

◦0◦ On définit sur $\mathbb{C}$ la relation $\blacktriangleleft$ par $((a + i.b) \blacktriangleleft (\alpha + i.\beta)) \Leftrightarrow ((a < \alpha) \text{ ou } ((a = \alpha) \text{ et } (b \leq \beta)))$ (a, b, α et β sont des réels).

Montrez que c'est une relation d'ordre, et que cet ordre est total (on l'appelle « ordre lexicographique » ou « ordre du dictionnaire »).

Montrez que le disque fermé (c'est à dire avec son cercle) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ admet pour borne supérieure 1.

Montrez que le disque ouvert (c'est à dire sans son cercle) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ n'admet pas de borne supérieure.

◦1◦ A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée. Complétez ce qui manque dans ce raisonnement.

On pose $M = \sup(A)$ et $\mu = \inf(A)$.

On a $x - y \leq M - \mu$.

Notons α un majorant de $x - y$. Alors pour tout y , on a pour tout $x : x \leq \alpha + y$ donc $M \leq \alpha + y$. Et donc pour tout $y : M - \alpha \leq y$.

On déduit : $M - \alpha \leq \mu$.

Finalement $\sup\{x - y \mid (x, y) \in A^2\} = M - \mu$.

C'est quoi ce bordel ?

$$16 = 2^4 = (1 + 1)^4 = \binom{4}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{4-k} = \sum_{k=0}^n \binom{4}{k} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{20}{10} = 184756$$

◦2◦ A est une matrice de terme général a_i^k .

Comparez : $\max\left(\min(a_i^k \mid k \leq n) \mid i \leq n\right)$ et $\min\left(\max(a_i^k \mid i \leq n) \mid k \leq n\right)$ (il n'y a pas forcément égalité, mais l'un est toujours plus petit que l'autre, regardez sur un exemple pour des matrices 4 sur 4, et pour la preuve générale, pensez à regarder le terme à l'intersection de la ligne donnant le max et la colonne donnant le min).

(a_n^p) est une famille de réels indexée par deux entiers (suite de suites), bornée.

Comparez $\sup\left(\inf(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}) \mid i \in \mathbb{N}\right)$ et $\inf\left(\sup(a_i^k \mid i \in \mathbb{N}) \mid k \in \mathbb{N}\right)$ après avoir montré l'existence de chacun.

◦3◦ Montrez que la suite $(\cos(\pi.n!.r))_n$ converge si r est un rationnel donné.

◦4◦ ♠ Soit (a_n) une suite réelle bornée par μ et M . Montrez que chaque partie $A_n = \{a_k \mid k \geq n\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée, qui admet une borne supérieure noté s_n . Montrez pour tout $n : s_{n+1} \leq s_n$. Montrez que la suite (s_n) converge vers un réel α . Montrez que pour tout n il existe un entier $\varphi(n)$ vérifiant : $s_n - \frac{1}{n+1} \leq a_{\varphi(n)} \leq s_n$. Déduisez que $a_{\varphi(n)}$ converge vers α . Avez vous redémontré le théorème de Bolzano-Weierstrass ?

◦5◦ Pouvez vous trouver f continue de A dans B (si oui, exemple ; si non : théorème utilisé) :

	$A = [0, 1]$	$A =]0, 1[$	$A =]0, 1]$	$A = [0, +\infty[$	$A =]0, +\infty[$
$B = [0, 1]$					
$B = [0, 1[$					
$B =]0, 1[$					
$B = [0, +\infty[$					
$B =]0, +\infty[$					

◦6◦ ♠ On appelle section ouverte finissante toute partie A non vide de $\mathbb{Q}$ majorée vérifiant

$\forall a \in A, \exists b \in A, a < b$

$\forall a \in A, \forall c \in \mathbb{Q}, c \leq a \Rightarrow c \in A$

Montrez que pour tout rationnel r , l'ensemble $] - \infty, r[$ est une coupure.

Montrez que $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \text{ ou } x \leq 0\}$ est une section ouverte finissante.

Montrez que l'inclusion est une relation d'ordre sur les sections ouvertes finissantes.
Montrez que cet ordre est total.

Pour A et B sections, on définit $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Montrez que c'est une section ouverte finissante.
Montrez que cette addition est commutative et associative et que $\mathbb{Q}^{-*}$ en est le neutre.

Soit A une section ouverte finissante. On définit $A' = \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists \alpha \in \mathbb{Q}, \forall a \in A, x < \alpha \leq -a\}$. Montrez que A' est une section ouverte finissante.

Montrez : $A + A' = \mathbb{Q}^{-*}$.

On se donne une famille $(A_n)_{n \in I}$ de sections ouvertes finissantes toutes incluses dans une section ouverte finissante A .

Montrez que $\bigcup_{n \in I} A_n$ est encore une section ouverte finissante, contenant toutes les A_n .

Montrez que toute section ouverte finissante contenant tous les A_n contient $\bigcup_{n \in I} A_n$.

L'ensemble des sections ouvertes finissantes est $\mathbb{R}$, et les questions au dessus montrent que toute partie de $\mathbb{R}$ majorée admet un plus petit majorant.

◦7◦

Un réel α est dit adhérent à une partie A de $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe une suite (a_n) de points de A qui converge vers α . Montrez que tout point de A est adhérent à A . Qui sont les points adhérents à $\mathbb{Z}$?

Montrez que tout points adhérent à A est adhérent à $A \cup B$. Montrez que tout point adhérent à $A \cup B$ est adhérent à A ou adhérent à B (d'une suite (c_n) , ne gardez soit que les points de A ou soit que les points de B).

Montrez par un contre-exemple que l'on peut être adhérent à A et à B sans être adhérent à $A \cap B$.

◦8◦

On rappelle les définitions :

$\overset{\circ}{A}$	intérieur de A	$a \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow (\exists \alpha > 0, [a - \alpha, a + \alpha] \subset A)$			
$\overline{A}$	adhérence de A	$c \in \overline{A} \Leftrightarrow (\forall \alpha > 0, [c - \alpha, c + \alpha] \cap A \neq \emptyset)$			
Complétez	A	$]0, 1]$	$\mathbb{Q}$	$([0, 1] \cap \mathbb{Q} \cup ([1, 2] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})))$	$\mathbb{Z} \cup]0, 1[$
	$\overset{\circ}{A}$	$]0, 1[$	$\emptyset$		$]0, 1[$
	$\overline{A}$	$[0, 1]$	$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$		$\mathbb{Z} \cup]0, 1[$
	$\overset{\circ}{\overline{A}}$	$]0, 1[$	$\mathbb{R}$		$]0, 1[$
	$\overline{\overset{\circ}{A}}$	$[0, 1]$	$\emptyset$		$[0, 1]$
	$\overline{A - \overset{\circ}{A}}$	$\{0, 1\}$	$\mathbb{R}$		$\mathbb{Z}$

Trouvez un ensemble pour lequel les six lignes sont toutes distinctes.

Pourquoi est ce que je ne demande rien sur $\overline{\overline{A}}$ ni sur $\overset{\circ}{\overline{A}}$?

Montrez que le complémentaire de l'intérieur de A est l'adhérence du complémentaire de A .

Trouvez une phrase avec complémentaire de l'adhérence.

Lesquelles sont vraies

l'adhérence	de la réunion de A est B	est la réunion	de l'adhérence de A et de l'adhérence de B
l'adhérence	de l'intersection de A est B	est l'intersection	de l'adhérence de A et de l'adhérence de B
l'intérieur	de la réunion de A est B	est la réunion	de l'intérieur de A et de l'intérieur de B
l'intérieur	de l'intersection de A est B	est l'intersection	de l'intérieur de A et de l'intérieur de B

◦9◦

f et g sont croissantes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez :

$$\int_0^1 f(t).dt. \int_0^1 g(t).dt \leq \int_0^1 f(t).g(t).dt$$

(indication $(x, y) \mapsto (f(y) - f(x)).(g(y) - g(x))$ sur $[0, 1]^2$).

◦10◦

Un peu de topologie, pour qui veut s'amuser à regarder les étoiles.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On définit intérieur et adhérence (notées aussi $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$) :

$$Int(A) = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists \alpha > 0,]a - \alpha, a + \alpha[\subset A\} \quad Adh(A) = \{a \in \mathbb{R} \mid \forall \alpha > 0,]a - \alpha, a + \alpha[\cap A \neq \emptyset\}$$

Montrez : $Int(A) \subset A \subset Adh(A)$.

Montrez qu'un réel a est dans $Adh(A)$ si et seulement si il est limite d'au moins une suite de points de A .

Complétez (et expliquez pourquoi la colonne * est impossible) :

A	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$	$[0, 1[$	$\mathbb{Z} \cup]3/2, 5/2[$	*	
$Int(A)$						$]0, 1[$	$[0, 1]$
$Adh(A)$						$[0, 2]$	$[0, 1]$

Montrez $Int(Int(A)) = Int(A)$ et $Adh(Adh(A)) = Adh(A)$.

Montrez : $Int(A^c) = (Adh(A))^c$ et $Adh(A^c) = (Int(A))^c$.

Montrez : $Int(A) \cap Int(B) = Int(A \cap B)$. Montrez $Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$, et donnez un exemple pour lequel il n'y a pas égalité.

◻11◻ ♡ On dit que α est une **valeur d'adhérence** de la suite u si il existe une sous-suite de u qui converge vers α .

1-) Montrez que toute suite convergente n'a qu'une valeur d'adhérence.

2-) Donnez une suite ayant trois valeurs d'adhérence exactement.

3-) Donnez une suite n'ayant aucune valeur d'adhérence.

4-) Montrez que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite bornée est borné et non vide.

5-) Un élève prétend que si α est valeur d'adhérence de u et β valeur d'adhérence de v , alors $\alpha + \beta$ est valeur d'adhérence de $u + v$. Montrez qu'il a tort (*contre-exemple universel*?).

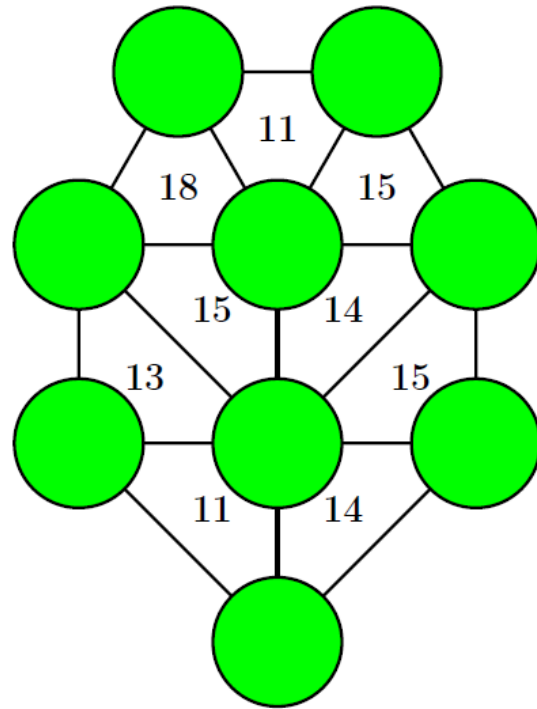
6-) Montrez que si α est valeur d'adhérence de (u_{2n}) alors elle est valeur d'adhérence de (u_n) .

♣ Peut on montrer que si α est valeur d'adhérence de (u_n) alors elle est valeur d'adhérence de (u_{2n}) ou de (u_{2n+1}) ?

Montrez que 0 et 1 sont valeurs d'adhérence de $(\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor)$.

♠ Montrez que la suite $(\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor)$ a une infinité de valeurs d'adhérences.

Dans chaque triangle, le nombre écrit à l'intérieur du triangle doit être égal à la somme des nombres inscrits dans les trois cercles qui sont aux sommets du triangle. De plus, les neuf cercles contiennent chacun un des nombres de 1 à 9 sans les répéter. Complète cette figure en plaçant les jetons numérotés dans les cercles.



* ♡ On réalise l'expérience suivante :

```
from random import randrange
```

```
X = randrange(6) #entier entre 0 et 5, hasard uniforme
```

```
Y = randrange(X) #entier entre 0 et x-1
```

Vérifiez : $E(X) = 2,5$. Montrez que sa variance vaut $35/12$. ($Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$)

Quelle est l'espérance de la variable aléatoire Y .

Quelle est l'espérance du produit $X.Y$?

♡ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$ vérifiant $f(0) = 2$.

Résolvez l'équation intégrale d'inconnue x :

$$\int_0^x f(t).dt = 9.$$

♡ Combien y a-t-il d'applications continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0, 1, 2, 3\}$?

◻13◻ ♣ On demande de calculer $\int_0^1 \frac{dt}{i+t}$.

L'élève Herth-Etpamur écrit $\ln(1+i) - \ln(i) = \ln\left(\frac{1+i}{i}\right) = \ln(\sqrt{2}.e^{-i.\pi/4})$ et trouve $\frac{\ln(2)}{2} - i.\frac{\pi}{4}$. Montrez que sa réponse est bonne (*même si sa méthode est fumeuse*) en pensant à la quantité conjuguée.

◻14◻ ♡ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de cette différence de radicaux $\sqrt{n+5} - \sqrt[4]{n^2+3.n+4}$.

◻15◻ La suite a a pour développement asymptotique $a_n = \ln(n) + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quand n tend vers l'infini.

Donnez la limite en $+\infty$ de $n.(a_{n+1} - a_n)$.

Bonus : développement de $a_{n+1} - a_n$ jusqu'à $o(1/n^2)$.

◦16◦

Trouvez une primitive de $t \mapsto t.e^t \cdot \cos(t)$ en intégrant par parties (mais qui sont les deux parties ?).

Dérivez $t \mapsto ((a.t + b) \cdot \cos(t) + (c.t + d) \cdot \sin(t)) \cdot e^t$. Retrouvez le résultat précédent avec un peu moins d'efforts.

◦17◦

Lycee Charlemagne

MPSI2

Année 2023/24

BEATTY et WITHOFF

I~0) On note $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Calculez $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$. Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = [n.\alpha]$ et $b_n = [n.\beta]$ (parties entières). Je vous ai calculé les premiers termes de ces deux suites (dites de Beatty) :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_n	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21
b_n	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34

et même si vous préférez

1		3	4		6		8	9		11	12		14		16	17	
	2			5		7			10			13		15			18

I~1) Justifiez sans calculatrice : $a_{100} = 161$. Calculez b_{100} .

I~2) Montrez pour tout n : $b_n - a_n = n$.

II~0) On va d'abord montrer que le seul élément commun aux deux suites (a_n) et (b_n) est 0. Pour ce faire, on suppose que n et p sont deux entiers vérifiant $a_n = b_p$. Montrez que les deux réels $n.\alpha - a_n$ et $p.\beta - b_p$ sont entre 0 et 1. Déduez que $(n - \frac{a_n}{\alpha}) + (p - \frac{b_p}{\beta})$ est un entier entre 0 et 1. Calculez sa valeur, et déduisez que $n.\alpha - a_n$ est nul. Concluez $n = p = 0$.

II~1) On se donne un entier naturel N . Montrez que le nombre d'éléments de la suite a dans $[1, N]$ est $\left\lfloor \frac{N+1}{\alpha} \right\rfloor$.

Montrez que le nombre d'éléments de la suite b dans $[1, N]$ est $\left\lfloor \frac{N+1}{\beta} \right\rfloor$.

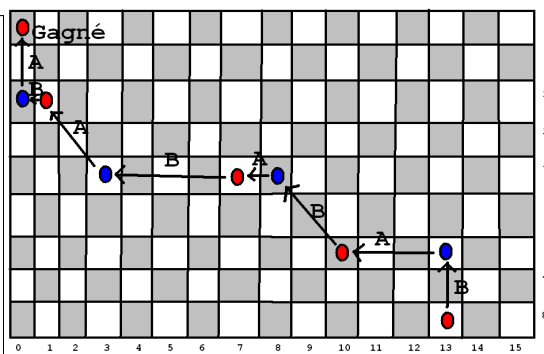
Montrez : $\left\lfloor \frac{N+1}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N+1}{\beta} \right\rfloor < N+1 < \left\lfloor \frac{N+1}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N+1}{\beta} \right\rfloor + 2$.

Déduez : $\forall k \in [1, N] \cap \mathbb{N}, (\exists n \in \mathbb{N}, k = a_n) \text{ ou } (\exists p \in \mathbb{N}, k = b_p)$. S'agit-il d'un ou inclusif ?

II~2) Montrez que a_n est le plus petit entiers n'appartenant pas à $\{a_k \mid k < n\} \cup \{b_p \mid p < n\}$.

III~0) On se propose d'utiliser Python pour créer les suites a et b ou même plus précisément la liste A des éléments de a plus petits que N et la liste B des éléments de b plus petits que N :

```
#initialisation et saisies
alpha, beta = (1+sqrt(5))/2, (3+sqrt(5))/2
A, B = [], []
an, bn = 0, 0
N = input('Valeur maximale à atteindre ')
#creation de la liste A
while .... :
    ....an = ....
    ....A.append(an)
#creation de la liste B
....
```



Rectifiez, complétez ce qui manque. Complétez par un script qui vérifie que chaque entier de 1 à N est présent dans une et une seule des deux listes.

IV~0) Le jeu de Withoff est le suivant :

- Deux jouent sur un échiquier de taille $N + 1$ sur $P + 1$ (indexation de 0 à N et de 0 à P).
 - Le pion est initialement en (N, P) .
 - Chaque joueur joue à tour de rôle.
 - Il peut déplacer son pion en colonne vers le haut (*ordonnée décroissante*), ou en ligne vers la gauche (*abscisse décroissante*) ou en diagonale vers l'origine (*abscisse et ordonnée décroissante*).
 - Le gagnant est celui qui arrive en $(0, 0)$.
- Pourquoi B devait il abandonner dès la position notée $*$?
 Pourquoi B savait il avoir perdu dès la position en $(5, 3)$ (et même $(4, 7)$) ?

Un exemple de jeu où A choisit la position de départ (N, P) :

coup de A	coup de B
pose en $(13, 8)$	
	vertical en $(13, 6)$
horizontal en $(10, 6)$	
	diagonal en $(8, 4)$
horizontal en $(7, 4)$	
	horizontal en $(3, 4)$
diagonal en $(1, 2) *$	
	horizontal en $(0, 2)$
gagne en $(0, 0)$	

Je vous propose de jouer contre moi. Je place le pion en $(25, 25)$ et je dis "à vous". Que faites vous ?

On pose $W = \{(a_n, b_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(b_n, a_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $L = \mathbb{N}^2 - W$ (complémentaire).

Montrez : $\forall (c, d) \in L, \exists e \in \mathbb{N}, ((c - e, d) \in W \text{ ou } (c, d - e) \in W \text{ ou } (c - e, d - e) \in W)$.

Montrez $\forall (c, d) \in W, \forall e \in \mathbb{N}, ((c - e, d) \in L \text{ et } (c, d - e) \in L \text{ et } (c - e, d - e) \in L)$.

Les suites de Beatty sont des classiques des mathématiques étonnantes. On prend deux irrationnels vérifiant $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, on construit les suites $([n.\alpha])$ et $([n.\beta])$. Elles avancent toutes les deux en donnant des entiers. Mais dès que la plus rapide saute au dessus d'un entier, on sait que la plus lente viendra compléter. Chaque entier est atteint par une et une seule des deux suites. On trouve des exercices sur les suites de Beatty à l'oral des écoles de moins de trois lettres. Je pense qu'on en rencontrera en informatique. Et on voit ici qu'on les trouve dans un jeu. Si vous traitez bien cet exercice, vous avez ensuite la possibilité de rouler vos proches, vos amis et vos ennemis au jeu de Witthoff (*à ne pas confondre avec Witloof qui est une variété de chicorée*). Détail classique en maths : c'est en fait Lord Rayleigh qui a trouvé ce résultat en 1894, avant Samuel Beatty.



Ils étaient mieux habillés avant, les profs de maths

Comment Euler a calculé $\zeta(2)$ (et même $\zeta(2.p)$)

Attention, ce qui va suivre va être réalisé par un professionnel, ne reproduisez pas l'expérience chez vous. Non, plus sérieusement, ce qui suit est une démonstration « à l'ancienne », avec plein de bonnes idées, mais avec de multiples passages à la limite qui ne sont pas justifiés. Cette démonstration ne serait jamais acceptée dans un Concours, ni dans un cours de Spé. Voyez la plutôt comme le squelette de bonnes idées, sur lesquelles construire ensuite de vrais exercices. Si vous parvenez à suivre les idées, c'est parfait, mais ne copiez rien.

On note f l'application $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$, qu'on prolonge par continuité en 0.
 Par quelle valeur ? C'est du cours, ça ! $\sin(\theta) \sim_{\theta \rightarrow 0} \theta$.

On cherche les racines de l'application f . Ce sont les réels pour lesquels $\sin(\theta)$ s'annule : les multiples de π (en éliminant 0 qui a été simplifiée par le dénominateur).

On regroupe ces racines deux par deux : $k.\pi$ et $-k.\pi$.

Et on factorise : $(X - k.\pi).(X + k.\pi)$.

En fait, on, on factorise en $\left(1 - \frac{X}{k.\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{X}{k.\pi}\right)$ qu'on écrit même $\left(1 - \frac{X^2}{k^2.\pi^2}\right)$.

On affirme alors que sous forme factorisée, on a $f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2.\pi^2}\right)$

Ici, c'est quand même abusif :

- un produit d'une infinité de termes, c'est quoi ?

il faut passer au logarithme et étudier la convergence de la série :

$$\ln \left(\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x}{k^2 \cdot \pi^2} \right) \right) = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \cdot \pi^2} \right)$$

on a alors une série à termes négatifs, mais on la compare à

$$- \sum_{k=1}^n \frac{x^2}{k^2 \cdot \pi^2}, \text{ et tout va bien}$$

- est ce qu'un truc qui n'est plus un polynôme se factorise à l'aide de son infinité de racines ?

là, ça n'est pas du tout légitime, mais il existe une preuve rigoureuse, passant par la factorisation de

$$\left(1 + \frac{i \cdot x}{n} \right)^n - \left(1 - \frac{i \cdot x}{n} \right)^n \text{ (polynôme) et des passages à la limite cernés de très près.}$$

Ce qui vient d'être obtenu est ce qu'on appelle **factorisation d'Euler du sinus**. Et on peut l'obtenir par d'autres méthodes, proches du programme de Spé (concours X/E.N.S. quand même).

Maintenant, une fois Euler mis en place, on va sortir Viète et Taylor.

Le « polynôme » $f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \cdot \pi^2} \right)$ a pour racines de $\pm k \cdot \pi$ avec k décrivant $\mathbb{N}^*$.

On va chercher la somme des carrés des racines.

Or, pour un polynôme classique, la somme des carrés des racines se calcule à l'aide des coefficients.

Prenons un exemple : $X^5 - s \cdot X^4 + d \cdot X^3 - t \cdot X^2 + q \cdot X - p$ a pour racines a_1 à a_5

On a alors $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_5} = \frac{\text{les quadruplets}}{\text{le produit}} = \frac{q}{p}$

et $\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_1 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_4 \cdot a_5} = \frac{\text{les triplets}}{\text{le produit}} = \frac{t}{p}$

et enfin $\frac{1}{(a_1)^2} + \frac{1}{(a_2)^2} + \dots + \frac{1}{(a_5)^2} = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_5} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_1 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_4 \cdot a_5} \right) = \frac{q^2 - 2 \cdot p \cdot t}{p^2}$

On généralise à une infinité de termes.

Si on considère le résultat correct pour un « polynôme » avec une infinité de racines, il faut quand même alors connaître ses coefficients.

Mais justement, c'est là qu'intervient la formule de Taylor, poussée jusqu'à l'infini (combien de passages du fini à l'infini dans ce truc d'Euler ?) :

$$\sin(x) = \sin(0 + x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \text{reste} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

Une dérivée sur deux est nulle en 0 : $\sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty/2} \frac{\sin^{(2 \cdot p + 1)}(0)}{(2 \cdot p + 1)!} \cdot x^{2 \cdot p + 1}$.

Et encore, une sur deux vaut 1 et l'autre vaut -1 : $\sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2 \cdot p + 1}}{(2 \cdot p + 1)!}$

En ne gardant que les premiers termes, le physicien dira :

ah oui, je connais : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

Et il dira avec la candeur qui le caractérise : c'est un développement limité.

Et là, le matheux hurle, se lamente, s'arrache e peu de cheveux qui lui restent :

non, pas un développement limité ! mais un développement de Taylor.

Un développement limité, c'est $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)_{x \rightarrow 0}$ et ça ne permet de ne presque rien fait, juste lever des indéterminations dans des limites, comme son nom développement limité le dit. Tu le connais toi, le signe de $o(x^7)$? Tu sais dire si $o(x^7)_{x \rightarrow 0}$ c'est plus petit que 10^{-3} quand x vaut 10^{-1} ? Non ! C'est une limite... Et une limite ce n'est pas un truc qu'on calcule quand x vaut quelquechose.

Un développement de Taylor, c'est $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{7!} \cdot \int_0^1 (1-t)^7 \cdot \sin(x \cdot t) \cdot dt$ et on contrôle le reste, on connaît son signe, son ordre de grandeur...

Un développement de Taylor, c'est aussi $\sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2 \cdot p + 1}}{(2 \cdot p + 1)!}$, une vraie égalité.

Bon, mais tant pis, on laissera le physicien confondre développement de Taylor et développement limité, puisque de toutes

façons, dans ses formules, il y a des = et des $\simeq$ qui ont le même statut et que ses formules se finissent pas + ... qui laissent planer un flou incroyable. Donc, sur le début des formules, développement de Taylor et développement limité, c'est pareil. Seule la rime change. mais c'est dans la rime qu'est toute la rigueur et la poésie.
On en reparlera en temps utile.

On divise par x :

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \sum_{p=3}^{+\infty} \frac{(-1)^p \cdot x^{2p}}{(2p+1)!}$$

Et comme la somme des inverses des carrés des racines n'a besoin que des derniers coefficients du polynôme, on récupère enfin : $2 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi \cdot k}\right)^2 = 0^2 - 2 \cdot \frac{-1}{6}$.

On obtient enfin :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Et en allant chercher la somme des puissances quatrièmes des racines, Euler trouve même $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$, saurez vous faire de même.

Et si vous voulez en savoir plus :

http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_sinus_eulerien.pdf

D'ailleurs, allez voir les diaporamas¹ de Aimé Lachal pour l'INSA Lyon, ils sont bien faits.

Et le texte original d'Euler se trouve sur internet, y compris en latin.

Sinon, 3Blue1Brow a une preuve <géométrique>. agréable à suivre.

◦18◦ Comparez $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^N \right)$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^N \right)$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

◦19◦ Montrez pour tout n : $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{k} = - \int_0^1 \frac{(1-t)^n - 1}{t} \cdot dt = \int_0^1 \frac{x^n - 1}{x - 1} \cdot dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (noté H_n).

Déduisez : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n} = e \cdot \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p \cdot p!}$.

◦20◦ Un élève dont je tairai le prénom (même si de toutes façons il pourrait s'en tirer en disant « bah, on est deux à avoir le même prénom ») a écrit $\frac{\ln(a)}{\ln(b)} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ dans le cadre d'un exercice.

Bon quand même, pour $a = 2$, il y a un b pour lequel c'est vrai. Prouvez le.

Trouvez les a pour lesquels il existe au moins un b pour lequel c'est vrai.

◦21◦ Trouvez le reste (et juste le reste) de la division euclidienne de $X^n + 1$ par $X^2 - 3X + 2$, en donnant à X des valeurs particulières bien choisies.

◦22◦ Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné admettant un plus grand élément μ . On suppose que toute partie non vide de E a un plus petit élément. Montrez que toute partie de E a une borne supérieure.

◦23◦ Montrez toute suite réelle monotone est d'un signe constant à partir d'un certain rang.
Montrez que si (a_n) et (b_n) sont monotones, alors $(a_n \times b_n)$ ne l'est pas forcément.
Un élève affirme « oui, mais si (a_n) et (b_n) sont monotones, alors à partir d'un certain rang, les deux restent de signe constant, leur produit est alors de signe constant, et en multipliant membre à membre les inégalités, leur produit est monotone ». Vrai ou Faux ?
Non, pas « Vrai ou faux, l'élève a-t-il dit ça », mais « vrai ou faux, ce que dit l'élève est correct ».

◦24◦ Un réel α est pétillant si pour tout n de $\mathbb{N}^*$ l'entier $[\alpha^{(2^n)}] + 2$ est un carré parfait.
Montrez qu'aucun entier α ne pétille.
Montrez que aucun réel de $[0, 1]$ ne pétille.

1. ah pardon, on dit power-point ?, on dit diaporama, et fuck WindowsOffice

Montrez que si α pétille, alors α^2 pétille aussi

k est un entier naturel non nul. On définit la suite u par $u_1 = (1+k)^2$ et $u_{n+1} = (u_n - 1)^2$. Montrez que (u_n) est croissante, plus grand que 3.

Pour tout n , on pose $a_n = \sqrt[n]{u_n - 2}$ et $b_n = \sqrt[n]{u_n - 1}$. Montrez que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones. Déduez que (a_n) converge vers un réel α de $[k, k+1[$.

Montrez pour tout n : $(a_n)^{2^n} < (\alpha)^{2^n} < (b_n)^{2^n}$ et déduisez que α est pétillant.

◦25◦ Soit (a_n) une suite croissante admettant une sous-suite $(a_{\varphi(n)})$ décroissante. Montrez que (a_n) est constante à partir d'un certain rang.

◦26◦ ♡ Étudiez la convergence de la suite $((-1)^n \cdot (4n^2 + 2n + 1))$, de sa moyenne de Cesàro, de la moyenne de Cesàro de sa moyenne de Cesàro, et ainsi de suite.

Encore une fois un conseil (mais comme vous vous obstinez à croire que les maths sont des formules et du calcul, ne le lisez pas et retournez passer le bac) : calculez déjà les premiers termes.

◦27◦ ♠ Soient u et v deux suites. On suppose que $u \cdot v$ tend vers 0 à l'infini. Montrez par un contre-exemple qu'on ne peut pas en déduire que u ou v tend vers 0 à l'infini.

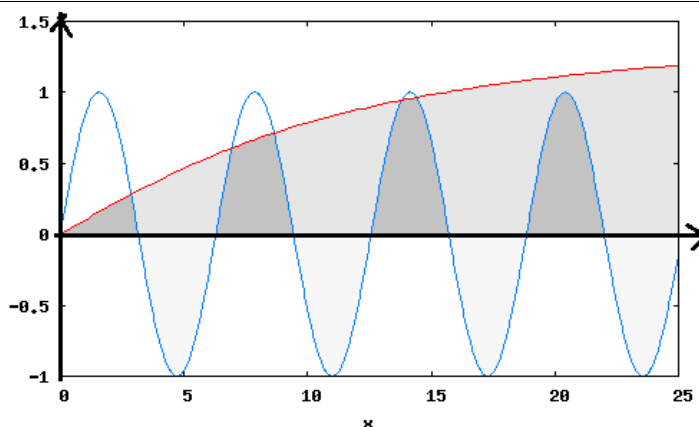
On veut montrer qu'il existe une sous-suite de u ou une sous-suite de v qui tend vers 0 à l'infini. Montrez qu'il existe N_0 vérifiant $|u_{N_0} \cdot v_{N_0}| \leq 1$. Montrez qu'il existe N_1 plus grand que N_0 vérifiant $|u_{N_1} \cdot v_{N_1}| \leq 1/4$. Montrez qu'il existe N_2 plus grand que N_1 vérifiant $|u_{N_2} \cdot v_{N_2}| \leq 1/16$. Montrez l'existence d'une suite croissante (N_n) vérifiant $|u_{N_n} \cdot v_{N_n}| \leq 1/4^n$. On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_{N_n}| \leq 1/2^n\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid |v_{N_n}| \leq 1/2^n\}$. Montrez : $A^c \cap B^c = \emptyset$. Déduez $A \cup B = \mathbb{N}$. Déduez que A ou B est infini. Concluez.

◦28◦ Montrez que si a est une suite d'entiers naturels strictement positifs, croissante, non constante égale à 1, alors la série $\sum_{n=0}^N \frac{1}{\prod_{k=0}^n a_k}$ converge. Montrez que la limite est rationnelle si la suite (a_n) est stationnaire.

◦29◦ ♡ On a bien sûr $(n+1) \sim_{n \rightarrow +\infty} n$. A-t-on $\sin(n+1) \sim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n)$? A-t-on $\ln(n+1) \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n)$? A-t-on $\exp(n+1) \sim_{n \rightarrow +\infty} \exp(n)$? A-t-on $\text{Arctan}(n+1) \sim_{n \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(n)$? A-t-on $\sqrt{n+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}$? A-t-on $\sqrt[n+1]{n+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$? A-t-on $(n+1)^{n+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} (n)^n$? A-t-on $(n+1)! \sim_{n \rightarrow +\infty} n!$?

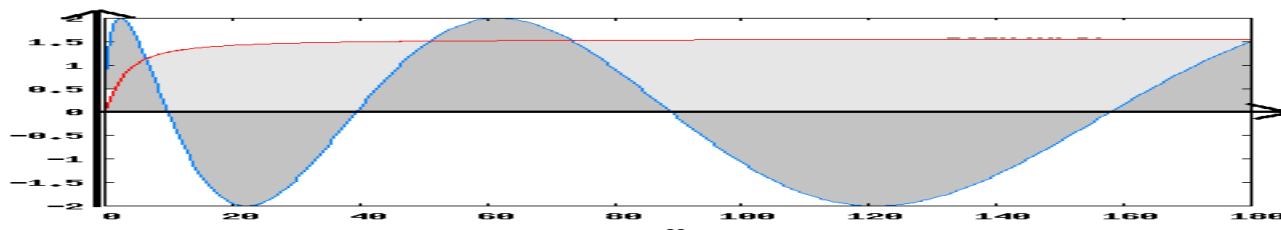
◦30◦ ♡ Créez une classe où soixante pour cent des filles sont anglicistes et ou trente cinq pour cent des anglicistes sont des garçons.

◦31◦ Soit $E, \leq$ un ensemble ordonné. Montrez que toute partie de E admet un élément maximal si et seulement si toute suite croissante de E est stationnaire (c'est à dire « constante à partir d'un certain rang »). Montrez que c'est le cas pour $(\mathbb{Z}, \leq)$.



λ est un réel strictement positif donné. Pour tout n , on note u_n le nombre de solutions de l'équation $\sin(x) = \text{Arctan}(x/\lambda)$ dans l'intervalle $[0, n]$.

◦32◦ Montrez que la suite (u_n) converge.



Pour tout n , on note v_n le nombre de solutions de l'équation $2 \cdot \sin(\sqrt{x}) = \text{Arctan}(x/\lambda)$ dans l'intervalle $[0, n]$. Montrez que la suite (v_n) diverge.

Non, s'il vous plaît, on ne se lance pas dans des calculs, c'est des maths. On réfléchit d'abord.

◦33◦

On note $(E, +, \cdot, \times)$ l'algèbre des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$. Deux suites a et b sont dites voisines si la moyenne de Césàro de leur différence tend vers 0 à l'infini. Montrez qu'on définit ainsi une relation d'équivalence.

Indiquez pour les suites suivantes si elles sont équivalentes et/ou voisines de la suite (n^2) :

$(n^2 + n)$	$(n^2 + n \cdot \ln(n))$	$\left(\frac{n^3 + \ln(n+1)}{n+1}\right)$	$(n \cdot \ln(n+1))$	$(2n^2 + n)$
-------------	--------------------------	---	----------------------	--------------

Montrez que deux suites stationnaires (c'est à dire "constantes à partir d'un certain rang") sont voisines si et seulement si elles ont la même limite.

Un élève prétend qu'une suite a est voisine de la suite constante égale à 1 si et seulement si elle converge vers 1. A-t-il raison ?

Deux parties A et B de $\mathbb{N}$ sont dites "de même masse" si leurs fonctions indicatrices sont deux suites voisines. Montrez qu'on définit ainsi une relation d'équivalence sur $P(\mathbb{N})$.

Montrez que les ensembles finis ont tous la même masse.

Montrez que l'ensemble $\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ a la même masse que les ensembles finis.

Montrez que si A et B sont des parties de $\mathbb{N}$ de même masse, alors A^c et B^c ont la même masse.

Montrez que l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs ont la même masse, mais n'ont pas la même masse que $\mathbb{N}$.

Montrez que l'ensemble A des nombres qui sont multiples de 2 ou de 3 a la même masse que l'ensemble B des nombres qui ne sont pas multiples de 3.

Écrivez une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne deux booléens $(1_A(n), 1_B(n))$ pour les deux parties A et B définies ci dessus.

◦34◦

♥ Montrez que la réunion de deux segments n'est pas forcément un segment.

Montrez que la réunion de deux segments ayant un point commun est encore un segment.

Montrez que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ n'est plus un segment.

◦35◦

Montrez que $x \mapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ (sans utiliser un théorème sur la dérivée).

◦36◦

♥ On définit $u_0 < 0$ et $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$. Montrez que (u_n) est négative. Montrez que (u_n) est croissante. Montrez que (u_n) converge et calculez sa limite.

On définit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$. Montrez que (u_n) est positive. Montrez que (u_n) est croissante. Montrez que (u_n) ne peut pas converger. Concluez.

◦37◦

Montrez que la série de terme général $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)^2}$ converge.

On note $A_N = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n+1}}$. Montrez : $|A_{N^2+2N} - A_{N^2-1}| \geq \frac{2N+1}{\sqrt{N^2+2N}}$. Déduisez que (A_N) diverge.

◦38◦

♥ Quels sont les complexes z pour lesquels au moins une des deux séries suivantes converge : $\left(\sum_{n=0}^N e^{n \cdot z}\right)_N$,

$$\left(\sum_{n=0}^N \frac{1}{\sum_{k=0}^n e^{k \cdot z}}\right)_N.$$

◦39◦

Montrez que la série de terme général $\frac{i^n}{n+1}$ converge.