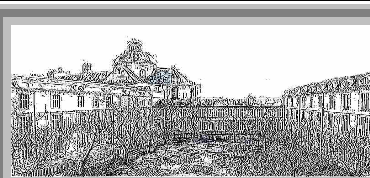
LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 19 mars
M.P.S.I.2



2023 2024

IS22

♡ 0 ♡ Montrez, pour A et B partie de $\mathbb{R}$: $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$. 1 pt.

♡ 1 ♡ (a_n) et (b_n) sont deux suites bornées. Montrez que $(a_n + b_n)$ est bornée et montrez : $Sup\{a_n + b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leqslant Sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} + Sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. 2 pt.

♡ 2 ♡ Montrez que la somme de deux suites convergentes converge aussi (vers la somme des limites). 2 pt.

♡ 3 ♡ Montrez que la réunion de deux sous-groupes A et B d'un groupe $(G, *)$ n'est pas un sous-groupe de $(G, *)$ (sauf pour A inclus dans B ou B inclus dans A). 2 pt.

ø$_0$ Montrez : $\varphi - \cfrac{1}{\varphi - \cfrac{1}{\varphi - \cfrac{1}{\varphi - \cfrac{1}{\varphi - a}}}} = \dfrac{1}{a}$ (sachant $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$). 2 pt.

ø$_1$ $\dfrac{X^3+1}{X^2-X+1} = a.X + b + \dfrac{c}{X} + \dfrac{d}{X^2} + o\Big(\dfrac{1}{X^2}\Big)_{X \to +\infty}$. Retrouvez les coefficients a, b, c et d. 3 pt.

ø$_2$ Donnez la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{2.n+1}}{\sqrt{n^4+5.n^3+1} - \sqrt{n^4+3.n+2}}$. 3 pt.

♡ 4 ♡ Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ f(a-b) = a.f(b) - b.f(a)$. Montrez : $f(à) = 0$, puis représentez graphiquement f. 2 pt.

♡ 5 ♡ Soit (a_n) une suite réelle. Montrez que si $(a_{2.p})$, $(a_{2.p+1})$ sont croissantes, (a_n) n'est pas forcément croissante. 1 pt. ♣ Montrez que si $(a_{2.p})$, $(a_{2.p+1})$ sont croissantes et $(a_{5.p+1})$ est décroissante, alors (a_n) est croissante et convergente. 3 pt.

◇ 0 ◇ Soient (a_n) et (b_n) deux suites croissantes et n un entier naturel. Montrez $\sum\limits_{\substack{0 \leqslant p \leqslant n \\ 0 \leqslant q \leqslant n}} (a_p - a_q).(b_p - b_q) \geqslant 0$ et déduisez $(n+1).\sum\limits_{k=0}^{n} a_k.b_k \geqslant \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\Big).\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\Big)$. 3 pt. Déduisez $(n+1).\sum\limits_{k=0}^{n} (c_k)^2 \geqslant \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} c_k\Big)^2$ pour toute suite réelle (c_n) (croissante ou non). 2 pt. Ecrivez un script Python qui prend en entrée une suite de $n+1$ termes et estime cette différence $(n+1).\sum\limits_{k=0}^{n} (c_k)^2 - \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} c_k\Big)^2$. 2 pt.

◇ 1 ◇ Soient trois réels a, b et c qu'on va supposer sans perte de généralité classés par ordre croissant des modules : $|a| \leqslant |b| \leqslant |c|$. On note $\overrightarrow{u}$ le vecteur de composantes a, b et c et on pose pour tout p : $||\overrightarrow{u}||_p = \sqrt[p]{|a|^p + |b|^p + |c|^p}$ et $||\overrightarrow{u}||_\infty = Max(|a|,\ |b|,\ |c|) = |c|$. Montrez $||\overrightarrow{u}||_p \longrightarrow_{p \to +\infty} ||\overrightarrow{u}||_\infty$ en distinguant trois cas : $|a| \leqslant |b| < |c|$, $|a| < |b| = |c|$ et $|a| = |b| = |c|$. 3 pt.

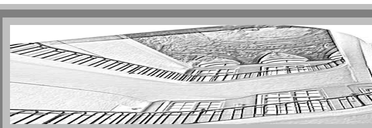
♣ 0 ♣ On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation ◀ par $(a \blacktriangleleft b) \Leftrightarrow a^{(-1)^a} \leqslant b^{(-1)^b}$. Montrez que c'est une relation d'ordre et que cet ordre est total. 3 pt. Triez les entiers de -10 à 10 pour cette relation. 2 pt. Montrez que 2 est la borne supérieure de l'ensemble $\mathbb{P}$ est nombres premiers. 1 pt. Quelle est la borne inférieure de l'ensemble des nombres premiers. 2 pt.

◇ 2 ◇ Pour tout n, on pose $u_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ et on note $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Montrez que (u_n) est bornée, mais ni croissante ni décroissante. 2 pt. Déterminez $Inf(U)$. 1 pt. Donnez la limite des sous-suites (u_{n^2}) et (u_{n^2+n}). 3 pt. Déterminez $Sup(U)$. 1 pt. a et b sont deux entiers avec $a < b$. Étudiez la convergence de la sous-suite $(u_{n^2.b^2+2.a.n})$. 2 pt.
Montrez que tous les rationnels de $[0,\ 1]$ sont dans $\overline{U}$. 1 pt. Qu'en est il des irrationnels de $[0,\ 1]$? 2 pt.

♠ 0 ♠ Montrez pour tout n : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dbinom{n}{k}.\dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = -\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n - 1}{t}.dt = \int_0^1 \frac{x^n - 1}{x-1}.dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (noté H_n). 3 pt.

♠ 1 ♠ Déduisez : $\sum_{n=1} \frac{H_n}{n} = e.\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p.p!}$. 0 pt. ne pas traiter ici.

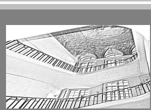
LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2023 IS22 2024
46- points

LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 19 mars
M.P.S.I.2

2023 2024
IS22
CORRECTION



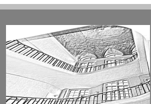
Adhérence et bornes supérieures. IS22

On suppose A inclus dans B et on prend x dans $\overline{A}$.Il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x.
Mais cette suite (a_n) est aussi une suite d'éléments de B. Le réel x est donc dans l'adhérence $\overline{B}$.

C'est la croissance de la borne sup pour l'inclusion.

On suppose la suite (a_n) bornée par un réel α et la suite (b_n) bornée par un réel β. On a donc $|a_n| \leqslant \alpha$ et $|b_n| \leqslant \beta$ pour tout n. Par inégalité triangulaire, on a $|a_n + b_n| \leqslant \alpha + \beta$ pour tout n et on a une borne pour $(a_n + b_n)$.
Posons alors $M = Sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $N = Sup\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
On a alors pour tout k : $a_k \leqslant M$, $b_k \leqslant N$ et donc $a_k + b_k \leqslant M + N$.
Le réel $M + N$ est un majorant de $\{a_n + b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Par définition du « plus petit majorant », on a $\{a_n + b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leqslant M + N$ et c'est ce qu'on voulait.

*On peut aussi utiliser la formule du cours : $Sup(A + B) = Sup(A) + Sup(B)$ et poser $A = \{a_p \mid p \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{b_q \mid q \in \mathbb{N}\}$
et écrire $\{a_n + b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \{a_p + b_q \mid (n,\ q) \in \mathbb{N}^2\} = A + B$ et utiliser la croissance de l'application borne sup pour l'inclusion.*



Suites monotones. IS22

Si $(a_{2.p})$ et $(a_{2.p+1})$ sont croissantes, on sait comparer a_n et a_m si n et m sont tous les deux pairs, ou tous les deux impairs.
Mais comment comparer a_{pair} et a_{impair} ?
On construit alors un contre-exemple avec encore et toujours $((-1)^n)$ qui n'a aucune monotonie.
Pourtant les deux suites $((-1)^{2.p})$ et $((-1)^{2.p+1})$ sont croissantes (et même constantes).

Supposons $(a_{2.p})$ et $(a_{2.p+1})$ croissantes et (étrangement) $(a_{5.p+1})$ décroissante. On compare ce qu'on peut

a_0	$\leqslant$	a_2	$\leqslant$	a_4	$\leqslant$	a_6	$\leqslant$	a_8	$\leqslant$	a_{10}	$\leqslant$	a_{12}	$\leqslant$	a_{14}	$\leqslant$	a_{16}
	a_1	$\leqslant$	a_3	$\leqslant$	a_5	$\leqslant$	a_7	$\leqslant$	a_9	$\leqslant$	a_{11}	$\leqslant$	a_{13}	$\leqslant$	a_{15}	
	a_1	$\geqslant$				a_6	$\geqslant$				a_{11}	$\geqslant$				a_{16}

Avec les deux derières lignes, on a $a_1 \leqslant a_{11}$ mais aussi $a_1 \geqslant a_{11}$.
On déduit $a_1 = a_{11}$ par antisymétrie.
Mais alors sur la seconde ligne, les encadrements donnent des égalités : $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = a_{11}$ et sur la dernière $a_1 = a_6 = a_{11}$.
De même, la première et la dernière ligne livrent $a_6 = a_{16}$ et des égalités en pagaille.

Plus généralement, $a_{10.k+1} \leqslant a_{10.k+11}$ par croissance de $(a_{2.p+1})$
mais aussi $a_{10.k+1} \geqslant a_{10.k+11}$ par décroissance de $(a_{5.p+1})$.
On a donc $a_{10.k+1} = a_{10.k+11}$. La suite $(a_{10.k+1})$ est constante, égal à a_1.
Mais par encadrement de tout $a_{2.p+1}$ entre deux $a_{10.k+1}$ et $a_{10.k+11}$ (pour $k = [p/5]$), la suite $(a_{2.p+1})$ est constante égale à a_1.

On fait de même avec la suite des indices pairs $a_{10.k+6} \leqslant a_{10.k+16}$ et $a_{10.k+1} \geqslant a_{10.k+11}$.
On en déduit que la suite $(a_{10.k+6})$ est constante,égale à a_6.
Par encadrement, tous les $a_{2.k}$ sont égaux à a_6.

Mais en plus avec $a_1 \geqslant a_6 \geqslant a_{11} = a_1$, on obtient $a_1 = a_6$.
Par recouvrement, les deux suites ayant la même valeur, c'est toute la suite (a_n) qui est constante.

Donc croissante, décroissante et convergente.

Le nombre d'or. IS22

Sous réserve d'existence, on veut prouver $\varphi-\cfrac{1}{\varphi-\cfrac{1}{\varphi-\cfrac{1}{\varphi-\cfrac{1}{\varphi-a}}}}=\frac{1}{a}$.

Qu'est ce qui caractérise φ ? On a $\varphi^2-1=\varphi$.

Partons du bas : $\varphi-\frac{1}{\varphi-a}=\frac{\varphi^2-\varphi.a-1}{\varphi-a}=\frac{\varphi-\varphi.a}{\varphi-a}=\varphi.\frac{1-a}{\varphi-a}$.

On grimpe un peu : $\varphi-\cfrac{1}{\varphi-\cfrac{1}{\varphi-a}}=\varphi-\frac{\varphi-a}{\varphi.(1-a)}=\frac{\varphi^2.(1-a)-\varphi+a}{\varphi(1-a)}=\frac{\varphi^2-\varphi-(\varphi^2-1).a}{\varphi.(1-a)}=\frac{1-\varphi.a}{\varphi.(1-a)}$.

On continue $\varphi-\cfrac{1}{\varphi-\cfrac{1}{\varphi-\cfrac{1}{\varphi-a}}}=\varphi-\frac{\varphi.(1-a)}{1-\varphi.a}=\frac{\varphi-\varphi^2.a-\varphi+\varphi.a}{1-\varphi.a}=\frac{(\varphi-\varphi^2).a}{1-\varphi.a}=\frac{-a}{1-\varphi.a}$.

On termine : $\varphi-\cfrac{1}{\varphi-\cfrac{1}{\varphi-\cfrac{1}{\varphi-\cfrac{1}{\varphi-a}}}}=\varphi-\frac{\varphi.a-1}{a}=\frac{\varphi.a-\varphi.a+1}{a}=\frac{1}{a}$.

Il doit y avoir un chemin plus court.

Mais en tout cas, ce qu'il fallait éviter à tout prix, c'est de trainer des $\sqrt{5}$ partout, il me semble.

Un développement asymptotique. IS22

$\frac{X^3+1}{X^2-X+2}\sim\frac{X^3}{X^2}$ donc $\frac{X^3+1}{X^2-X+1}=X+o\Big(X\Big)_{X\to+\infty}$.

On soustrait $\frac{X^3+1}{X^2-X+2}-X=\frac{X^2-2.X+1}{X^2-X+2}\sim\frac{X^2}{X^2}=1$, donc $\frac{X^3+1}{X^2-X+2}=X+1+o\Big(1\Big)_{X\to+\infty}$.

On poursuit $\frac{X^3+1}{X^2-X+2}-X-1=\frac{-X-1}{X^2-X+2}\sim\frac{-X}{X^2}=\frac{-1}{X}$, donc $\frac{X^3+1}{X^2-X+2}=X+1-\frac{1}{X}+o\Big(\frac{1}{X}\Big)_{X\to+\infty}$.

Enfin $\frac{X^3+1}{X^2-X+2}-X-1+\frac{1}{X}=\frac{-2.X+2}{X^3-X^2+2.X}\sim\frac{-2.X}{X^3}=\frac{-2}{X^2}$, donc

$$\frac{X^3+1}{X^2-X+2}=X+1-\frac{1}{X}-\frac{2}{X^2}+o\Big(\frac{1}{X^2}\Big)_{X\to+\infty}$$

On l'avait aussi par division « euclidienne »
$$\begin{array}{ccccc|cccc}
X^3 & & & +1 & & X^2 & -X & +2 & \\
(-X^3 & -X^2 & +2.X) & & & = & = & = & = \\
 & X^2 & -2.X & +1 & & X & +1 & -\frac{1}{X} & -\frac{2}{X^2} \\
 & -(X^2 & -X & +2) & & & & & \\
 & & -X & -1 & & & & & \\
 & & -(-X & +1 & -\frac{2}{X}) & & & & \\
 & & & -2 & +\frac{2}{X} & & & & \\
 & & & -(-2 & +o(1)) & & & & \\
 & & & & o(1) & & & &
\end{array}$$

Un développement asymptotique (mais un autre). IS22

On a des formes indéterminées qu'on va devoir lever avec des équivalents et des quantités conjuguées

$$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2.n+1}=\sqrt{n^2+1}+0(\sqrt{n})=n+o(n)\sim n$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+5.n^3+1}-\sqrt{n^4+3.n+2}} = \frac{\sqrt{n^4+5.n^3+1}+\sqrt{n^4+3.n+2}}{(n^4+5.n^3+1)-(n^4+3.n+2)} \sim \frac{n^2+n^2}{5.n^3} = \frac{2}{5.n}$$

On passe au produit et on trouve un équivalent en $\dfrac{2.n}{5.n}$. Notre suite est équivalente à une constante numérique, elle converge vers cette constante : $\boxed{\dfrac{2}{5}}$

Une équation fonctionnelle. IS22

Si on a $f(x-y) = x.f(y) - y.f(x)$ pour tout couple $(x,\ y)$, on a en particulier

$$f(0-0) = 0.f(0) - 0.f(0) = 0$$

On déduit alors pour tout x

$$f(x) = f(0-0) = x.f(0) - 0.f(x) = 0$$

L'application f est nulle, son graphe est facile à tracer.

Des sommes partout. IS22

On se donne n et on calcule les termes de la suite d'égalités $\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}.\dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = -\int_0^1 \dfrac{(1-t)^n-1}{t}.dt = \int_0^1 \dfrac{x^n-1}{x-1}.dx = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

On comprend qu'on peut passer de $\int_0^1 \dfrac{(1-t)^n-1}{t}.dt$ à $\int_0^1 \dfrac{x^n-1}{x-1}.dx$ par un simple changement de variables : $x = 1-t$. L'élément intégré $\dfrac{(1-t)^n-1}{t}$ devient $\dfrac{x^n-1}{1-x}$, les bornes restent 0 et 1 mais dans l'autre ordre. Mais l'élément différentiel $-dx$ rétablit tout.

On développe $\dfrac{x^n-1}{x-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k$ par la formule de la série géométrique. On intègre alors par linéarité :

$$\frac{x^n-1}{x-1}.dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} x^k dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 x^k.dx = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right] = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = H_n$$

par un décalage d'indice.

Reprenons le début et faisons intervenir des binomiaux

$$(1-t)^n - 1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.(-1)^k.t^k - 1 = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}.(-1)^k.t^k$$

On divise par t et on intègre là encore par linéarité

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n-1}{t}.dt = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}.(-1)^k.\int_0^1 t^{k-1}.dt = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}.(-1)^k.\left[\frac{t^k}{k}\right]_0^1$$

On trouve bien nos $\dbinom{n}{k}.\dfrac{(-1)^k}{k}$ avec le changement de signe attendu.

On part de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{H_n}{n}$ qu'on écrit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}.\sum\limits_{k=1}^{n}\dbinom{n}{k}.\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ grâce à la question précédente.

On fusionne en une seule somme $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}^{+\infty}\dfrac{1}{n}.\dbinom{n}{k}.\dfrac{(-1)^{k-1}}{n.k}$.

Sommes à doubles indices. IS22

Comme les suites (a_n) et (b_n) sont croissantes, tous les produits $(a_p - a_q).(b_p - b_q)$ sont positifs.

Si p est plus petit que q, c'est le produit de deux réels négatifs.
Sinon, c'est le produit de deux réels positifs.

La somme double (de $(n+1)^2$ termes) $\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n\\ 0\leqslant p\leqslant n}} (a_p - a_q).(b_p - b_q)$ est donc positive ou nulle.

On développe et sépare par linéarité de la somme

$$\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n\\ 0\leqslant p\leqslant n}} a_p.b_p + \sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n\\ 0\leqslant p\leqslant n}} a_q.b_q - \sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n\\ 0\leqslant p\leqslant n}} a_p.b_q - \sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n\\ 0\leqslant p\leqslant n}} a_q.b_p \geqslant 0$$

On sépare la première somme en $\sum_{q=0}^{n}\Big(\sum_{p=0}^{n} a_p.b_p\Big)$ dans laquelle q est juste un compteur ($n+1$ termes). Elle vaut $(n+1).\sum_{p=0}^{n} a_p.b_p$ et même $(n+1).\sum_{k=0}^{n} a_k.b_k$ car les variables sont muettes.

La somme $\sum_{p=0}^{n}\Big(\sum_{q=0}^{n} a_q.b_q\Big)$ vaut aussi $(n+1).\sum_{q=0}^{n} a_q.b_p$.
La somme des deux donne $2.(n+1).\sum_{k=0}^{n} a_k.b_k$.

Les deux sommes avec un signe moins valent $\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n\\ 0\leqslant p\leqslant n}} a_p.b_q$ et se séparent en $\Big(\sum_{p=0}^{n} a_p\Big).\Big(\sum_{q=0}^{n} b_q\Big)$ et encore une fois, les variables étant muettes, elles donnent $\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big).\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k\Big)$.

On fait passer de l'autre côté, on simplifie par 2 : $\boxed{(n+1).\sum_{k=0}^{n} a_k.b_k \geqslant \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big).\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k\Big)}$

Si les deux suites (a_n) et (b_n) sont égale à une même suite (c_n), on obtient $(n+1).\sum_{k=0}^{n}(c_k)^2 \geqslant \Big(\sum_{k=0}^{n} c_k\Big)^2$.
Mais on a besoin de l'hypothèse « suite croissante ». Et ici, on ne l'a pas forcément.
Mais comme ce sont des sommes, on peut dire qu'on a trié la liste $[c_0, \dots c_n]$ par ordre croissant. Les sommes restent les mêmes après permutation !

Cette formule rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\Big(\sum_{k=0}^{n}(c_k.d_k)\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=0}^{n}(c_k)^2\Big).\Big(\sum_{k=0}^{n}(d_k)^2\Big)$ *quand tous les* d_k *valent* 1.

La suite $(\sqrt{n} - [\sqrt{n}]$. IS22

Chaque terme de la suite existe. En tant que nombres de la forme $t - [t]$, ils sont tous dans $[0,\ 1]$. La suite est bornée par 0 et 1.
Il est facile de voir que 0 est sa borne inférieure (atteinte pour $n = 0$). Sa borne supérieure n'est pas évidente.

La suite n'est pas croissante puisqu'on a un contre-exemple : $0 = u_4 < u_3 = \sqrt{3} - 1$ par exemple.
La suite n'est pas décroissante puisqu'on a un contre-exemple : $\sqrt{2} - 1 = u_2 < u_3 = \sqrt{3} - 1$ par exemple.

La sous-suite (u_{n^2}) est identiquement nulle. Elle converge vers 0.

On constate que $n^2 + n$ est entre n^2 et $n^2 + 2.n + 1$. On a donc

$$n = \sqrt{n^2} \leqslant \sqrt{n^2 + n} < \sqrt{n^2 + 2.n + 1} = n + 1$$

Coincé entre deux entiers consécutifs, $[\sqrt{n^2+n}]$ vaut n, il ne reste qu'à conjuguer

$$\sqrt{n^2+n}-[\sqrt{n^2+n}]=\sqrt{n^2+n}-n=\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n,}$$

Ce quotient est équivalent à $\dfrac{n}{2.n}$ et converge donc vers $\dfrac{1}{2}$.

On a deux sous-suites de limites distinctes. La suite ne peut pas converger.

La borne supérieure vaut au moins $\dfrac{1}{2}$. mais peut être est elle même plus haut.

Et si on regardait $u_{n^2+2.n}$? Le même raisonnement donne $[\sqrt{n^2+2.n}]=n$ puis $\dfrac{\sqrt{n^2+2.n}-n}{\sqrt{n^2+2.n}+n}\longrightarrow_{n\to+\infty} 1$.

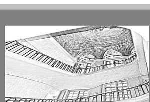
Le majorant 1 est limite d'une suite d'éléments de notre ensemble. C'est lui la borne supérieure.

On encadre cette fois $(b.n)^2+2.a.n$ par $(b.n)^2$ et $(b.n)^2+2.b.n+1$ (on a supposé $a<b$ et n positif).
On encadre donc $\sqrt{b^2.n^2+2.a.n}$ par deux entiers : $b.n$ et $\sqrt{(b.n+1)^2}$ (strictement pour le second).
On passe à la partie entière : $[\sqrt{b^2.n^2+2.b.n}=b.n$.
On conjugue : $\sqrt{b^2.n^2+2.a.n}-b.n=\frac{(b^2.n^2+2.a.n)-b^2.n^2}{\sqrt{b^2.n^2+2.a.n}+b.n}\sim_{n\to+\infty}\frac{2.a.n}{2.b.n}$
La sous-suite étudiée converge vers $\dfrac{b}{a}$.

Chaque rationnel de $[0,\ 1]$ est de la forme $\dfrac{b}{a}$ avec a et b entiers et a plus petit que b.
Il est limite d'une suite d'éléments de notre ensemble.
Chaque rationnel de $[0,\ 1]$ est une valeur d'adhérence de l'ensemble.

Et les irrationnels ?
Si on prend un irrationnel i de $[0,\ 1]$, c'est la limite d'une suite de ratonnels (r_n) de $[0,\ 1]$.
Et chacun des r_n est limite d'une suite d'éléments de U.
Par « transitivité », i est limite d'une suite d'éléments de U.

Une belle ruse possible.
On a prouvé $\mathbb{Q}\cap[0,\ 1]\subset\overline{U}$.
Par croissance de la borne supérieure : $\overline{\mathbb{Q}\cap[0,\ 1]}\subset\overline{\overline{U}}$.
Mais le cours dit $\overline{\overline{U}}=\overline{U}$.
Et il dit aussi $\overline{\mathbb{Q}\cap[0,\ 1]}=[0,\ 1]$.
On a donc $[0,\ 1]=\overline{U}$.



Un drôle d'ordre sur $\mathbb{Z}$. IS22

Si on se donne a et b entiers relatifs, on peut calculer $a^{(-1)^a}$ et $b^{(-1)^b}$ (le seul problème viendrait de 0^{-1} mais pour a égal à 0, on a $0^{(-1)^0}=0^1=0$).

On peut donc comparer deux rationnels $a^{(-1)^a}$ et $b^{(-1)^b}$ soit dans un sens soit dans l'autre. On a donc toujours $a\blacktriangleleft b$ ou $b\blacktriangleleft a$. Si c'est bien un ordre, il sera total.

$\boxed{\text{Réflexivité}}$ On se donne a, on a $a^{(-1)^a}\leqslant a^{(-1)^a}$ et on a donc $a\blacktriangleleft a$.
$\boxed{\text{Transitivité}}$ On se donne a, b et c. On suppose $a^{(-1)^a}\leqslant b^{(-1)^b}$ et $b^{(-1)^b}\leqslant c^{(-1)^c}$. On a tout de suite $a^{(-1)^a}\leqslant c^{(-1)^c}$ et on reconnaît $a\blacktriangleleft a$.
$\boxed{\text{Transitivité}}$ On se donne a et b. On suppose à la fois $a^{(-1)^a}\leqslant b^{(-1)^b}$ et $b^{(-1)^b}\leqslant a^{(-1)^a}$. On a tout de suite $a^{(-1)^a}=b^{(-1)^b}$. Mais de là à dire $a=b$! On distingue les cas.
a et b pairs : on a alors $a^1=b^1$ d'où $a=b$.
a et b impairs. On a cette fois $a^{-1}=b^{-1}$ d'où $a=b$ aussi.
a pair et b impair. On a cette fois $a=\dfrac{1}{b}$. Ceci ne donne pas $a=b$. Sauf que a et b sont entiers. Et $a.b=1$ est incompatible avec a pair ! On élimine.

a impair et b pair conduit à la même contradiction.

On trie déjà les négatifs d'un côté et les positifs de l'autre : exemple $(-3)^{-1} \leqslant 0 \leqslant 5^{-1}$.
Les entiers pairs sont dans l'ordre naturel : exemple $-6 \leqslant -4 \leqslant 0 \leqslant 2 \leqslant 10$.
Les entiers impairs positifs sont en ordre inverse : $5 \blacktriangleleft 3$ car $\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{3}$.

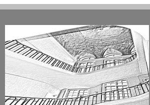
-10	-8	-6	-4	-2	-1	-3	-5	-7	-9	0	9	7	5	3	1	2	4	6	8	10

On sait que les nombres premiers sont tous impairs, sauf 2. On a donc $p^{(-1)^p} = \frac{1}{p} \leqslant 1 \leqslant 2 = 2^{(-1)^2}$ pour tout nombre premier impair.
L'entier 2 est donc un majorant de l'ensemble des nombres premiers, et il en fait partie.
C'est lui la borne supérieure.

Si on enlève 2 à l'ensemble des nombres premiers, il reste des nombres impairs, qui se classent alors par ordre croissant

$$\ldots \blacktriangleleft 17 \blacktriangleleft 13 \blacktriangleleft 11 \blacktriangleleft 7 \blacktriangleleft 5 \blacktriangleleft 3 \blacktriangleleft 2$$

Aucun ne sera le plus petit.
En revanche, 0 est un minorant. Est ce le meilleur ?
Si un entier minore tous les nombres premiers, il vérifie $n^{(-1)^n} \leqslant \frac{1}{p}$ pour tout p premier.
En faisant tendre p premier vers $+\infty$ (il y a une infinité de nombres premiers), on obtient que n est nécessairement négatif. Ou nul.
Et 0 majore tous les entiers négatifs. C'est bien lui le plus grand minorant.



Normes p et norme infinie. IS22

Pour tout p, on pose $||\overrightarrow{u}||_p = \sqrt[p]{|a|^p + |b|^p + |c|^p}$.
Comme c est supposé le plus grand des trois, sans perte de généralité, on peut le factoriser

$$||\overrightarrow{u}||_p = \sqrt[p]{|c|^p.\left(|\frac{a}{c}|^p + |\frac{b}{c}|^p + 1\right)} = |c|.\sqrt[p]{\left(|\frac{a}{c}|^p + |\frac{b}{c}|^p + 1\right)}$$

• Dans le premier cas, on suppose que c est vraiment le plus grand en module, c'est à dire $\left|\frac{a}{c}\right| \leqslant \left|\frac{b}{c}\right| < 1$.

Quand p tend vers l'infini, $\left|\frac{a}{c}\right|^{\leqslant\left|\frac{b}{c}\right|<1p}$ et $\left|\frac{b}{c}\right|^p$ tendent vers 0.
$\left(|\frac{a}{c}|^p + |\frac{b}{c}|^p + 1\right)$ tend vers 1.
$\left(|\frac{a}{c}|^p + |\frac{b}{c}|^p + 1\right)^{1/p}$ tend aussi vers 1.
La norme tend vers $|c|$ comme attendu.

• Dans le deuxième cas, on suppose que c est à égalité avec b, c'est à dire $\left|\frac{a}{c}\right| < \left|\frac{b}{c}\right| = 1$.

Quand p tend vers l'infini, $\left|\frac{a}{c}\right|^{\leqslant\left|\frac{b}{c}\right|<1p}$ et $\left|\frac{b}{c}\right|^p$ tendent vers 0.
$\left(|\frac{a}{c}|^p + 1 + 1\right)$ tend vers 2.
$\left(|\frac{a}{c}|^p + 1 + 1\right)^{1/p}$ tend quand même aussi vers 1.
En effet, $2^{1/p}$ tend vers 1 quand p tend vers l'infini. Il suffit de revenir à la définition $e^{\frac{\ln(2)}{p}}$ tend vers e^0.

> *Résultat général :* $x^{\frac{1}{p}}$ *tend vers* 1 *quand* p *tend vers l'infini.*

La norme tend vers $|c|$ comme attendu.

• Dans le dernier cas, on suppose que c est à égalité avec b et a, c'est à dire $\left|\dfrac{a}{c}\right| = \left|\dfrac{b}{c}\right| = 1$.

On a cette fois $||\overrightarrow{u}||_p = \sqrt[p]{3.|c|^p} = |c|.e^{\frac{\ln(3)}{p}}$ et là encore, l'ensemble converge vers $|c|$ c'est à dire $||\overrightarrow{u}||_\infty$.

Et pourtant, je vous ai arnaqué.

Dans la limite de $\left(1 + \left|\dfrac{b}{c}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ j'ai expédié à l'infini le p de $\left|\dfrac{b}{c}\right|^p$ en premier, et après j'ai pris celui de $\left(1 + \dots\right)^{\frac{1}{p}}$.

C'est comme si je vous disais : $\dfrac{n}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En effet, $\dfrac{1}{n}.k$ tendvers 0 quand n tend vers l'infini. Et ensuite, je fais $k = n$ dans $\lim_{n\to+\infty} \frac{k}{n} = 0$ et je trouve que la limite vaut 0. L'exemple classique est « vers quoi tend $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$? ».

Il faut donc revenir à la définition par exponentielle

$$\left(1 + \left|\frac{b}{c}\right|^p + \left|\frac{c}{c}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \exp\left(\frac{\ln(1+x_p)}{1/p}\right) = \exp\left(\frac{\ln(1+x_p)}{x_p}.p.x_p\right)$$

avec $x_p = \left|\dfrac{b}{c}\right|^p + \left|\dfrac{c}{c}\right|^p$. Le taux quotient $\frac{\ln(1+x_p)}{x_p}$ est un taux d'accroissement du logarithme en 1, il tend vers 0.
Le produit $p.x_p$ est une forme indétemrinée qui tend vers 0 (croissances comparées).
L'ensemble $\dfrac{\ln(1+x_p)}{x_p}.p.x_p$ tend vers 0 et l'exponentielle tend vers 1 comme promis.