

LYCEE CHARLEMAGNE

Mardi 12 mars
M.P.S.I.2

2023

2024

TD22

00. Déterminez $\inf \left\{ \sup \{ (1+2a) \cdot \cos(t) + (2+a) \cdot \sin(t) \mid t \in \mathbb{R} \} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ (commencez, pour a fixé par déterminer $\sup \{ (1+2a) \cdot \cos(t) + (2+a) \cdot \sin(t) \mid t \in \mathbb{R} \}$ par exemple par variation de fonction si vous n'êtes ni matheux ni physicien, sinon, pensez à $A \cdot \cos(t + \varphi)$).

01. Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Montrez que $A \cup B$ a une borne supérieure à exprimer à l'aide de $\sup(A)$ et $\sup(B)$.

02. ♥ Déterminez $\inf \left\{ \sup \{ \arctan(nx) \mid n \in \mathbb{N} \} \mid x \in \mathbb{R}^{+*} \right\}$
puis $\sup \left\{ \inf \{ \arctan(nx) \mid x \in \mathbb{R}^{+*} \} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

03. Avec des signes qui clignotent, calculez $\sup \left\{ \frac{(-1)^n}{p+1} \mid n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N} \right\}$, $\sup \left\{ \frac{(-1)^p}{p+1} \mid p \in \mathbb{N}^* \right\}$ et $\sup \left\{ \frac{1}{(-1)^p - p} \mid p \in \mathbb{N}^* \right\}$.

04. A et B sont des parties de $\mathbb{R}^+$ non vides, majorées.
Exprimez $\sup(A \cup B)$ à l'aide de $\sup(A)$ et $\sup(B)$.
Exprimez $\sup(A + B)$ à l'aide de $\sup(A)$ et $\sup(B)$ (on pose $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$).
Pouvez vous exprimer $\sup(A \cap B)$ à l'aide de $\sup(A)$ et $\sup(B)$.

05. Au Lycée Louis le Gland, cinquante pour cent des élèves sont en PCSI. Mais dans l'année, un sixième des élèves a démissionné (pour venir à Magne-le-char). Le pourcentage de PCSI a augmenté de dix pour cent. Quel est le pourcentage de PCSI ayant démissionné ?

06. Vrai ou faux : si $((u_n)^5)$ et $((u_n)^7)$ convergent alors (u_n) converge ?
Si $((u_n)^5)$ ou $((u_n)^7)$ diverge alors (u_n) diverge ?

07. ♥ $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$ a pour solution $(1, 1, 1)$. De combien augmente x pour le système $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x - 5y + 3z = 5 \end{cases}$?

08. Pour tout n , on note a_n le nombre de français ayant exactement n cheveux. Montrez que la suite (a_n) converge, en revenant aux ϵ .
 $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_\epsilon \Rightarrow |a_n - \lambda| \leq \epsilon)$.

09. ♥ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1}}$.

10. ♥ Retrouvez les coefficients qui manquent : $\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{a}{n^4} + \frac{b}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)_{n \rightarrow +\infty}$ (pensez à soustraire).

11. Déterminez ces quatre Sup/Inf

$a = \sup \{ \sin(\arctan(x)) \mid x \in \mathbb{R}^+ \}$	$\alpha = \sup \{ \arctan(\sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}^+ \}$
$b = \inf \{ \sin(\arctan(x)) \mid x \in \mathbb{R}^+ \}$	$\beta = \inf \{ \arctan(\sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}^+ \}$

12. Montrez qu'une suite vérifiant : $\exists p, \forall n, a_n \leq a_p$ et $\exists q, \forall n, a_n \geq a_q$ admet au moins une sous-suite qui converge.
Montrez qu'une suite vérifiant $\exists p, \forall n, a_n \leq a_p$ et $\forall n, \exists q, a_n < a_q$ admet au moins une sous-suite qui converge.

13. ♥ Montrez que si la suite (u_n) converge, alors la suite $(\sin(u_n))$ converge aussi. Montrez qu'on n'a pas de réciproque.

◦14◦ L'énoncé dit : « une suite u de réels strictement positifs vérifie $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$, déduire que (u_n) converge vers 0 ». Un élève commence par « on note α la limite de la suite u ; on a alors par passage à la limite : $\frac{\alpha}{\alpha} = 0$, d'où $\alpha = 0$ ». Indiquez les erreurs de son raisonnement.

Démontrez quand même le résultat en commençant par $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ pour n plus grand que $N_{1/2}$.

◦15◦ On se donne u_0 strictement positif. On définit $u_{n+1} = u_n + (u_n)^2$ pour tout n . Montrez que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. Montrez qu'il existe un rang R vérifiant $u_R \geq 2$. Déduisez $\forall n \geq R, u_n \geq 2^{n-R+1}$. Déduisez que la série de terme général $\frac{1}{1+u_n}$ converge. Montrez pour tout $n : \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+u_k} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}}$. Concluez.

◦16◦ Pour tout n , on pose $u_n = \cos(\pi \cdot \sqrt{n^2 + n})$. Un élève affirme : $\sqrt{n^2 + n} \simeq n$ donc $\cos(\pi \cdot \sqrt{n^2 + n}) \simeq \cos(n \cdot \pi)$ la suite ne va donc pas converger mais osciller entre -1 et 1 . Concluez qu'il est en P.C.

Donnez le développement de $\sqrt{n^2 + n}$ sous la forme $n + a + o(1)$ (pensez à la quantité conjuguée). Déduisez que la suite u_n converge vers 0.

Question bonus : la série de terme général u_n converge-t-elle ?

Qu'en est-il de la suite $u_n = \cos(\pi \cdot \sqrt{n^2 + 2n})$.

◦17◦ Il me semble évident qu'on a : $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$, mais quand même prouvez le.

◦18◦ Où est l'erreur : pour tout $k, \left(n^{\frac{1}{k}}\right)$ diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, donc $\left(n^{\frac{1}{n}}\right)$ diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

◦19◦ Montrez que la suite réelle (u_n) est bornée si et seulement si $((u_n)^2)$ n'admet aucune sous-suite qui tend vers $+\infty$.

◦20◦ Montrez que si la suite (a_n) (jamais nulle) n'admet aucune sous-suite bornée, alors la suite $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ converge vers 0.

◦21◦ Soit p dans $\mathbb{N} - \{0, 1\}$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \binom{n+p}{n}^{-1}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+p+2) \cdot u_{n+2} = (n+2) \cdot u_{n+1}$.

Montrer par récurrence $S_n = \frac{1}{p-1} \cdot (1 - (n+p+1)u_{n+1})$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = (n+p) \cdot u_n$. Montrer que (v_n) converge vers 0. Déduisez $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ en fonction de p .

◦22◦ Pour un contre-exemple à la comparaison de $(A+B) \cap (B+C) \cap (C+A)$ et $(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A)$, Louis propose de prendre $A = S_3(\mathbb{R})$, $B = A_3(\mathbb{R})$ et $C = T_3(\mathbb{R})$ (matrices symétriques, antisymétriques et matrices de trace nulle toutes en taille 3). Déterminez les dimensions des sous-espaces vectoriels ci dessus.

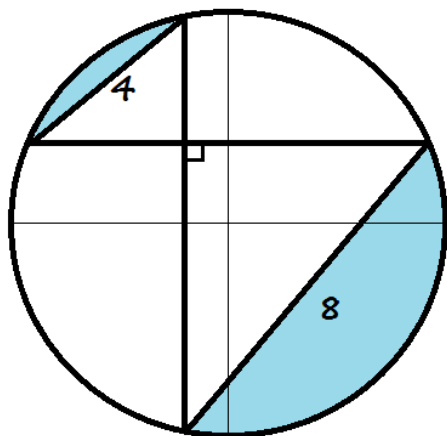
◦23◦ ♥ Montrez que dans $\text{range}(83)$ il y a 82 entiers premiers avec 83 (qui est premier).
Montrez que dans $\text{range}(83^2)$ il y a 82×83 entiers premiers avec 83^2 (qui n'est plus premier, lui !).
Montrez que dans $\text{range}(1411)$ il y a 1312 entiers premiers avec 1411 (qui contient un facteur 83).

◦24◦ Un polygone convexe régulier a 527 diagonales. Calculez le plus petit angle non nul entre deux diagonales (étape intermédiaire : calculez le nombre de sommets).

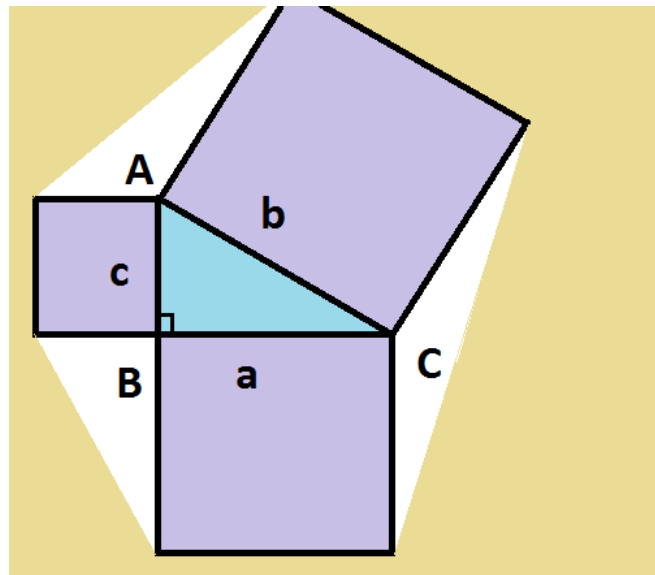
◦25◦ La suite u est périodique de période 4 à partir du rang 100 et vérifie $u_n = n^2$ pour $n \leq 100$ et $u_{100} = 3, u_{101} = 5, u_{102} = 13, u_{103} = 7$. Écrivez un script Python qui prend en entrée n et retourne u_n .

◦26◦ Y a-t-il plus de parties à 11 éléments dans un ensemble à 33 éléments que de parties à 15 éléments dans un ensemble à 30 éléments ?

◦27◦



Quelle est la valeur de l'aire en bleu ?



Le concours Kangourou propose l'exercice suivant : (A, B, C) est un triangle rectangle en B (côtés a, b etc, hypoténuse b). On construit des carrés sur les côtés. On obtient ainsi une figure qu'on complète en hexagone. Montrez que l'aire de l'hexagone est $2.a.c + 2.(a^2 + c^2)$.

◦28◦

♥ Complétez pour que les variables aléatoires "note en maths" et "note en physique" soient indépendantes, pour faire plaisir à l'inspecteur.

élève	Abder	Bintou	Camille	Diane	Elodie	Fred	Gwen	Hans	Ilias	Jules
maths	A	A	A	B	A	B	B	B	B	
physique	A	B	C		C			B	B	C
élève	Kian	Lev	Max	Naomi	Omar	Piotr	Quik	Ruth	Swen	Tiffany
maths	B	C	C		C	C	C	C		C
physique				C				A		A

◦29◦

Sachant que (a_n) est une suite arithmétique, $\sum_{k=0}^{100} a_k = 0$ et $\sum_{k=0}^{200} a_k = 20100$ calculez a_n pour tout n .

◦30◦

♣ Voici des définitions (ratées) de "suite de Cauchy". Que pouvez vous déduire de chacune :

a	$\exists K \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (K \leq p \leq q) \Rightarrow (u_p - u_q \leq \varepsilon)$
b	$\forall \varepsilon > 0, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \exists K \in \mathbb{N}, (K \leq p \leq q) \Rightarrow (u_p - u_q \leq \varepsilon)$
c	$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (K_\varepsilon \geq p \geq q) \Rightarrow (u_p - u_q \leq \varepsilon)$
d	$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (K_\varepsilon \leq p \leq q) \Rightarrow (u_p + u_q \leq \varepsilon)$
e	$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \forall \varepsilon > 0, \forall K \in \mathbb{N}, (K \geq p \geq q) \Rightarrow (u_p - u_q \leq \varepsilon)$
f	$\forall \varepsilon \geq 0, \exists K_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (K_\varepsilon \leq p + q) \Rightarrow (u_p - u_q \leq \varepsilon)$

◦31◦

On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrez, en minorant $H_{2n} - H_n$ que H n'est pas une suite de Cauchy.

Soit φ injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On pose $\phi_n = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(k)}{k^2}$. En minorant aussi $\phi_{2n} - \phi_n$ montrez que ϕ n'est pas une suite de Cauchy (on pourra dire qu'une somme de n entiers distincts vaut au moins $0 + 1 + 2 + \dots + n - 1$).

◦32◦

Vrai ou faux : de toute suite réelle on peut extraire une sous-suite strictement croissante.
de toute suite réelle on peut extraire une sous-suite strictement monotone.
de toute suite réelle non bornée on peut extraire une sous-suite monotone.

◦33◦

Un élève dont je tairai le nom s'est trompé sur la moyenne de Cesàro : $\frac{a_0 + \dots + a_n}{n}$ au lieu de $\frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1}$ (nombre de termes).
Perd il la propriété « convergence » ?
Perd il la propriété « croissance » ?

◦34◦

◊ 0 ◊ Une suite réelle a vérifie la propriété P si et seulement si on a $\sum_{k=0}^n (a_k)^2 \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n}$. Montrez qu'une

suite vérifiant P est positive à partir d'un certain rang.

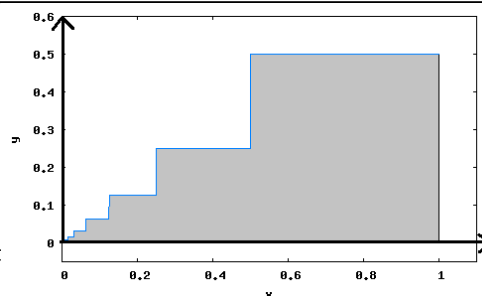
◊ 1 ◊ Quelles sont les suites géométriques qui vérifient la propriété P ?

◊ 2 ◊ La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ vérifie-t-elle la propriété P ?

◊ 3 ◊ La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ vérifie-t-elle la propriété P ?

◊ 4 ◊ Montrez que la relation $u_0 = 1$ et pour tout n , " u_{n+1} est la racine positive de l'équation $x^3 \cdot u_n + x = u_n$ d'inconnue x " définit bien une suite réelle (prouvez l'existence de tous les termes). Montrez que cette suite est positive, décroissante. On note λ sa limite. Montrez qu'elle ne peut valoir que 0. Montrez que la suite (u_n) ainsi construite vérifie P .

◦35◦ Combien y a-t-il de suites de longueur N faites de 1 et de -1 dont la somme vaut 0 ?
Combien y a-t-il de suites de longueur N faites de 1 et de -1 dont la somme vaut s ?
Combien y a-t-il de suites de longueur 100 faites de 1 et de -1 dont la somme vaut 10 et dont toutes les sommes partielles étaient positives.



♥ Prolongez par continuité en 0 l'application $x \mapsto 2^{\lfloor \ln(x)/\ln(2) \rfloor}$ et calculez son intégrale sur $[0, 1]$.

◦37◦ Un élève a trouvé $N_\epsilon = \frac{1-2e^\epsilon}{1-e^\epsilon}$ dans la quantification $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall n, n \geq N_\epsilon \rightarrow |u_n - a| \leq \epsilon$. Donnez une suite dont il a pu partir.

◦38◦ Montrez que $\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)$ et $\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)$ forment un couple de suites adjacentes.

◦39◦ Montrez que pour tout choix de u_0 la suite $u_{n+1} = \lceil e^{14 \cdot \cos(u_n/12)} \rceil$ est périodique à partir d'un certain rang (indication : principe des tiroirs).

Mon ex se tasse. Elle se dilate la rate en chicanant. On apprécie les actions des recteurs. Corneille veut voir son Clitandre bientôt. Vive les fêtes soutenues. Ils veulent des facs animées.

◦40◦ La quantification classique de notre cours est : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, n \geq N \Rightarrow |u_n - \lambda| \leq \epsilon$. Il manque des niveaux de parenthèses.

Je propose de disposer ainsi les parenthèses : $\left(\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, n \geq N \right) \Rightarrow \left(|u_n - \lambda| \leq \epsilon \right)$

$\forall \epsilon > 0, \left(\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, n \geq N \right) \Rightarrow \left(|u_n - \lambda| \leq \epsilon \right)$ $\forall \epsilon > 0, \left(\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, n \geq N \right) \Rightarrow \left(|u_n - \lambda| \leq \epsilon \right)$

Est-ce correct ? Sinon, comment corriger ?

S'agit de la quantification de $((u_p)$ converge), de $((u_n)$ converge vers λ), de $((\lambda)$ converge vers $(u_n))$, de $(u_n \simeq \lambda$ à ϵ près), (toutes les suites convergent vers λ) ?

◦41◦ Déterminez ces deux bornes supérieures $\text{Sup}\{\cos(t) + 3 \cdot \sin(x) \mid (t, x) \in \mathbb{R}^2\}$ et $\text{Sup}\{\cos(t) + 3 \cdot \sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

◦42◦ Lesquels de ces ensembles sont majorés :

$A = \left\{ \frac{e}{n!} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$	$B = \left\{ \text{frac}\left(\frac{n!}{e}\right) \mid (n, p) \in \mathbb{N}^2 \right\} \clubsuit$	$C = \left\{ \frac{e^p}{n!} \mid (n, p) \in \mathbb{N}^2 \right\}$
$D = \left\{ \frac{e^{2 \cdot n}}{n!} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$	$E = \left\{ (-1)^{n+p+1} \frac{p!}{n!} \mid (n, p) \in \mathbb{N}^2, p \leq n \right\}$	$F = \left\{ \frac{n^e}{n!} \mid (n, p) \in \mathbb{N}^2 \right\}$

où $\text{frac}(x)$ est la partie décimale ou fractionnaire de x ($x - [x]$) et donnez sa borne supérieure de ceux qui en ont une.

◦43◦ ♥ Déterminez $\text{Sup}\{(-1)^{n+1} + (-2)^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\text{Sup}\{(-1)^{n+1} + (-2)^{-p} \mid (n, p) \in \mathbb{N}^2\}$.

◦44◦ -a- Déterminez $\text{Sup}\left\{\frac{(-1)^n}{2^n} + \frac{(-1)^p}{2^p} \mid n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}\right\}$.

-b- Déterminez $\text{Sup}\left\{\frac{(-1)^n}{2^n} + \frac{(-1)^n}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

-c- Déterminez $\text{Sup}\left\{\frac{(-1)^p}{2^n} + \frac{(-1)^n}{2^p} \mid n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}\right\}$.

-d- Déterminez $\text{Sup}\left\{\frac{(-1)^n}{2^p} + \frac{(-1)^n}{2^p} \mid n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}\right\}$.

◦45◦ Déterminez $\text{Sup}\{\sin(t.\pi) \mid t \in \mathbb{N}\}$ et $\text{Sup}\{\sin(t.\pi) \mid t \in \mathbb{Q}\}$ et enfin $\text{Sup}\{\sin(t.\pi) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

◦46◦ Déterminez ces deux bornes supérieures $\text{Sup}\left\{\frac{x+10}{x^2+261} \mid x \in [0, +\infty[\right\}$ et $\text{Sup}\left\{\frac{x+10}{x^2+261} \mid x \in \mathbb{N}\right\}$.

◦47◦ On se donne un entier n et τ est un élément de S_n . Montrez que $\{\sigma \in S_n \mid \sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma\}$ est un sous groupe de $(S_n, \circ)$.

Déterminez le dans le cas $n = 4$ et $\sigma = \overline{(1\ 2\ 3\ 4)}$.

Déterminez le dans le cas $n = 5$ et $\sigma = \overline{(1\ 2\ 3\ 4)}$.

Déterminez le dans le cas $n = 6$ et $\sigma = \overline{(1\ 2\ 3\ 4)}$.

◦48◦ Montrez : $p.p.c.m.(a, b, c) = p.p.c.m.(p.p.c.m.(a, c), p.p.c.m.(b, c))$.

◦49◦ a et b sont deux entiers naturels. On suppose : $\exists(u, v) \in \mathbb{N}^2, a.u + b.v = 1$. Montrez que a divise b ou b divise a .
 A et B sont deux entiers relatifs. Montrez : $\exists(u, v) \in \mathbb{R}^2, A.u + B.v = 1$.

◦50◦ Si on vous donne une identité de Bézout entre a et b ($a.u + b.v = 1$), trouvez une identité de Bézout entre a^2 et b^2 .

◦51◦ Si A est une partie de $\mathbb{C}$ on pose $\text{diam}(A) = \text{Sup}\{|b - a| \mid (a, b) \in A^2\}$. Déterminez le diamètre d'un disque de centre C et de rayon R .

Montrez : $A \subset B \Rightarrow \text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$.

Quel est le diamètre du vide ?

◦52◦ Pour f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|.dt$, $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2.dt}$ et $\|f\|_\infty = \text{Sup}(|f(t)| \mid t \in [0, 1])$.

Montrez que ce sont bien trois normes.

Pour l'inégalité triangulaire de $\|\cdot\|_2$, on utilisera l'inégalité de Cauchy Schwarz.

Montrez pour toute f : $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$.

Montrez que la suite de fonctions $x \mapsto x^n$ est bornée pour chacune de ces normes.

Montrez que la suite de fonctions $x \mapsto n.x^n$ est bornée une et une seule de ces normes.

◦53◦ ♥ Soit u une suite réelle. Montrez que si u converge, alors pour tout réel λ , $\lambda.u_{n+1} + u_n$ converge aussi.

♥ On suppose que $u_{n+1} + u_n$ converge quand n tend vers l'infini. Montrez (par un contre-exemple) que u ne converge pas forcément.

♣ On suppose que $2.u_{n+1} + u_n$ (notée v) converge vers 0.

Calculez $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1}.2^k.v_k$. En utilisant le théorème de Césaro généralisé (c'est celui de Cesarbi dans l'exercice plus haut), déduisez que u converge aussi vers 0.

Montrez que si v converge vers α alors u converge (vers quoi ?).

Montrez que si $u_{n+1} + 2.u_n$ converge, alors u ne converge pas forcément.

◦54◦ ♥ Complétez $(\vec{i} + \vec{k}, \vec{j} + \vec{k})$ en base de $\mathbb{R}^3$ (c'est à dire adjoignez un vecteur) sachant que sur cette base, $\vec{i}$ a pour

composantes $(1, 1, 1)$.

◦55◦ Écrivez un script Python appelé **Cesaro** qui prend en entrée une suite (liste évidemment finie de flottants) et retourne en sortie une liste égale à la moyenne de Cesàro de la précédente (exemple $\text{Cesaro}([1, 5, 3, 8])$ retournera $[1, 3, 3, 4.25]$).

Écrivez un script appelé **oraseC** qui prend en entrée une suite et retourne en sortie la liste dont elle est la moyenne de Cesàro.

◦56◦ Je veux une suite d'entiers (a_n) telle que tout entier naturel k soit limite d'au moins une sous-suite de (a_n) . J'ai pensé à

$(\overline{0}, \overline{0, 1}, \overline{0, 1, 2}, \overline{0, 1, 2, 3}, \overline{0, 1, 2, 3, 4}, \overline{0, 1, 2, 3, 4, 5}, \overline{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, \overline{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, \overline{0, 1, \dots})$.

Calculez $(a_{n.(n+1)/2})$ pour tout n .

Écrivez un script Python qui fabrique pour N donné, les N premiers termes de la suite.

Construisez une sous-suite qui converge vers 10.

Trouvez une formule explicite pour le $n^{\text{ième}}$ terme de cette suite.

Que fait la moyenne de Cesàro de cette suite (calculez $(C_{n.(n+1)/2})$).

Et sa moyenne de Cesàro géométrique ?

◦57◦ ♥ Montrez que l'application $x \mapsto \cos(x) + \cos(\sqrt{2}.x)$ est somme de deux applications périodiques, mais n'est pas périodique (combien de fois prend elle la valeur 2 ?).

Montrez que la suite $(\cos(n))$ n'est pas périodique.

◦58◦ Soit (a_n) une suite réelle bornée. On pose $A_0 = \{u_n \mid n \geq 0\}$. Montrez que A_0 est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée. On note α_0 sa borne supérieure. Montrez qu'il existe un indice $\varphi(0)$ vérifiant $\alpha_0 \geq a_{\varphi(0)} \geq \alpha_0 - 1$.

On pose alors $A_1 = \{u_n \mid n > \varphi(0)\}$. Montrez que A_1 est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée, incluse dans A_0 . On note α_1 sa borne supérieure. Justifiez : $\alpha_0 \geq \alpha_1$. Montrez qu'il existe un indice $\varphi(1)$ vérifiant $\alpha_1 \geq a_{\varphi(1)} \geq \alpha_1 - \frac{1}{2}$ et $\varphi(0) < \varphi(1)$.

On pose ensuite $A_2 = \{u_n \mid n > \varphi(1)\}$. Montrez que A_2 est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée, incluse dans A_1 . On note α_2 sa borne supérieure, justifiez : $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2$. Montrez qu'il existe un indice $\varphi(2)$ vérifiant $\alpha_2 \geq a_{\varphi(2)} \geq \alpha_2 - \frac{1}{4}$ et $\varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2)$.

Construisez une suite décroissante (α_p) et une extraction φ vérifiant $\alpha_p \geq a_{\varphi(p)} \geq \alpha_p - \frac{1}{2^p}$.

Montrez que la suite α converge, de même que la suite $(a_{\varphi(p)})$.

Que vient on de prouver. Quand avez vous dû employer l'hypothèse " a est bornée" ?

◦59◦ Déterminez $\text{Inf}\left\{\text{Sup}\{a.\cos(t) + (1-a).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$.

Pouvez vous déterminer $\text{Sup}\left\{\text{Inf}\{a.\cos(t) + (1-a).\sin(t) \mid a \in \mathbb{R}\} \mid t \in \mathbb{R}\right\}$.

◦60◦ Montrez que deux et seulement deux des trois affirmations ci-contre sont vraie :

A	toute suite réelle convergente a un plus grand élément et un plus petit élément
B	toute suite réelle convergente a un plus grand élément ou un plus petit élément
C	toute suite réelle divergente vers $+\infty$ a un plus grand élément ou un plus petit élément

Rappel : l'une de ces définitions est « admet un plus grand élément » :

$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_p$ | $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, a_n \leq a_p$ (laquelle ?).

◦61◦ A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ non vides, vérifiant $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$.

Montrez que A admet une borne supérieure α et B une borne inférieure β .

Montrez $\alpha \leq \beta$.

Montrez que si $A \cup B$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors $\alpha = \beta$.

◦62◦ Déterminez la limite de $\frac{x^3 - 3^x}{x - 3}$ quand x tend vers 3.

Conseil : taux d'accroissement de $x \mapsto x^3$ et de $x \mapsto 3^x$.

◦63◦ Soit N une norme sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $(E, +, .)$ (application positive, séparante, homogène, triangulairement inégalitaire). On suppose de plus qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme : $N(u+v)^2 + N(u-v)^2 = 2.(N(u)^2 +$

$N(v)^2$) pour tout couple de vecteurs (u, v) .

a - Montrez que c'est le cas dans les cas suivants :

$(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$	$(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$	$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$
$\sqrt{\sum_{i,k} (a_i^k)^2}$	$\sqrt{\int_0^1 f(t)^2 \cdot t \cdot dt}$	$\sqrt{x^2 + 4 \cdot x \cdot y + 5 \cdot y^2}$
$(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$	$(\mathbb{R}_3[X], +, \cdot)$	
$\sqrt{x^2 + 4 \cdot x \cdot y + 5 \cdot y^2 + z^2}$	$\sqrt{P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 + P(3)^2 + P(4)^2}$	

b - Montrez que ce n'est pas le cas pour

$(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$	$(C_0([-1, 1], \mathbb{R}), +, \cdot)$	$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$
$\text{Max}\left(\sum_{k=1}^n a_i^k \mid 1 \leq i \leq n\right)$	$\text{Max}(f(t) \mid t \in [-1, 1])$	$\text{Max}(x + y , x - y)$
$(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$	$(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$	
$ y + z + x + z + x + y $	$\text{Max}(P(0) , P'(0) , P''(0))$	

même si ce sont des normes (si ça vous gave, passez à la suite)

On veut montrer que sous l'hypothèse "identité du parallélogramme", N est une norme euclidienne, issue d'un produit scalaire.

c - On pose donc "tout naturellement" : $\phi(u, v) = \frac{N(u+v)^2 - N(u-v)^2}{4}$ pour tout couple de vecteurs. Vérifiez alors $\phi(u, v) = \frac{N(u+v)^2 - N(u)^2 - N(v)^2}{2}$.

d - Montrez que ϕ est une forme symétrique, positive, défini positive.

e - Montrez pour tout triplet (u, v, w) : $\phi(u+w, v) + \phi(u-w, v) = 2 \cdot \phi(u, v)$ (indication : dans l'hypothèse de l'identité du parallélogramme, remplacez u par $u+w$ et $u-w$).

f - Déduisez $\phi(2u, v) = 2 \cdot \phi(u, v)$.

g - Déduisez aussi : $\phi(u+w, v) = \phi(u, v) + \phi(w, v)$.

h - Montrez pour tout n de $\mathbb{N}$: $\phi(n \cdot u, v) = n \cdot \phi(u, v)$.

i - Montrez pour tout n de $\mathbb{Z}$: $\phi(n \cdot u, v) = n \cdot \phi(u, v)$.

j - Montrez pour tout r de $\mathbb{Q}$: $\phi(r \cdot u, v) = r \cdot \phi(u, v)$.

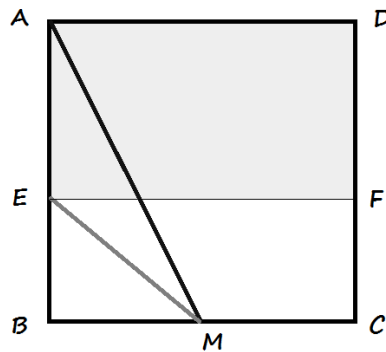
k - Montrez pour tout t de $\mathbb{R}$: $\phi(t \cdot u, v) = t \cdot \phi(u, v)$.

l - Déduisez que ϕ est un produit scalaire, puis que N est bien la norme qui en est issue.

Montrez $\int_{1/2}^2 \frac{\ln(t)}{1+t^2} \cdot dt = 0$.

Prolongez en 0 $x \mapsto \sin(x) \cdot \ln(x)$. Est elle alors dérivable en 0 ?

Montrez que si f est C^1 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ alors elle est lipschitzienne.



(A, B, C, D) est un carré,
 M est le milieu de $[B, C]$
 (A, E, M) est isocèle en E
 AM mesure 4 unités.
 Calculez l'aire du rectangle
 (A, E, F, D) .

◦64◦ Montrez qu'il n'y a pas de réciproque.

◦65◦ Soient f et g deux endomorphismes de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Montrez $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f+g)$. Montrez $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

On définit $f = X \mapsto A \cdot X$ et $g = X \mapsto B \cdot X$ de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ dans lui même

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & -4 \\ -6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -12 & 3 & 8 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Déterminez $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$, $\text{Ker}(f+g)$, $\text{Im}(f+g)$ et $\text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ et leurs dimensions.

◦66◦ Soit f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\int_0^1 f(t).dt = 0$. On pose $F = x \mapsto \int_0^x f(t).dt$ et $G = x \mapsto \int_0^x t.f(t).dt$.

Montrez pour tout x de $[0, 1]$: $G(x) = \int_{t=0}^x (F(x) - F(t)).dt$.

Justifiez que F admet un maximum atteint en un point a de $[0, 1]$ et un minimum atteint en un point b de $[0, 1]$.
On suppose $(a, b) \in]0, 1[^2$ et $F(a) > 0 > F(b)$. Donnez le signe de $G(a)$ et $G(b)$.

Déduisez $\exists c \in]0, 1[$, $\int_0^c t.f(t).dt = 0$.

On suppose $F(a) > F(b) \geq 0$. Donnez le signe de $G(a)$ et $G(1)$. Déduisez $\exists c \in]0, 1[$, $\int_0^c t.f(t).dt = 0$.

On suppose $0 \geq F(a) \geq F(b)$. Montrez $\exists c \in]0, 1[$, $\int_0^c t.f(t).dt = 0$.

◦67◦ Montrez que $f \mapsto |f(0)| + |f(1)| + \text{Sup}\{|f''(t)| \mid t \in [0, 1]\}$ est une norme sur $C^2([0, 1], \mathbb{R})$.

Montrez que $f \mapsto |f(0) + f(1)| + \text{Sup}\{|f''(t)| \mid t \in [0, 1]\}$ n'est pas une norme sur $C^2([0, 1], \mathbb{R})$.

◦68◦ f et g sont croissantes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez :

$$\int_0^1 f(t).dt \cdot \int_0^1 g(t).dt \leq \int_0^1 f(t).g(t).dt \text{ (indication } (x, y) \mapsto (f(y) - f(x)).(g(y) - g(x)) \text{ sur } [0, 1]^2 \text{)}$$

I~0) On note E l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

I~1) Montrez que $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur $m(E, +, \cdot)$, sachant que l'on pose $\|f\| = \text{Sup}(|f(t)| \mid t \in [0, 1])$.

N est une norme sur $(F, +, \cdot)$ où F est un espace vectoriel

Le mnémotechnique pour retenir cette liste, c'est "Sophie a perdu son haut" si vous reprenez l'idée de François-Xavier il y a déjà dix huit ans de ça, et si vous voulez j'ai des photos de la Sophie en question.	E	Existence	pour tout $\vec{u}$ de E , $N(\vec{u})$ existe
	P	Positivité	$\forall \vec{u} \in E, N(\vec{u}) \geq 0$
	S	Séparation	$\forall \vec{u} \in E, \vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow N(\vec{u}) > 0$ $\forall \vec{u} \in E, N(\vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$
	H	Homogénéité	$\forall (\lambda, \vec{u}) \in \mathbb{R} \times E, N(\lambda.\vec{u}) = \lambda .N(\vec{u})$
	I	Inégalité triangulaire	$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, N(\vec{u} + \vec{v}) \leq N(\vec{u}) + N(\vec{v})$

Je vous donne quand même le début d'une des preuves pour que vous ne vous contentiez pas d'affirmations péremptories "il est évident que" :

on se donne f et g ; pour tout x , on a : $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$ et ensuite, à vous de rédiger avec des mots et pas avec des trucs dont vous dites que c'est des maths...

I~2) Pour f dans E , on pose $L(f) = \text{Sup}\left\{\frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} \mid 0 \leq a < b \leq 1\right\}$. Montrez que L est une semi norme sur

$(E, +, \cdot)$ (semi-norme, c'est EPHI).

I~3) Montrez pour f de classe C^1 : $L(f) = \|f'\|$.

I~4) Calculez la norme $\|f\|$ et la semi-norme pour les applications suivantes :

$s_n = \theta \mapsto \sin(n.\theta)$	$c_n = \theta \mapsto \cos(n.\theta)$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto 2.x - 1 $	$x \mapsto \ln(1 + x)$
---------------------------------------	---------------------------------------	-----------------	-----------------------	------------------------

I~5) Montrez que $f \mapsto |f(0)| + L(f)$ est une norme (notée Λ).

I~6) Montrez pour tout f de $\|f\| \leq \Lambda(f)$.

I~7) Existe-t-il K vérifiant $\forall f \in E, L(f) \leq K.\|f\|$.

II~0) Une suite (f_n) d'éléments de E vérifie $\forall \varepsilon, \exists K_\varepsilon, \forall (p, q), K_\varepsilon \leq p \leq q \Rightarrow L(f_p - f_q) \leq \varepsilon$. Montrez que pour tout x de $[0, 1]$, la suite $(f_n(x))$ converge vers un réel que l'on va noter $f(x)$.

II~1) Montrez que f ainsi définie (limite des f_n) est dans E .

III~0) Pour tout x de $[0, 1]$ et tout n on pose $F_{n+1}(x) = F_n(x) + \frac{x - (F_n(x))^2}{2}$ et $F_0(x) = 0$. Montrez que chaque F_n est un polynôme et donnez son degré. Chaque P_n est-il dans E ?

III~1) Montrez que la suite $(F_n(x))$ est croissante majorée et converge (étudiez $t \mapsto t + \frac{x - t^2}{2}$ sur $[0, 1]$).

III~2) La limite des P_n est-elle dans E ?