -4 - \frac{1}{2.n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Les deux termes $\frac{1}{2.n}$ et $o\left(\frac{1}{n}\right)$ tendent vers 0.

la différence a une limite, et elle vaut -4.

On recommence

$a_{n+1} =$	$n+1$	$+4$	$+\frac{1}{n+1}$	$+o\left(\frac{1}{n+1}\right)$
$-2.a_n =$	$-2.n$	-8	$-\frac{2}{n}$	$+o\left(\frac{1}{n}\right)$
$a_{n-1} =$	$n-1$	$+4$	$+\frac{1}{n-1}$	$+o\left(\frac{1}{n-1}\right)$

On combine $n.(a_{n+1} - 2.a_n + a_{n-1}) = n.\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2.n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ en fusionnant les trois o en un seul.

Le terme en $n.o\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 par définition même.

Et $n.\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2.n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ aussi.

Bref, la forme indéterminée tend vers 0.

∘37∘

♡ Trouvez P vérifiant : $\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-3} + \frac{1}{X-2}$.

Trouvez Q vérifiant : $\frac{Q'(X)}{Q(X)} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{X-3} + \frac{3}{X-2}$.

Est il judicieux d'intégrer comme le proposerait spontanément le physicien : $\ln\left(\frac{P(x)}{P(0)}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{-1}\right) + \ln\left(\frac{x-3}{-3}\right) + \ln\left(\frac{x-2}{-2}\right)$.

Je n'en suis pas sûr. mais au moins, ça permet de deviner un polynôme : $P(X) = (X-1).(X-2).(X-3)$.

Il ne reste qu'à jouer au matheux : on propose/on vérifie.

On dérive : $P'(X) = 1.(X-2).(X-3) + (X-1).1.(X-3) + (X-1).(X-2).1$.

On divise : $\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{(X-2).(X-3) + (X-1).(X-3) + (X-1).(X-2)}{(X-1).(X-2).(X-3)} = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-2} + \frac{1}{X-3}$.

La même idée donne le second : $Q(X) = (X-1).(X-3)^2.(X-2)^3$.

On dérive : $Q'(X) = 1.(X-2)^3.(X-3)^2 + (X-1).3.(X-2)^2.(X-3) + (X-1).(X-2).2.(X-3)$.

La division donne tout ce qu'on veut...

∘38∘ Si a est une suite réelle, on définit deux sur-suites *(mot non homologué)* :
$\ddot{a} = (a_0,\ a_0,\ a_1,\ a_1,\ a_2,\ a_2,\ a_3,\ a_3, \dots)$ *(on voit les deux points au dessus ? en tout cas, chaque terme est cité deux fois)*
et $\dddot{a} = (a_1,\ a_2,\ a_2,\ a_3,\ a_3,\ a_3,\ a_4,\ a_4,\ a_{\prime},\ a_4,\ a_5 \dots)$ *(le terme a_n est cité n fois).*

		de a à $\ddot{a}$	de $\ddot{a}$ à a	de a à $\dddot{a}$	de $\dddot{a}$ à a	de $\dddot{a}$ et $\ddot{a}$ à a
Quelles propriétés passent	croissante					
	périodique					
	convergente					
	géométrique					
	divergente vers $+\infty$					

C'est un exercice « esprit MPSI2 ». On n'en trouve pas souvent des comme ça dans les livres ou aux concours, mais normalement, ça permet de comprendre les notions avec des petits questions pas trop compliquées.

	de a à $\ddot{a}$	de $\ddot{a}$ à a	de a à $\dddot{a}$	de $\dddot{a}$ à a	de ($\dddot{a}$ et $\ddot{a}$) à a
croissante	oui	oui	oui	non (1)	oui
périodique	oui (2)	oui	non (3)	oui (4)	oui
convergente	oui	oui	oui	oui	oui
géométrique	non	oui (4)	non	oui (4)	oui
divergente vers $+\infty$	oui	oui	oui	oui	oui

Pour la dernière colonne, si la propriété passe de $\ddot{a}$ à a, alors elle passe de ($\dddot{a}$ et $\ddot{a}$) à a en n'utilisant même pas $\ddot{a}$.
Le (1) contenait un piège. Si

$$(a_1,\ a_2,\ a_2,\ a_3,\ a_3,\ a_3,\ a_4 \dots)$$

est croissante, la suite extraite

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \dots)$$

est croissante. mais qu'en est-il de $(a_{\grave{a}},\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \dots)$.
Pour (2), la période va en général doubler. Et pour la case d'à côté, elle réduit d'autant.
Pour (3), un contre-exemple classique peut nous servir : $((-1)^n)$. mais il faut détailler la démonstration si on veut vraiment être rigoureux..
Pour (4), la seule possibilité pour qu'une suite $\dddot{a}$ soit périodique est qu'elle soit constante, et la suite initiale l'est aussi, donc périodique.
J'ai numéroté aussi (4) le phénomène

$$(a_0,\ a_0,\ a_1,\ a_1,\ a_2,\ a_2,\ a_3,\ a_3, \dots)$$

géométrique implique

$$(a_0,\ a_0,\ a_1,\ a_1,\ a_2,\ a_2,\ a_3,\ a_3, \dots)$$

constante et ceci entraîne que (a_n) est géométrique de raison 1.

Pour la convergence, par exemple, un sens est facile.
En effet, $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \dots)$ est une sous-suite de $(a_0,\ a_0,\ a_1,\ a_1,\ a_2,\ a_2,\ a_3,\ a_3, \dots)$ (elle prend un terme sur deux).
das l'autre sens, si $|a_n - \alpha|$ est plus petit que ε pour N plus grand que N_ε alors le p^{ieme} terme de la suite $(a_0,\ a_0,\ a_1,\ a_1,\ a_2,\ a_2,\ a_3,\ a_3, \dots)$ est proche de α à εprès pour p plus grand que $2.N_\varepsilon$.
Et le le p^{ieme} terme de la suite

$$\dddot{a} = (a_1,\ a_2,\ a_2,\ a_3,\ a_3,\ a_3,\ a_4,\ a_4,\ a_{\prime},\ a_4,\ a_5 \dots)$$

est proche de α à εprès pour p plus grand que $N_\varepsilon.(N_\varepsilon + 1)/2$.