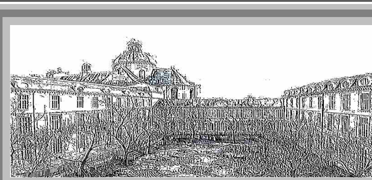
LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 12 mars
M.P.S.I.2



2023 2024

TD22

∘0∘

Déterminez $Inf\left\{Sup\{(1+2.a).\cos(t)+(2+a).\sin(t) \mid t\in\mathbb{R}\} \mid a\in\mathbb{R}\right\}$ (commencez, pour a fixé par déterminer $Sup\{(1+2.a).\cos(t)+(2+a).\sin(t) \mid t\in\mathbb{R}\}$ par exemple par variation de fonction si vous n'êtes ni matheux ni physicien, sinon,pensez à $A.\cos(t+\varphi)$).

Pour a donné, on étudie $Sup\{(1+2.a).\cos(t)+(2+a).\sin(t) \mid t\in\mathbb{R}\}$.
On écrit en fait $(1+2.a).\cos(t)+(2+a).\sin(t) = \sqrt{(1+2.a)^2+(2+a)^2}.\cos(t-\varphi)$ avec φ bien choisi (amplitude et déphasage).
La borne supérieure est $\sqrt{(1+2.a)^2+(2+a)^2}$, atteinte pour $t=\varphi$ (et c'est un truc en $Arctan\left(\dfrac{2+a}{1+2.a}\right)$.

On cherche la borne inférieure de ce trinôme du second degré (celui sous la racine).
On l'atteint en $\dfrac{-4}{5}$ et il vaut $\dfrac{9}{5}$.
La borne inférieure est donc $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

A chaque fois, borne supérieure et borne inférieure sont atteintes.

∘1∘

Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Montrez que $A\cup B$ a une borne supérieure à exprimer à l'aide de $Sup(A)$ et $Sup(B)$.

Si A est majorée par M et B par K, alors $A\cup B$ est majoré par $Max(M,\ K)$.
Proprement : pour x dans $A\cup B$, on a soit $x\in A$ et alors $x\leqslant M\leqslant Max(M,K)$
soit $x\in B$ et alors $x\leqslant K\leqslant Max(M,K)$
De plus $A\cup B$ est non vide.
On note $\alpha = Sup(A)$ et $\beta = Sup(B)$.

Sans restreindre la généralité, on va supposer $\alpha\leqslant\beta$. Et on va montrer que β est la borne supérieure de $A\cup B$.
C'est un majorant de $A\cup B$, comme indiqué au dessus.

Par caractérisation, il existe une suite d'éléments de B qui tend vers β : (b_n).
Les b_n sont dans B donc dans $A\cup B$.
Il existe donc une suite d'éléments de $A\cup B$ qui tend vers ce majorant de $A\cup B$.
Cette fois, par l'autre sens de la caractérisation de la borne supérieure, on reconnaît $\beta = Sup(A\cup B)$.

Sinon, on pouvait aussi passer par « tout autre majorant H de $A\cup B$ est forcément plus grand que β ».
En effet, un tel majorant H majore tous les éléments de $A\cup B$. Il majore donc en particulier tous les éléments de B.
Il est donc plus grand que β.

∘2∘

♡ Déterminez $Inf\left\{Sup\{Arctan(n.x) \mid n\in\mathbb{N}\}\ \middle|\ x\in\mathbb{R}^{+*}\right\}$
puis $Sup\left\{Inf\{Arctan(n.x) \mid x\in\mathbb{R}^{+*}\}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

Pour x dans $]0,\ +\infty[$, on a $Sup\{Arctan(n.x) \mid n\in\mathbb{N}\} = \dfrac{\pi}{2}$ (en faisant tendre n vers l'infini).
$Inf\left\{\dfrac{\pi}{2} \mid x\in]0,\ +\infty[\right\} = \dfrac{\pi}{2}$ (borne supérieure d'un ensemble à un seul élément)

Pour tout n, on a $Inf\{Arctan(n.x) \mid x\in\mathbb{R}^{+*}\} = 0$ (en faisant tendre x vers 0).
$Sup\left\{Inf\{Arctan(n.x) \mid x\in\mathbb{R}^{+*}\}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\} = 0$ comme borne supérieure d'un singleton.

On ne permute pas les Sup et les Inf !

∘3∘ Avec des signes qui clignottent, calculez $Sup\Big\{\dfrac{(-1)^n}{p+1} \mid n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}\Big\}$, $Sup\Big\{\dfrac{(-1)^p}{p+1} \mid p \in \mathbb{N}^*\Big\}$ et $Sup\Big\{\dfrac{1}{(-1)^p - p} \mid p \in \mathbb{N}^*\Big\}$.

Les deux ensembles $\Big\{\dfrac{(-1)^n}{p+1} \mid n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}\Big\}$ et $\Big\{\dfrac{(-1)^p}{p+1} \mid p \in \mathbb{N}^*\Big\}$ et $\Big\{\dfrac{1}{(-1)^p - p} \mid p \in \mathbb{N}^*\Big\}$ sont majorés, par exemple par 1. Et ils sont non vides. L'entier $(-1)^p - p$ n'est jamais nul, même pour $p = 1$.

Dans le premier, on a les $\dfrac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et ainsi de suite, et leurs opposés. La borne supérieure est 1 et c'est un maximum.

Le second contient juste $\dfrac{-1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $dsp\frac{-1}{4}$, $\dfrac{1}{5}$ et ainsi de suite. La borne supérieure est $\dfrac{1}{3}$.

Le dernier contient $\dfrac{1}{-2}$, $\dfrac{1}{-1}$, $\dfrac{1}{-4}$, $\dfrac{1}{-3}$, $\dfrac{1}{-6}$ et ainsi de suite. La borne supérieure vaut 0, non atteinte.

∘4∘ A et B sont des parties de $\mathbb{R}^+$ non vides, majorées.
Exprimez $Sup(A \cup B)$ à l'aide de $Sup(A)$ et $Sup(B)$.
Exprimez $Sup(A + B)$ à l'aide de $Sup(A)$ et $Sup(B)$ (on pose $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$).
Pouvez vous exprimer $Sup(A \cap B)$ à l'aide de $Sup(A)$ et $Sup(B)$.

$Sup(A \cup B) = Max(Sup(A),\ Sup(B))$

$Sup(A + B) = Sup(A) + Sup(B)$
Tout élément de $A + B$ s'écrit $c = a + b$ et est majoré par $Sup(A) + Sup(B)$.
Et il existe une suite (a_n) d'élément de A qui converge vers $Sup(A)$, de même qu'il existe une suite (b_n) d'éléments de B qui converge vers $Sup(B)$.
Comme par hasard la suite $(a_n + b_n)$ est dans $A + B$ et converge vers le majorant $Sup(A) + Sup(B)$.

$Sup(A \cap B)$ n'a aucune raison d'exister *(intersection certes majorée mais pouvant être vide)*

∘5∘ Au Lycée Louis le Gland, cinquante pour cent des élèves sont en PCSI. Mais dans l'année, un sixième des élèves a démissionné *(pour venir à Magne-le-char)*. Le pourcentage de PCSI a augmenté de dix pour cent. Quel est le pourcentage de PCSI ayant démissionné ?

On note $2.N$ l'effectif total. On le découpe

P.C.S.I.	autres
N	N

On laisse des élèves démissionner

	P.C.S.I.	autres	total	
effectif	N	N	$2.N$	
démissions	a	b	$2.N - a - b$	$a + b = \dfrac{2.N}{6}$
nouvel effectif	$N - a$	$N - b$	$2.N - a - b$	$\dfrac{N - b}{2.N - a - b} = \dfrac{40}{100}$

On a juste un système à résoudre : $a = 0$ et $b = \dfrac{N}{3}$.

Oui, seuls des P.C.S.II. ont démissionné. Exemple

	P.C.S.I.	autres	total	
effectif	60	60	120	$\dfrac{60}{120} = 50\%$
démissions	0	20	20	$\dfrac{20}{120} = \dfrac{1}{6}$
nouvel effectif	60	40	100	$\dfrac{40}{100}$

Ah oui, ambigüité : si un pourcentage initialement de 50 pour cent
baisse de 10 pour cent,
faut il dire qu'il vaut 40 pour cent (cinquante pour cent moins dix pour cent)
ou faut il dire qu'il vaut 45 pour cent (cinquante pour cent moins dix pour cent de cinquante pour cent)

Si vous considérez des pourcentages cumulés, alors

	P.C.S.I.	autres	total	
effectif	60	60	120	$\frac{60}{120}=50\%$
démissions	5	15	20	$\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$
nouvel effectif	55	45	100	$\frac{45}{100}$

∘6∘

Vrai ou faux : si $((u_n)^5)$ et $((u_n)^7)$ convergent alors (u_n) converge ?
Si $((u_n)^5)$ ou $((u_n)^7)$ diverge alors (u_n) diverge ?

Le quotient $\dfrac{(u_n)^7}{(u_n)^5}$ converger vers le quotient des limites.
Donc maintenant, $((u_n)^2)$ converge.
On l'élève au carré $((u_n)^4)$ converge (et on se moque de savoir vers quoi).
On passe au quotient $\dfrac{(u_n)^5}{(u_n)^4}$ converge. C'est fini.

Tout raisonnement commencement par « notons α la limite de la suite (u_n) est... tout sauf un raisonnement.
Rien ne dit que la suite a une limite justement.
Rappelons que « converger », c'est « avoir une limite »...
qu'il existe une quantité incommensurable de suites qui ne convergent même pas

---

Il y a plus rapide, avec directement $\dfrac{((u_n)^7)^3}{((u_n)^5)^4}$. Et c'est inspiré d'une identité de Bézout : $7.3-5.4=1$.

Il faut penser à traiter à part le cas « si $((u_n)^5)$ converge vers 0 ».
En effet, on ne peut alors pas le mettre au dénominateur.
Mais si $((u_n)^5)$ converge vers 0 alors sa racine cinquième converge aussi vers 0.
D'ailleurs le coup de la racine cinquième marche très bien... sauf si on est sur $\mathbb{C}$ où un complexe a cinq racines cinquièmes.

∘7∘

♡ $\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 3 \\ x & +2.y & -z & = & 2 \\ 2.x & -5.y & +3.z & = & 0 \end{array}\right.$ a pour solution $(1,\ 1,\ 1)$. De combien augmente x pour le système $\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 3 \\ x & +2.y & -z & = & 2 \\ 2.x & -5.y & +3.z & = & 5 \end{array}\right.$?

C'est vrai : $\left\{\begin{array}{rrrcl} 1 & +1 & +1 & = & 3 \\ 1 & +2.1 & -1 & = & 2 \\ 2.1 & -5.1 & +3.1 & = & 0 \end{array}\right.$ et même $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On écrit même $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le nouveau système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

de solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On compare : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ (en factorisant $A^{-1}.U - A^{-1}.V = A^{-1}.(U-V)$).

La différence qui nous intéresse $x-1$ est donc le premier terme du produit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

C'est donc 5 fois le coefficient de ligne 1 colonne 3 de la matrice inverse.

On sait le calculer : $\dfrac{1}{\det(M)}.cofacteur$.

Finalement $\boxed{x \text{ a augmenté de } 5.\dfrac{3}{13}}$

∘8∘

Pour tout n, on note a_n le nombre de français ayant exactement n cheveux. Montrez que la suite (a_n) converge, en revenant aux ϵ.
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \lambda| \leqslant \varepsilon)$.

La suite (a_n) est nulle à partir d'un certain rang. Elle converge vers 0.
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |a_n| \leqslant \varepsilon)$
Et pour tout ε, il suffit de prendre $N_\varepsilon = 10^{12}$ par exemple.
$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant 10^{12} \Rightarrow |a_n| = 0 \leqslant \varepsilon)$
Nul individu n'a plus de 10^{12} cheveux. Et j'en connais pour qui ce n'est pas plus de $10 * 12$ d'ailleurs.

∘9∘

♡ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\dfrac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}.\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}}$.

On conjugue, on conjugue.

$\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}$	$\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}} = \dfrac{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+1}}{2}$

On passe aux équivalents :

$\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2.n}$	$\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{2}{2.\sqrt{n}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{2.\sqrt{n}}{1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{2.n}{2}$

On multiplie les équivalents *(notion compatible)* et il reste 1.
Étant équivalente à n, la forme indéterminée tend vers 1.

Mais par exemple $\dfrac{\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}.\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}}$ tend vers 4.
Et $\dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}.\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}}$ tend vers $+\infty$.

∘10∘

♡ Retrouvez les coefficients qui manquent : $\dfrac{1}{n^2+n+1} = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{a}{n^4} + \dfrac{b}{n^5} + o\Big(\dfrac{1}{n^5}\Big)_{n\to+\infty}$ (pensez à soustraire).

Étape par étape : $\dfrac{1}{n^2+n+1} = \dfrac{1}{n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}$ classique.

$$\frac{1}{n^2+n+1} - \frac{1}{n^2} = \frac{-n-1}{n^4+o(n^4)} = -\frac{1}{n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)_{n\to+\infty}$$

Rappel :
- $u_n \sim_{n\to+\infty} a.n^\alpha$ signifie $\frac{u_n}{a.n^\alpha} \to_{n\to+\infty} 1$
- $u_n \sim_{n\to+\infty} a.n^\alpha$ signifie aussi $u_n = a.n^\alpha + o(n^\alpha)_{n\to+\infty}$
- $u_n \simeq_{n\to+\infty} a.n^\alpha$ ne signifie rien (si ce n'est que vous confondez les notations).
- $u_n \to_{n\to+\infty} a.n^\alpha$ ne signifie rien (si ce n'est que vous êtes NUL de chez nul).

On poursuit : $\dfrac{1}{n^2+n+1} - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3} = \dfrac{1}{n^3.(n^2+n+1)} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^5}$.

$$\boxed{\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{0}{n^4} + \frac{1}{n^5} + o\Big(\frac{1}{n^5}\Big)_{n\to+\infty}}$$

∘11∘

Déterminez ces quatre Sup/Inf

$a = Sup\{\sin(Arctan(x)) \mid x \in \mathbb{R}^+\}$	$\alpha = Sup\{Arctan(\sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}^+\}$
$b = Inf\{\sin(Arctan(x)) \mid x \in \mathbb{R}^+\}$	$\beta = Inf\{Arctan(\sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}^+\}$

$a = Sup\{\sin(Arctan(x)) \mid x \in \mathbb{R}^+\} = 1$	majorant vers lequel on tend en $+\infty$
$b = Inf\{\sin(Arctan(x)) \mid x \in \mathbb{R}^+\}$	minorant atteint en 0

puis

$\alpha = Sup\{Arctan(\sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}^+\} = \dfrac{\pi}{4}$	atteint de multiples fois quand le sinus vaut 1
$\beta = Inf\{Arctan(\sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}^+\} = \dfrac{-\pi}{4}$	atteint de multiples fois quand le sinus vaut -1

∘12∘

Montrez qu'une suite vérifiant : $\exists p,\ \forall n,\ a_n \leqslant a_p$ et $\exists q,\ \forall n,\ a_n \geqslant a_p$ admet au moins une sous-suite qui converge.
Montrez qu'une suite vérifiant $\exists p,\ \forall n,\ a_n \leqslant a_p$ et $\forall n,\ \exists q,\ a_n < a_p$ admet au moins une sous-suite qui converge.

Question que j'aurais pu poser en I.S.

Dans l'hypothèse $\exists p,\ \forall n,\ a_n \leqslant a_p$ et $\exists q,\ \forall n,\ a_n \geqslant a_p$, la suite est bornée par a_q et a_p.
Nos amis Bolzano et Weierstrass donnent une sous-suite qui converge.

Si la suite $\exists p,\ \forall n,\ a_n \leqslant a_p$ et $\forall n,\ \exists q,\ a_n < a_p$, alors elle est majorée par a_p. Mais rien ne dit qu'elle est minorée.
Simplement, pour tout a_n il y a au moins un a_q plus grand que lui.
C'est ce qui va permettre de construire une sous-suite croissante.
Et cette sous-suite croissante majorée va converger.

Pour n égal à 0, il existe p_0 vérifiant $a_{p_0} > a_0$. On prend celui dont l'indice est le plus petit.
Pour n égal à p_0, il existe p_1 vérifiant $a_{p_1} > a_{p_0}$. on prend celui dont l'indice est le plus petit. Et il est forcément plus grand que p_0 d'après la ligne au dessus.
Pour n égal à p_1, on prend le premier indice p vérifiant $a_p > a_{p_1}$.
Et ainsi de suite.
C'est avec « le premier indice tel que » que l'on garantit que l'extraction est croissante.

∘13∘ ♡ Montrez que si la suite (u_n) converge, alors la suite $(\sin(u_n))$ converge aussi. Montrez qu'on n'a pas de réciproque.

Si (u_n) converge vers a alors $(\sin(u_n))$ converge vers $\sin(a)$.
Par continuité de l'application sinus.

H_a	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall n,\ n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow \lvert u_n - a\rvert \leqslant \varepsilon$
$\boxed{?}$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists S_\varepsilon,\ \forall n,\ n \geqslant S_\varepsilon \Rightarrow \lvert \sin(u_n) - \sin(a)\rvert \leqslant \varepsilon$

Il suffit de prendre $S_\varepsilon = N_\varepsilon$et de faire usage de $\lvert\sin(b) - \sin(a)\rvert \leqslant \lvert b - a\rvert$ pour tout couple $(a,\ b)$.

Pour l'absence de réciproque, la suite $((-1)^n.\pi)$ diverge.
Mais $(\sin((-1)^n.\pi))$ converge (vers 0).

∘14∘ L'énoncé dit : « une suite u de réels strictement positifs vérifie $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to_{n\to+\infty} 0$, déduire que (u_n) converge vers 0 ». Un élève commence par « on note α la limite de la suite u ; on a alors par passage à la limite : $\dfrac{\alpha}{\alpha} = 0$, d'où $\alpha = 0$ ». Indiquez les erreurs de son raisonnement.
Démontrez quand même le résultat en commençant par $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour n plus grand que $N_{1/2}$.

∘15∘ On se donne u_0 strictement positif. On définit $u_{n+1} = u_n + (u_n)^2$ pour tout n. Montrez que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. Montrez qu'il existe un rang R vérifiant $u_R \geqslant 2$. Déduisez $\forall n \geqslant R,\ u_n \geqslant 2^{n-R+1}$. Déduisez que la série de terme général $\dfrac{1}{1+u_n}$ converge. Montrez pour tout n : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+u_k} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}}$. Concluez.

Si u_0 est donné, par récurrence immédiate, chaque nouveau terme existe et est réel. La suite existe.
En écrivant $u_{n+1} - u_n = (u_n)^2$, on trouve une suite croissante.

Elle a alors deux possibilités : converger vers son plus petit majorant, ou tendre vers $+\infty$.

Si elle convergeait, sa limite λ devrait vérifier $\lambda = \lambda + \lambda^2$. La seul limite possible est 0. Mais 0 n'est pas un majorant de la suite ! C'est même un minorant.

Par élimination, c'est vers $+\infty$ qu'elle diverge.

Comme elle tend vers l'infini, à partir d'un certain rang, elle dépasse 2 (prendre $A = 2$ dans la quantification $\forall A,\ \exists G_A,\ \forall n,\ n \geqslant G_A \Rightarrow u_n \geqslant A$)

Mais alors, à ce rang, on a $u_R \geqslant 2$ puis $u_{R+1} = (u_R)^2 + u_R \geqslant 2^2$.
On part sur une récurrence. Prenons n quelconque plus grand que R. Supposons $u_n \geqslant 2^{n-R}$. On a alors

$$u_{n+1} = u_n + (u_n)^2 \geqslant (u_n)^2 \geqslant (2^{n-R})^2 = 2^{2.n-2.R} \geqslant 2^{n+1-R}$$

car $N - R \geqslant 1$.

Ayant $u_n \geqslant 2^{n-R}$ à partir du rang R, on a $0 \leqslant \dfrac{1}{u_n+1} \leqslant 2^{R-n}$.

La série géométrique de terme général 2^{R-n}converge (sommes partielles calculables $\left(\sum_{k=0}^{R-1}\frac{1}{u_k+1}\right)+\frac{1-2^{R-n-1}}{1-2^{-1}}$, et admettant une $\left(\sum_{k=0}^{R-1}\frac{1}{u_k+1}\right)+2$). Par théorème de majoration sur les séries à termes positifs, la série de terme général positif $\frac{1}{u_n+1}$ converge.

Mais on va la calculer explicitement. Par récurrence sur n on prouve

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+u_k}=\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_{n+1}}$$

On initialise :

$$\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_1}=\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_0.(1+u_0)}=\frac{1+u_0-1}{u_0.(1+u_0)}=\frac{1}{1+u_0}$$

Si on suppose à un rang n donné $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+u_k}=\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_{n+1}}$, on ajoute $\frac{1}{1+u_{n+1}}$:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{1+u_k}=\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{1+u_{n+1}}=\frac{1}{u_0}-\frac{1+u_{n+1}-1}{u_{n+1}.(1+u_{n+1})}=\frac{1}{u_0}-\frac{1+u_{n+1}-u_{n+1}}{u_{n+1}.(1+u_{n+1})}=\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_{n+1}}$$

Quand n tend vers l'infini, on obtient la convergence, et aussi la somme de la série.

∘16∘

Pour tout n, on pose $u_n=\cos(\pi.\sqrt{n^2+n})$. Un élève affirme : $\sqrt{n^2+n}\simeq n$ donc $\cos(\pi.\sqrt{n^2+n})\simeq\cos(n.\pi)$ la suite ne va donc pas converger mais osciller entre -1 et 1. Concluez qu'il est en P.C.
Donnez le développement de $\sqrt{n^2+n}$ sous la forme $n+a+o(1)$ *(pensez à la quantité conjuguée)*. Déduisez que la suite u_n converge vers 0.
Question bonus : la série de terme général u_n converge-t-elle ?
Qu'en est il de la suite $u_n=\cos(\pi.\sqrt{n^2+2.n})$.

L'équivalent $\sqrt{n^2+n}\sim n$ est correct quand n tend vers l'infini.
On peut le multiplier par π.
Mais pas passer au cosinus.
En effet, l'équivalent dit juste $\sqrt{n^2+n}=n+o(n)$.
Et dans le cosinus, ce $o(n).\pi$ peut tout changer.
Imaginons que derrière le n de l'équivalent, on ait $\frac{1}{2}+o(1)$ (le $o(n)$ contient une limite finie, et des termes correctifs).
On a alors $\cos(n.\pi+\frac{\pi}{2}\ldots.)$ en notation de physicien. Et cette fois, tout tend vers 0.
Mais si le $o(n)$ est un $\frac{1}{3}$, ça change tout à nouveau...

On développe : $\sqrt{n^2+n}-n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\longrightarrow_{n\to+\infty}\frac{1}{2}$.
On déduit : $\sqrt{n^2+n}=n+\frac{1}{2}+o(1)$.
On peut cette fois passer au cosinus : $\cos(\sqrt{n^2+n}.\pi)=\cos\left(n.\pi+\frac{\pi}{2}+o(1)\right)=(-1)^n.\cos\left(\frac{\pi}{2}+o(1)\right)$.[1]
Le terme $(-1)^n$n'y peut rien. On est face à un $O(1).o(1)$ avec nos notations.

∘17∘

Il me semble évident qu'on a : $\frac{n!}{n^n}\leqslant\frac{1}{2^n}$, mais quand même prouvez le.

On va prendre n pair dans un premier temps. On écrit : $n=2.p$ et $n!=1\times2\times3\times\ldots(2.p)$.
On regroupe les termes deux à deux : k avec $n-k+1$: $n!=\prod_{k=1}^{p}k.(n-k+1)$.
On étudie le trinôme $X.(n-X+1)$. Son maximum vaut $\frac{(n+1)^2}{2}$ (positif, atteint en $\frac{n+1}{2}$).

1. la formule $\cos(n.\pi+\theta)=(-1)^n.\cos(\theta)$ est pour moi du cours, elle se justifie par un dessin, et c'est seulement si le correcteur est un emmerdeur que vous devrez la justifier autrement que par « demi-période » et « dessin sur le cercle trigonométrique ». E c'est seulement si vous avez affaire à un élève de Terminale qui n'a pas l'intention de faire des études scientifiques que vous lui écrirez $\cos(\pi.n).\cos(\theta)-\sin(\pi.n).\sin(\theta)$. Parce que là, franchement, c'est remplacer l'intelligence mathématique par le calcul...

On majore donc $n! \leqslant \left(\frac{(n+1)^2}{4}\right)^p$.
Comme p est égal à $\frac{n}{2}$ cela donne $n! \leqslant \frac{(n+1)^n}{2^n}$.
Quitte à faire passer $(n+1)^n$ de l'autre côté, on a $\frac{n!}{(n+1)^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$.

Si n est impair, il reste un terme au milieu qu'on garde tel quel, et tout s'arrange à peu près pareil.

J'ai posé l'exercice en 2020. Voici deux propositions d'élèves.

Proposition de Math Max : on se souvient que la moyenne géométrique est plus petite que la moyenne arithmétique : $\sqrt{a.b} \leqslant \frac{a+b}{2}$ et sa généralisation à n termes : $\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_é + \ldots + a_n}{n}$.
On l'écrit pour $n-1$ termes : $\sqrt[n-1]{1.2\ldots(n-1)} \leqslant \frac{1+2+\ldots+n-1}{n-1}$.
On a donc $\Big((n-1)!\Big)^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \frac{n.(n-1)}{2.(n-1)} = \frac{n}{2}$.
On élève à la puissance $n-1$: $(n-1)! \leqslant \frac{n^{n-1}}{2^{n-1}}$. On multiplie par n : $n! \leqslant \frac{n^n}{2^{n-1}}$.
On passe au quotient : $\frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.
Pas mal non plus. On l'aura la bonne formule !

Proposition d'Alexandre (quelle année ?) : on montre le résultat pour n petit, jusqu'à 6. Ensuite, on fait une récurrence.
Pour un n donné (quelconque), on suppose $n!.2^n \leqslant n^n$ (objectif $(n+1)!.2^{n+1} \leqslant (n+1)^{n+1}$).
On part de $n!.2^n \leqslant n^n$ qu'on multiplie par $2.(n+1)$ (positif) : $(n+1)!.2^{n+1} \leqslant 2.n^n.(n+1)$.
On veut majorer par $(n+1)^{n+1} = (n+1).(n+1)^n$.
Il suffit de majorer $2.n^n$ par $(n+1)^{n+1}$.
On calcule la différence de deux logarithmes : $n.\ln(n+1) - (n.\ln(n) + \ln(2))$.
On introduit $x \longmapsto x.\ln(x+1) - x.\ln(x) - \ln(2)$ (notée f), de dérivée $f' = x \longmapsto \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ (si si) et de dérivée seconde $f'' = x \longmapsto \frac{-1}{x.(x+1°\text{^}2}$.
f' est décroissante et tend vers 0 à l'infini, elle reste donc positive.
f est donc croissante, nulle en 1. Elle est donc positive.
$x.\ln(x+1) - x.\ln(x) - \ln(2)$ donc $\ln((x+1)^x) \geqslant \ln(2.x^x)$ et on a bien $2.n^n \leqslant (n+1)^n$ puis $(n+1)!.2^{n+1} \leqslant 2.n^n.(n+1) \leqslant (n+1)^n.(n+1) = (n+1)^{n+1}$.

∘18∘ Où est l'erreur : pour tout k, $\left(n^{\frac{1}{k}}\right)$ diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, donc $\left(n^{\frac{1}{n}}\right)$ diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour tout k, $\left(n^{\frac{1}{k}}\right)$ diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$: presque vrai
Pour k positif c'est vrai.
Pour k négatif, c'est faux.
Et pour k nul, ça n'a aucun sens.
Pour k complexe, je n'ose envisager.

$\left(n^{\frac{1}{n}}\right)$ diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$: faux.
Prenons le logarithme de cette quantité : $\frac{\ln(n)}{n}$.
Par croissances comparées, ceci tend vers 0.
$n^{\frac{1}{n}}$ converge vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

C'est dans le « donc » qu'est l'erreur.
La variable k a un rôle précis, quantifié avant celui de n.
On ne peut pas mélanger les deux.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ n^{\frac{1}{k}} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 + \infty$ ce qui est vrai	
$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon A > 0,\ \exists G_{A,k},\ \forall n,\ (n \geqslant G_{A,k} \Rightarrow n^{\frac{1}{k}} \geqslant A)$	
$n^{\frac{1}{k}} \longrightarrow_{n\to+\infty} +\infty$ ce qui est faux	
$\forall A > 0,\ \exists H_A,\ \forall n,\ (n \geqslant H_A \Rightarrow n^{\frac{1}{n}} \geqslant A)$ qu'est devenu k ? Qui est ce H_A ?	

On notera que dans $n^{\frac{1}{k}} \longrightarrow_{n\to+\infty} +\infty$, on peut expliciter $G_{A,k}$ qui dépend bel et bien de Aet k : $G_{A,k} = A^k$.
Il dépend de k. Quand ensuite k se met à être égal à n, que peut être la condition $n \geqslant A^n$?

∘19∘ Montrez que la suite réelle (u_n) est bornée si et seulement si $((u_n)^2)$ n'admet aucune sous-suite qui tend vers $+\infty$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons la suite (u_n) bornée (disons par M). Alors $((u_n)^2)$ l'est aussi (par M^2).
Dès lors, touteles soussusites de $((u_n)^2)$ sont aussi bornées par M^2, et ne peuvent tendre vers $+\infty$.
(écrivez $\forall A,\ \exists G_A,\ \forall n,\ n \geqslant G_A \Rightarrow (u_n)^2 \geqslant A$ et prenez $A = M^2 + 1$)

$\boxed{\Leftarrow}$ On montre la contraposée.
Supposons (u_n) non bornée. On va alors construire une sous-suite de la forme $((u_{\varphi(n)})^2)$ qui diverge vers $+\infty$.
On quantifie « non bornée » : $\forall A,\ \exists k,\ |u_k| > A$.
On a envie de l'appliquer à $A = n$ pour chaque entier n.
On a alors que pour tout n il existe k vérifiant $|u_k| \geqslant n$.
On en prend un , qu'on nomme $\varphi(n)$ et on a $|u_{\varphi(n)}| \geqslant n$ d'où $(u_{\varphi(n)})^2 \geqslant n^2$.
Par minoration (le gendarme qui fuit vers l'infini), la suite $((u_{\varphi(n)})^2)$ diverge vers $+\infty$.

C'est presque bien, mais il y a un défaut. Pourquoi l'extraction φ serait elle croissante ? Rien ne nous l'assure (hormis une notion vague de « globalement, les $\varphi(n)$ sont forcément de plus en plus grands »).
E effet, si la suite (u_n) grimpe vite à une étape, et saute de 10 à 300, alors on risque d'avoir $u_{\varphi(10)} = u_{\varphi(11)} = u_{\varphi(12)} = \ldots u_{\varphi(99)}$.
C'est pourquoi on va construire l'extraction φ étape par étape.
On prend $A = 1$ et $\varphi(0) = Min(k \mid |u_k| \geqslant 1)$ (Min ou Inf ou ppe c'est ici pareil, on est sur $\mathbb{N}$).

On poursuit avec $A = 2.|u_{\varphi(0)}|$ et $\varphi(0) = Min(k \mid |u_k| \geqslant 2.|u_{\varphi(0)}|)$. On a forcément $\varphi(1) > \varphi(0)$.

Plus généralement : On poursuit avec $A = 2.|u_{\varphi(n)}|$ et $\varphi(n+1) = Min(k \mid |u_k| \geqslant 2.|u_{\varphi(n)}|)$.
On a forcément $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et aussi $|u_{\varphi(n+1)}| \geqslant 2.|u_{\varphi(n)}| \geqslant 2^{n+1}$.

La difficulté parfois sur ce type d'exerccice : croire qu'on a démontré $A \Rightarrow B$ puis $B \Rightarrow A$ alors qu'on a démontré $A \Rightarrow B$ et $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (qui n'apporte rien de plus, voyez vous...).

∘20∘ Montrez que si la suite (a_n) (jamais nulle) n'admet aucune sous-suite bornée, alors la suite $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ converge vers 0.

La suite (u_n) n'est jamais nulle, donc la suite $(1/u_n)$ existe.

∘21∘ Soit p dans $\mathbb{N} - \{0,1\}$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dbinom{n+p}{n}^{-1}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+p+2).u_{n+2} = (n+2).u_{n+1}$.
Montrer par récurrence $S_n = \dfrac{1}{p-1}.\Big(1 - (n+p+1)u_{n+1}\Big)$.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = (n+p).u_n$. Montrer que (v_n) converge vers 0. Déduisez $\lim_{n\to+\infty} S_n$ en fonction de p.

∘22∘ Pour un contre-exemple à la comparaison de $(A+B)\cap(B+C)\cap(C+A)$ et $(A\cap B)+(B\cap C)+(C\cap A)$, Louis propose de prendre $A = S_3(\mathbb{R})$, $B = A_3(\mathbb{R})$ et $C = T_3(\mathbb{R})$ (matrices symétriques, antisymétriques et matrices de trace nulle toutes en taille 3). Déterminez les dimensions des sous-espaces vectoriels ci dessus.

∘23∘ ♡ Montrez que dans $range(83)$ il y a 82 entiers premiers avec 83 (qui est premier).
Montrez que dans $range(83^2)$ il y a 82×83 entiers premiers avec 83^2 (qui n'est plus premier, lui !).
Montrez que dans $range(1411)$ il y a 1312 entiers premiers avec 1411 (qui contient un facteur 83).

Comme 83 est premier, tous les entiers de 1 à 82 sont premiers avec 83.
Et il y en a bien 82.

Question : 0 est il premier avec 83 ? Qui sont les diviseurs de 0 ? Tous les entiers (0 est un multiple de tout le monde). Qui est le plus grand diviseur commun de 0 et 83 ? Simplement 83 lui même.
Peut-on trouver une identité de Bézout entre 0 et 83 ? Une formule $u.0 + v.83 = 1$? Moi j'ai pas.[2]

Entre 1 et 83^2 il y a 83^2 nombres.
Qui parmi eux a un diviseur commun avec 83 autre que 1 (sachant que le seul diviseur propres de 83^2 sont 83).
La réponse est donc : les multiples de 83 : 83×1, 83×2 jusqu'à 83×83.
Il y en a donc 83.

Bilan : $83^2 - 83$ nombres sont premiers avec 83^2.

On divise : $1411 = 83 \times 17$. Cette fois, on doit éliminer les entiers qui ont un diviseur égal à 17 ou (inclusif) un diviseur égal à 83.
On enlève 17×1, 17×2 jusqu'à 17×83 (il y en a 83).
On enlève 83×1, 83×2 jusqu'à 83×16 (et pas 83×17 car on l'a déjà enlevé).
On a donc $83 \times 17 - 83 - (17 - 1)$ nombres.
On reformule en $83.17 - 83.1 - 17.1 + 1$ ce qui fait 82.17.

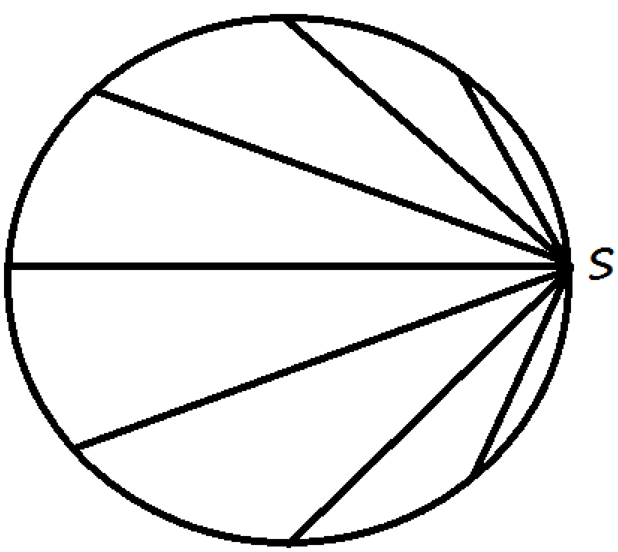
Cet exercice travaille autour de l'indicateur d'Euler : $\varphi(n)$ compte combien d'entiers de range(n) sont premiers avec n.
On a des formules explicites dès lors qu'on connaît la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

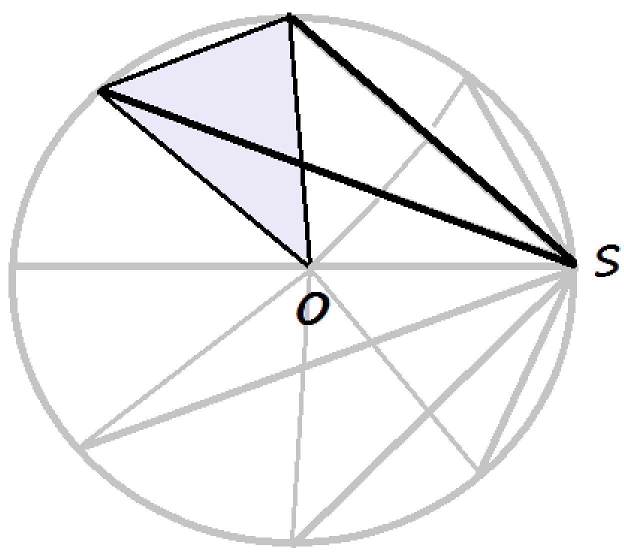
∘24∘ Un polygone convexe régulier a 527 diagonales. Calculez le plus petit angle non nul entre deux diagonales *(étape intermédiaire : calculez le nombre de sommets)*.

Prenons un polygone à n sommets (et n côtés).
De chaque sommet partent $n - 3$ diagonales le sommet voit $n - 1$ autres sommets
mais quand on le relie à l'un de ses deux voisins, on n'a
pas une diagonale
mais un côté
Mais avec $n.(n - 3)$, chaque diagonale A_iA_k est comptée deux fois (une fois par A_i et une fois par A_k).

On a donc ici : $\dfrac{n.(n-3)}{2} = 527$.
On a une équation du second degré $n^2 - 3.n - 1054 = 0$.
Les deux racines sont -31 et 34. On gardera 34.

Et maintenant, que est l'angle entre deux diagonales (issues d'un même sommet, c'est ambigu).
Par théorème de l'angle au centre.





L'angle en S est à chaque fois la moitié de l'angle en O.
Et tous les angles en O sont égaux à $\dfrac{2.\pi}{n}$ puisque le disque est découpé en n parts.

2. au final, il n'y a que 1 qui soit premier avec 0

Les angles entre les diverses diagonales valent donc tous ici $\dfrac{\pi}{34}$.

∘25∘

La suite u est périodique de période 4 à partir du rang 100 et vérifie $u_n = n^2$ pour $n \leq 100$ et $u_{100} = 3$, $u_{101} = 5$, $u_{102} = 13$, $u_{103} = 7$. Écrivez un script Python qui prend en entrée n et retourne u_n.

```
def Suite(n) :
....if n<101 :
........return n*n
....L = [3, 5, 13, 7]
....Index n = n%4
....return L[Index]
```

∘26∘

Y a-t-il plus de parties à 11 éléments dans un ensemble à 33 éléments que de parties à 15 éléments dans un ensemble à 30 éléments ?

parties à 11 éléments dans un ensemble à 33 éléments	$\binom{33}{11}$	$\dfrac{33.32.31.30.29.28.27.26.25.24.23}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}$
parties à 15 éléments dans un ensemble à 30 éléments	$\binom{30}{15}$	$\dfrac{30.29.28.27.26.25.24.23.22.21.20.19.18.17.16}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15}$

Sans calculatrice, on fait quoi ? On fait des maths.

On calcule le quotient de ces deux entiers, pour le comparer à 1 :

$$\frac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}} = \frac{\dfrac{33.32.31.30.29.28.27.26.25.24.23}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}}{\dfrac{30.29.28.27.26.25.24.23.22.21.20.19.18.17.16}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15}}$$

$$\frac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}} = \frac{33.32.31.30.29.28.27.26.25.24.23}{\dfrac{30.29.28.27.26.25.24.23.22.21.20.19.18.17.16}{12.13.14.15}}$$

$$\frac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}} = \frac{(33.32.31.30.29.28.27.26.25.24.23).(12.13.14.15)}{30.29.28.27.26.25.24.23.22.21.20.19.18.17.16}$$

On note la cohérence au passage : 15 termes en haut, 15 termes en bas.

On simplifie les éléments communs : $\dfrac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}} = \dfrac{33.32.31.12.13.14.15}{22.21.20.19.18.17.16}$.

On simplifie par 11, 6, 7 : $\dfrac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}} = \dfrac{3.32.31.2.13.2.15}{2.3.20.19.3.17.16}$

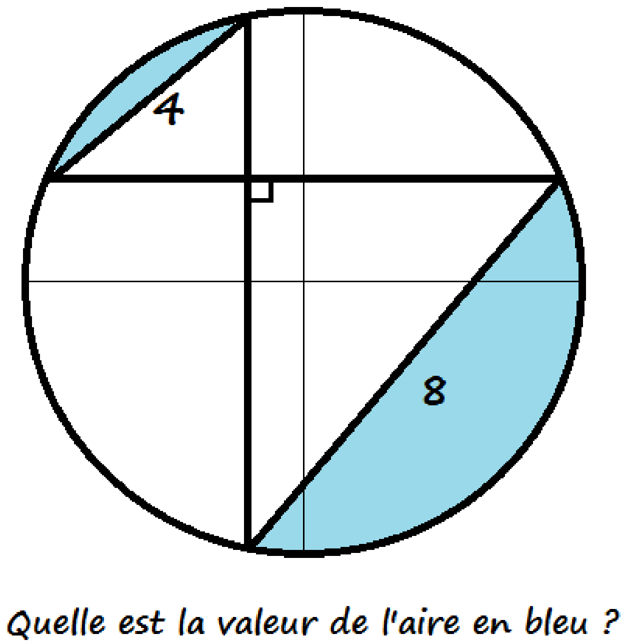
On simplifie par 5 et 16 : $\dfrac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}} = \dfrac{3.2.31.2.13.2.3}{2.3.4.19.3.17.1}$.

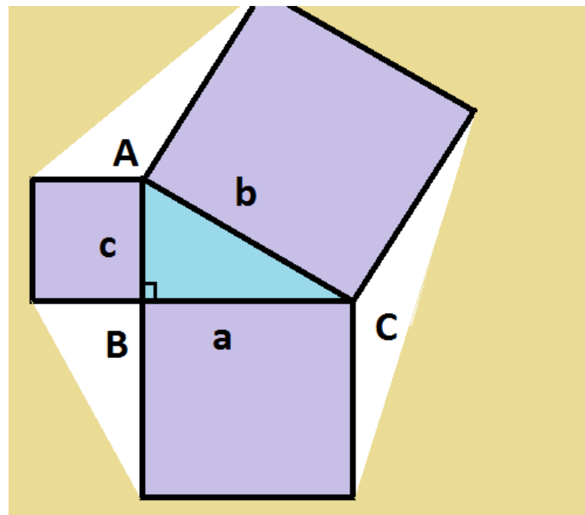
Allez, pour finir : $\dfrac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}} = \dfrac{13.31}{17.19} = \dfrac{403}{323}$.

On a donc $\binom{33}{11} > \binom{30}{15}$ (c'est même 193536720 face à 155117520).

Le chemin pour arriver à la réponse est mille fois plus beau que la réponse elle même...
Sauf si on utilise une calculatrice. Mais quel est alors l'intérêt de faire des maths ? Autant faire tout de suite de la physique !

◦27◦





Le concours Kangourou propose l'exercice suivant : $(A,\ B,\ C)$ est un triangle rectangle en B *(côtés a, b etc, hypoténuse b)*. On construit des carrés sur les côtés.On obtient ainsi une figure qu'on complète en hexagone. Montrez que l'aire de l'hexagone est $2.a.c + 2.(a^2 + c^2)$.

On a évidemment des pièces faciles à déterminer.

Le triangle $(A,\ B,\ C)$ d'aire $a.c/2$. Son symétrique par rapport à B de même aire $a.c/2$. Ou alors, on colle les deux triangles rectangles et on récupère un rectangle de côtés a et c.	Les deux « petits » carrés d'aires a^2 et c^2.	Le grand carré d'aire b^2. mais par théorème de Pythagore, il a pour aire $a^2 + c^2$.	Il reste deux triangles basés sur le grand carré. Prenons celui en C pour des raisons de symétrie des rôles. Il a pour côtés a et c *(et l'autre est plus lourd à déterminer)*.

L'aire d'un triangle est le produit des deux côtés fois le sinus de l'angle, divisé par 2. C'est la formule base fois hauteur divisé par 2.

Il faut donc déterminer le sinus de l'angle obtus en C. Par complémentarité, on le mesure en faisant un tour autour de C : $\gamma + \frac{\pi}{2} + inconnu + \frac{\pi}{2} = 2.\pi$.

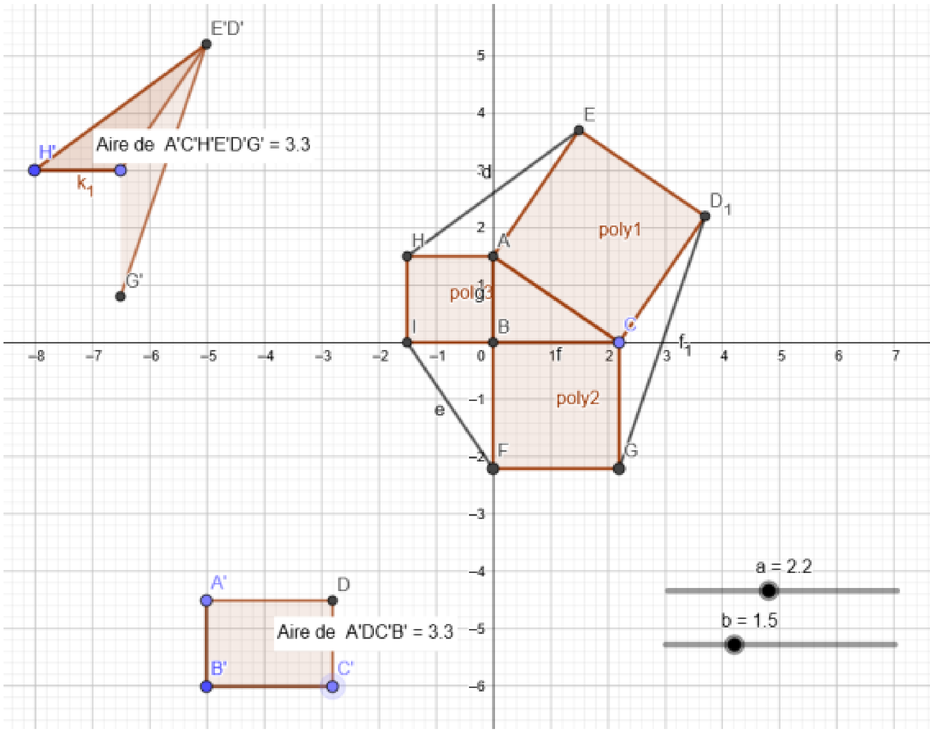
L'angle obtus en C vaut $\pi - \gamma$. Son sinus vaut donc $\sin(\pi - \gamma)$ c'est à dire $\sin(\gamma)$. Dans le triangle rectangle en B, on a $\sin(\gamma) = \frac{oppose}{hypothenuse} = \frac{c}{b}$.

L'aire du triangle marqué en C est donc $a.b.\frac{c}{b}.\frac{1}{2}$. On trouve $\frac{a.c}{2}$.

Il en va de même pour l'autre triangle.[3]

L'aire totale est donc $\boxed{2.a.c + 2.(a^2 + c^2)}$

3. on peut le prouver d'autres façons, en déformant le triangle initial



Plus un cadeau de Tristan : (MPSI2 du premier confinement, passé en MP à Decour)
.
.
.
.

◦28◦

♡ Complétez pour que les variables aléatoires "*note en maths*" et "*note en physique*" soient indépendantes, pour faire plaisir à l'inspecteur.

élève	**Abder**	**Bintou**	**Camille**	**Diane**	**Elodie**	**Fred**	**Gwen**	**Hans**	**Ilias**	**Jules**
maths	A	A	A	B	A	B	B	B	B	
physique	A	B	C		C			B	B	C
élève	**Kian**	**Lev**	**Max**	**Naomi**	**Omar**	**Piotr**	**Quik**	**Ruth**	**Swen**	**Tiffany**
maths	B	C	C		C	C	C	C		C
physique				C				A		A

But du jeu : compléter le tableau

	A	B	C
A			
B			
C			

pour que la marice soit de rang 1.

Ce qu'on a déjà :

	A	B	C	maths
A	1		2	
B	1	2		
C	2			
physique				

avec ceux et celles dont on connaît les deux notes.

Version avec prénom

	A	B	C	maths
A	1 Abder		2 Ruth et Tiffany	
B	1 Bintou	2 Hans et Ilias		
C	2 Camille et Elodie			
physique				

Et avec ceux dont on connaît une note

	A	B	C	Maths
A	1 A		2 R et T	A R T
B	1 B	2 H et I		B H I
C	2 C et E			C E J N
	A B C E	D F G H I K	L M O P Q R T	

Et il en reste un à placer pour avoir 20 élèves.

Comme la proportion note de Physique ne doit pas dépendre de la note de maths, il faut la même proportion de « physique A » dans les trois colonnes, de même pour « Physique B » et « Physique C ».

Avec nos individus si on ne veut pas les couper en tranches, on est obligé d'avoir

	A	B	C	Maths
A	1	2	2	-> 5
B	1	2	2	->5
C	2	4	4	->10
	4	8	8	

On peut proposer un remplissage

	A	B	C	Maths
A	A	D F	R T	A R T
B	B	H I	L M	B H I
C	C E	G H J N	O P Q R T	C E J N
	A B C E	D F G H I K	L M O P Q R T	

◦29◦ Sachant que (a_n) est une suite arithmétique, $\sum_{k=0}^{100} a_k = 0$ et $\sum_{k=0}^{200} a_k = 20100$ calculez a_n pour tout n.

Comme la suite (a_n) est arithmétique, on a juste à compter les termes : $\sum_{k=0}^{100} a_k = 101.\dfrac{a_0 + a_{100}}{2}$ et $\sum_{k=0}^{200} a_k = 201.\dfrac{a_0 + a_{200}}{2}$.

On déduit donc tout de suite : $a_0 + a_{100} = 0$ et $a_0 + a_{200} = 200$.

On a donc un petit système : $\left\{\begin{array}{ccccc} 2.a_0 & + & 100.r & = & 0 \\ 2.a_0 & + & 200.r & = & 200 \end{array}\right|$. Sans effort : $r = 2$ et $a_0 = -100$ et donc $\boxed{a_n = 2.n - 100}$

◦30◦ ♣ Voici des définitions *(ratées)* de "suite de Cauchon". Que pouvez vous déduire de chacune :

a	$\exists K \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (K \leqslant p \leqslant q) \Rightarrow (\lvert u_p - u_q\rvert \leqslant \varepsilon)$
b	$\forall \varepsilon > 0,\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \exists K \in \mathbb{N},\ (K \leqslant p \leqslant q) \Rightarrow (\lvert u_p - u_q\rvert \leqslant \varepsilon)$
c	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (K_\epsilon \geqslant p \geqslant q) \Rightarrow (\lvert u_p - u_q\rvert \leqslant \varepsilon)$
d	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (K_\epsilon \leqslant p \leqslant q) \Rightarrow (\lvert u_p + u_q\rvert \leqslant \varepsilon)$
e	$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall K \in \mathbb{N},\ (K \geqslant p \geqslant q) \Rightarrow (\lvert u_p - u_q\rvert \leqslant \varepsilon)$
f	$\forall \varepsilon \geqslant 0,\ \exists K_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (K_\epsilon \leqslant p + q) \Rightarrow (\lvert u_p - u_q\rvert \leqslant \varepsilon)$

◦31◦ On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Montrez, en minorant $H_{2.n} - H_n$ que H n'est pas une suite de Cauchy.

Soit φ injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On pose $\phi_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\varphi(k)}{k^2}$. En minorant aussi $\phi_{2.n} - \phi_n$ montrez que ϕ n'est pas une suite de Cauchy (on pourra dire qu'une somme de n entiers distincts vaut au moins $0 + 1 + 2 + \ldots + n - 1$.

$$H_{2.n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2.n} \frac{1}{k}$$

On a n termes, tous les grands que $\dfrac{1}{2.n}$.

On a donc $H_{2.n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

On a donc

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall G,\ \exists (p,q),\ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \geqslant K \ et\ \lvert H_p - H_q\rvert > \varepsilon_0$$

Remarque : C'est la négation de $\forall \varepsilon > 0,\ \exists G_\varepsilon,\ \forall (p,q),\ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \geqslant K_\varepsilon \Rightarrow \lvert H_p - H_q\rvert \leqslant \varepsilon$.

Dans cette quantification de « de Cauchy »,εest quelconque, son nom est « quelconque »
K dépend de ε, ion l'appelle K_ε
p et q sont quelconques, on les appelle p et q.

Dans $\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall G,\ \exists (p,q),\ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \geqslant K \ et\ \lvert H_p - H_q\rvert > \varepsilon_0$

ε est à trouver, particulier, on l'appelle ε_0
K est quelconque, on l'appelle K (et pas K_ε, on raisonne au lieu d'apprendre par cœur, et surtout, on voit des variables qui dépendent les unes des autres)
p et q sont à trouver, il faudrait les appeler p_0 et q_0 ou même p_K et q_K car ils ont le droit de dépendre de K.

On va prendre $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ (on s'attendait à $\frac{1}{2}$, mais on veut des inégalités strictes).

K est quelconque donné, on prend alors $p_K = K$ et $q_K = 2.K$ et on a $|H_{2.K} - H_K| \geqslant \frac{1}{4}$.

La suite n'est pas de Cauchy. Elle ne peut pas non plus converger.

◦32◦

Vrai ou faux : de toute suite réelle on peut extraire une sous-suite strictement croissante.
de toute suite réelle on peut extraire une sous-suite strictement monotone.
de toute suite réelle non bornée on peut extraire une sous-suite monotone.

D'une suite constante, vous ne pourrez extraire que des sous-suites constantes, et donc pas strictement monotones. C'est donc réglé pour les deux premières.

La dernière est dans le cours pour une suite quelconque déjà.

◦33◦

Un élève dont je tairai le nom s'est trompé sur la moyenne de Cesàro : $\frac{a_0 + \ldots + a_n}{n}$ au lieu de $\frac{a_0 + \ldots + a_n}{n+1}$ (nombre de termes).
Perd il la propriété « convergence » ?
Perd il la propriété « croissance » ?

La croissance peut se perdre.

On donne un contre-exemple :

n	0	1	2	3
a_n	2	2	2	
$\frac{a_0 + \ldots + a_n}{n}$	?	4	3	

Et je laisse les plus pervers trouver des trucs pires...

Pour ce qui est de la converge, on a prouvé dans le cours :

• si (a_n) converge vers α, alors $\left(\frac{a_0 + \ldots + a_n}{n+1}\right)$ converge vers α.

En multipliant par $\left(\frac{n+1}{n}\right)$, on a aisément « $\left(\frac{n+1}{n}.\frac{a_0 + \ldots + a_n}{n+1}\right)$ converge aussi vers α ».

◦34◦ ◊ 0 ◊

Une suite réelle a vérifie la propriété P si et seulement si on a $\sum_{k=0}^{n}(a_k)^2 \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n}$. Montrez qu'une suite vérifiant P est positive à partir d'un certain rang.

Prenons une suite vérifiant la propriété P. Le produit $a_n.\sum_{k+}^{n}(a_k)^2$ doit converger vers 1.

A partir d'un certain rang $N_{1/2}$, il est entre 1/2 et 3/2. Il est positif. On a donc a_n qui est du même signe que $\sum_{k=0}^{n}(a_k)^2$. Mais la somme de carrés est positive. A partir du rang $N_{1/2}$ *(et même avant)*, a_n est positif.

◊ 1 ◊ Quelles sont les suites géométriques qui vérifient la propriété P ?

Prenons une suite géometrique de premier terme a_0 et de raison r a pour terme d'indice n le réel $a_n.r^n$.

La raison sera positive, de même que le premier terme, pour que la suite soit bien positive à partir d'un certain rang, sinon, on élimine.

On somme les carrés : $\sum_{k=0}^{n}(a_k)^2 = (a_0)^2.\sum_{k=0}^{n} r^{2.k} = \frac{1-r^{2.n+2}}{1-r^2}.(a_0)^2$.

L'équivalence demandée se traduirait par un quotient tendant vers 1 :

$a_n.\sum_{k=0}^{n}(a_k)^2 = (a_0)^3.\frac{1-r^{2.n+2}}{1-r^2}.r^n$.

On doit distinguer des cas (c'est là qu'on commence à faire des maths et pas juste du calcul ; c'est là qu'on commence à faire l'ingénieur) : tout dépend de la position de r par rapport à 1.

- Si r est entre 0 et 1, le produit tend vers 0 (le terme $(a_0)^3.\frac{1-r^{2.n+2}}{1-r^2}$ reste borné).
- Si r vaut 1, alors la formule est $a_n.\sum_{k=0}^{n}(a_k)^2 = 1.(n+1)$. Ce terme ne tend pas vers 1.
- Si r est plus grand que 1, le produit est égal à $(a_0)^3.\frac{r^{2.n+2}-1}{r^2-1}.r^n$, équivalent à $(a_0)^3.\frac{r^{3n+2}}{r^2-1}$. Encore raté.

Aucune suite géométrique ne convient.

Il faut penser à traiter à part (et donc à traiter) le cas où la raison vaut 1. C'est toujours le truc à ne pas oublier avec les suites géométriques...

◇ 2 ◇ La suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ vérifie-t-elle la propriété P ?

Tentons la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$. Le produit à étudier est $\dfrac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(k+1)^2}$. Le terme devant la somme tend vers 0, et la somme converge *(oui, vers $\dfrac{\pi^2}{6}$)*. Le produit ne converge pas vers 1. Raté.

◇ 3 ◇ La suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ vérifie-t-elle la propriété P ?

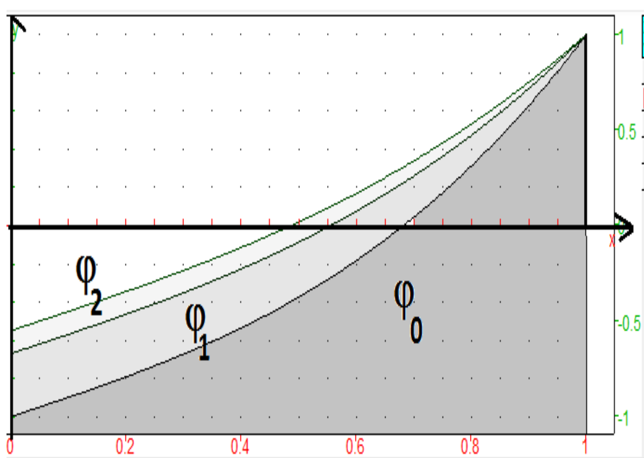
Tentons avec la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$. Cette fois, le produit est $\dfrac{H_{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ avec (H_n) la série harmonique. On connaît son comportement de type logarithmique $\dfrac{H_{n+1}}{\sqrt{n+1}} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$. Par croissances comparées, l'équivalent tend vers 0. Le produit tend aussi vers 0 *(attention, ne pas dire "est équivalent à 0", ceci n'a pas de sens)*.

◇ 4 ◇ Montrez que la relation $u_0 = 1$ et pour tout n, "u_{n+1} est la racine positive de l'équation $x^3.u_n + x = u_n$ d'inconnue x" définit bien une suite réelle (prouvez l'existence de tous les termes). Montrez que cette suite est positive, décroissante. On note λ sa limite. Montrez qu'elle ne peut valoir que 0. Montrez que la suite (u_n) ainsi construite vérifie P.

On se donne donc $u_0 = 1$. Le premier terme de la suite existe.
Pour u_1, on doit résoudre sur $\mathbb{R}^+$ l'équation $x^3 + x = 1$. On introduit l'application $\varphi_0 = x \longmapsto x^3 + x - 1$. Elle est continue, strictement croissante, négative en 0. Et en 1 elle vaut 1. Par théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule au moins une fois. Par stricte monotonie, elle ne s'annule qu'une fois. C'est en u_1.

Et seuls les élèves le nez collé à la feuille et toute emplis de naïveté termanalienne vont tenter de calculer u_1.

On note qu'on a $0 < u_1 < 1$.
On cherche s'il existe bien un u_2, unique, vérifiant $u_1.(u_2)^3 + u_2 = u_1$. On définit cette fois $\varphi_1 = x \longmapsto u_1.x^3 + x - u_1$. C'est une application croissante sur $\mathbb{R}^+$. En 0 elle est négative, en 1 elle vaut 1 : elle est positive.
Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence de u_2 et la stricte monotonie donne son unicité.
Prenons n quelconque et supposons que u_n existe et est positif (racine positive d'une équation écrite au rang précédent). On doit montrer existence et unicité de u_{n+1} solution de l'équation $u_n.x^3 + x = u_n$. On définit l'application $\varphi_n = x \longmapsto u_n.x^3 + x - u_n$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ *(pardon ? oui, on dérive et on a une somme de termes tous positifs...)*. Elle est continue. En 0 elle est négative et en 1 elle vaut $1 + u_n - u_n$; elle dépasse donc 1 .



Le théorème des valeurs intermédiaires donne existence de u_{n+1}. La stricte monotonie donne son unicité.
Le terme suivant existe, et la récurrence s'achève.

La suite u existe *(mais vous n'avez pas de formule explicite, c'est fini le bac à sable appelé Terminale)*.
Elle est positive par construction.
Étudions sa monotonie. On regarde ce qu'on a fait pour l'existence et unicité de u_{n+1}. On a appliqué le théorème des valeurs intermédiaires sur $[0,\ 1]$ pour l'application $\varphi_n = x \longmapsto u_n.x^3 + x - u_n$. Mais si on l'applique sur $[0,\ u_n]$? On a alors $\varphi_n(0) = -u_n < 0$ et $\varphi_n(u_n) = (u_n)^4 > 0$.
C'est donc sur $[0,\ u_n]$ qu'on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. u_{n+1} est dans $[0,\ u_n]$ (strict).
On reformule : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. C'est la décroissance attendue.

La suite u est décroissante minorée, elle converge.
Mais alors, en repartant de la relation $u_n.(u_{n+1})^3 + u_{n+1} = u_n$, on obtient par passage à la limite $\lambda^4 + \lambda = \lambda$.
La seule valeur possible pour la limite est 0.

On a au rang 0 : $u.\sum_{k=0}^{0}(u_k)^2 = 1.(1^1) = 1$.

On calcule au rang 1 : $u_1.\sum_{k=0}^{1}(u_k)^2 = u_1.(1+(u_1)^2) = u_1 + (u_1)^3$. u_1 a été construit pour vérifier $1.(u_1)^3 + u_1 - 1 =$

0. Le produit vaut 1.
On a alors $1+(u_1)^2 = \dfrac{1}{u_1}$ et on va s'en servir.
On regarde au rang 2 : $u_2.\sum_{k=0}^{2}(u_k)^2 = u_2.(1+(u_1)^2+(u_2)^2) = u_2.\Big(\dfrac{1}{u_1}+(u_2)^2\Big) = \dfrac{u_2+u_1.(u_2)^3}{u_1} = \dfrac{u_1}{u_1} = 1$ puisque $u_1.(u_2)^3+u_2 = u_1$.

On suppose, pour un n quelconque donné : $u_n.\sum_{k=0}^{n}(u_k)^2 = 1$.
On calcule au rang suivant : $u_{n+1}.\sum_{k=0}^{n+1}(u_k)^2 = u_{n+1}.\Big((u_{n+1})^2+\sum_{k=0}^{n}(u_k)^2\Big) = u_{n+1}.\Big((u_{n+1})^2+\dfrac{1}{u_n}\Big)$ par hypothèse de rang n.
On réduit au dénominateur commun $u_{n+1}.\sum_{k=0}^{n+1}(u_k)^2 = \dfrac{(u_{n+1})^3.u_n+u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n}{u_n}$ par construction de u_{n+1}.
La récurrence s'achève.

Pour tout n, on a $u_n.\sum_{k=0}^{n}(u_k)^2 = 1$. On peut faire tendre n vers l'infini, il y a une limite et elle vaut 1

∘35∘ Combien y a-t-il de suites de longueur N faites de 1 et de -1 dont la somme vaut 0 ?
Combien y a-t-il de suites de longueur N faites de 1 et de -1 dont la somme vaut s ?
Combien y a-t-il de suites de longueur 100 faites de 1 et de -1 dont la somme vaut 10 et dont toutes les sommes partielles étaient positives.

On dénombre les mots faits de symboles 1 et -1 de longueur N. Il y en a a priori 2^N.
Mais on impose ensuite que la somme vaille 0. Ceci signifie qu'il y a autant de 1 que de -1. Il faut déjà que N soit pair. La somme $\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k$ avec les ε_k valant -1 ou 1 a en effet la même parité que N.

1	-1	-1	1	...	1
-1	-1	1	-1	...	1
1	1	-1	1	...	-1

Ensuite, si N s'écrit $2.n$, il suffit de choisir les n emplacements pour les $+1$, et par complément, les -1 suivront.
On aboutit à $\binom{N}{n}$ ou encore $\boxed{\binom{2.n}{n}}$ On l'écrit aussi $\dfrac{(2.n)!}{(n!)^2}$.

Si l'on prend toujours N termes et qu'on impose une somme égale à s, on va considérer qu'il y a p nombres 1 et q nombres -1. Ils forment une liste de longueur $p+q = N$, et de somme $p-q = s$. On isole : $p = \dfrac{N+s}{2}$. Il importe, comme tout à l'heure dans le cas $s = 0$, que N et s soient de même parité.

On est ramené au choix des p symboles 1 dans la liste de longueur n : $\boxed{\binom{N}{p} = \dfrac{N!}{\left(\frac{N+s}{2}\right)!.\left(\frac{N-s}{2}\right)!}}$

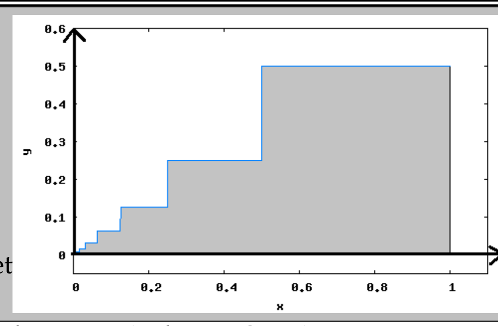
La formule est bien d'écriture symétrique.

On cherche ensuite des suites $(1,\ 1, -1,\ 1, \dots)$ vérifiant $\sum_{k=1}^{100}\varepsilon_k = 10$ et $\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k > 0$ pour tout n de 1 à 100. Pour avoir $\sum_{k=1}^{100}\varepsilon_k = 10$, il faut et il suffit d'avoir 55 termes en $+1$ et 45 termes en -1 : $\dfrac{100!}{55!.45!}$.
Mais le premier terme de la somme est forcément un 1. On cherche donc ensuite des mots de 99 symboles : 54 termes $+1$ et 45 termes -1 : $\dfrac{99!}{54!.45!}$.
Ensuite, on passe par le complémentaire. On cherche les chemins s'annulant au moins une fois. Par principe de symétrie, pour chaque chemin de $(1,\ 1)$ à $(100,\ 10)$ passant par 0 il y a un chemin de $(1, -1)$ à $(100,\ 10)$ (passant évidemment par 0). Et pour chaque chemin de $(1, -1)$ à $(100,\ 10)$, on crée "par passage à la valeur absolue" un chemin de $(1,\ 1)$ à $(100,\ 10)$. On a une bijection entre deux ensembles, ce qui permet d'en dénombrer un en passant par l'autre.

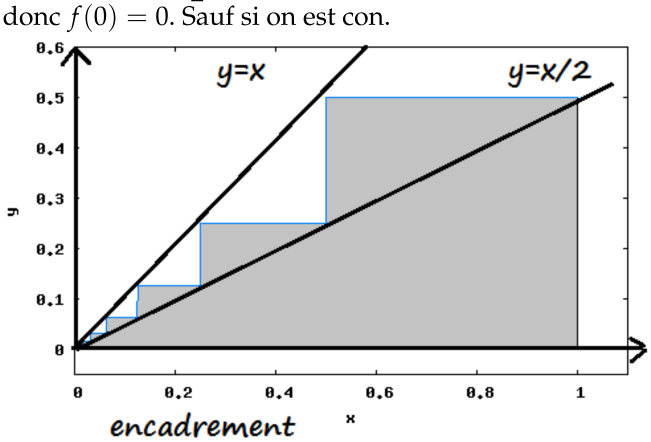
Il y avait $\dfrac{99!}{54!.45!}$ chemins de $(1,\ 1)$ à $(100,\ 10)$, on soustrait $\dfrac{99!}{55!.44!}$ chemin de $(1, -1)$ à $(100,\ 10)$.
Le nombre cherché est $\dfrac{99!}{54!.45!} - \dfrac{99!}{55!.44!}$, ce qui en fait quand même 6 144 847 121 413 617 959 672 059 296.
Pour une histoire similaire de mots de longueur 6 de somme 2 sans somme partielle nulle, on aboutissait à $\dfrac{5!}{3!.2!} - \dfrac{5!}{4!.1!}$ c'est à dire $10 - 5 = 5$, de liste explicite

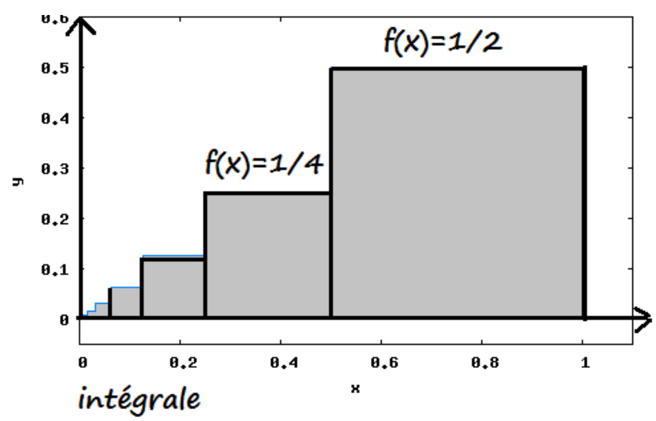
1	1	1	1	−1	−1	oui
1	1	1	−1	1	−1	oui
1	1	−1	1	1	−1	oui
1	−1	1	1	1	−1	non
1	1	1	−1	−1	1	oui
1	1	−1	1	−1	1	oui
1	−1	1	1	−1	1	non
1	1	−1	−1	1	1	non
1	−1	1	−1	1	1	non
1	−1	−1	1	1	1	non

∘36∘ ♡ Prolongez par continuité en 0 l'application $x \longmapsto 2^{[\ln(x)/\ln(2)]}$ et calculez son intégrale sur $[0,\ 1]$.



A cause du logarithme elle n'est pas définie en 0. Et on ne va la prolonger qu'à droite. On n'en revient pas aux ε, eux, c'est pour la théorie. Ensuite, pour la pratique, on encadre, on utilise des équivalents.
Ici, comme il y a une partie entière, on fait comme toujours avec elle, on l'encadre : $t - 1 < [t] \leqslant t$: $\frac{\ln(x)}{\ln(2)} - 1 \leqslant \left[\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right] \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.
On multiplie par $\ln(2)$ (positif), on passe à l'exponentielle (croissante) : $e^{\ln(x)-\ln(2)} \leqslant f(x) \leqslant e^{\ln(x)}$.
On reformule : $\dfrac{x}{2} \leqslant f(x) \leqslant x$. Quand x tend vers 0, les encadrants le font aussi, la fonction tend vers 0. On posera donc $f(0) = 0$. Sauf si on est con.





Pour l'intégrale, on utilise la relation de Chasles. On va découper $[0,\ 1]$ en intervalles où la partie entière du logarithme est constante. : $\left[\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}\right] = n$ avec n négatif.

Plus précisément, c'est sur $[2^{-N},\ 1[$ qu'on va travailler, puis on fera tendre N vers 0.

Sut $[2^{-n},\ 2^{-n+1}[$, on a
$$\begin{gathered} 2^{-n} \leqslant x < 2^{1-n} \\ -n.\ln(2) \leqslant \ln(x) < (1-n).\ln(2) \\ -n \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)} < 1-n \\ -n = \left[\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right] < 1-n \\ f(x) = 2^{-n} \end{gathered}$$

Chaque petite intégrale $\displaystyle\int_{2^{-n}}^{2^{1-n}} f(t).dt$ vaut donc $(2^{1-n} - 2^{-n}).2^{-n}$.

Il reste à sommer jusqu'au rang n, puis jusqu'à l'infini : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} (2^{1-n} - 2^{-n}).2^{-n} = \sum_{n=1}^{N} 2^{-2.n} = \frac{\frac{1}{4} - o(1)}{1 - \frac{1}{4}}$.

L'aire totale vaut $\boxed{\dfrac{1}{3}}$ Un cadeau à qui le prouve géométriquement, par un simple puzzle *(avec deux pièces identiques de même aire qui recouvrent un carré de côté 1)..*

∘37∘ Un élève a trouvé $N_\epsilon = \dfrac{1-2.e^\epsilon}{1-e^\epsilon}$ dans la quantification $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall n,\ n \geqslant N_\epsilon \to |u_n - a| \leqslant \varepsilon$. Donnez une suite dont il a pu partir.

Une solution naturelle consiste à remonter la formule : $n \geqslant \dfrac{1-2.e^\epsilon}{1-e^\epsilon} \Leftrightarrow (e^\varepsilon - 1).n \geqslant (2.e^\varepsilon - 1)$ (attention aux signes, $1 - e^\varepsilon$ est négatif...).

Ceci est équivalent à $e^\varepsilon.(n-2) \geqslant n-1$ puis $e^\varepsilon \geqslant \dfrac{n-1}{n-2}$ et même $\varepsilon \geqslant \ln\left(\dfrac{n-1}{n-2}\right)$. Prenons le cas d'égalité !

La suite $\left(\ln\left(\dfrac{n-1}{n-2}\right)\right)$ converge vers 0, et ce N_ε convient....

Une solution de facilité c'est : « la suite (u_n) est constante égale à a ».
Certes, pour tout ε, on pourrait prendre $N_\varepsilon = 0$ et tout irait bien. mais pourquoi alors ne pas prendre $N_{\varepsilon=} \frac{1-2.e^\epsilon}{1-e^\epsilon}$? ça marche aussi !

∘38∘ Montrez que $\left(\ln(n) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$ et $\left(\ln(n) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)$ forment un couple de suites adjacentes.

C'est la « généralisation » d'une exercice de l'I.S. dans lequel il y avait une série avec des $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k}$.

On nomme (A_n) et (B_n) nos deux suites. A_n contient un terme de plus que (B_n) mais avec un signe moins. c'est (A_n) la plus petite.
On se dit donc que c'est à elle de croitre, et à (B_n) de décroitre.
On vérifie aussi tout de suite : $B_n - A_n$tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

On se donne n et on calcule $B_{n+1} - B_n = \ln(n+1) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n}$.

On peut être tenté d'écrire $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ et même $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

> *Oui, c'est tentant, et peut être même bien, à condition de se souvenir que* $\ln(1+x)$ *est plus petit que* x.
> *C'est une inégalité de convexité. On l'a par exemple en écrivant la formule de Taylor avec reste intégrale pour le logarithme entre* 1 *et* $1+x$ *:*
> $\ln(1+x) = \ln(1) + \dfrac{1}{1}.x + \dfrac{x^2}{1}.\displaystyle\int_0^1 (1-t).\frac{-1}{(1+t.x)^2}.dt$ *Le reste intégrale est négatif, c'est gagné.*
> *Encore une fois, une idée simple comme* $\ln(1+x) \leqslant x$.

Mais il y a une idée encore plus belle : $\ln(n+1) - \ln(n)$ c'est $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$. Et c'est plus une aire qu'on compare à celle d'un rectangle.

Le graphe de $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est entre $\dfrac{1}{n+1}$ et $\dfrac{1}{n}$ sur l'intervalle $[n\ n+1]$. On a donc $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$.
Et l'une des inégalités est celle que l'on veut.

> *Avec plus de rigueur mais en perdant un peu du côté visuel :* $\forall t \in [n,\ n+1]$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{n}$,
> *On intègre ensuite de n à* $n+1$ *:* $\dfrac{1}{n+1} = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{n+1} \leqslant \int_n^{n=1} \frac{dt}{t} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n}.dt = \frac{1}{n}$.

Avec moins de réflexes de Sup, mais avec de bons réflexes de Terminale, pour montrer que $\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n}$ est négatif, il y a aussi l'idée de définit $x \longmapsto \ln(1+x) - \ln(x) - \dfrac{1}{x}$, de la dériver et d'étudier ses variations. Elle croit. Et elle tend vers 0 à l'infini. Elle est donc négative...

Bref, la suite (B_n) est décroissante.

Pour la croissance de (A_n), on calcule $A_{n+1} - A_n = \ln(n+1) - \ln(n) - \dfrac{1}{n+1}$. Et c'est l'autre inégalité qui sert.

Quelle chance !

Pour information, la limite commune de ces deux suites est γ, la constante d'Euler.

◦39◦ Montrez que pour tout choix de u_0 la suite $u_{n+1} = [e^{14.\cos(u_n/12)}]$ est périodique à partir d'un certain rang *(indication : principe des tiroirs)*.

A partir du rang 1, la suite ne peut prendre que 'un nombre fini de valeurs. En effet, $e^{14.\cos(u_n/12)}$ est entre 0 et e^{14}. Sa partie entière n'a qu'un nombre fini de valeurs possibles (en l'occurence $[e^{14}+1]$ qu'on va noter N).

Les $N+1$ entiers u_1 à u_{N+1} sont à placer dans N cases.
Il y en a donc deux qui prennent la même valeur.
$u_a = u_b$ avec $a < b$.
Mais alors $f(u_a) = f(u_b)$(en notant f l'application d'itération).
En recommençant $u_{a+2} = u_{b+2}$ puis $u_{a+n} = u_{b+n}$ pour tout n.
A partir de là, la suite est périodique de période $b-a$.

Mon ex se tasse. Elle se dilate la rate en chicanant. On apprécie les actions des recteurs. Corneille veut voir son Clitandre bientôt. Vive les fêtes soutenues. Ils veulent des facs animées.

◦40◦ La quantification classique de notre cours est : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon$. Il manque des niveaux de parenthèses.

Je propose de disposer ainsi les parenthèses :	$\Big(\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,\ n \geqslant N\Big) \Rightarrow \Big(|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon\Big)$
$\forall\varepsilon > 0,\ \Big(\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,\ n \geqslant N\Big) \Rightarrow \Big(|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon\Big)$	$\forall\varepsilon > 0,\ \Big(\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,\ n \geqslant N\Big) \Rightarrow \Big(|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon\Big)$

Est-ce correct ? Sinon, comment corriger ?
S'agit de la quantification de ((u_p) converge), de ((u_n) converge vers λ), de ((λ) converge vers (u_n)), de ($u_n \simeq \lambda$ à εprès), (toutes les suites convergent vers λ) ?

◦41◦ Déterminez ces deux bornes supérieures $Sup\{\cos(t) + 3.\sin(x) \mid (t,\ x) \in \mathbb{R}^2\}$ et $Sup\{\cos(t) + 3.\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Dans le premier, comme x et t varient, on peut maximiser $\cos(t)$ en prenant t égal à 0 et maximiser $3.\sin(x)$ en prenant x égal à $\dfrac{\pi}{2}$.
La borne supérieure est un maximum, égal à 4, atteint.

Pour le second, on a une fonction d'une seule variable. t ne peut pas être égal à la fois à 0 et à $\dfrac{\pi}{2}$ (l'exposé de physique quantique c'était l'autre jour).
Mais on sait écrire $\cos(t) + 3.\sin(t) = \sqrt{1^2+3^3}.\cos(t-\alpha)$ avec $\alpha = Arctan(3)$. Le maximum est $\sqrt{10}$, atteint d'ailleurs en $Arctan(3)$.

◦42◦ Lesquels de ces ensembles sont majorés :

$A = \left\{\dfrac{e}{n!} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$	$B = \left\{frac\left(\dfrac{n!}{e}\right) \mid (n,\ p) \in \mathbb{N}^2\right\}$♣	$C = \left\{\dfrac{e^p}{n!} \mid (n,\ p) \in \mathbb{N}^2\right\}$
$D = \left\{\dfrac{e^{2.n}}{n!} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$	$E = \left\{(-1)^{n+p+1}\dfrac{p!}{n!} \mid (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leqslant n\right\}$	$F = \left\{\dfrac{n^e}{n!} \mid (n,\ p) \in \mathbb{N}^2\right\}$

où $frac(x)$ est la partie décimale ou fractionnaire de x *(*$x - [x]$*)* et donnez sa borne supérieure de ceux qui en ont une.

A est majoré par 200, mais j'y vais un peu large.
En fait, tous les éléments de A sont plus petits que e. Et cette valeur est atteinte.
La borne supérieure de A est e, et c'est même un maximum (atteint).

Dans B, il n'y a que des $frac\left(\dfrac{n!}{e}\right)$, donc tous plus petits que 1 (une partie décimale est entre 0 et 1).
Mais 1 n'est pas atteint puisque les parties fractionnaires restent dans $[0,\ 1[$.
Peut être quand même 1 est « le plus petit majorant ».

A suivre.

Dans C il y a déjà tous les e^p quand p décrit $\mathbb{N}$ (et que n vaut 0).
Ce sous-ensemble n'est pas majoré.
Faites varier n, le gros ensemble n'est toujours pas majoré.

Précisément, si vous voulez qu'un élément de C dépasse une valeur A que vous rêvez d'atteindre et dépasser, prenez juste $n = [\ln(A)] + 1$ (donc $n > \ln(A)$) et vous avez $e^n \geqslant e^{\ln(A)} = 1$.

Étant non majoré, comment cet ensemble aurait il une borne supérieure.

Dans D on a tous les termes d'une suite qui a la bonne idée de converger vers 0 (croissances comparées).
On a un ensemble majoré, et il suffit en fait de trouver le plus grand terme de cette suite.

Étudions ses variations en calculant $\dfrac{e^{2.(n+1)}}{(n+1)!} - \dfrac{e^{2.n}}{n!}$ (pour en avoir le signe).

On a $\dfrac{e^{2.(n+1)}}{(n+1)!} - \dfrac{e^{2.n}}{n!} = \dfrac{e^{2.n}}{(n+1)!}.(e^2 - (n+1))$.

On a donc $\dfrac{e^{2.0}}{0!} \leqslant \dfrac{e^{2.1}}{1!} \leqslant \dfrac{e^{2.2}}{2!} \leqslant \dfrac{e^{2.3}}{3!} \leqslant \dfrac{e^{2.4}}{4!} \leqslant \dfrac{e^{2.5}}{5!} \leqslant \dfrac{e^{2.6}}{6!} \leqslant \dfrac{e^{2.7}}{7!} \geqslant \dfrac{e^{2.8}}{8!} \geqslant \dfrac{e^{2.9}}{9!} \geqslant \dfrac{e^{2.10}}{10!} \geqslant \ldots$.

Le maximum (donc borne supérieure atteinte) est $\boxed{\dfrac{e^{2.7}}{7!}}$

A finir.

◦43◦ ♡ Déterminez $Sup\{(-1)^{n+1} + (-2)^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $Sup\{(-1)^{n+1} + (-2)^{-p} \mid (n,\ p) \in \mathbb{N}^2\}$.

$(-1)^{n+1} + (-2)^{-n}$ vaut $(-1)^{n+1}.\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.
On cherche à le majorer. Les termes négatifs sont majorés par 0. Et les termes positifs sont majorés par 1.
Et on ne fera pas mieux que 1.
En effet, les $(-1)^{n+1}.\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ avec n impair tendent vers 1 quand n tend vers l'infini.
La borne supérieure vaut 1, non atteinte.

Comme dans $\{(-1)^{n+1} + (-2)^{-p} \mid (n,\ p) \in \mathbb{N}^2\}$ p et n varient en toute indépendance, on atteint $1+1$ avec $n = 1$ et $p = 0$.
Et c'est un majorant. la borne supérieure vaut 2. Atteinte.

◦44◦ **-a-** Déterminez $Sup\left\{\dfrac{(-1)^n}{2^n} + \dfrac{(-1)^p}{2^p} \mid n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}\right\}$.
-b- Déterminez $Sup\left\{\dfrac{(-1)^n}{2^n} + \dfrac{(-1)^n}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.
-c- Déterminez $Sup\left\{\dfrac{(-1)^p}{2^n} + \dfrac{(-1)^n}{2^p} \mid n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}\right\}$.
-d- Déterminez $Sup\left\{\dfrac{(-1)^n}{2^p} + \dfrac{(-1)^n}{2^p} \mid n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}\right\}$.

Tous nos ensembles sont majorés par 2. Et les bornes supérieures valent... 2.

a	2	atteinte pour $n = p = 0$
b	2	atteinte pour $n = 0$
c	2	atteinte pour $n = p = 0$
d	2	atteinte pour $n = p = 0$

Décevant !

◦45◦ Déterminez $Sup\{\sin(t.\pi) \mid t \in \mathbb{N}\}$ et $Sup\{\sin(t.\pi) \mid t \in \mathbb{Q}\}$ et enfin $Sup\{\sin(t.\pi) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

$Sup\{\sin(t.\pi) \mid t \in \mathbb{N}\}$ vaut 0 car cet ensemble est le singleton $\{0\}$.

$Sup\{\sin(t.\pi) \mid t \in \mathbb{N}\}$ vaut 1. C'est en effet un majorant. Et il est atteint pour $t = \dfrac{1}{2}$.

$Sup\{\sin(t.\pi) \mid t \in \mathbb{R}\}$ vaut 1 aussi, pour les mêmes raisons.

◦46◦ Déterminez ces deux bornes supérieures $Sup\left\{\dfrac{x+10}{x^2+261} \mid x \in [0,\ +\infty[\right\}$ et $Sup\left\{\dfrac{x+10}{x^2+261} \mid x \in \mathbb{N}\right\}$.

Sur $\mathbb{R}$ on trace le graphe ou même juste un tableau de variations après avoir dérivé.
La dérivée est du signe de $-x^2 - 20.x + 261$. Elle s'annule et change de signe en 9.

Le maximum est atteint en 9 et il vaut $\dfrac{1}{18}$.

Et sur $\mathbb{N}$, on a de la chance, c'est le même maximum.

Remarque : *Si le maximum sur $\mathbb{R}$ avait été atteint en π par exemple, il aurait fallu comparer la valeur en 3 et en 4 pour connaitre le maximum sur $\mathbb{N}$.*

∘47∘ On se donne un entier n et τ est un élément de S_n. Montrez que $\{\sigma \in S_n \mid \sigma \circ \varphi = \varphi \circ \sigma\}$ est un sous groupe de $(S_n, \circ)$.
Déterminez le dans le cas $n = 4$ et $\sigma = \overrightarrow{(1\,2\,3\,4)}$.
Déterminez le dans le cas $n = 5$ et $\sigma = \overrightarrow{(1\,2\,3\,4)}$.
Déterminez le dans le cas $n = 6$ et $\sigma = \overrightarrow{(1\,2\,3\,4)}$.

A faire.

∘48∘ Montrez : $p.p.c.m.(a, b, c) = p.p.c.m.\big(p.p.c.m.(a, c),\ p.p.c.m.(b, c)\big)$.

∘49∘ a et b sont deux entiers naturels. On suppose : $\exists (u,\ v) \in \mathbb{N}^2,\ a.u + b.v = 1$. Montrez que a divise b ou b divise a.
A et B sont deux entiers relatifs. Montrez : $\exists (u,\ v) \in \mathbb{R}^2,\ A.u + B.v = 1$.

C'est quoi ces trucs avec le théorème de Bézout amoché car mal quantifié.

Si a et b sont des entiers naturels, et si u et v le sont aussi, $a.u + b.v$ est aussi un entier naturel. Mais comment cette somme $a.u + b.v$ peut elle valoir 1 ? Uniquement avec un des termes qui vaut 1 et l'autre qui vaut 0.
Par symétrie des rôles, on va dire $a.u = 1$ et $b.v = 0$.
C'est donc que a vaut 1 (et u aussi).
Dès lors, a divise b. (au fait, pour b, on a $v = 0$).

La seconde affirmation est fausse si on autorise $a = b = 0$.
Mais sinon, si au moins un des deux est non nul, il suffit de prendre $a.\dfrac{1}{a} + b.0$ si c'est a qui est non nul...

∘50∘ Si on vous donne une idéntité de Bézout entre a et b ($a.u + b.v = 1$), trouvez une identité de Bézout entre a^2 et b^2.

On élève au cube
$$1 = (a.u + b.v)^3 = (a + 3.b).a^2 + (3.a + b).b^2$$

∘51∘ Si A est une partie de $\mathbb{C}$ on pose $diam(A) = Sup\{|b - a| \mid (a,\ b) \in A^2\}$. Déterminez le diamètre d'un disque de centre C et de rayon R.
Montrez : $AB \Rightarrow diam(A) \leqslant diam(B)$.
Quel est le diamètre du vide ?

∘52∘ Pour f continue de $[0,]$ dans $\mathbb{R}$, on pose $||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|.dt$, $||f||_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 (f(t))^2.dt}$ et $||f||_\infty = Sup(|f(t)| \mid t \in [0,\ 1]$.
Montrez que ce sont bien trois normes.
Pour l'inégalité trianglaire de $||.||_2$, on utilisera l'inégalté de Cauchy Schwarz.

Montrez pour toute f : $||f||_1 \leqslant ||f_2|| \leqslant ||f||_\infty$.

Montrez que la suite de fonctions $x \longmapsto x^n$ est bornée pour chacune de ces normes.
Montrez que la suite de fonctions $x \longmapsto n.x^n$ est bornée une et une seule de ces normes.

∘53∘ ♡ Soit u une suite réelle. Montrez que si u converge, alors pour tout réel λ, $\lambda.u_{n+1} + u_n$ converge aussi.

♡ On suppose que $u_{n+1} + u_n$ converge quand n tend vers l'infini. Montrez *(par un contre-exemple)* que u ne converge pas forcément.
♣ On suppose que $2.u_{n+1} + u_n$ *(notée v)* converge vers 0.
Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}.2^k.v_k$. En utilisant le théorème de Cesàro généralisé (c'est celui de Cesarbi dans l'exercice plus haut), déduisez que u converge aussi vers 0.
Montrez que si v converge vers α alors u converge *(vers quoi ?)*.

Montrez que si $u_{n+1} + 2.u_n$ converge, alors u ne converge pas forcément.

Première question facile : théorèmes algébriques : $\lambda.u_{n+1}+u_n$ converge vers $(1+\lambda).\alpha$ si αest la limite de la suite. [4].

Un exemple où que $(u_{n+1}+u_n)$ converge mais pas (u_n) ? Non, franchement, je ne vois pas... vouscroyez que ça sort tout seul les contre-exemeples ?
Bon, on va voir...

Passons à l'exercice un peu sympathique.
On pose donc $v_n = 2.u_{n+1}+u_n$ et on calcule $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}.2^k.v_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}.2^k.2.(u_{k+1}+u_k)$
On sépare en $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}.2^{k+1}u_{k+1}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}.2^k.u_k$.
On décalle en $\sum_{p=1}^{n+1}(-1)^p.2^p u_p+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}.2^k.u_k$.
On soustrait même : $\sum_{p=1}^{n+1}(-1)^p.2^p u_p-\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}.2^k.u_k$.
On simplifie la partie commune : $(-1)^{n+1}.2^{n+1}.u_{n+1}-u_0$.

Que faire avec Cesaro ?
La suite $((-1)^{k+1}.v_k)$ tend vers 0 comme la suite (v_k).
Sa moyenne de Cesàro, avec pondération $(1,2,4,8,\dots 2^n,\dots)$ tend aussi vers 0.
On a donc $\dfrac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}.2^k.v_k}{\sum_{k=0}^{n}2^k}$ qui converge vers 0.
Avec nos simplifications : $\dfrac{(-1)^{n+1}.2^{n+1}.u_{n+1}-u_0}{2^{n+1}-1}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
On simplifie, et voilà (u_n) qui converge aussi vers 0.

Que fait on si (v_n) converge vers β pas forcément nul ?
On translate pour avoir une suite (w_n) qui converge vers 0, en remplaçant u_n par $u_n-\dfrac{\beta}{3}$.

Trouvons un exemple où $(u_{n+1}+2.u_n)$ converge, mais pas (u_n).
Prenons $u_n = (-2)^n$ pour tout n. Cette suite diverge (non bornée, une extraction qui part vers $+\infty$ et une autre vers $-\infty$).
Mais quand on somme $(-2)^{n+1}+2.(-2)^n$ on trouve toujours 0 et là, cette suite converge.

∘54∘ ♡ Complétez ($\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{j}+\vec{k}$) en base de $\mathbb{R}^3$ *(c'est à dire adjoignez un vecteur)* sachant que sur cette base, $\vec{i}$ a pour composantes (1, 1, 1).

Il manque un vecteur : ($\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{e_3}$).
Et si $\vec{i}$ a pour composantes (1, 1, 1), c'est qu'on a $\vec{i} = 1.(\vec{i}+\vec{k})+1.(\vec{j}+\vec{k})+1.\vec{e_3}$.
On soustrait : $\vec{e_3} = -\vec{j}-2.\vec{k}$.

Et on vérifie que c'est bien une base de $(\mathbb{R}^3,+,.)$: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$.

∘55∘ Écrivez un script `Python` appelé `Cesaro` qui prend en entrée une suite *(liste évidemment finie de flottants)* et retourne en sortie une liste égale à la moyenne de Cesàro de la précédente *(exemple `Cesaro([1, 5, 3, 8])` retournera `[1, 3, 3, 4.25]`)*.
Écrivez un script appelé `oraseC` qui prend en entrée une suite et retourne en sortie la liste dont elle est la moyenne de Cesàro.

---

4. et si on se dit que c'est juste le prof qui a oublié les parenthèses sans le faire exprès, confondant $(u_{n+1}+\lambda.u_n)$ et $u_{n+1}+\lambda.u_n$

```
def Cesaro(A) :
....C = [ ] #la liste des moyennes
....n, S = 0, 0. #n sera entier, on force S à être flottant
....for Element in A :
........S += Element #somme des termes dans accumulateur
........n += 1 #nombre de termes
........C.append(S/n)
....return C
```

plus proche de vos habitudes en `range(len(L))` :

```
def Cesaro(A) :
....C = [ ]
....S = 0.
....for k in range(len(A)) :
........S += A[k]
........C.append(S/(k+1))
....return C
```

Dans l'autre sens, avec nos notations, on remonte : $c_{n-1} = \dfrac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n}$
et $c_n = \dfrac{a_0 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n+1}$
donc $a_n = (n+1).c - n.c_{n-1}$

```
def oraseC(C) :
...A = [C[0]]
....for k in range(1, len(C)) :
........a = (k+1)*C[k]-k*C[k-1]
........A.append(a)
....return A
```

◦56◦ Je veux une suite d'entiers (a_n) telle que tout entier naturel k soit limite d'au moins une sous-suite de (a_n). J'ai pensé à
$(\overline{0}, \underline{0, 1}, \overline{0, 1, 2}, \underline{0, 1, 2, 3}, \overline{0, 1, 2, 3, 4}, \underline{0, 1, 2, 3, 4, 5}, \overline{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, \underline{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, \overline{0, 1, \ldots})$.
Calculez $(a_{n.(n+1)/2})$ pour tout n.
Écrivez un script Python qui fabrique pour N donné, les N premiers termes de la suite.
Construisez une sous-suite qui converge vers 10.
Trouvez une formule explicite pour le n^{ieme} terme de cette suite.
Que fait la moyenne de Cesàro de cette suite (calculez $(C_{n.(n+1)/2})$).
Et sa moyenne de Cesàro géométrique ?

◦57◦ ♡ Montrez que l'application $x \longmapsto \cos(x) + \cos(\sqrt{2}.x)$ est somme de deux applications périodiques, mais n'est pas périodique (combien de fois prend elle la valeur 2 ?).
Montrez que la suite $(\cos(n))$ n'est pas périodique.

$x \longmapsto \cos(x)$ est périodique de période $2.\pi$.
$x \longmapsto \cos(\sqrt{2}.x)$ est périodique de période $\sqrt{2}.\pi$.

Si la somme était périodique de période p (pas plus connue que ça, allez la deviner !), elle reprendrait la même valeur en 0 et en p.
On aurait donc $\cos(p) + \cos(\sqrt{2}.p) = 1 + 1$.
Mais en écrivant $1 \geqslant \cos(p) = \cos(p) + \cos(\sqrt{2}.p) - \cos(\sqrt{2}.p) = 2 - \cos(\sqrt{2}.p) \geqslant 2 - 1 = 1$
on arrive à $\cos(p) = 1$ puis $\cos(\sqrt{2}.p) = 1$.
Ceci force p à être à la fois de la forme $2.k.\pi$ avec k entier et de la forme $\sqrt{2}.q.\pi$ avec q entier.
En effaçant p, ceci donne $\sqrt{2} = \dfrac{k}{q}$. Ce qui est irrationnel !
p ne peut pas exister.

Si la suite $(\cos(n))$ était périodique, elle prendrait la même valeur en 0 qu'en p. Et p (entier) serait aussi multiple de $2.\pi$.
C'est impossible (sauf avec $p = 0$ mais 0 n'est pas une période).

◦58◦ Soit (a_n) une suite réelle bornée. On pose $A_0 = \{u_n \mid n \geqslant 0\}$. Montrez que A_0 est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée. On note α_0 sa borne supérieure. Montrez qu'il existe un indice $\varphi(0)$ vérifiant $\alpha_0 \geqslant a_{\varphi(0)} \geqslant \alpha_0 - 1$.
On pose alors $A_1 = \{u_n \mid n > \varphi(0)\}$. Montrez que A_1 est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée, incluse dans A_0. On note α_1 sa borne supérieure. Justifiez : $\alpha_0 \geqslant \alpha_1$. Montrez qu'il existe un indice $\varphi(1)$ vérifiant $\alpha_1 \geqslant a_{\varphi(1)} \geqslant \alpha_1 - \dfrac{1}{2}$ et $\varphi(0) < \varphi(1)$.

On pose ensuite $A_2 = \{u_n \mid n > \varphi(1)\}$. Montrez que A_2 est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée, incluse dans A_1. On note α_2 sa borne supérieure, justifiez : $\alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2$. Montrez qu'il existe un indice $\varphi(2)$ vérifiant $\alpha_2 \geqslant a_{\varphi(2)} \geqslant \alpha_2 - \dfrac{1}{4}$ et $\varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2)$.

Construisez une suite décroissante (α_p) et une extraction φ vérifiant $\alpha_p \geqslant a_{\varphi(p)} \geqslant \alpha_p - \dfrac{1}{2^p}$.
Montrez que la suite α converge, de même que la suite $(a_{\varphi(p)})$.
Que vient on de prouver. Quand avez vous dû employer l'hypothèse "a est bornée" ?

∘59∘

Déterminez $Inf\left\{Sup\{a.\cos(t) + (1-a).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$. Pouvez vous déterminer $Sup\left\{Inf\{a.\cos(t) + (1-a).\sin(t) \mid a \in \mathbb{R}\} \mid t \in \mathbb{R}\right\}$.

Pour $Inf\left\{Sup\{a.\cos(t) + (1-a).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$, on voit que pour chaque a on doit calculer $Sup\{a.\cos(t) + (1-a).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ qu'on va noter μ_a.
Et on ira chercher ensuite le minimum (ou la borne inférieure) des μ_a.
Or, pour calculer μ_a il suffit d'étudier l'application $t \longmapsto a.\cos(t) + (1-a).\sin(t)$.
Avec nos bonnes habitudes des maths et excellentes habitudes de la physique, on la met sous la forme $t \longmapsto \sqrt{a^2 + (1-a)^2}.\cos(t-\varphi)$ avec φ bien choisi.
Le maximum μ_a est donc justement $\sqrt{a^2 + (1-a)^2}$. Et on l'écrire $\mu_a = \sqrt{2.a^2 - 2.a + 1}$.

On doit ensuite chercher la borne inférieure de ces μ_a quand a décrit $\mathbb{R}$. C'est un minimum, atteint « au sommet de la parabole », pour $a = 1/2$.

On trouve donc $Inf\left\{Sup\{a.\cos(t) + (1-a).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\right\} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Remarque : *Si vous voyez tout de suite ce qu'il faut calculer en lisant $Inf\left\{Sup\{a.\cos(t) + (1-a).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$, vous êtes matheux, et vous avez compris. Ensuite, il vous faudra certes ingurgiter des théorèmes pour réussir les concours, mais c'est un bon début.*
Si vous restez perplexe face à $Inf\left\{Sup\{a.\cos(t) + (1-a).\sin(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$, il faudra que vous appreniez des théorèmes, mille exercices type, deux cent problèmes classiques, treize cent méthodes classiques, et enfin, vous réussirez les concours. C'est jouable, j'en connais qui en sont capables...

Pour $Sup\left\{Inf\{a.\cos(t) + (1-a).\sin(t) \mid a \in \mathbb{R}\} \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ les rôles changent. Donc tout change.
On avance à partir de la strate la plus visible : t va varier dans $\mathbb{R}$.
Pour chaque t , on va calculer $Inf\{a.\cos(t) + (1-a).\sin(t) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Mais cette partie de $\mathbb{R}$ non vide n'a pas de minorant.
On fait tendre a vers un infini bien choisi (en fonction des signes de $\cos(t)$ et $\sin(t)$). Et on va « aussi bas qu'on veut ».
La borne inférieure n'existe pas. Ou alors elle vaut $-\infty$.
Et ensuite on a beau faire varier t, la borne supérieure de quantités « toutes égales à $-\infty$ » vaut$-\infty$.
Par abus de langage.

∘60∘

Montrez que deux et seulement deux des trois affirmations ci-contre sont vraie :

A	toute suite réelle convergente a un plus grand élément et un plus petit élément
B	toute suite réelle convergente a un plus grand élément ou un plus petit élément
C	toute suite réelle divergente vers $+\infty$ a un plus grand élément ou un plus petit élément

Rappel : l'une de ces définitions est « admet un plus grand élément » :

$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant a_p$	$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, a_n \leqslant a_p$	(laquelle ?).

Sans hésitation : $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant a_p$
Et si vous hésitez, c'est qu'on va avoir du mal avec vous en Sup et en Spé... En tout cas en maths...

$\boxed{A}$ La suite (2^{-n}) a un plus grand élément (1 atteint pour $n = 0$) mais pas de plus petit élément. 0 est sa limite, borne inférieure non atteinte.

$\boxed{B}$ Si elle converge, alors elle est bornée. la partie $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (notée A) est bornée.
Elle a une borne inférieure ν et une borne supérieure μ.
Si la borne supérieure n'est pas atteinte, alors il existe une suite de points de A converge vers μ (prendre $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ dans la quantification de « borne supérieure »).

Mais alors on a une sous suite de (a_n) qui converge vers μ. C'est donc que μ est la limite de la suite.
De même, si la borne inférieure ν n'est pas atteinte, alors il existe une suite de points de A converge vers ν.
Mais alors on a une sous suite de (a_n) qui converge vers ν. C'est donc que ν est la limite de la suite.
Mais alors par unicité de la limite, on a $\mu = \nu = la\ limite$. Et la suite est constante...

Donc, la borne supérieure ou la borne inférieure est atteinte. Ce sont un plus grand élément ou un plus petit élément.

$\boxed{C}$ Si la suite diverge vers $+\infty$, alors à partir d'un certain rang R, tous ses termes sont plus grands que 10.
Prenons les termes qui précèdent ce rang, ils sont en nombre fini. On en prend le plus petit.
Il est minimum de $\{u_n \mid n \leqslant R\}$. Et il minore tous les $\{u_n \mid n > R\}$ (en intercalant 10).
C'est donc le plus petit élément de $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ce raisonnement est presque parfait. Sauf si $\{u_n \mid n \leqslant R\}$ est vide.
Il faut donc remplacer 10 par $u_0 + 10$ pour être sûr qu'il y ait des éléments avant l'indice R.

◦61◦

A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ non vides, vérifiant $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leqslant b$.
Montrez que A admet une borne supérieure α et B une borne inférieure β.
Montrez $\alpha \leqslant \beta$.
Montrez que si $A \cup B$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors $\alpha = \beta$.

A faire.

◦62◦

Déterminez la limite de $\dfrac{x^3 - 3^x}{x - 3}$ quand x tend vers 3.
Conseil : taux d'accroissement de $x \longmapsto x^3$ et de $x \longmapsto 3^x$.

On a évidemment une forme indéterminée. Écrivons la $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ avec $f = x \longmapsto x^3 - 3^x$ et $a = 3$.
On a justement $f(3) = 3^3 - 3^3 = 0$.
La limite des taux d'accroissement donne le nombre dérivé en a : $f'(3) = 27 - 27.\ln(3)$.
(car $f(x) = x^3 - e^{x.\ln(3)}$ et $f'(x) = 3.x^2 - \ln(3).3^x$)
Si la difficulté pour vous est de dériver $x \longmapsto 3^x$, il va y avoir du travail...

◦63◦

Soit N une norme sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel $(E, +, .)$ (application positive, séparante, homogène, triangulairement inégalitaire). On suppose de plus qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme : $N(u+v)^2 + N(u-v)^2 = 2.(N(u)^2 + N(v)^2)$ pour tout couple de vecteurs $(u,\ v)$.

a – Montrez que c'est le cas dans les cas suivants :

$(M_n(\mathbb{R}), +, .)$	$(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, .)$	$(\mathbb{R}^2, +, .)$
$\sqrt{\sum_{i,k} (a_i^k)^2}$	$\sqrt{\int_0^1 f(t)^2.t.dt}$	$\sqrt{x^2 + 4.x.y + 5.y^2}$
$(\mathbb{R}^3, +, .)$	$(\mathbb{R}_3[X], +, .)$	
$\sqrt{x^2 + 4.x.y + 5.y^2 + z^2}$	$\sqrt{P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 + P(3)^2 + P(4)^2}$	

Pour chacune de ces normes (mais est on sûr que c'en sont), on détermine un produit scalaire dont elle est issue.
Il faut vérifier pour ce produit scalaire le caractère positif et défini positif.

$\sqrt{\sum_{i,k}(a_i^k)^2}$	$Tr({}^tA.C)$	classique
$\sqrt{\int_0^1 f(t)^2.t.dt}$	$\int_0^1 f(t).g(t).t.dt$	bilinéaire symétrique, $\int_0^1 f(t)^2.t.dt$ est positive (application continue positive) par continuité, elle n'est nulle que pour $Id.f^2$ nulle, donc f nulle partout sauf peut être en 0, mais... par continuité...
$\sqrt{x^2+4.x.y+5.y^2}$	$x.x' + 2.x'.y + 2.x.y' + 5.y.y'$	$(x+2.y)^2+y^2$ est positif il n'est nul que pour $x=y=0$
$\sqrt{x^2+4.x.y+5.y^2+z^2}$	$x.x' + 2.x'.y + 2.x.y' + 5.y.y' + z.z'$	$(x+2.y)^2+y^2+z^2$ même histoire
$\sqrt{P(0)^2+P(1)^2+P(2)^2+P(3)^2+P(4)^2}$	$\sum_{k=0}^{4} P(k).Q(k)$	la somme des carrés est nulle si et seulement si chaque terme est nul, P a cinq racines, or il est de degré inférieur ou égal à 4.

b – Montrez que ce n'est pas le cas pour

$(M_n(\mathbb{R}),+,.)$	$(C_0([-1,\ 1],\mathbb{R}),+,.)$	$(\mathbb{R}^2,+,.)$
$Max\Big(\sum_{k=1}^{n} \lvert a_i^k\rvert \mid 1in\Big)$	$Max(\lvert f(t)\rvert \mid t\in[-1,\ 1])$	$Max(\lvert x+y\rvert,\ \lvert x-y\rvert)$
$(\mathbb{R}^3,+,.)$	$(\mathbb{R}_2[X],+,.)$	
$\lvert y+z\rvert+\lvert x+z\rvert+\lvert x+y\rvert$	$Max(\lvert P(0)\rvert,\ \lvert P'(0)\rvert,\ \lvert P''(0)\rvert)$	

même si ce sont des normes (si ça vous gave, passez à la suite)
On veut montrer que sous l'hypothèse "identité du parallélogramme", N est une norme euclidienne, issue d'un produit scalaire.

On ne montrera pas ici que ce sont des normes. Mais on montrera que la condition nécessaire du parallélogramme n'est pas vérifiée. Sur des contre-exemples.

Par exemple, pour $Max(|f(t)| \mid t\in[-1,\ 1])$, on prend $f = t \longmapsto t$ et $g = t \longmapsto 1$.
f et g ont pour norme 1.
$f+g$ a pour norme 2 (atteinte en 1) et $f-g$ a pour norme 2 (atteinte en -1).
On compare $||f+g||^2+||f-g||^2$ et $2.||f||^2+2.||g||^2$.
L'un vaut 8 et l'autre 4. Même pour le SIIiste, il n'y a pas égalité.

Pour $|y+z|+|x+z|+|x+y|$ (pour laquelle on vérifie facilement existence, positivité, homogénéité et inégalité triangulaire), on vérifie la séparation :
si $|y+z|+|x+z|+|x+y|$ est nul, c'est que $|y+z|$, $|x+z|$ et $|x+y|$ sont nuls (encadrer $0\leqslant |x+y|\leqslant |x+y|+|y+z|+|z+x|=0$)
le système $x+y=x+z=y+z=0$ conduit à $x=y=z$.
Le résultat aurait il été le même à quatre dimensions ?

On prend une suite un contre-exemple avec deux vecteurs « au hasard » : $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.
On a $||\overrightarrow{i}|| = 1+1+0 = 2$,
$||\overrightarrow{j}|| = 1+0+1 = 2$
$||\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}|| = 2+1+1 = 4$
$||\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}|| = 0+1+1 = 2$
On n'a pas $4^2+2^2 = 2.(2^2+2^2)$.

c – On pose donc "tout naturellement" : $\phi(u,\ v) = \dfrac{N(u+v)^2-N(u-v)^2}{4}$ pour tout couple de vecteurs.
Vérifiez alors $\phi(u,\ v) = \dfrac{N(u+v)^2-N(u)^2-N(v)^2}{2}$.

On a bien $\dfrac{N(u+v)^2 - N(u-v)^2}{4} = \dfrac{N(u+v)^2 - N(u)^2 - N(v)^2}{2}$ puisque justement $N(u+v)^2 - N(u-v)^2 = 2.(N(u+v)^2 - N(u)^2 - N(v)^2)$ en triturant l'hypothèse
$N(u+v)^2 + N(u-v)^2 = 2.(N(u)^2 + N(v)^2)$.

d – Montrez que ϕ est une forme symétrique, positive, défini positive.

On se donne $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (pardon, on note juste u et v pour ne pas alourdir) et on compare $\dfrac{N(u+v)^2 - N(u-v)^2}{4}$ et $\dfrac{N(u+v)^2 - N(v-u)^2}{4}$.
L'homogénéité de la norme dit $N(a) = N(-a)$; il y a égalité.

Pour la positivité, on doit calculer $\phi(u,u)$. On trouve $\dfrac{N(2.n)^2 - N(0)^2}{4}$.
Pour une norme, $N(0) = 0$. La somme est positive (et ne contient qu'un terme).

Si $\phi(u,u)$ est nul, c'est que $N(2.u)^2$ est nulle.
Par séparation, u est nul.

Bref, il nous manque la bi-linéarité.

e – Montrez pour tout triplet $(u,\ v,\ w)$: $\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v) = 2.\phi(u,\ v)$ (indication : dans l'hypothèse de l'identité du parallélogramme, remplacez u par $u+w$ et $u-w$).

Par définition, $4.\Big(\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v)\Big) = N(u+w+v)^2 - N(u+w-v)^2 + N(u-w+v)^2 - N(u-w-v)^2$.
On regroupe : $4.\Big(\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v)\Big) = \Big(N(u+w+v)^2 + N(u-w+v)^2\Big) - \Big(N(u+w-v)^2 + N(u-w-v)^2\Big)$
On arrange : $4.\Big(\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v)\Big) = \Big(N((u+v)+w)^2 + N((u+v)-w)^2\Big) - \Big(N((u-v)+w)^2 + N((u-v)-w)^2\Big)$
En appliquant l'identité du parallélogramme à $u+v$ et w puis à $u-v$ et w[5] :
$4.\Big(\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v)\Big) = 2.\Big(N(u+v)^2 + N(w)^2\Big) - 2.\Big(N(u-v)^2 + N(w)^2\Big)$
On regroupe : $4.\Big(\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v)\Big) = 2.\Big(N(u+v)^2 - N(u-v)^2\Big)$
On reconnaît : $4.\Big(\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v)\Big) = 2.4.\phi(u,v)$.
On simplifie par 4 et on trouve ça joli.

Remarque : Évidemment, si on savait à l'avance que ϕ était bi-linéaire, c'était évident...
Mais la linéarité est notre objectif...

f – Déduisez $\phi(2.u,\ v) = 2.\phi(u,\ v)$.

On applique le résultat e au vas particulier $w = u$:
$\phi(2.u,\ v) + \phi(0,\ v) = 2.\phi(u,\ v)$
Encore faut il s'assurer que $\phi(0,\ v)$ est nul.
Or, $4.\phi(0,\ v) = N(0+v)^2 - N(0-v)^2 = 0$ car pour une norme, un vecteur et son opposé ont même longueur.

Remarque : On avance vers la linéarité par rapport au premier vecteur, en $\phi(\alpha.v,\ v) = \ldots$

g – Déduisez aussi : $\phi(u+w,\ v) = \phi(u,\ v) + \phi(w,\ v)$.

On repart de $\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v) = 2.\phi(u,\ v)$.
On échange les rôles de u et w : $\phi(w+u,\ v) + \phi(w-u,\ v) = 2.\phi(w,\ v)$.
On somme les deux formules : $2.\phi(u+w,\ v) + \phi(u-w,\ v) + \phi(u-w,\ v) = 2.\phi(u,\ v) + 2.\phi(w,\ v)$.
Or, $\phi(u-w,\ v)$ et $\phi(u-w,\ v)$ sont opposés l'un de l'autre.
En effet : $4.\phi(a,\ v) = N(a+v)^2 + N(a-v)^2$
$4.\phi(-a,\ v) = N(-a+v)^2 + N(-a-v)^2$
$4.\phi(-a,\ v) = N(v-a)^2 + N(a+v)^2$ en utilisant toujours $N(-b) = N(b)$
On a donc $2.\phi(u+w,\ v) + 0 = 2.\phi(u,\ v) + 2.\phi(w,\ v)$.
Je pense qu'il suffit de diviser par 2.

5. oui, ce n'est pas tout à fait l'indication de l'énoncé

Remarque : On avance vers la linéarité par rapport au premier vecteur, en $\phi(a+b,\ c) = \phi(a,\ c) + \phi(b,\ c)$. On l'a même.

h - Montrez pour tout n de $\mathbb{N}$: $\phi(n.u,\ v) = n.\phi(u,\ v)$.

Le résultat est trivial pour $n = 0$ (on a prouvé plus haut $\phi(0,\ v) = 0$).
Il est évident pour $n = 1$.
On l'a prouvé pour $n = 2$.

Supposons le vrai pour n quelconque donné.
Reprenons la formule $\phi(u+w,\ v) = \phi(u,\ v) + \phi(w,\ v)$ et appliquons la à $w = n.u$.
$\phi(u+n.u,\ v) = \phi(u,\ v) + \phi(n.u,\ v) = \phi(u,\ v) + n.\phi(u,\ v) = (n+1).\phi(u,\ v)$ avec l'hypothèse de récurrence.[6]

i - Montrez pour tout n de $\mathbb{Z}$: $\phi(n.u,\ v) = n.\phi(u,\ v)$.

On veut passer à $\mathbb{Z}$?
On se donne n dans $\mathbb{Z}^-$, et on l'écrit $n = -p$ avec p positif.
On écrit $\phi(n.u,\ v) = n.\phi(u,\ v)$ pour$p$, $-u$ et v (puisque le résultat précédent est vrai pour tout u et tout p).
On a donc $\phi(p.(-u),\ v) = p.\phi(-u,\ v)$.

J'ai envie d'affirmer $\phi(-u,\ v) = -\phi(u,\ v)$. Faisons le, on reviendra dessus plus loin.
On a alors $\phi(p.(-u),\ v) = -p.\phi(u,\ v)$.
On l'écrit $\phi(n.u,\ v) = \phi(-p.u,\ v) = \phi(p.(-u),\ v) = -p.\phi(u,\ v) = n.\phi(u,\ v)$. C'est ce qu'on voulait.

Mais comment a-t-on
Reprenons la formule du g : $\phi(u+w,\ v) = \phi(u,\ v) + \phi(w,\ v)$.
Appliquons la à $w = -u$: $\phi(0,\ v) = \phi(u,\ v) + \phi(-u,\ v)$.
Or, $\phi(0, v) = 0$ (troisième fois que je le dis). Il reste $\phi(u,\ v) + \phi(-u,\ v) = 0$[7].
Et c'est pareil que $-\phi(u,\ v) = \phi(-u,\ v)$

Progrès : On a donc $\phi(n.u,\ v) = n.\phi(u,\ v)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis de $\mathbb{Z}$. Et si on passait à $\mathbb{Q}$? Et même à $\mathbb{R}$?

j - Montrez pour tout r de $\mathbb{Q}$: $\phi(r.u,\ v) = r.\phi(u,\ v)$.

Le passage de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$ est classique.
On écrit $r = \dfrac{p}{q}$.
On applique la relation $\phi(n.u,\ v) = n.\phi(u,\ v)$ à q, $r.u$ et v : $\phi(q.r.u,\ v) = q.\phi(r.u,\ v)$
Le premier membre devient $\phi(p.u,\ v)$.
Le résultat du i donne $p.\phi(u,\ v)$.
On a donc $p.\phi(u,\ v) = q.\phi(r.u,\ v)$.
On divise par q non nul (et entier) et le premier terme devient $r.\phi(u,\ v)$.
Progrès : On a donc $\phi(n.u,\ v) = n.\phi(u,\ v)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis de $\mathbb{Z}$ puis de $\mathbb{Q}$? On passe à $\mathbb{R}$?

k - Montrez pour tout t de $\mathbb{R}$: $\phi(t.u,\ v) = t.\phi(u,\ v)$.

Tout réel est limite d'une suite de rationnels.
On se donne t réel, limite d'une suite r_n de rationnels.
Pour chaque r_n on a $\phi(r_n.u,\ v) = r_n.\phi(u,\ v)$.
Quand n tend vers l'infini, le dernier membre tend vers $t.\phi(u,\ v)$ (limite dans un produit de réels).

Et le premier tend vers $\phi(t.u,\ v)$.

l - Déduisez que ϕ est un produit scalaire, puis que N est bien la norme qui en est issue.

Notre forme ϕ vérifie deux propriétés par rapport au premier vecteur : $\phi(\alpha.a,\ c) = \alpha.\phi(a,\ c)$ et $\phi(a+b,\ c) = \phi(a,\ c) + \phi(b,\ c)$.
C'est la linéarité par rapport au premier vecteur.

Mais elle est symétrique.
On tient la bilinéarité.

6. pardon ? j'ai oublié de dire que je conduisais une récurrence ?
7. ici, c'est le réel nul, dans nos parenthèses c'est souvent le vecteur nul

On a une forme bilinéaire symétrique, positive défini positive, c'est un produit scalaire.
Et on a calculé en route : $\phi(a\ a) = \dfrac{N(2.a)^2 - N(0)^2}{4} = \dfrac{(2.N(a))^2 - 0}{4} = N(a)^2$.
C'est la définition de N est la norme issue du produit scalaire ϕ.

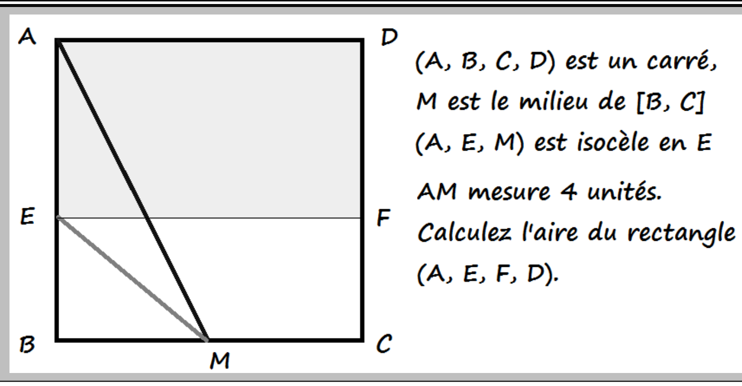
Retour : Je ne dirai pas que la démonstration était difficile.
Mais on comprend qu'on ne demande pas aux élèves de la connaître.
Cela ferait trop de choses à apprendre inutilement par cœur.

∘64∘

Montrez $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{\ln(t)}{1+t^2}.dt = 0$.

Prolongez en 0 $x \longmapsto \sin(x).\ln(x)$. Est elle alors dérivable en 0 ?

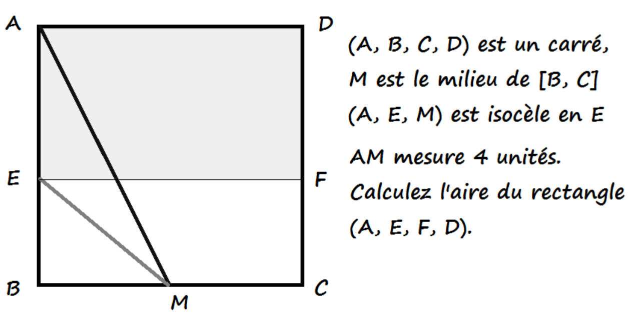
Montrez que si f est C^1 de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ alors elle est lipschitzienne.
Montrez qu'il n'y a pas de réciproque.



L'application $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue donc intégrable.
Mais l'intégration par parties ne donne rien. La clef semble être dans le choix des bornes : 1/2 et 2.
On pose un changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$. L'intégrale devient la même, à trois signes près.

$$I = \int_{t=1/2}^{2} \frac{\ln(t)}{1+t^2}.dt = \int_{u=2}^{1/2} \frac{-\ln(u)}{1+\frac{1}{u^2}}.\frac{-du}{u^2} = -I$$

On peut aussi changer de variable avec $u = \ln(t)$ et obtenir l'intégrale d'une application impaire sur un intervalle centré sur l'origine.



On note c le côté du carré. On se place dans le triangle rectangle $(A,\ B,\ M)$ de côtés c, $c/2$ et 4. On a $c^2 + (c/2)^2 = 4^2$ soit $c = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$.
On note a la distance AE, que l'on retrouve en EM et que l'on soustrait pour EB.
Encore avec le théorème de Pythagore : $(c-a)^2 + (c/2)^2 = a^2$.
Sans effort : $c^2 + \dfrac{c^2}{4} - 2.a.c + a^2 = a^2$ et donc $2.a.c = c^2 + \dfrac{c^2}{4} = 16$.

Immédiatement l'aire cherchée vaut 8.

∘65∘

Soient f et g deux endomorphismes de $(\mathbb{R}^3, +, .)$. Montrez $Ker(f) \cap Ker(g) \subset Ker(f+g)$. Montrez $Im(f+g) \subset Im(f) + Im(g)$.
On définit $f = X \longmapsto A.X$ et $g = X \longmapsto B.X$ de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ dans lui même
avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & -4 \\ -6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -12 & 3 & 8 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.
Déterminez $Ker(f) \cap Ker(g)$, $Ker(f+g)$, $Im(f+g)$ et $Im(f) + Im(g)$ et leurs dimensions.

Prenons $\overrightarrow{u}$ dans $Ker(f) \cap Ker(g)$. On traduit $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ et $g(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$. On somme $f(\overrightarrow{u}) + g(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.
On reconnaît $\overrightarrow{u} \in Ker(f+g)$.

Plus généralement, $\forall(\alpha,\beta)$, $Ker(f) \cap Ker(g) \subset Ker(\alpha.f+\beta.g)$.

Prenons $\overrightarrow{v}$ dans $Im(f+g)$. Il s'écrit $\overrightarrow{v} = (f+g)(\overrightarrow{u})$ pour au moins un $\overrightarrow{u}$ de E.
On écrit alors $\exists(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})$, $\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u}) + g(\overrightarrow{u})$. On reconnaît $\overrightarrow{v} \in Im(f) + Im(g)$.

La distinction : les éléments de $Im(f)+Im(g)$ sont de la forme $f(\overrightarrow{a})+f(\overrightarrow{b})$. Ici, $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont égaux.
Sinon on a aussi plus généralement, $\forall(\alpha,\beta)$, $Im(\alpha.f+\beta.g)\subset Im(f)+Im(g)$.
On pourra dans certains cas écrire $Im(f)\oplus Im(g)$. Mais on n'écrira jamais $f\oplus g$, on est d'accord.

Pour les applications données en exemple, on note $\det(A)=\det(B)=0$. Ces morphismes vont avoir un noyau non réduit à $\overrightarrow{0}$ et une image strictement incluse dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$.
Résoudre $f(\overrightarrow{u})=0$ donne un système de trois équations à trois inconnues, dégénéré. Il suffit de le résoudre : $Ker(f)=Vect(\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix})$

Pour l'ensemble image, on sait que les éléments de la forme $\begin{pmatrix}0&1&0\\6&-1&-4\\-6&3&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ sont les combinaisons de $\begin{pmatrix}0\\6\\-6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix}$.

On a donc $Im(f)=Vect(\begin{pmatrix}0\\6\\-6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix})=Vect(\begin{pmatrix}0\\6\\-6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix})$. En effet, le dernier ne sert à rien, c'est le noyau qui nous le dit.

En revanche, $f+g$ a pour matrice $\begin{pmatrix}-3&1&2\\-6&2&4\\0&0&0\end{pmatrix}$, encore plus dégrénée. le noyau est un plan, d'équation $-3.x+y+2.z=0$ (contenant les deux noyaux déjà trouvés).
L'ensemble image est une droite.

	matrice	noyau			image	
f	$\begin{pmatrix}0&1&0\\6&-1&-4\\-6&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$	$\begin{matrix}3.x&-2.z&=&0\\y&&=&0\end{matrix}$	dim 1	$(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix})$	$2.x-y-z=0$
g	$\begin{pmatrix}-3&0&2\\-12&3&8\\6&-3&-4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$	$\begin{matrix}3.x&-2.z&=&0\\y&&=&0\end{matrix}$	dim 1	$(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix})$	$2.x-y-z=0$
$f+g$	$\begin{pmatrix}-3&1&2\\-6&2&4\\0&0&0\end{pmatrix}$	$(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix})$	$-3.x+y+2.z=0$	dim 2	$(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix})$	$\begin{matrix}2.x&-y&&=&0\\&&z&=&0\end{matrix}$

Ici, $Ker(f+g)$ est plus grand que $Ker(f)\cap Ker(g)$. Et $Im(f+g)$ est plus petit que $Im(f)+Im(g)$.

◦66◦ Soit f continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\int_0^1 f(t).dt=0$. On pose $F=x\longmapsto\int_0^x f(t).dt$ et $G=x\longmapsto\int_0^x t.f(t).dt$.
Montrez pour tout x de $[0,\ 1]$: $G(x)=\int_{t=0}^x (F(x)-F(t)).dt$.
Justifiez que F admet un maximum atteint en un point a de $[0,\ 1]$ et un minimum atteint en un point b de $[0,\ 1]$.
On suppose $(a,\ b)\in]0,\ 1[^2$ et $F(a)>0>F(b)$. Donnez le signe de $G(a)$ et $G(b)$.
Déduisez $\exists c\in]0,\ 1[$, $\int_0^c t.f(t).ft=0$.
On suppose $F(a)>F(b)\geqslant 0$. Donnez le signe de $G(a)$ et $G(1)$. Déduisez $\exists c\in]0,\ 1[$, $\int_0^c t.f(t).ft=0$.
On suppose $0\geqslant F(a)\geqslant F(b)$. Montrez $\exists c\in]0,\ 1[$, $\int_0^c t.f(t).dt=0$.

L'application F de la forme $x\longmapsto\int_0^x f(t).dt$ est une primitive de f (la primitive nulle en 0).
Partons de $G(x)=\int_0^x t.f(t).dt$ et intégrons par parties $\begin{matrix}f(t)&\hookleftarrow&F(t)\\t&\hookrightarrow&1\end{matrix}$
$G(x)=\Big[t.F(t)\Big]_0^x-\int_0^x 1.F(t).dt=x.F(x)-\int_0^x F(t).dt$
D'autre part, $\int_0^x (F(x)-F(t)).dt=\int_0^x F(x).dt-\int_0^x F(t).dt==x.F(x)-\int_0^x F(t).dt$.
Il y a bien égalité.

Et je colle trois baffes à qui écrira des $\int_0^x \left(\int_0^x f(t).dt - \int_0^t f(t).dt \right).dt$ *qui l'ont plus aucun sens.*

F est continue (et même dérivable), sur un segment. Elle est bornée et atteint ses bornes.
Sa borne inférieure en b et sa borne supérieure en a. C'est directement le théorème de compacité.

On calcule $G(a) = \int_{t=0}^{a} (F(a) - F(t)).dt$. Comme $F(a)$ est la maximum, la fonction intégrée est positive, l'intervalle est dans le bon sens. L'intégrale est positive.

$G(b) = \int_{t=0}^{b} (F(b) - F(t)).dt$ Cette fois, l'application intégrée est négative ($F(t) \geqslant F(b)$). L'intégrale est négative.

Avec $G(a) \geqslant 0 \geqslant G(b)$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires entre a et b et trouver que G s'annule au moins une fois.

Commea et b sont strictement entre 0 et 1, c y est aussi.

On suppose cette fois que F est de signe constant sur $[0,\ 1]$: $F(a) \geqslant F(x) \geqslant F(b) \geqslant 0$. On note que comme on sait qu'on a $F(0) = 0$, $F(b)$ vaut vraiment 0 (0 est une valeur atteinte par F).
D'ailleurs, on a aussi $F(1) = 0$.
On a toujours $G(a)$ positif.
On calcule ensuite $G(1)$ (et pas $G(b)$). Mais $G(1) = \int_0^1 (F(1) - F(t)).dt = -\int_0^1 F(t).dt$ puisque $F(1)$ est négatif.
Mais comme F est positive, $G(1)$ est donc strictement négatif.
Il y a donc là encore (T.V.I.) un c entre a et 1 vérifiant $G(c) = 0$.

L'autre cas est celui où F est négative. On applique le résultat à $-F$., et c'est fini.

Il pourrait rester le cas où F est constante, nulle. mais alors f est nulle aussi, et c peut être mis n'importe où pour avoir $\int_0^1 t.f(t).dt = 0$.

◦67◦ Montrez que $f \longmapsto |f(0)| + |f(1)| + Sup\{|f''(t)| \mid t \in [0,\ 1]\}$ est une norme sur $C^2([0,\ 1],\ \mathbb{R})$.
Montrez que $f \longmapsto |f(0) + f(1)| + Sup\{|f''(t)| \mid t \in [0,\ 1]\}$ n'est pas une norme sur $C^2([0,\ 1],\ \mathbb{R})$.

Existence Si f est C^2, sa dérivée seconde est continue, bornée et atteint ses bornes sur le segment $[0,\ 1]$. $Sup\{|f''(t)| \mid t \in [0,\ 1]\}$ existe et on peut lui ajouter deux termes positifs.

Positivité La somme des trois termes est même positive.

Homogénéité Si on remplace f par $\lambda.f$, on a trois $|\lambda|$ qui sortent et qu'on peut factoriser.

Inégalité en forme de triangle On se donne deux fonctions, l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ donne $|(f+g)(0)| \leqslant |f(0)| + |g(0)|$ et $|(f+g)(1)| \leqslant |f(1)| + |g(1)|$.
celle sur les réels donne aussi $|(f+g)''(t)| \leqslant |f''(t)| + |g''(t)| \leqslant ||f''||_\infty + ||g''||_\infty$ pour tout t, et par passage à la borne supérieure $||(f+g)''||_\infty \leqslant ||f''||_\infty + ||g''||_\infty$.
Il n'y a plus qu'à tout additionner.

Séparation On se donne f et on suppose que la somme des trois termes $|f(0)|$, $|f(1)|$ et $||f''||_\infty$ est nulle. Comme ce sont des réels positifs, par antisymétrie, chacun est nul. La nullité de $||f''||_\infty$entraine la nullité de f'' sur tout $[0,\ 1]$. En intégrant, f' est constante et f est affine.
Mais les deux autres informations donnent « affine nulle en 0 et en 1 donc constante égale à 0 ». C'est fini.

Ce qui manque à le seconde pour faire une norme ?
La séparation. On peut avoir $|f(0) + f(1)| + Sup\{|f''(t)| \mid t \in [0,\ 1]\} = 0$ sans que f soit la fonction nulle.
Si on reprend notre approche pour la norme, on arrive juste à f affine et $f(0) + f(1) = 0$.
Mais alors l'application $t \longmapsto 2.t - 1$ vérifie cette propriété.

◦68◦ f et g sont croissantes de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez :
$\int_0^1 f(t).dt.\int_0^1 g(t).dt \leqslant \int_0^1 f(t).g(t).dt$ (indication $(x,\ y) \longmapsto (f(y) - f(x)).(g(y) - g(x))$ sur $[0,\ 1]^2$.

I∼0) On note E l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel. 1 pt.

I$\sim$1) Montrez que $f \longmapsto ||f||$ est une norme sur m(E,+,.) , sachant que l'on pose $||f|| = Sup(|f(t)| \mid t \in [0,\ 1])$. 3 pt.

N est une norme sur $(F, +, .)$ où F est un espace vectoriel

Le mnémotechnique pour retenir cette liste, c'est "Sophie a perdu son haut" si vous reprenez l'idée de François-Xavier il y a déjà dix huit ans de ça, et si vous voulez j'ai des photos de la Sophie en question.

E	Existence	pour tout $\overrightarrow{u}$ de E, $N(\overrightarrow{u})$ existe
P	Positivité	$\forall \overrightarrow{u} \in E,\ N(\overrightarrow{u}) \geqslant 0$
S	Séparation	$\forall \overrightarrow{u} \in E,\ \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \Rightarrow N(\overrightarrow{u}) > 0$ $\forall \overrightarrow{u} \in E,\ N(\overrightarrow{u}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
H	Homogénéité	$\forall (\lambda,\ \overrightarrow{u}) \in \mathbb{R} \times E,\ N(\lambda.\overrightarrow{u}) = \|\lambda\|.N(\overrightarrow{u})$
I	Inégalité triangulaire	$\forall (\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \in E^2,\ N(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \leqslant N(\overrightarrow{u}) + N(\overrightarrow{v})$

Je vous donne quand même le début d'une des preuves pour que vous ne vous contentiez pas d'affirmations péremptoires "il est évident que" :
on se donne f et g ; pour tout x, on a : $|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant ||f|| + ||g||$ et ensuite, à vous de rédiger avec des mots et pas avec des trucs dont vous dites que c'est des maths...

I$\sim$2) Pour f dans E, on pose $L(f) = Sup\left\{\dfrac{|f(b) - f(a)|}{|b-a|} \mid 0 \leqslant a < b \leqslant 1\right\}$. Montrez que L est une semi norme sur $(E, +, .)$ *(semi-norme, c'est EPHI)*. 3 pt.

I$\sim$3) Montrez pour f de classe C^1 : $L(f) = ||f'||$. 3 pt.

I$\sim$4) Calculez la norme $||f||$ et la semi-norme pour les applications suivantes : 3 pt.

$s_n = \theta \longmapsto \sin(n.\theta)$	$c_n = \theta \longmapsto \cos(n.\theta)$	$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto \|2.x - 1\|$	$x \longmapsto \ln(1+x)$

I$\sim$5) Montrez que $f \longmapsto |f(0)| + L(f)$ est une norme *(notée Λ)*. 2 pt.

I$\sim$6) Montrez pour tout f de $||f|| \leqslant \Lambda(f)$. 2 pt.

I$\sim$7) Existe-t-il K vérifiant $\forall f \in E,\ L(f) \leqslant K.||f||$. 1 pt.

II$\sim$0) Une suite (f_n) d'éléments de E vérifie $\forall \varepsilon,\ \exists K_\varepsilon,\ \forall (p, q),\ K_\varepsilon \leqslant p \leqslant q \Rightarrow L(f_p - f_q) \leqslant \varepsilon$. Montrez que pour tout x de $[0,\ 1]$, la suite $(f_n(x))$ converge vers un réel que l'on va noter $f(x)$. 2 pt.

II$\sim$1) Montrez que f ainsi définie (limite des f_n) est dans E. 3 pt.

III$\sim$0) au fait pour un demi

Pour tout x de $[0,\ 1]$ et tout n on pose $F_{n+1}(x) = F_n(x) + \dfrac{x - (F_n(x))^2}{2}$ et $F_0(x) = 0$. Montrez que chaque $F_n$est un polynôme et donnez son degré. Chaque P_n est il dans E ? 3 pt.

III$\sim$1) Montrez que la suite $(F_n(x))$ est croissante majorée et converge (étudiez $t \longmapsto t + \dfrac{x - t^2}{2}$ sur $[0,\ 1]$). 4 pt.

III$\sim$2) La limite des P_n est elle dans E ? 1 pt.

Compil2018