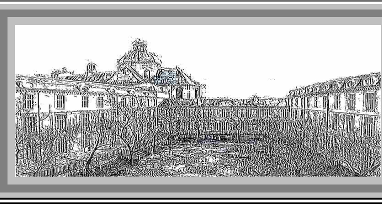
LYCEE CHARLEMAGNE Lundi 25 mars M.P.S.I.2		2023 2024 TD23

◦0◦ On définit sur $\mathbb{C}$ la relation $\blacktriangleleft$ par $\Big((a+i.b) \blacktriangleleft (\alpha+i.\beta)\Big) \Leftrightarrow \Big((a<\alpha)\ ou\ \big((a=\alpha)\ et\ (b\leqslant\beta)\big)\Big)$ (a, b, α et β sont des réels).
Montrez que c'est une relation d'ordre, et que cet ordre est total (on l'appelle « ordre lexicographique » ou « ordre du dictionnaire »).
Montrez que le disque fermé (c'est à dire avec son cercle)$\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|\leqslant 1\}$ admet pour borne supérieure 1.
Montrez que le disque ouvert (c'est à dire sans son cercle) $\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|<1\}$ n'admet pas de borne supérieure.

Réflexivité On se donne un seul complexe $a+i.b$. On a alors $(a=a)\ et\ (b\leqslant b)$. La seconde assertion est vérifiée, on a bien $(a+i.b) \blacktriangleleft (a+i.b)$.

Antisymétrie On se donne deux complexes qu'on suppose ordonnés dans les deux sens à la fois.
On a donc à la fois $\Big((a<\alpha)\ ou\ \big((a=\alpha)\ et\ (b\leqslant\beta)\big)\Big)$
et $\Big((\alpha<a)\ ou\ \big((a=\alpha)\ et\ (\beta\leqslant b)\big)\Big)$.

On distribue ces disjonctions de cas

	$(a<\alpha)$	$((a=\alpha)\ et\ (b\leqslant\beta))$
$\alpha<a$	impossible	impossible
$(\alpha=a)\ et\ (\beta\leqslant b)$	impossible	

La seul et dernière case possible donne $a=\alpha$ puis $b=\beta$ par antisymétrie.
On est bien arrivé à $(a+i.b)=(\alpha+i.\beta)$.

Transitivité On se donne cette fois trois complexes et on suppose $\Big((a<\alpha)\ ou\ \big((a=\alpha)\ et\ (b\leqslant\beta)\big)\Big)$ et $\Big((\alpha<A)\ ou\ \big((\alpha=A)\ et\ (\beta\leqslant B)\big)\Big)$.

On distribue aussi

	$(a<\alpha)$	$((a=\alpha)\ et\ (b\leqslant\beta))$
$\alpha<A$	$a<A$	$a<A$
$(\alpha=A)\ et\ (\beta\leqslant B)$	$a<A$	$a=\alpha=A\ et\ b=\beta=B$

Trois cases ont conduit à $a<A$ (et donc $(a+i.b) \blacktriangleleft (A+i.B)$), la dernière conduit à l'autre cas de figure amenant à la même conclusion ($a+=A$ et $b\leqslant B$).

On a une relation d'ordre.

Pour comparer deux complexes, on comparer déjà les abscisses, et en cas d'égalité, on compare les ordonnées.

On se donner $a+i.b$ et $\alpha+i.\beta$ et il faut arriver à les comparer, dans un sens ou dans l'autre. Sans arriver à « ben non, pas comparables ».
On regarde déjà les abscisses et comme l'ordre sur $\mathbb{R}$ est total, on a trois possibilités

$a<\alpha$	$a=\alpha$	$a>\alpha$
$(a+i.b) \blacktriangleleft (\alpha+i.\beta)$	?	$(\alpha+i.\beta) \blacktriangleleft (a+i.b)$

Dans le cas $a=\alpha$, on compare les parties imaginaires b et β (ordre total sur $\mathbb{R}$ encore)

<table>
<tr><th>$a<\alpha$</th><th colspan="3">$a=\alpha$</th><th>$a>\alpha$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$(a+i.b) \blacktriangleleft (\alpha+i.\beta)$</td><td>$b<\beta$</td><td>$b=\beta$</td><td>$b>\beta$</td><td rowspan="2">$(\alpha+i.\beta) \blacktriangleleft (a+i.b)$</td></tr>
<tr><td>$(a+i.b) \blacktriangleleft (\alpha+i.\beta)$</td><td>$(a+i.b) \blacktriangleleft (\alpha+i.\beta)$
et $(\alpha+i.\beta) \blacktriangleleft (a+i.b)$</td><td>$(\alpha+i.\beta) \blacktriangleleft (a+i.b)$</td></tr>
</table>

Tous les cas conduisent à une comparaison. L'ordre est total.

La borne supérieure de $\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|\leqslant 1\}$ est son plus grand élément : 1.
C'est un élément de cet ensemble (puisque $|1|\leqslant 1$).
Tous les autres éléments sont de la forme $x+i.y$ avec $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1$.
On a nécessairement $x\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1$.
Si on a $x<1$ alors on a bien $(x+i.y) \blacktriangleleft (1+i.0)$.
Si on a $x=1$ alors forcément $y=0$ et on a bien $(1+i.0) \blacktriangleleft (1+i.0)$.

Le disque $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ne contient plus $(1 + i.O)$.
Tous ses éléments n'en sont pas moins majorés (pour ◀) par $1 + i.0$.
Mais mieux encore : tous ses éléments sont majorés (pour ◀) par $1 - 5.i$ et même par tout nombre de la forme $1 + b.i$.

Tous les éléments de la droite « tangente au cercle en 1) sont des majorants du disque.
De plus, si un certain $a + i.b$ majore tous les x+i.y du disque, il majore par exemple les $x + i.0$ avec $-1 < x < 1$ (ils sont dans le disque).
On a donc $x < a$ ou $x = a$ *et* $0 \leqslant b$
Dans les deux cas, on a forcément $x \leqslant a$ et par passage à la limite sur x : $1 \leqslant a$.

Les majorants du disque ont donc un a supérieur ou égal à 1.
Et tous les $a + ib$ avec $a \geqslant 1$ sont des majorants de tous les points du disque.

Or, parmi les $a + i.b$ avec $a \geqslant 1$, il n'y en a pas qui soit le plus petit.
Proposez moi $1 + i.b_0$ et je vous trouve $1 + i.(b_0 - 1)$ qui est resté un majorant, et est encore plus petit

---

∘1∘

A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée. Complétez ce qui manque dans ce raisonnement.
On pose $M = Sup(A)$ et $\mu = Inf(A)$.
On a $x - y \leqslant M - \mu$.
Notons α un majorant de $x - y$. Alors pour tout y, on a
pour tout x : $x \leqslant \alpha + y$ donc $M \leqslant \alpha + y$. Et donc pour tout y : $M - \alpha \leqslant y$.
On déduit : $M - \alpha \leqslant \mu$.
Finalement $Sup\{x - y \mid (x,\ y) \in A^2\} = M - \mu$.

A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée.
Elle admet donc une borne supérieure qu'on note M : $M = Sup(A)$.

On suppose aussi A minorée. Elle a alors une borne inférieure : $\mu = Inf(A)$.

On va alors montrer que $\{x - y \mid (x,\ y) \in A^2\} = M - \mu$ admet pour borne supérieure $M - \mu$.

Qui sont ces $\{x - y \mid (x,\ y) \in A^2\}$: ce sont les distances entre points de A. Et on cherche la plus grande distance.
Me permettrez vous de l'appeler « diamètre de A » ?

Pour tout x et tout y de A, on a déjà $x \leqslant M$ (majorant) puis $\mu \leqslant y$.
On passe à l'opposé dans la seconde et on somme : $x - y \leqslant M - \mu$.

> *Déjà, le diamètre ne peut pas dépasser $M-$, ce qui est assez logique par l'inclusion $A \subset [\mu,\ M]$ (non ! qui d'entre vous a transformé en $A = [\mu,\ M]$, estimant que tout ensemble est un segment ?).*

On a $x - y \leqslant M - \mu$.

Il faut montrer que $M - \mu$ est non seulement un majorant de notre ensemble de différences, mais même « son plus petit majorant ». On va utiliser ici l'approche « tous les autres majorants sont plus grands que $M - \mu$.

Notons α un majorant de $x - y$. Alors pour tout y et tout x, on a $x - y \leqslant \alpha$ donc $x \leqslant \alpha + y$.
Gardons y fixé pour l'instant. Et insistons sur le $\forall x$.
Le réel $\alpha + y$ majore tous les x de A. C'est un majorant de A.
Par définition du plus petit majorant : $M \leqslant \alpha + y$.

On fait passer α de l'autre côté : $M - \alpha \leqslant y$.
Le réel $M - \alpha$ est un minorant de A.
Par définition du plus grand minorant : $M - \alpha \leqslant \mu$.

> *Oui, si partant de « $M - \alpha \leqslant y$ » vous passez à « je fais tendre y vers la borne inférieure μ et j'obtiens $M - \alpha \leqslant \mu$ », alors vous avez aussi tout compris.*
> *En revanche, si partant de « $M - \alpha \leqslant y$ » vous passez à « je prends y égal à la borne inférieure μ et l'obtient $M - \alpha \leqslant \mu$ », alors vous n'avez pas compris qu'une borne inférieure n'est pas forcément atteinte. Erreur classique, mais on est MP bordel,*

pas en licence de physique !

On rétablit : $M-\mu \leqslant \alpha$.

Le réel $M-\mu$ est un majorant de $\{x-y \mid (x,\ y) \in A^2\}$, plus petit que les autres majorants.
C'est lui la borne supérieure.

C'est quoi ce bordel ?

$$16 = 2^4 = (1+1)^4 = \binom{4}{k}.1^k.1^{4-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{4}{k} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{20}{10} = 184756$$

∘2∘

A est une matrice de terme général a_i^k.
Comparez : $Max\Big(Min\big(a_i^k \mid k \leqslant n\big) \Bigm| i \leqslant n\Big)$ et $Min\Big(Max\big(a_i^k \mid i \leqslant n\big) \Bigm| k \leqslant n\Big)$ *(il n'y a pas forcément égalité, mais l'un est toujours plus petit que l'autre, regardez sur un exemple pour des matrices 4 sur 4, et pour la preuve générale, pensez à regarder le terme à l'intersection de la ligne donnant le max et la colonne donnant le min).*
(a_n^p) est une famille de réels indexée par deux entiers *(suite de suites)*, bornée.
Comparez $Sup\Big(Inf\big(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\big) \Bigm| i \in \mathbb{N}\Big)$ et $Inf\Big(Sup\big(a_i^k \mid i \in \mathbb{N}\big) \Bigm| k \in \mathbb{N}\Big)$ après avoir montré l'existence de chacun.

Un tableau à double entrée (ça s'appelle une matrice)

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	$Min\big(a_i^k \mid k \leqslant n\big)$	$Max\Big(Min\big(a_i^k \mid k \leqslant n\big) \Bigm\| i \leqslant n\Big)$
i=1	4	3	9	12	7	3	
i=2	5	8	17	9	2	2	
i=3	9	4	13	7	8	4	
i=4	12	5	6	17	4	4	
i=5	5	7	13	6	11	5	5
$Max\big(a_i^k \mid i \leqslant n\big)$	12	8	17	17	11		
$Min\Big(Max\big(a_i^k \mid i \leqslant n\big) \Bigm\| k \leqslant n\Big)$		8					

Sur cet exemple $Min\Big(Max\big(a_i^k \mid i \leqslant n\big) \Bigm| k \leqslant n\Big) \geqslant Max\Big(Min\big(a_i^k \mid k \leqslant n\big) \Bigm| i \leqslant n\Big)$.
Et pour comprendre :

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	$Min\big(a_i^k \mid k \leqslant n\big)$	$Max\Big(Min\big(a_i^k \mid k \leqslant n\big) \Bigm\| i \leqslant n\Big)$
i=1	4	3	9	12	7	3	
i=2	5	8	17	9	2	2	
i=3	9	4	13	7	8	4	
i=4	12	5	6	17	4	4	
i=5	5	7	13	6	11	5	5
$Max\big(a_i^k \mid i \leqslant n\big)$	12	8	17	17	11		
$Min\Big(Max\big(a_i^k \mid i \leqslant n\big) \Bigm\| k \leqslant n\Big)$		8					$8 \geqslant 7 \geqslant 5$

Passons à la preuve.
Pour chaque ligne i, on calcule la minimum d'une liste finie : $Min\big(a_i^k \mid k \leqslant n\big)$, qu'on va noter μ_i (nommer les objets est une étape vers la solution).
De tous ces μ_i, on prend le plus grand : $Max(\mu_i)$. Disons qu'il est atteint pour un indice i_0 (il se peut qu'il y en ait plusieurs, on en prend un).

Pour chaque colonne k, on calcule la maximum d'une liste finie : $Max\big(a_i^k \mid i \leqslant n\big)$, qu'on va noter ν_k (nommer les objets rend les choses plus claires).
De tous ces ν_k on prend le plus petit, atteint disons pour un indice k_0.

Considérons alors l'élément $a_{i_0}^{k_0}$ de la ligne i_0 et de la colonne k_0.
Il fait partie de la liste définissant $\mu_{i_0} = Min\big(a_i^k \mid k \leqslant n\big)$. On a donc $\mu_{i_à} \leqslant a_{i_0}^{k_0}$ (ci dessus : $5 \leqslant 7$).
Il fait partie de la liste définissant $\nu_{i_0} = Max\big(a_i^k \mid i \leqslant n\big)$. On a donc $\nu_{i_à} \geqslant a_{i_0}^{k_0}$ (ci dessus : $8 \geqslant 7$).

Par transitivité : $\boxed{Min\Big(Max\Big(a_i^k \mid i \leqslant n\Big) \;\Big|\; k \leqslant n\Big) = \nu_{k_0} \geqslant a_{i_0}^{k_0} \geqslant \mu_{i_0} Max\Big(Min\Big(a_i^k \mid k \leqslant n\Big) \;\Big|\; i \leqslant n\Big)}$

Pour passer aux ensembles infinis et comparer $Sup\Big(Inf\Big(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\Big) \;\Big|\; i \in \mathbb{N}\Big)$ et $Inf\Big(Sup\Big(a_i^k \mid i \in \mathbb{N}\Big) \;\Big|\; k \in \mathbb{N}\Big)$, on va faire presque de même.

Après avoir justifié l'existence de ces bornes.
Disons que la suite à double indice est majorée par A et minorée par B.
Chaque partie $\{a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ (i fixé) est non vide, et minorée par B. Elle admet donc une borne inférieure minorée par B (un minorant face au plus grand minorant).
Chaque $Inf\Big(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\Big)$ existe et est plus grand que B. Mais il est plus petit que A puisque $Inf\Big(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\Big) \leqslant a_i^0 \leqslant A$.
L'ensemble $\Big\{Inf\Big(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\Big) \mid i \in \mathbb{N}\Big\}$ est non vide, majoré par A.
Il admet une borne supérieure.

On fait « de même » pour l'existence de $Inf\Big(Sup\Big(a_i^k \mid i \in \mathbb{N}\Big) \;\Big|\; k \in \mathbb{N}\Big)$.

A l'image de $Max\Big(Min\Big(a_i^k \mid k \leqslant n\Big) \;\Big|\; i \leqslant n\Big) \leqslant Min\Big(Max\Big(a_i^k \mid i \leqslant n\Big) \;\Big|\; k \leqslant n\Big)$, on va prouver

$$Sup\Big(Inf\Big(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\Big) \;\Big|\; i \in \mathbb{N}\Big) \leqslant Inf\Big(Sup\Big(a_i^k \mid i \in \mathbb{N}\Big) \;\Big|\; k \in \mathbb{N}\Big)$$

presque de la même manière.
Pourquoi presque ?
Ne peut on dire « on prend le k_0 qui réalise $Inf\Big(Sup\Big(a_i^k \mid i \in \mathbb{N}\Big) \;\Big|\; k \in \mathbb{N}\Big) = Sup\Big(a_i^{k_0} \mid i \in \mathbb{N}\Big)$
le i_0 qui réalise $Sup\Big(Inf\Big(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\Big) \;\Big|\; i \in \mathbb{N}\Big) = Inf\Big(a_{i_0}^k \mid i \in \mathbb{N}\Big)$
on glisse $Inf\Big(a_{i_0}^k \mid i \in \mathbb{N}\Big) \leqslant a_{i_0}^{k_0} \leqslant Sup\Big(a_i^{k_0} \mid i \in \mathbb{N}\Big)$
et tout est fini. »
Beh non. On ne peut pas dire ça. Ni l'écrire. Parce que une borne supérieure n'est pas un maximum. Elle n'est pas forcément atteinte.

Rappel : La borne inférieure de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ est 0, mais aucun x ne réalise $e^x = 0$.
La borne supérieure de l'arctangente sur $\mathbb{R}$ est $\pi/2$, mais aucun x ne réalise $Arctan(x) = \pi/2$.

Mais une borne supérieure s'atteint presque, à εprès. Et ce, pour tout ε, aussi petit soit il.
On va donc avoir des « égalités à ε près », et à la fin, on verra quoi faire de ce ε.

Idée classique : Idée à retenir : un réel qui est plus petit que tout εstrictement positif est forcément négatif ou nul.
On s'en convainc par l'absurde.

Posons $I = Inf\Big(Sup\Big(a_i^k \mid i \in \mathbb{N}\Big) \;\Big|\; k \in \mathbb{N}\Big)$ et $S = Sup\Big(Inf\Big(a_i^k \mid k \in \mathbb{N}\Big) \;\Big|\; i \in \mathbb{N}\Big)$.
On se donne donc εstrictement positif.
Il existe un k_0 vérifiant $I \leqslant Sup\Big(a_i^{k_0} \mid i \in \mathbb{N}\Big) \leqslant I + \varepsilon$ (car $I + \varepsilon$ n'est plus un minorant).
Il existe un i_0 vérifiant $S \geqslant Inf\Big(a_{i_0}^k \mid k \in \mathbb{N}\Big) \geqslant S - \varepsilon$ (un élément de l'ensemble au moins s'est glissé entre S et $S - \varepsilon$).

Maintenant que deux indices sont fixés, on peut comparer $a_{i_0}^{k_0} \geqslant Inf\Big(a_{i_0}^k \mid k \in \mathbb{N}\Big)$
et $a_{i_0}^{k_0} \leqslant Sup\Big(a_i^{k_0} \mid k \in \mathbb{N}\Big)$

Par transitivité, on a $Sup\Big(a_i^{k_0} \mid k \in \mathbb{N}\Big) \geqslant a_{i_0}^{k_0} \geqslant Inf\Big(a_{i_0}^k \mid k \in \mathbb{N}\Big)$.
On efface celui du milieu qui a tenu son rôle : $Sup\Big(a_i^{k_0} \mid k \in \mathbb{N}\Big) \geqslant Inf\Big(a_{i_0}^k \mid k \in \mathbb{N}\Big)$.

Peut on enchaîner agréablement avec $I \leqslant Sup\Big(a_i^{k_0} \mid i \in \mathbb{N}\Big) \leqslant I + \varepsilon$ et $S \geqslant Inf\Big(a_{i_0}^k \mid k \in \mathbb{N}\Big) \geqslant S - \varepsilon$?

Pas tant que ça[1]. Il reste des ε : $I+\varepsilon \geqslant Sup\Big(a_i^{k_0} \mid k\in\mathbb{N}\Big) \geqslant Inf\Big(a_{i_0}^{k} \mid k\in\mathbb{N}\Big) \geqslant S-\varepsilon$.
Toutefois, en effaçant le milieu, on a $I+\varepsilon \geqslant S-\varepsilon$.

Et ce, pour tout ε.
l'idée naturelle (mais pas tout à fait exacte) est de dire « on fait tendre ε(strictement positif, mais quelconque) vers 0, il reste $I \geqslant S$, ce qui était notre objectif.

La bonne idée est de séparer : $2.\varepsilon \geqslant S-I$.
Le réel $S-I$ est plus petit que tout nombre strictement positif. Il est donc négatif ou nul : $S-I\leqslant 0$, et donc enfin $S\leqslant I$.

On peut aussi le jouer par l'absurde.
Si on n'avait pas $S\leqslant I$, on aurait $S>I$ et $S-I>0$.
Il suffit alors de prendre $\varepsilon = \dfrac{S-I}{3}$ (strictement positif) dans la démonstration précédente, pour aboutir à une contradiction.

∘3∘ ♡ Montrez que la suite $(\cos(\pi.n!.r))_n$ converge si r est un rationnel donné.

Le sens est ici « si r est rationnel, alors la suite converge ».
On prend donc r de la forme $\dfrac{p}{q}$. On a alors $n!.\pi.r = \dfrac{n!}{q}.p.\pi$.
Dès que n a dépassé q (et sans doutes même avant), $\dfrac{n!}{q}$ est un entier.
On a donc un multiple de π ! C'est bien parti.
Et même, dans $\dfrac{n!}{q}$ il y aura même (en tout cas pour n plus grand que $q+1$ pour qu'il reste aussi au moins un entier pair au numérateur) un facteur 2.
L'entier $\dfrac{n!.p}{q}$ est pair, et $\cos(\pi.n!.r)$ vaut 1.
La suite est stationnaire.
Dit autrement :e elle est constante (égale à 1) à partir d'un certain rang.
Elle converge donc vers 1.Dans la quantification $\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall n,\ (n\geqslant N_\varepsilon) \Rightarrow |\cos(n!.r.\pi)-1|\leqslant\varepsilon$ il suffit de pendre $N_\varepsilon = q+1$, et la condition $|\cos(n!.r.\pi)-1|\leqslant\varepsilon$ devient $|1-1|\leqslant\varepsilon$, c'est vrai !

Comment Euler a calculé $\zeta(2)$ (et même $\zeta(2.p)$

Attention, ce qui va suivra va être réalisé par un professionnel, ne reproduisez pas l'expérience chez vous.
Non, plus sérieusement, ce qui suit est une démonstration « à l'ancienne », avec plein de bonnes idées, mais avec de multiples passages à la limite qui ne sont pas justifiés. Cette démonstration ne serait jamais acceptée dans un Concours, ni dans un cours de Spé. Voyez la plutôt comme le squelette de bonnes idées, sur lesquelles construire ensuite de vrais exercices.
Si vous parvenez à suivre les idées, c'est parfait, mais ne recopiez rien.

On note f l'application $\boxed{x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}}$, qu'on prolonge par continuité en 0.
Par quelle valeur ? C'est du cours, ça ! $\sin(\theta) \sim_{\theta\to 0} \theta$.
On cherche les racines de l'application f. Ce sont les réels pour lesquels $\sin(\theta)$ s'annule : les multiples de π (en éliminant 0 qui a été simplifiée par le dénominateur).
On regroupe ces racines deux par deux : $k.\pi$ et $-k.\pi$.
Et on factorise : $(X-k.\pi).(X+k.\pi)$.
En fait, on, on factorise en $\Big(1-\dfrac{X}{k.\pi}\Big).\Big(1+\dfrac{X}{k.\pi}\Big)$ qu'on écrit même $\Big(1-\dfrac{X^2}{k^2.\pi^2}\Big)$.

On affirme alors que sous forme factorisée, on a $\boxed{f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} = \prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1-\dfrac{x^2}{k^2.\pi^2}\Big)}$

1. sauf si on triche et enchaîne mal les inégalités, juste pour pouvoir conclure, mais ceci est un corrigé, pas une copie d'élève qui veut à tout prix conclure même si rien n'est logique

Ici, c'est quand même abusif :

- *un produit d'une infinité de termes, c'est quoi ?*
  il faut passer au logarithme et étudier la convergence de la série :
  $\ln\Big(\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\dfrac{x}{k^2.\pi^2}\Big)\Big)=\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(1-\dfrac{x^2}{k^2.\pi^2}\Big)$
  on a alors une série à termes négatifs, mais on la compare à
  $-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x^2}{k^2.\pi^2}$*, et tout va bien*
  .
- *est ce qu'un truc qui n'est plus un polynôme se factorise à l'aide de son infinité de racines ?*
  là, ça n'est pas du tout légitime, mais il existe une preuve rigoureuse, passant par la factorisation de
  $\Big(1+\dfrac{i.x}{n}\Big)^n-\Big(1-\dfrac{i.x}{n}\Big)^n$ *(polynôme) et des passages à la limite cernés de très près.*

. .

Ce qui vient d'être obtenu est ce qu'on appelle **factorisation d'Euler du sinus**. Et on peut l'obtenir par d'autres méthodes, proches du programme de Spé *(concours X/E.N.S. quand même)*.
Maintenant, une fois Euler mis en place, on va sortir Viète et Taylor.

Le « polynôme » $\boxed{f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}=\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1-\dfrac{x^2}{k^2.\pi^2}\Big)}$ a pour racines de $\pm k.\pi$ avec k décrivant $\mathbb{N}^*$.

On va chercher la somme des carrés des racines.

Or, pour un polynôme classique, la somme des carrés des racines se calcule à l'aide des coefficients.

Prenons un exemple : $X^5-s.X^4+d.X^3-t.X^2+q.X-p$ *a pour racines* a_1 *à* a_5

On a alors $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_5}=\dfrac{\textit{les quadruplets}}{\textit{le produit}}=\dfrac{q}{p}$

et $\dfrac{1}{a_1.a_2}+\dfrac{1}{a_1.a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_4.a_5}=\dfrac{\textit{les triplets}}{\textit{le produit}}=\dfrac{t}{p}$

et enfin $\dfrac{1}{(a_1)^2}+\dfrac{1}{(a_2)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(a_5)^2}=\Big(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_5}\Big)^2-2.\Big(\dfrac{1}{a_1.a_2}+\dfrac{1}{a_1.a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_4.a_5}\Big)=\dfrac{q^2-2.p.t}{p^2}$

On généralise à une infinité de termes.

Si on considère le résultat correct pour un « polynôme » avec une infinité de racines, il faut quand même alors connaître ses coefficients.
Mais justement, c'est là qu'intervient la formule de Taylor, poussée jusqu'à l'infini (combien de passages du fini à l'infini dans ce truc d'Euler ?) :

$$\sin(x)=\sin(0+x)=\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}.x^k+\textit{reste}\Big)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}.x^k$$

Une dérivée sur deux est nulle en 0 : $\sin(x)=\sum_{p=0}^{+\infty/2}\dfrac{\sin^{(2.p+1)}(0)}{(2.p+1)!}.x^{2.p+1}$.

Et encore, une sur deux vaut 1 et l'autre vaut -1 : $\boxed{\sin(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k.x^{2.p+1}}{(2.p+1)!}}$

En ne gardant que les premiers termes, le physicien dira :

ah oui, je connais : $\sin(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\dfrac{x^7}{7!}+\ldots$.
Et il dira avec la candeur qui le caractérise : c'est un développement limité.
Et là, le matheux hurle, se lamente, s'arrache e peu de cheveux qui lui restent :
non, pas un développement limité *! mais un* développement de Taylor.

Un développement limité, c'est $\sin(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\dfrac{x^7}{7!}+o(x^7)_{x\to 0}$ *et ça ne permet de ne presque rien fait, juste lever des indéterminations dans des limites, comme son nom développement limité le dit. Tu le connais toi, le signe de* $o(x^7)$ *? Tu sais dire si* $o(x^7)_{x\to 0}$ *c'est plus petit que* 10^{-3} *quand x vaut* 10^{-1} *? Non ! C'est une limite... Et une limite ce n'est pas un truc qu'on calcule quand x vaut quelquechose.*

Un développement de Taylor, c'est $\sin(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\dfrac{x^7}{7!}+\dfrac{x^8}{7!}.\int_0^1(1-t)^7.\sin(x.t).dt$ *et on contrôle le reste, on connait son signe, son ordre de grandeur...*

Un développement de Taylor, c'est aussi $\sin(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k.x^{2.p+1}}{(2.p+1)!}$*, une vraie égalité.*

Bon, mais tant pis, on laissera le physicien confondre développement de Taylor et développement limité, puisque de toutes

façons, dans ses formules, il y a des = et des $\simeq$ qui ont le même statut et que ses formules se finissent pas $+\dots$ qui laissent planer un flou incroyable. Donc, sur le début des formules, développement de Taylor et développement limité, c'est pareil. Seule la rime change. mais c'est dans la rime qu'est toute la rigueur et la poésie.
On en reparlera en temps utile.

On divise par x :

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \sum_{p=3}^{+\infty} \frac{(-1)^p.x^{2.p}}{(2.p+1)\,!}$$

Et comme la somme des inverses des carrés des racines n'a besoin que des derniers coefficients du polynôme, on récupère enfin : $2.\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi.k}\right)^2 = 0^2 - 2.\frac{-1}{6}$.
On obtient enfin :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Et en allant chercher la somme des puissances quatrièmes des racines, Euler trouve même $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$, saurez vous faire de même.

Et si vous voulez en savoir plus :
`http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_sinus_eulerien.pdf`
D'ailleurs, allez voir les diaporamas [2] de Aimé Lachal pour l'INSA Lyon, ils sont bien faits.
Et le texte orignal d'Euler se trouve sur internet, y compris en latin.

Sinon, 3Blue1Brow a une preuve <géométrique ». agréable à suivre.

∘4∘

♠ Soit (a_n) une suite réelle bornée par μ et M. Montrez que chaque partie $A_n = \{a_k \mid k \geqslant n\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée, qui admet une borne supérieure noté s_n. Montrez pour tout n : $s_{n+1} \leqslant s_n$. Montrez que la suite (s_n) converge vers un réel α. Montrez que pour tout n il existe un entier $\varphi(n)$ vérifiant : $s_n - \frac{1}{n+1} \leqslant a_{\varphi(n)} \leqslant s_n$. Déduisez que $a_{\varphi(n)}$ converge vers α. Avez vous redémontré le théorème de Bolzano-Weierstrass ?

La suite a est bornée par μ et M. L'ensemble $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est donc borné par μ et M, et ses sous-ensembles $\{a_k \mid k \geqslant n\}$ (pour lesquels on a enlevé quelques valeurs) le sont encore.
Chaque partie $\{a_k \mid k \geqslant n\}$ contient au moins a_n.
Chaque partie non vide majorée admet une borne supérieure (qui n'est peut être pas un élément de l'ensemble, c'est une borne supérieure, pas un maximum, comme on le verra plus loin).
Pour tout n, on a $A_{n+1} \subset A_n$ (on en enlevé éventuellement un élément). On passe à la borne supérieure : $Sup(A_{n+1}) \leqslant Sup(A_n)$.

Démonstration rapide de $A \subset B \Rightarrow Sup(A) \leqslant Sup(B)$. Tous les éléments de B sont plus petits que $Sup(B)$. En tant que cas particuliers, tous les éléments de A sont plus petits que $Sup(B)$. Le réel $Sup(B)$ est un majorant de A. En tant que plus petit majorant de A, $Sup(A)$ est plus petit que $Sup(B)$.

La suite (s_n) est donc décroissante.
Mais chaque partie A_n est incluse dans $[\mu,\ M]$. On a donc pour tout n $M \leqslant s_n$.

Si vous en avez besoin, prenez un élément particulier de A_n : $M \leqslant a_n \leqslant s_n$.

La suite (s_n) est décroissante, minorée. Elle converge, vers son plus grand minorant qu'on va noter α.

Pour tout n, par définition de la borne supérieure : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A_n,\ s_n - \varepsilon < x \leqslant s_n$(puisque $s_n - \varepsilon$ n'est plus un majorant). On prend le cas particulier $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$. Il existe un élément de A_n, c'est à dire un a_k avec k plus grand que n. C'est le premier de ces k qu'on va noter $\varphi(n)$.
On a pour tout n :

$$s_n - \frac{1}{n+1} \leqslant a_{\varphi(n)} \leqslant s_n$$

Or, la suite (s_n) converge vers α et la suite $\left(s_n - \frac{1}{n+1}\right)$ converge aussi vers α.

---

2. ah pardon, on dit power-point ?, on dit diaporama, et fuck WindowsOffice

Par encadrement, $(a_{\varphi(n)})$ converge vers α.

On est parti d'une suite réelle bornée (a_n). A-t-on vraiment construit une sous-suite de (a_n) qui converge (ici, $(a_{\varphi(n)})$ vers α ?
La suite $(a_{\varphi(n)})$ converge effectivement. mais qu'est ce qui garantit que les indices vont en croissant ? Rien dans la construction.
Il faudrait donc soit forcer la croissance, soit ré indexer.

On pourra à chaque étape remplacer dans notre définition A_n par $B_n = \{a_k \mid k \geqslant \varphi(n-1)+1\}$.
De toute suite réelle bornée, on peut extraire au moins une sous-suite qui converge.

◦5◦

♡ Pouvez vous trouver f continue de A dans B (si oui, exemple ; si non : théorème utilisé) :

	$A = [0,\ 1]$	$A =]0,\ 1[$	$A =]0,\ 1]$	$A = [0,\ +\infty[$	$A =]0,\ +\infty[$
$B = [0,\ 1]$					
$B = [0,\ 1[$					
$B = [0,\ 1[$					
$B = [0,\ +\infty[$					
$B =]0,\ +\infty[$					

Rien n'interdit de prendre à chaque fois une application constante. Elle est continue et répond à « de A dans B ».
Reprenons l'exercice avec « de A sur B », c'est à dire exigeons que toutes les valeurs de B soient atteintes.

	$A = [0,\ 1]$	$A =]0,\ 1[$	$A =]0,\ 1]$	$A = [0,\ +\infty[$	$A =]0,\ +\infty[$
$B = [0,\ 1]$	Id	$x \longmapsto \cos^2(10.x)$ (3)	$x \longmapsto \cos^2(10.x)$	$\cos^2$ (4)	$\cos^2$
$B = [0,\ 1[$	Non (2)	affine par morceaux à ajuster atteignant $y = 0$ en $x = 1/2$ par exemple, et tendant vers $y = 1$ en $x = 1$	$x \longmapsto 1 - x$	$x \longmapsto 2.Arctan(x)/\pi$	$x \longmapsto 2.\lvert Arctan(x-1)\rvert/\pi$
$B = [0,\ +\infty[$	Non (1)		$x \longmapsto 1/x$	Id	$x \longmapsto \lvert x-1\rvert$
$B =]0,\ +\infty[$	Non (1)	$x \longmapsto 2.Arctan(x)/\pi$			Id

(1) En partant de $[0,\ 1]$ (segment), avec une application continue, on doit obtenir un ensemble borné. D'où l'annulation des cas comme $A = [0,\ 1]$ et $B =]0,\ +\infty[$.
(2) Mais en plus d'être bornée, l'application doit atteindre ses bornes. On refuse donc $[0,\ 1]$ sur $[0,\ 1[$ (l'ensemble image aurait pour borne supérieure 1, non atteinte).
(3) L'application $x \longmapsto \cos^2(10.x)$ reste entre 0 et 1 et atteint même ces valeurs pour des x strictement entre 0 et 1.
(4) Pareil, $\cos^2$ va balayer tout $[0,\ 1]$, et pas qu'un peu...

∘6∘

♠ On appelle section ouverte finissante toute partie A non vide de $\mathbb{Q}$ majorée vérifiant
$\forall a \in A,\ \exists b \in A,\ a < b$
$\forall a \in A,\ \forall c \in \mathbb{Q},\ c \leqslant a \Rightarrow c \in A$
Montrez que pour tout rationnel r, l'ensemble $]-\infty,\ r[$ est une coupure.
Montrez que $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\ ou\ x \leqslant 0\}$ est une section ouverte finissante.

Montrez que l'inclusion est une relation d'ordre sur les sections ouvertes finissantes.
Montrez que cet ordre est total.

Pour A et B sections, on définit $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Montrez que c'est une section ouverte finissante.
Montrez que cette addition est commutative et associative et que $\mathbb{Q}^{-*}$ en est le neutre.
Soit A une section ouverte finissante. On définit $A' = \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists \alpha \in \mathbb{Q},\ \forall a \in A,\ x < \alpha \leqslant -a\}$. Montrez que A' est une section ouverte finissante.
Montrez : $A + A' = \mathbb{Q}^{-*}$.

On se donne une famille $(A_n)_{n \in I}$ de sections ouvertes finissantes toutes incluses dans une section ouverte finissante $\mathbb{A}$.
Montrez que $\bigcup_{n \in I} A_n$ est encore une section ouverte finissante, contenant toutes les A_n.
Montrez que toute section ouverte finissante contenant tous les A_n contient $\bigcup_{n \in I} A_n$.
L'ensemble des sections ouvertes finissantes est $\mathbb{R}$, et les questions au dessus montrent que toute partie de $\mathbb{R}$ majorée admet un plus petit majorant.

A faire.

∘7∘

Un réel α est dit adhérent à une partie A de $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe une suite (a_n) de points de A qui converge vers α. Montrez que tout point de A est adhérent à A. Qui sont les points adhérents à $\mathbb{Z}$?
Montrez que tout points adhérent à A est adhérent à $A \cup B$. Montrez que tout point adhérent à $A \cup B$ est adhérent à A ou adhérent à B (d'une suite (c_n), *ne gardez soit que les points de A ou soit que les points de B).*
Montrez par un contre-exemple que l'on peut être adhérent à A et à B sans être adhérent à $A \cap B$.

Soit a un point de A. Alors la suite constante égale à a converge vers a.
a est adhérent à A.

La réciproque est fausse. 0 est adhérent à $]0,\ +\infty[$ mais n'est pas dans $]0,\ +\infty[$.

Les éléments de $\mathbb{Z}$ sont adhérents à $\mathbb{Z}$ comme on vient de le dire.
On va montrer qu'il n'y a qu'eux. Soit en effet un élément a dans l'adhérence de $\mathbb{Z}$. Il existe une suite (α_n) d'entiers qui converge vers a.
Mais si une suite d'entiers converge, elle est constante à partir d'un certain rang (écrire $|\alpha_p - \alpha_q| \leqslant |\alpha_p - a| + |a - \alpha_q| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un rang $N_{\varepsilon/2}$).
Et étant constante, sa limite est égale à la valeur en question. On a donc $a = \alpha_{N_{\varepsilon/2}} \in \mathbb{Z}$. a est entier.

Soit a un élément adhérent à A. Il existe une suite (α_n) de points de A qui converge vers a. Mais c'est aussi une suite de points de $A \cup B$. Notre élément a est adhérent à $A \cup B$.

Soit a adhérent à $A \cup B$. Il existe une suite d'éléments (x_n) de $A \cup B$ qui converge vers a.

> Il n'y a aucune raison qu'ils soient tous dans A ou tous dans B (exemple 0 est adhérent à $]-\infty,\ 0[\cup]0,\ +\infty[$ en utilisant la suite $((-2)^{-n})$ ou si vous préférez $\left(\dfrac{(-1)^n}{2^n}\right)$., mais cette suite sautille sans arrêt de A à B.

Mais une suite est faite d'une infinité de termes. C'est donc qu'il y en a au moins une infinité dans A ou une infinité dans B.

> On note $\mathbb{N}_A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in A\}$ et $\mathbb{N}_B = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B\}$. Par construction $\mathbb{N}_A \cup \mathbb{N}_B = \mathbb{N}$ et il est impossible que les deux ensembles soient de cardinal fini.

Supposons que justement $\mathbb{N}_A$ est infini. On en liste les éléments par ordre croissant $\mathbb{N}_A = \{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, et on a une sous-suite de la suite initiale $(x_{\varphi(n)})$. Elle converge vers a et tous ses éléments sont dans A. a est donc adhérent à A.

On revient avec 0 adhérent à $]-\infty,\ 0[$ (suite $(-1/n)$) et adhérent à $]0,\ +\infty[$ (suite $(1/n)$).
Mais comment pourrait il être adhérent à leur intersection. Allez donc me construire une suite de $]-\infty,\ 0[\cap]0,\ +\infty[$!

∘8∘

On rappelle les définitions :

$\mathring{A}$	intérieur de A	$a \in \mathring{A} \Leftrightarrow (\exists \alpha > 0,\ [a-\alpha,\ a+\alpha] \subset A)$
$\overline{A}$	adhérence de A	$c \in \overline{A} \Leftrightarrow (\forall \alpha > 0,\ [c-\alpha,\ c+\alpha] \cap A \neq \emptyset$

Complétez

A	$]0,\ 1]$	$\mathbb{Q}$	$([0,\ 1] \cap \mathbb{Q} \cup ([1,\ 2] \cap (\mathbb{R}-\mathbb{Q}))$	$\mathbb{Z} \cup]0,\ 1[$
$\mathring{A}$	$]0,\ 1[$	$\emptyset$		$]0,\ 1[$
$\overline{A}$	$[0,\ 1]$	$\mathbb{R} =]-\infty,\ +\infty[$		$\mathbb{Z} \cup]0,\ 1[$
$\mathring{\overline{A}}$	$]0,\ 1[$	$\mathbb{R}$		$]0,\ 1[$
$\overline{\mathring{A}}$	$[0,\ 1]$	$\emptyset$		$[0,\ 1]$
$\overline{A} - \mathring{A}$	$\{0,\ 1\}$	$\mathbb{R}$		$\mathbb{Z}$

Trouvez un ensemble pour lequel les six lignes sont toutes distinctes.

Pourquoi est ce que je ne demande rien sur $\overline{\overline{A}}$ ni sur $\mathring{\mathring{A}}$?

Montrez que le complémentaire de l'intérieur de A est l'adhérence du complémentaire de A.
Trouvez une phrase avec complémentaire de l'adhérence.

Lesquelles sont vraies

l'adhérence	de la réunion de A est B	est la réunion	de l'adhérence de A et de l'adhérence de B
l'adhérence	de l'intersection de A est B	est l'intersection	de l'adhérence de A et de l'adhérence de B
l'intérieur	de la réunion de A est B	est la réunion	de l'intérieur de A et de l'intérieur de B
l'intérieur	de l'intersection de A est B	est l'intersection	de l'intérieur de A et de l'intérieur de B

∘9∘

f et g sont croissantes de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez :

$$\int_0^1 f(t).dt.\int_0^1 g(t).dt \leqslant \int_0^1 f(t).g(t).dt$$

(indication $(x,\ y) \longmapsto (f(y)-f(x)).(g(y)-g(x))$ sur $[0,\ 1]^2$).

Quand x et y sont tous deux entre 0 et 1, le produit $(f(y)-f(x)).(g(y)-g(x))$ est toujours positif ou nul.
En effet, pour x plus petit que y on t la forme « plus fois plus »
et dans l'autre cas c'est moins par moins.

L'intégrale double $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (f(y)-f(x)).(g(y)-g(x)).dy.dx$ est donc positive.

On développe et sépare en quatre termes par linéarité.
On en fait passer de l'autre côté :

$$\int_{x=0}^1 \Big(\int_{y=0}^1 f(y).g(y).dy\Big).dx + \int_{x=0}^1 \Big(\int_{y=0}^1 f(y).g(y).dy\Big).dx \geqslant \int_{x=0}^1 \Big(\int_{y=0}^1 f(y).g(x).dy\Big).dx + \int_{x=0}^1 \Big(\int_{y=0}^1 f(y).g(y).dy\Big).dx$$

Le temps de la preuve, notons H l'application $f \times g$ (c'est $x \longmapsto f(x).g(x)$).
Regardons par exemple $\int_{x=0}^1 \Big(\int_{y=0}^1 H(y).dy\Big).dx$.

Si on décide de noter S le nombre $\int_{y=0}^1 H(y).dy$, on a $\int_{x=0}^1 S.dx = S$.

Passons à $\int_{x=0}^1 \Big(\int_{y=0}^1 H(x).dy\Big).dx$. Chaque intégrale $\int_{y=0}^1 H(x).dy$ vaut $H(x).1$.

L'intégrale $\int_{x=0}^1 \Big(\int_{y=0}^1 H(x).dy\Big).dx$ vaut $\int_{x=0}^1 H(x).dx$ et c'est donc encore S.

Dans $\int_{x=0}^1 \Big(\int_{y=0}^1 f(x).g(y).dy\Big).dx$, on peut sortir $f(x)$ de l'intégrale dite « en y » :

$$\int_{x=0}^1 \Big(\int_{y=0}^1 f(x).g(y).dy\Big).dx = \int_{x=0}^1 f(x).\Big(\int_{y=0}^1 g(y).dy\Big).dx$$

Le réel $\int_0^1 g(t).dt$ ne dépend plus de x, c'est une « constante » qu'on va pouvoir sortir :

$$\int_{x=0}^{1}\Big(\int_{y=0}^{1} f(x).g(y).dy\Big).dx = \Big(\int_{y=0}^{1} g(y).dy\Big).\int_{x=0}^{1} f(x).dx$$

On a trouvé le produit de deux intégrales $\int_{x=0}^{1}\Big(\int_{y=0}^{1} f(x).g(y).dy\Big).dx = \Big(\int_{y=0}^{1} g(y).dy\Big).\Big(\int_{x=0}^{1} f(x).dx\Big)$.
Comme les variables sont muettes, on l'écrit aussi

$$\int_{x=0}^{1}\Big(\int_{y=0}^{1} f(x).g(y).dy\Big).dx = \Big(\int_{0}^{1} g(t).dt\Big).\Big(\int_{0}^{1} f(t).dt\Big)$$

L'intégrale $\int_{x=0}^{1}\Big(\int_{y=0}^{1} f(y).g(x).dy\Big).dx$ se traite de la même façon et donne

$$\int_{x=0}^{1}\Big(\int_{y=0}^{1} f(y).g(x).dy\Big).dx = \Big(\int_{y=0}^{1} f(y).dy\Big).\Big(\int_{x=0}^{1} g(x).dx\Big) = \Big(\int_{0}^{1} f(t).dt\Big).\Big(\int_{0}^{1} g(t).dt\Big)$$

Si on reporte dans l'inégalité à quatre intégrales, on trouve

$$2.\int_0^1 f(t).g(t).dt \geqslant 2.\Big(\int_0^1 f(t).dt\Big).\Big(\int_0^1 g(t).dt\Big)$$

Et comme *é* est positif, on peut simplifier sans changer le sens des inégalités.

Bon, d'accord, pas besoin de l'argument « 2 est positif ».

∘10∘ Un peu de topologie, pour qui veut s'amuser à regarder les étoiles.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On définit intérieur et adhérence (notées aussi $\dot{A}$ et $\overline{A}$) :

$Int(A) = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists \alpha > 0,\ ]a-\alpha,\ a+\alpha[\subset A\}$	$Adh(A) = \{a \in \mathbb{R} \mid \forall \alpha > 0,\ ]a-\alpha,\ a+\alpha[\cap A \neq \emptyset\}$

Montrez : $Int(A) \subset A \subset Adh(A)$.
Montrez qu'un réel a est dans $Adh(A)$ si et seulement si il est limite d'au moins une suite de points de A.
Complétez *(et expliquez pourquoi la colonne $*$ est impossible)* :

A	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$	$[0,\ 1[$	$\mathbb{Z}\cup]3/2,\ 5/2[$		*	
$Int(A)$						$]0,\ 1[$	$[0,\ 1]$	
$Adh(A)$						$[0,\ 2]$	$[0,\ 1]$	

Montrez $In(Int(A)) = Int(A)$ et $Adh(Adh(A)) = Adh(A)$.
Montrez : $Int(A^c) = (Adh(A))^c$ et $Adh(A^c) = (Int(A))^c$.
Montrez : $Int(A) \cap Int(B) = Int(A \cap B)$. Montrez $Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$, et donnez un exemple pour lequel il n'y a pas égalité.

∘11∘ ♡ On dit que α est une **valeur d'adhérence** de la suite u si il existe une sous-suite de u qui converge vers α.
1-) Montrez que toute suite convergente n'a qu'une valeur d'adhérence.
2-) Donnez une suite ayant trois valeurs d'adhérence exactement.
3-) Donnez une suite n'ayant aucune valeur d'adhérence.
4-) Montrez que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite bornée est borné et non vide.
5-) Un élève prétend que si α est valeur d'adhérence de u et β valeur d'adhérence de v, alors $\alpha+\beta$ est valeur d'adhérence de $u+v$. Montrez qu'il a tort *(contre-exemple universel ?)*.
6-) Montrez que si α est valeur d'adhérence de $(u_{2.n})$ alors elle est valeur d'adhérence de (u_n).
♣ Peut on montrer que si α est valeur d'adhérence de (u_n) alors elle est valeur d'adhérence de $(u_{2.n})$ ou de $(u_{2.n+1})$?
Montrez que 0 et 1 sont valeurs d'adhérence de $(\sqrt{n} - [\sqrt{n}])$.
♠ Montrez que la suite $(\sqrt{n} - [\sqrt{n}])$ a une infinité de valeurs d'adhérences.

1-) Montrez que toute suite convergente n'a qu'une valeur d'adhérence.
Si la suite converge, toutes ses sous-suites convergent aussi, mais vers la même limite.
Les seules limites de sous-suites possibles sont donc la limite λ.

2-) Donnez une suite ayant trois valeurs d'adhérence exactement.
Prenons une suite périodique de période 3. Par exemple $\Big(\cos\Big(\frac{2.n.\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\Big)\Big)$.

Chacun des trois réels $\cos\left(\frac{2.n.\pi}{3}+\frac{\pi}{12},\right)\cos\left(\frac{2.n.\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{2.n.\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)$ est limite d'au moins une sous-suite ($(u_{3.n})$, $(u_{3.n+1})$ et $(u_{3.n+2})$).
Aucun autre réel ne peut être valeur d'adhérence.
En effet, si une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers un réel α, alors au moins un des trois ensembles suivants est infini : $\{n \mid \varphi(n) = 0[3]\}$, $\{n \mid \varphi(n) = 1[3]\}$ et $\{n \mid \varphi(n) = 2[3]\}$. Si c'est le premier (sans perte de généralité), on en indexe les éléments par ordre croissante, et la sous-sous-suites $(u_{\varphi(\phi(n))})$ est constante égale à $\cos\left(\frac{2.n.\pi}{3}+\frac{\pi}{12},\right)$.
La seule valeur possible pour α est donc $\cos\left(\frac{2.n.\pi}{3}+\frac{\pi}{12},\right)$ (dans le cas « congru à 0, je vous laisse compléter dans les autres cas).

3-) Donnez une suite n'ayant aucune valeur d'adhérence.
La suite (n) diverge vers $+\infty$. Toutes ses sous-suites divergent donc aussi.
Aucun réel ne peut donc être limite d'une sous-suite.

Abusivement, direz vous que l'infini est sa seule valeur d'adhérence ?

4-) Montrez que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite bornée est borné et non vide.
Si la suite est bornée (disons par M), alors toutes ses sous-suites sont bornées.
Si une certains sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers une valeur d'adhérence λ, alors par passage à la limite dans $\forall n,\ |u_{\varphi(n)}| \leqslant M$, on obtient $|\lambda| \leqslant M$.

De plus, si la suite est bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass assure qu'il y a au moins une sous-suite convergente. C'est à dire une valeur d'adhérence.

5-) Un élève prétend que si α est valeur d'adhérence de u et β valeur d'adhérence de v, alors $\alpha + \beta$ est valeur d'adhérence de $u + v$. Montrez qu'il a tort *(contre-exemple universel ?)*.
Tiens : ($a_n = (-1)^n$ pour tout n et $b_n = (-1)^{n+1}$ pour tout n.
Les deux valeurs d'adhérence de (a_n) sont -1 et 1.
Pareil pour (b_n).
Mais $(a_n + b_n)$ a pour unique valeur d'adéhérence 0 (elle est constante).
Et on n'y retrouve pas $1 + 1$.

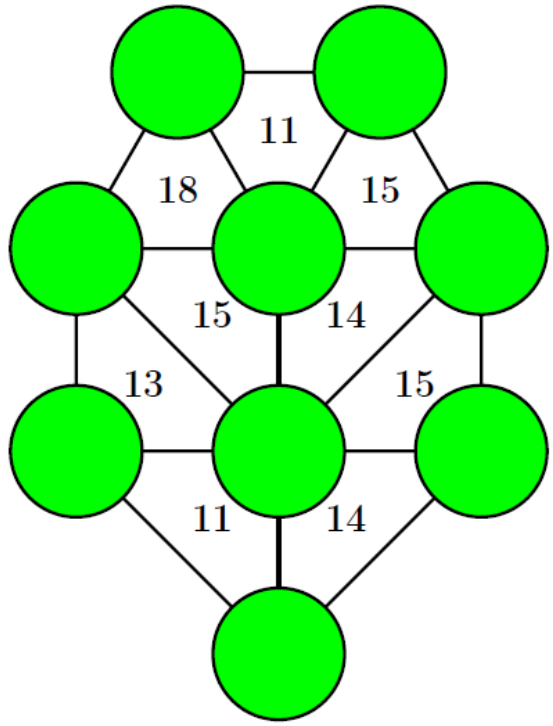
Le problème vient de « une sous-suite de (a_n) qui converge vers α : $(a_{\varphi(n)})$ »
« une sous-suite de (b_n) qui converge vers β : $(b_{\phi(n)})$ ».
Pourquoi aurait on la même extraction ?

6-) Montrez que si α est valeur d'adhérence de $(u_{2.n})$ alors elle est valeur d'adhérence de (u_n).
Si une sous-suite $(u_{2.\varphi(n)})$ converge vers un réel α, alors il suffit de la voir comme sous-suite de (a_n) pour que α soit valeur d'adhérence de (a_n).

On suppose qu'une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers un réel α (ce sera α la valeur d'adhérence de la grande suite).
Mais alors si on pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) = 0[2]\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) = 1[2]\}$, on a $A \cup B = \mathbb{N}$.
Il est impossible que A et B soient de cardinal fini.
L'un au moins est infini.
Si c'est A, on en indexe les éléments par ordre croissant, et on dispose d'une suite de nombres de la forme u_{pair} qui converge vers α. C'est donc une valeur d'adhérence de $(u_{2.p})$.
Si c'est B, on en indexe les éléments par ordre croissant, et on dispose d'une suite de nombres de la forme u_{impair} qui converge vers α. C'est donc une valeur d'adhérence de $(u_{2.p+1})$.

Si on pose $u_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ comme indiqué (partie fractionnaire ou « derrière la virgule »), alors la sous-suite (u_{n^2}) est nulle et converge vers 0.
En revanche $(u_{n^2+2.n})$ converge vers 1.
Pour faire converger vers des réels de $[0,\ 1]$, on prend des (u_{n^2+truc}) et on ajuste *truc* (exercice trouvable sur le TD).

Dans chaque triangle, le nombre écrit à l'intérieur du triangle doit être égal à la somme des nombres inscrits dans les trois cercles qui sont aux sommets du triangle. De plus, les neuf cercles contiennent chacun un des nombres de 1 à 9 sans les répéter. Complète cette figure en plaçant les jetons numérotés dans les cercles.



---

* ♡ On réalise l'expérience suivante :

```
from random import randrange
X = randrange(6) #entier entre 0 et 5, hasard uniforme
Y = randrange(X) #entier entre 0 et x-1
```

Vérifiez : $E(X) = 2,5$. Montrez que sa variance vaut $35/12$. *($Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$)*
Quelle est l'espérance de la variable aléatoire Y.
Quelle est l'espérance du produit $X.Y$?

♡ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$ vérifiant $f(0) = 2$. Résolvez l'équation intégrale d'inconnue x : $\int_0^x f(t).dt = 9$.

∘12∘ ♡ Combien y a-t-il d'applications continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$?

Pour X c'est vite fait, le hasard est uniforme

valeur	0	1	2	3	4	5
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

L'espérance vaut $\dfrac{0+1+2+3+4+5}{6}$ ce qui fait bien $\dfrac{15}{6}$.

Rien de tel ici qu'un tableau pour visualiser les couples (X, Y) possibles. On tire X et ensuite, on tire Y forcément plus petit que X.

Avec quand même un problème pour Python avec probabilité $\dfrac{1}{6}$: randrange(0) va renvoyer une erreur.

Si f est cntinue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$, elle est forcément constante.
En effet,si elle ne l'est pas, elle prend deux valeurs images distinctes α et β en deux abscisses x_0 et x_1.
Mais alors par le théorème des valeurs intermédiaires, elle prend les valeurs (y compris irrationnelles) au moins une fosis entre x_0 et x_1. Et ceci contredit « de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$ ».
Maintenant qu'on la sait constante, on trouve sa valeur en un point, et on intègre la constante.

∘13∘ ♣ On demande de calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{i+t}$.
L'élève Herth-Etpamur écrit $\ln(1+i) - \ln(i) = \ln\left(\dfrac{1+i}{i}\right) = \ln(\sqrt{2}.e^{-i.\pi/4})$ et trouve $\dfrac{\ln(2)}{2} - i.\dfrac{\pi}{4}$. Montrez que sa réponse est bonne *(même si sa méthode est fumeuse)* en pensant à la quantité conjuguée.

Intégrer avec un logarithme complexe est une arnaque. Même si le résultat semble joli.
Mais sinon,

$$\int_0^1 \frac{dt}{i+t} = \int_0^1 \frac{t-i}{1+t^2}.dt = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}.dt - i.\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

et on trouve

$$\int_0^1 \frac{dt}{i+t} = \left[\frac{\ln(1+t^2)}{2}\right]_{t=0}^{t=1} - i.\Big[Arctan(t)\Big]_{t=0}^{t=1}$$

Le plus fort est qu'on a le même résultat !

∘14∘ ♡ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de cette différence de radicaux $\sqrt{n+5} - \sqrt[4]{n^2+3.n+4}$.

On n'écrit pas « limite » tant qu'on n'a pas prouvé l'existence, même si le sujet tend à signifier qu'il y en a une.
On conjugue en une seule fois relativement aux puissances 4 (ce à quoi vous joue au tableau...).

Conseil : | Donnez un nom aux quantités pour ne pas avoir un dénominateur indigeste : $a = \sqrt{n+5}$ et $b = \sqrt[4]{n^2+3.n+4}$

$$\sqrt{n+5} - \sqrt[4]{n^2+3.n+4} = a - b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2.b + a.b^2 + b^3} = \frac{(n+5)^2 - (n^2+3.n+4)}{a^3 + a^2.b + a.b^2 + b^3}$$

Le numérateur est équivalent à $7.n$ et le dénominateur est fait de quatre termes tous équivalents à $n^{3/2}$.
Le quotient tend vers 0. C'est la valeur de la limite cherchée. Et on a un équivalent.

∘15∘ La suite a a pour développement asymptotique $a_n = \ln(n) + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ quand n tend vers l'infini.
Donnez la limite en $+\infty$ de $n.(a_{n+1} - a_n)$.
Bonus : développement de $a_{n+1} - a_n$ jusqu'à $o(1/n^2)$.

∘16∘ Trouvez une primitive de $t \longmapsto t.e^t.\cos(t)$ en intégrant par parties *(mais qui sont les deux parties ?)*.
Dérivez $t \longmapsto \big((a.t+b).\cos(t) + (c.t+d).\sin(t)).e^t\big)$. Retrouvez le résultat précédent avec un peu moins d'efforts.

On a plusieurs possibilités, qui tournent un peu en rond.
On va poser $A = \int^x t.e^t.\cos(t).dt$ et $B = \int^x t.e^t.\sin(t).dt$ puis $C = \int^x e^t.\cos(t).dt$ et $D = \int^x e^t.\sin(t).dt$ car on a deviné que l'on allait croiser les quatre.

$t.\cos(t)$	$\hookrightarrow$	$\cos(t) - t.\sin(t)$	: $A = [e^t.t.\cos(t)] - C + B$
e^t	$\hookleftarrow$	e^t	
$\cos(t)$	$\hookleftarrow$	$\sin(t)$	$A = [t.e^t.\sin(t)] - D - B$
$t.e^t$	$\hookrightarrow$	$e^t + t.e^t$	

On fait de même avec B par parties de deux façons

$t.\sin(t)$	$\hookrightarrow$	$\sin(t) + t.\cos(t)$	: $B = [e^t.t.\sin(t)] - D - A$
e^t	$\hookleftarrow$	e^t	
$\sin(t)$	$\hookleftarrow$	$-\cos(t)$	$B = [-t.e^t.\cos(t)] - C + A$
$t.e^t$	$\hookrightarrow$	$e^t + t.e^t$	

Ce sont les mêmes relations, on n'a rien de plus...

Il faut donc intégrer C et D par parties pour avoir des relations qui les lient ensemble.
On a cette fois $\int^x e^t.\cos(t).dt = \Big[\frac{\cos(t)+\sin(t)}{2}.e^t\Big]^x$ et $\int^x e^t.\sin(t).dt = \Big[\frac{\cos(t)+\sin(t)}{2}.e^t\Big]^x$

On reporte : $\boxed{\int^x t.e^t.\cos(t).dt = \Big[\frac{t.\cos(t) + t.\sin(t) - \sin(t)}{2}.e^t\Big]^x \text{ et } \int^x t.e^t.\sin(t).dt = \Big[\frac{-t.\cos(t) + \cos(t) + t.\sin(t)}{2}.e^t\Big]^x}$

On peut aussi intégrer a priori sous la forme proposée : $t \longmapsto \big((a.t+b).\cos(t) + (c.t+d).\sin(t)).e^t\big)$.

On la dérive et on arrange tous les termes en

$$\begin{array}{cccc} a.t.\cos(t).e^t & +a.\cos(t).e^t & -a.t.\sin(t).e^t & \\ & +b.\cos(t).e^t & & -b.\sin(t).e^t \\ c.t.\cos(t).e^t & & +c.t.\sin(t).e^t & +c.\sin(t).e^t \\ & +d.\cos(t).e^t & & +d.\sin(t).e^t \end{array}$$

On regroupe en on exige : $a + c = 1$, $a + b + d = 0$, $-a + c = 0$ et $-b + c + d = 0$.
On retrouve finalement nos $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{2}$ et 0.

$$\boxed{\int^x t.e^t.\cos(t).dt = \Big[\frac{t.\cos(t) + t.\sin(t) - \sin(t)}{2}.e^t\Big]^x}$$

∘17∘

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24

. BEATTY et WITHOFF .

I∼0) On note $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Calculez $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = [n.\alpha]$ et $b_n = [n.\beta]$ *(parties entières)*. Je vous ai calculé les premiers termes de ces deux suites *(dites de Beatty)* :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_n	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21
b_n	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34

et même si vous préférez

1		3	4		6		8	9		11	12		14		16	17	
	2			5		7			10			13		15			18

I∼1) Justifiez sans calculatrice : $a_{100} = 161$. Calculez b_{100}.
I∼2) Montrez pour tout n : $b_n - a_n = n$.

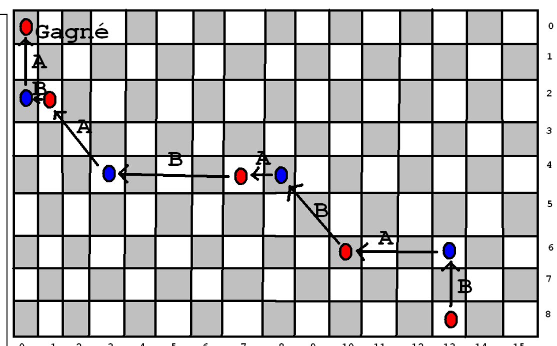
II∼0) On va d'abord montrer que le seul élément commun aux deux suites (a_n) et (b_n) est 0.Pour ce faire, on suppose que n et p sont deux entiers vérifiant $a_n = b_p$. Montrez que les deux réels $n.\alpha - a_n$ et $p.\beta - b_p$ sont entre 0 et 1. Déduisez que $\left(n - \dfrac{a_n}{\alpha}\right) + \left(p - \dfrac{b_p}{\beta}\right)$ est un entier entre 0 et 1. Calculez sa valeur, et déduisez que $n.\alpha - a_n$ est nul. Concluez $n = p = 0$.

II∼1) On se donne un entier naturel N. Montrez que le nombre d'éléments de la suite a dans $[1,\ N]$ est $\left[\dfrac{N+1}{\alpha}\right]$.
Montrez que le nombre d'éléments de la suite b dans $[1,\ N]$ est $\left[\dfrac{N+1}{\beta}\right]$.
Montrez : $\left[\dfrac{N+1}{\alpha}\right] + \left[\dfrac{N+1}{\beta}\right] < N+1 < \left[\dfrac{N+1}{\alpha}\right] + \left[\dfrac{N+1}{\beta}\right] + 2$.
Déduisez : $\forall k \in [1,\ N] \cap \mathbb{N},\ (\exists n \in \mathbb{N},\ k = a_n)\ ou\ (\exists p \in \mathbb{N},\ k = b_p)$. S'agit il d'un ou inclusif ?

II∼2) Montrez que a_n est le plus petit entiers n'appartenant pas à $\{a_k \mid k < n\} \cup \{b_p \mid p < n\}$.

III∼0) On se propose d'utiliser Python pour créer les suites a et b ou même plus précisément la liste A des éléments de a plus petits que N et la liste B des éléments de b plus petits que N :

```
#initialisation et saisies
alpha, beta = (1+sqrt(5))/2, (3+sqrt(5))/2
A, B = [], []
an, bn = 0, 0
N = input('Valeur maximale à atteindre ')
#creation de la liste A
while .... :
....an = ....
....A.append(an)
#creation de la liste B
....
```



Rectifiez, complétez ce qui manque. Complétez par un script qui vérifie que chaque entier de `1` à `N` est présent dans une et une seule des deux listes.

IV∼0) Le jeu de Withoff est le suivant :
• Deux jouent sur un échiquier de taille $N+1$ sur $P+1$ (indexation de 0 à N et de 0 à P).
• Le pion est initialement en $(N,\ P)$.
• Chaque joueur joue à tour de rôle.
• Il peut déplacer son pion en colonne vers le haut *(ordonnée décroissante)*, ou en ligne vers la gauche *(abscisse décroissante)* ou en diagonale vers l'origine *(abscisse et ordonnée décroissante)*.
• Le gagnant est celui qui arrive en $(0,\ 0)$.
Pourquoi B devait il abandonner dès la position notée * ?
Pourquoi B savait il avoir perdu dès la position en $(5,3)$ (et même $(4,\ 7)$) ?

Un exemple de jeu où A choisit la position de départ $(N,\ P)$:

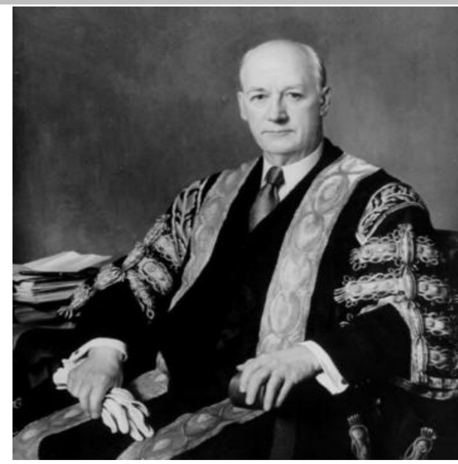
coup de A	coup de B
pose en $(13,\ 8)$	
	vertical en $(13,\ 6)$
horizontal en $(10,\ 6)$	
	diagonal en $(8,\ 4)$
horizontal en $(7,\ 4)$	
	horizontal en $(3,\ 4)$
diagonal en $(1,\ 2)$ *	
	horizontal en $(0,\ 2)$
gagne en $(0,\ 0)$	

Je vous propose de jouer contre moi. Je place le pion en $(25,\ 25)$ et je dis "à vous". Que faites vous ?

On pose $W = \{(a_n,\ b_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(b_n,\ a_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $L = \mathbb{N}^2 - W$ (complémentaire).
Montrez : $\forall (c,\ d) \in L,\ \exists e \in \mathbb{N},\ \Big((c-e,\ d) \in W\ ou\ (c,\ d-e) \in W\ ou\ (c-e,\ d-e) \in W\Big)$.
Montrez $\forall (c,\ d) \in W,\ \forall e \in \mathbb{N},\ \Big((c-e,\ d) \in L\ et\ (c,\ d-e) \in L\ et\ (c-e,\ d-e) \in L\Big)$.

Les suites (a_n) et (b_n). TD23

Les suites de Beatty sont des classiques des mathématiques étonnantes. On prend deux irrationnels vérifiant $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$, on construit les suites $([n.\alpha])$ et $([n.\beta])$. Elles avancent toutes les deux en donnant des entiers. Mais dès que la plus rapide saute au dessus d'un entier, on sait que la plus lente viendra compléter. Chaque entier est atteint par une et une seule des deux suites. On trouve des exercices sur les suites de Beatty à l'oral des écoles de moins de trois lettres. Je pense qu'on en rencontrera en informatique. Et on voit ici qu'on les trouve dans un jeu. Si vous traitez bien cet exercice, vous avez ensuite la possibilité de rouler vos proches, vos amis et vos ennemis au jeu de Witthoff *(à ne pas confondre avec Witloof qui est une variété de chicorée)*. Détail classique en maths : c'est en fait Lord Rayleigh qui a trouvé ce résultat en 1894, avant Samuel Beatty.



Ils étaient mieux habillés avant, les profs de maths

On calcule déjà : $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}+\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}=2.\dfrac{3+\sqrt{5}+1+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5}).(3+\sqrt{5})}=2.\dfrac{4+2.\sqrt{5}}{3+5+4.\sqrt{5}}$.

On a finalement : $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$ Et ça va largement servir par la suite.

Pour calculer a_{100}, on doit donc estimer $[50+50.\sqrt{5}]$.
Un résultat évident : $[n+x]=n+[x]$ pour n entier.

> *En effet, si on pose $[x]=k$, on a $k\in\mathbb{Z}$ et $k\leqslant x<k+1$. On a alors directement $k+n\leqslant x+n<(x+n)+1$. On reconnaît $[n+x]=n+k=n+[x]$.*

On exploite ce résultat évident : $a_{100}=50+[50.\sqrt{5}]$.
On n'écrit surtout pas $a_{100}=50+50.[\sqrt{5}]$, ce serait une ânerie.
On doit donc juste prouver $[50.\sqrt{5}]=111$, ce qui revient à établir $111\leqslant 50.\sqrt{5}<112$.
On écrit $12\,321=(111)^2\leqslant 50^2.5=12\,500<12\,544=(112)^2$.

On reprend dans le bon sens :
on calcule $12\,321=(111)^2\leqslant 50^2.5=12\,500<12\,544=(112)^2$
on passe à la racine sur $\mathbb{R}^+$: $111\leqslant 50.\sqrt{5}<112$
on ajoute : $161\leqslant 50+50.\sqrt{5}<162$
on reconnaît : $161=[50+50.\sqrt{5}]=[100.\alpha]$

Pour b_{100}, c'est plus rapide : $\boxed{b_{100}=[150+50.\sqrt{5}]=150+111=261}$

On regarde le cas général : $b_n=\left[n.\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]=\left[n+n.\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

On utilise encore notre lemme : $b_n=n+\left[n.\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]=n+[n.\alpha]=n+a_n$.

On soustrait : $b_n-a_n=n$ pour tout n.
Il suffit à chaque fois d'en calculer un pour avoir l'autre.

Forme d'injectivité. TD23

On suppose donc que les deux suites coïncident (a priori pour des indices distincts car l'une grimpe plus vite que l'autre) : $a_n=b_p$.
Par définition : $a_n\leqslant n.\alpha<a_n+1$ et $b_p\leqslant p.\beta<b_p+1$ avec a_n et b_p entiers.
On soustrait : $0\leqslant n.\alpha-a_n<1$ et $0\leqslant p.\beta-b_p<+1$.

On a bien deux réels de $[0,\ 1[$ *(ouvert à droite, c'est la subtilité utile pour la suite qui n'est pas dans l'énoncé).*

On divise par α et β strictement positifs : $0 \leqslant n - \dfrac{a_n}{\alpha} < \dfrac{1}{\alpha}$ et $0 \leqslant p - \dfrac{b_p}{\beta} < \dfrac{1}{\beta}$.

On somme : $0 \leqslant \left(n - \dfrac{a_n}{\alpha}\right) + \left(p - \dfrac{b_p}{\beta}\right) < \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$.

On a d'ores et déjà un réel entre 0 et 1 *(et la somme est dans $[0,\ 1[$ d'après les inégalités strictes précédentes).*

On arrange : $n + p - \dfrac{a_n}{\alpha} - \dfrac{b_p}{\beta} = n + p - \dfrac{a_n}{\alpha} - \dfrac{a_n}{\beta}$ car on a supposé $a_n = b_p$. On exploite encore $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$. Ce nombre est l'entier $n + p - a_n$.

Un entier dans $[0,\ 1[$. On n'a pas le choix, c'est 0.

On a donc $\left(n - \dfrac{a_n}{\alpha}\right) + \left(p - \dfrac{b_p}{\beta}\right) = 0$.

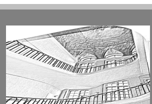
Comme c'est la somme de deux réels positifs, c'est que chacun est nul : $\left(n - \dfrac{a_n}{\alpha}\right) = 0$ et $\left(p - \dfrac{b_p}{\beta}\right) = 0$.

On a donc $a_n = n.\alpha$ et $b_p = p.\beta$.

Si n n'est pas nul, on a alors $\alpha = \dfrac{a_n}{n}$. C'est un rationnel en tant que quotient de deux entiers. C'est contradictoire, puisque ce réel est l'irrationnel $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Par élimination, n est nul. On reporte : $a_0 = 0 = b_p$, et p est aussi nul.

Les deux suites ne se chevauchent jamais.
Il nous manque la "surjectivité" : tout entier est atteint par l'une des suites (et une seule d'après ce qu'on vient de voir).



Surjectivité de la réunion des deux suites. TD23

On se donne N et on cherche les éléments de la suite a dans $[1,\ N]$. Ce sont les $a_n$vérifiant $1 \leqslant a_n \leqslant N$. Comme a_n est une partie entière, cela revient à dire que $n.\alpha$ est entre 1 *(inclus mais pas atteint finalement, par irrationalité)* et $N+1$ *(exclu mais de toutes façons pas atteint).*

On résout donc $1 \leqslant n.\alpha < N+1$ en divisant par α : $\dfrac{1}{\alpha} \leqslant n < \dfrac{N+1}{\alpha}$.

Le réel $1/\alpha$ est entre 0 et 1, l'entier n peut commencer à 1.

La liste des valeurs de n possibles est donc $1,\ 2,\ 3\ldots$ jusqu'au dernier entier avant $\dfrac{N+1}{\alpha}$. C'est $\left[\dfrac{N+1}{\alpha}\right]$.

Avec β, le raisonnement est du même type, avec β à la place de α. On trouve qu'il y a $\left[\dfrac{N+1}{\alpha}\right]$ indices p vérifiant $1 \leqslant b_p \leqslant N$.

On pose pour simplifier la rédaction $p = \left[\dfrac{N+1}{\alpha}\right]$ et $q = \left[\dfrac{N+1}{\beta}\right]$. On traduit : p et q sont des entiers vérifiant $p \leqslant \dfrac{N+1}{\alpha} < p+1$ et $q \leqslant \dfrac{N+1}{\beta} < q+1$. On somme $p + q \leqslant \dfrac{N+1}{\alpha} + \dfrac{N+1}{\beta} < p+q+2$.

Le terme du milieu vaut $N+1$ (toujours par $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$). On a donc $p+q \leqslant N+1 < p+q+2$.

Mais il y a mieux encore : l'inégalité $p \leqslant \dfrac{N+1}{\alpha} < p+1$ est stricte car on ne peut pas avoir $\alpha = \dfrac{N+1}{p}$, puisque c'est un irrationnel. Quand on somme, l'inégalité présentée large est stricte : $p+q < N+1 < p+q+2$.

Dans cet encadrement, tout le monde est entier.

Or, dans $]p+q,\ p+q+2[$, il n'y a qu'un entier, et c'est $p+q+1$.

On déduit $p+q+1 = N+1$ c'est à dire $p+q = N$.

Dans $[1,\ N]$, il y a n entiers. p sont dans la suite a et q sont dans la suite b. Comme les deux suites n'ont aucun élément commun, ces $p+q$ éléments sont distincts. Comme $p+q$ est égal au cardinal de $[1,\ N]$, c'est qu'ils y sont tous.

Tout élément de $[1,\ N]$ est soit dans A *(de la forme a_n avec $n \leqslant p$)*, soit dans B *(de la forme b_m avec $m \leqslant q$)*.
C'est exactement ce que dit $\forall k \in [1,\ N] \cap \mathbb{N},\ (\exists n \in \mathbb{N},\ k = a_n)$ *ou* $(\exists p \in \mathbb{N},\ k = b_p)$.
Et comme les deux listes n'ont aucun élément commun, c'est un ou exclusif.

L'autre caractérisation de a_n. TD23

On se donne un entier n. Les deux listes $[a_0, \dots a_{n-1}]$ et $[b_0, \dots b_{n-1}]$ sont faites d'entiers distincts, avec $b_{n-1} > a_{n-1}$.

Leur réunion ne peut pas faire $[1,\ b_{n-1}]$ par un simple argument de cardinal. Il manque donc des termes.

Parmi les termes qui manquent, il y en a un qui est le plus petit (partie non vide de $\mathbb{N}$). Notons le α.
Il n'a pas été atteint par la liste $[a_0, \dots a_{n-1}]$ ni par la liste $[b_0, \dots b_{n-1}]$. Il faudra pourtant qu'il soit atteint, puisque $\mathbb{N} = \{a_p \mid p \in \mathbb{N}\} \cup \{b_q \mid q \in \mathbb{N}\}$.
Or, si ce n'est pas a_n, alors $a_n$est plus grand que α (plus petit élément non atteint, injectivité des suites). Par croissance, tous les autres a_p $(p \geqslant n)$ seront plus grands que α. Comme la suite b grimpe encore plus vite, c'est perdu aussi.
L'élément α ne sera donc pas atteint, ce qui contredit $\alpha \in \mathbb{N} = \{a_p \mid p \in \mathbb{N}\} \cup \{b_q \mid q \in \mathbb{N}\}$.
L'hypothèse $\alpha \neq a_n$ est donc erronée. C'est donc bien que a_n est le plus petit élément pas encore atteint.

Un exemple ?

On a vu au début

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_n	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21
b_n	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34

On fusionne ensemblistement : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 26, 28, 31, 34\}$. On note l'absence de 22. Seul a_{14} pourra prendre cette valeur : $a_{14} = 22$.
Avec le même raisonnement, au rang suivant, $a_{15} = 24$.

Programme Python. TD23

On complète et on corrige :

```
from math import * #pour pouvoir utiliser sqrt
#initialisation et saisies
alpha, beta = (1+sqrt(5))/2, (3+sqrt(5))/2
A, B = [], []
an, bn = 0, 0
N = int(input('Valeur maximale a atteindre ')) #on veut un entier
#creation de la liste A
while an < N+1 :
....an = an+alpha #calcul de n.alpha
....A.append(int(an)) #partie entière
#creation de la liste B
while bn < N+1 :
....bn = bn+beta #calcul de n.beta
....B.append(int(bn)) #partie entière
```

• Comme on utilise `sqrt`, il faut importer au moins cette application.

• On notera que `(1+sqrt(5))` crée un flottant, donc la division par `2` ne sera pas euclidienne (tandis qu'avec `1/2+sqrt(5)/2` il y a un risque que `1/2` soit arrondi à `0`).

• On doit modifier `N = input('valeur maximale à atteindre ')`
en `N = int(input('valeur maximale a atteindre '))`
pour que la chaîne de caractère lue au clavier soit transformée en nombre entier, comparable aux flottants que l'on crée. On évitera aussi le `à` avec accent grave, à cause des incompatibilités `UFT-8`, `romain` et autres tables de caractères. Cela dit, on ne sanctionne pas là dessus aux concours.

J'ai crée la liste arithmétique des a_n par additions successives. On peut aussi créer un entier :

```
n = 0
while an < N :
....an = int(n*alpha)
....A.append(an)
....n = n+1
```

Il est délicat d'utiliser une boucle `for`, sauf à calculer d'abord le nombre de termes qu'on aura c'est à dire notre `int(N/alpha)+1` des questions sur la surjectivité.

Petit détail d'importance : il est possible que l'erreur d'arrondi sur α et β fasse qu'à partir d'un certain rang on n'ait pas le caractère "bijectif" de recouvrement mentionné dans notre problème.

On veut tester que ces deux suites créent un recouvrement de [0, N].
On a plusieurs possibilités :

• vérifier que la somme des cardinaux vaut `N` et qu'il n'y a aucun élément commun aux deux listes

```
def test(A,B,N) :
....if len(A)+len(B) != N :
........return('Faux')
....for a in A :
........if a in B :
............return False
....return True
```

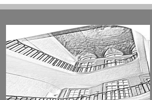
• fusionner les deux listes, trier et voir si c'est `[1, N]`

```
def test(A, B, N) :
....L = A+B
....L.sort()
....return L==range(1, N+1)
```

• on prend un par un les entiers de `1` à `N`, et on regarde si ils sont dans `A` ou dans `B` (*ou* exclusif) ; si l'un d'entre eux est dans les deux ou aucune, on sort ; si à la fin on a fait le tour, on peut répondre `True`.

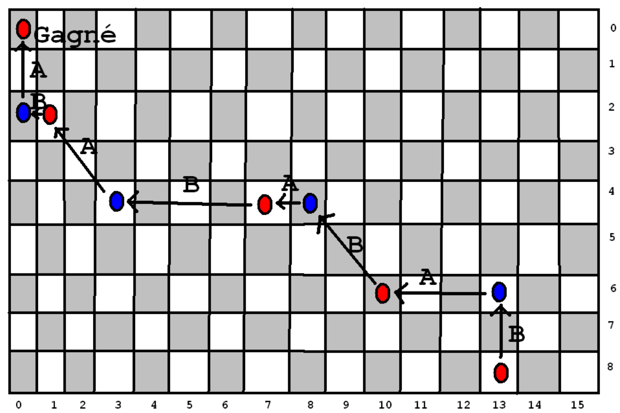
```
def test(A,B, N) :
....for k in range(N+1) :
........kA = k in A #c'est un booléen qui regarde si k est dans A
........kB = k in B #de même, il vaut 0 ou 1
........if kA+kB != 1 : #on teste la négation du ou exclusif
............return False #on sort, un élément est dans aucune (0) ou les deux (2)
....return True
```

Il existe d'autres solutions. C'est d'ailleurs en celà que j'aime l'informatique autant que les mathématiques. Il n'y a pas de "chemin des rois" avec la solution. Chacun peut trouver sa méthode, et parfois on trouve une méthode "jolie". C'est évidemment aussi ce qui déroute et perturbe les élèves qui aimaient les maths pour "je calcule Delta et je fais ce que j'ai toujours fait depuis qu'on me l'a dit dans le cours".



Jeu de Witthof. TD23

On regarde ce qu'il se passe quand B est en $(1,2)$ et doit jouer. On fait un arbre avec les positions disponibles pour le joueur B.



Déjà, il ne peut pas atteindre directement l'origine, que ce soit en diagonale (D), horizontalement (H) ou verticalement (V). Mais il doit bouger :

B joue	H_1 (0,2)	D_1 (0,1)	V_1(1,1)	V_2 (1,0)
A réplique	V_2 (0, 0)	V_1 (0, 0)	D_1 (0, 0)	H_1 (0, 0)

Dans tous les cas, A arrive immédiatement à l'origine.

Non seulement B ne peut pas gagner en un coup, mais il perd immédiatement, quoi qu'il joue...

Montrons que B perd si il est en $(5, 3)$ et a le trait (c'est à dire que c'est à lui de jouer). Déjà, il ne peut rallier directement l'origine, que ce soit en diagonale ou verticalement ou horizontalement.
On dresse un arbre en regardant son jeu :

B joue	H_1 (4,3)	H_2 (2,3)	H_3 (1,3)	H_4 (0,3)	D_1 (4,2)
A répond direct				V_3 (0,0)	
ou va en	D_2 (2,1)	V_2 (2,1)	V_1 (1,2)		H_3 (1,2)
B joue	D_2 (3,1)	D_3 (2,0)	V_1 (5,2)	V_1 (5,1)	V_3 (5,0)
A répond direct		H_2 (0,0)			H_5 (0,0)
ou va en	H_2 (2,1)		H_4 (1,2)	H_3 (2,1)	

Dans plusieurs cas, A gagne directement.
Dans les autres cas, il amène le pion en $(1, 2)$ ou en $(2, 1)$.
dans ces deux cas, il vient d'arriver sur une case qui fait de lui un gagnant comme on l'a vu à la question précédente.
Dans tous les cas, il est gagnant en un ou deux tours de jeu.

Regardons ce qu'il se passe si B prend la main, avec un pion en $(4, 7)$.
Il ne peut pas partir à l'origine directement (en diagonale, il nous faut une position (a, a), horizontalement, il nous faut une $(h, 0)$ et verticalement, il nous haut une $(0, v)$). Il est obligé de bouger :

B joue	H_1 (3,7)	H_2 (2,7)	H_3 (1,7)	H_4 (0,7)	D_1 (3,6)	D_2 (2,5)	D_3 (1,4)	D_4 (0,3)
A riposte		V_6 (2,1)	V_5 (1,2)	V_7 (0,0)		(2,1)	(1,2)	V_3 (0,0)

B joue	V_1 (4,6)	V_2 (4,5)	V_3 (4,4)	V_4 (4,3)	V_5 (4,2)	V_6 (4,1)	V_7 (4,0)	
A riposte				D_2 (2,1)	H_3 (1,2)	H_2 (2,1)	H_4 (0,0)	

Certaines situations sont directement gagnantes car A pose son pion en $(0, 0)$
Chaque situation où A laisse le pion en une position du type $(1, 2)$ ou $(2, 1)$ est gagnante *(si (a, b) est gagnante, par symétrie des rôles, (b, a) l'est aussi)*.

Revenons au jeu de Withloff. Quand on joue, on passe d'une case du type $(a,\ b)$ à une case

$(a - t,\ b)$ *(déplacement horizontal)*	$(a,\ b - t)$ *(déplacement vertical)*	$(a - t,\ a - t)$ *(déplacement diagonal)*

La case $(0, 0)$ est gagnante. On a commencé à donner la liste des cases gagnantes.
Et en fait, les cases gagnantes sont les couples de Beatty $(a_n,\ b_n)$ *(et les symétriques $(b_n,\ a_n)$)*. C'est l'ensemble qu'on a noté W *(comme winner, oui !)*. Le complémentaire est L *(comme looser, yes !)*.

Ce qu'on montre :
• quand vous placez le pion sur une case de type W, quoi que fasse l'adversaire, il arrive sur une case L.
• quand votre adversaire est arrivé sur une case de type L, vous pouvez toujours revenir sur une case de type W.

Ainsi, si vous jouez bien, quoi que joue l'adversaire, les coups sont une alternance $W - L - W - L - W \ldots W$ qui le placent systématiquement sur des cases L et vous amène toujours sur des cases W.

Le passage d'un type de case à l'autre est l'objet des deux questions

$$\forall (c,\ d) \in L,\ \exists e \in \mathbb{N},\ \Big((c - e,\ d) \in W \text{ ou } (c,\ d - e) \in W \text{ ou } (c - e,\ d - e) \in W \Big)$$

$$(c,\ d) \in W,\ \forall e \in \mathbb{N},\ \Big((c-e,\ d) \in L\ et\ (c,\ d-e) \in L\ et\ (c-e,\ d-e) \in L \Big)$$

Je vous l'offre en anglais, comme le rédige Ross Honsberger dans le livre "Ingenuity in mathematics".

Let $(a_n,\ b_n)$ be a given pair in W. After a permissible move, one of the following pairs may result :

1- $(a_n-,\ b_n)$	2- $(a_n,\ b_n - t)$	3- $(a_n - t,\ b_n - t)$

Pairs of the form 1 and 2 are not in W because each contains a number belonging to the n-th par, and every positive integer occurs in one and only one pair of W ; e.g. if $b_n$occurs in $(a_n,\ b_n)$ it cannot occur in any other winning position.

A pair of the form 3 is not in W, because only the n^{th} pair $(a_n,\ b_n)$ of W has members differing by n. But $(a_n - t,\ b_n - t)$ is not the n^{th} pair $(t \neq 0)$, yet its member differ by n.

We conclude that all positions obtainable from a position W by a permissible move are outside the set W.

Next, suppose a pair $(c,\ d)$ is not in W. We shall show that we can determinate a number s such that at least one of the pairs

1- $(c-s,\ d)$	2- $(c,\ d-s)$	3- $(c-s,\ d-s)$	is in W.

In case $c = d$, choose $s = c = d$ and arrive at the ultimate winning position $(0,\ 0)$ in one move : $(c-s,\ d-s) = (0,\ 0)$.
Suppose $c \neq d$ then, name the numbers so that $c < d$. Now every positive integer is in exactly one of the Beatty sequences, so for the integer c, either

I : $c = a_k$ for some k	II : $c = b_l$ for some l

i.e. c belongs to one of the winning positions

I : $(c,\ b_k) = (a_k,\ b_k)$	II : $(a_l,\ c) = (a_l,\ b_l)$

Case I . If $b_k < d$, set $s = d - b_k$ and move to $(c,\ d-s) = (a_k,\ b_k)$ in W.
If $d < b_k$, then $c < d < b_k$ implies $0 < d - c < b_k - c = k$.
Calculate the positive integer $n = d - c$; by the inequality, $n < k$. Set

$$\begin{array}{lllll} s & = & c & -a_n & (> 0\ since\ a_k > a_n) \\ s & = & c & -(b_n - n) & (property\ of\ the\ Beatty\ sequence) \\ s & = & c & -b_n + (d-c) & (definition\ of\ n) \\ s & = & d & -b_n & \end{array}$$

Move to $(c-s,\ d-s) = (a_n,\ b_n)$ in W.

Case II. In this case it follows that $a_l < d$ because $a_l < b_l$ for all l, and $b_l = c < d$ by hypothesis. Set $s = d - a_l$,and move to $(c,\ d-s) = (b_l,\ a_l)$ in W.
We conclude that there is always a permissible move which brings a non-winning pair into a winning pair.

∘18∘ Comparez $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\lim\limits_{N\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^N \right)$, $\lim\limits_{N\to+\infty} \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^N \right)$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

pour tout n dans $\mathbb{N}^*$	pour tout N dans $\mathbb{N}^*$	pour tout n
$\lim\limits_{N\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^N = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^N = 1^N = 1$	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(\dfrac{\ln(1+a) - \ln(1)}{a}\right)$
puis n tend vers $+\infty$	puis N tend vers $+\infty$	avec $a = \dfrac{1}{n}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\lim\limits_{N\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^N \right) = +\infty$	$\lim\limits_{N\to+\infty} \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^N \right) = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

Comme quoi l'ordre dans lequel les variables partent vers l'infini est important.

Et d'autre part 1^∞ est une forme indéterminée (mal écrite évidemment).
Il faut revenir à la définition par exmponentielles.
Et on rappelle $\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$ converge vers e^a quand n tend vers l'infini.

◦19◦

Montrez pour tout n : $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}.\frac{(-1)^{k-1}}{k} = -\int_0^1 \frac{(1-t)^n-1}{t}.dt = \int_0^1 \frac{x^n-1}{x-1}.dx = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ (noté H_n).

Déduisez : $\sum_{n=1}\frac{H_n}{n} = e.\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p.p!}$.

◦20◦

Un élève dont je tairai le prénom (même si de toutes façons il pourrait s'en tirer en disant « bah, on est deux à avoir le même prénom ») a écrit $\frac{\ln(a)}{\ln(b)} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ dans le cadre d'un exercice.

Bon quand même, pour $a = 2$, il y a un b pour lequel c'est vrai.Prouvez le.
Trouvez les a pour lesquels il existe au moins un b pour lequel c'est vrai.

Pour $a = 2$, ceci revient à trouver b vérifiant $\ln(2) = \ln(b).(\ln(b) - \ln(2))$.

L'équation du second degré d'inconnue $\ln(b)$ a deux solutions : $\frac{\ln(2) + .\sqrt{\ln(2).(4+\ln(2))}}{2}$ et $\frac{\ln(2) - \sqrt{\ln(2).(4+\ln(2))}}{2}$.
On trouve deux valeurs de b.

◦21◦

Trouvez le reste (et juste le reste) de la division euclidienne de $X^n + 1$ par $X^2 - 3.X + 2$, en donnant à X des valeurs particulières bien choisies.

On imagine la division :

$$X^n + 1 = (X^2 - 3.X + 2).Q(X) + a.X + b$$

avec a et b à déterminer. On calcule en 1 et en 2 :

$$1^n + 1 = (1^2 - 3.1 + 2).Q(1) + a + b,\ 2^n + 1 = (2^2 - 3.2 + 2).Q(2) + 2.a + b$$

On trouve un petit système rapide à résoudre : $\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 2 \\ 2.a & + & b & = & 2^n+1 \end{array}\right|$.
Sans effort : $a = 2^n - 1$ et $b = 3 - 2^n$. On écrit la formule définitive

$$X^n + 1 = (X^2 - 3.X + 2).Q(X) + (2^n - 1).X + 3 - 2^n$$

On vérifie pour n égal à 0 : $1+1 = (X^2 - 3.X + 2).0 + (1-1).X + 3 - 1$ *et* $X+1 = (X^2 - 3.X + 2).0 + (2-1).X + 3 - 2$

Autre approche :

$$\frac{X^n + 1}{(X-1).(X-2)} = Q(X) + \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X-2}$$

et on calcule α et β par la méthode des pôles

$$\frac{X^n + 1}{(X-1).(X-2)} = Q(X) + \frac{2}{X-1} + \frac{2^n+1}{X-2}$$

$$\frac{X^n + 1}{(X-1).(X-2)} = Q(X) + \frac{2.(X-2) + (2^n+1).(X-1)}{(X-1).(X-2)}$$

Il ne reste plus qu'à multiplier par $X^2 - 3.X + 2$.

◦22◦

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné admettant un plus grand élément μ. On suppose que toute partie non vide de E a un plus petit élément. Montrez que toute partie de E a une borne supérieure.

◦23◦

Montrez toute suite réelle monotone est de signe constant à partir d'un certain rang.
Montrez que si (a_n) et (b_n) sont monotones, alors $(a_n \times b_n)$ ne l'est pas forcément.
Un élève affirme « oui, mais si (a_n) et (b_n) sont monotones, alors à partir d'un certain rang, les deux restent de signe constant, leur produit est alors de signe constant, et en multipliant membre à membre les inégalités, leur produit est monotone ». Vrai ou Faux ?
Non, pas « Vraiou faux, l'élève a-t-il fit ça », mais « vrai oufaux, ce que dit l'élève est correct ».

∘24∘

Un réel α est pétillant si pour tout n de $\mathbb{N}^*$ l'entier $[\alpha^{(2^n)}]+2$ est un carré parfait.
Montrez qu'aucun entier α ne pétille.
Montrez que aucun réel de $[0,\ 1]$ ne pétille.
Montrez que si α pétille, alors α^2 pétille aussi

k est un entier naturel non nul. On définit la suite u par $u_1=(1+k)^2$ et $u_{n+1}=(u_n-1)^2$. MOntrez que (u_n) est croissante, plus grand que 3.
Pour tout n, on pose $a_n = \sqrt[2^n]{u_n-2}$ et $b_n = \sqrt[2^n]{u_n-1}$. Montrez que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones.
Déduisez que (a_n) converge vers un réel αde $[k,\ k+1[$.
Montrez pour tout n : $(a_n)^{2^n} < (\alpha)^{2^n} < (b_n)^{2^n}$ et déduisez que α est pétillant.

Aucun entier α ne pétille.
Si α est entier, alors α^{2^n} est entier. Et c'est même un carré parfait (celui de $\alpha^{2^{n-1}}$).
Et si on ajoute 2 à un carré, on n'a plus un carré.

En effet, si c^2 est un carré, c^2+2 est strictement entre c^2 et $c^2+2.c+1$, deux carrés consécutifs.

Aucun réel de $[0,\ 1]$ ne pétille.
Si αest entre 0 et 1 alors α^{2^n} y est aussi, et sa partie entière vaut 0 (ou 1 dans le cas $\alpha=1$). Et $0+2$ n'est pas un carré.

$1+2$ non plus, mais de toutes façons le cas des entiers a déjà été traité, $\alpha=1$ ne pétille pas.

Si α pétille, alors α^2 pétille aussi
En effet, si chaque $[\alpha^{2^n}+2]$ est un carré, alors chaque $[\alpha^{2^{n+1}}+2]$ l'est aussi (variable muette).
Et il s'agit ici de $[(\alpha^2)^{2^n}+2]$. Comme ceci est vrai pour tout n, α^2 est à son tour pétillant.

Corolaire : en mettant en boucle, si il y a un nombre pétillant, son carré, le carré de son carré et ainsi de suite sont aussi pétillants.
Il y a alors une infinité de nombres pétillants.
Donc : soit aucun, soit une infinité.

$u_1=(1+k)^2$ et $u_{n+1}=(u_n-1)^2$. Par récurrence immédiate, chaque u_n est un entier.
u_1 est plus grand que 3 par choix de k.
Si pour un n donné $u_n$est plus grand que 3 alors u_n-1 est plus grand que 2 et son carré est plus grand que 4. Donc plus grand que 3.
L'hérédité est établie.

Ensuite, on calcule $u_{n+1}-u_n=(u_n)^2-3.u_n+1=u_n.(u_n-3)+1$.
Comme $u_n$est plus grand que 3, le produit $u_n.(u_n-3)$ est positif, et la différence $u_{n+1}-u_n$l'est aussi.
La suite est croissante.

$a_n = \sqrt[2^n]{u_n-2}$ et $b_n = \sqrt[2^n]{u_n-1}$ existent. Et par construction, on a $a_n \leqslant b_n$.

On se donne n et on doit comparer $a_n = \sqrt[2^n]{u_n-2}$ et $a_{n+1} = \sqrt[2^{n+1}]{u_{n+1}-2}$. Comme ce sont des réels positifs, comparons leurs puissances avec le même exposant : 2^{n+1}

$$(a_n)^{2^{n+1}} = \left((u_n-2)^{1/2^n}\right)^{2^{n+1}} = (u_n-2)^{2^{n+1}/2^n} = (u_n-2)^2$$

$$a_{n+1} = \left(\sqrt[2^{n+1}]{u_{n+1}-2}\right)^{2^{n+1}} = u_{n+1}-1 = (u_n-1)^2-2$$

On calcule donc une différence :

$$(a_{n+1})^{2^{n+1}}-(a_n)^{2^{n+1}} = (u_n-1)^2-2-(u_n-2)^2 = (u_n)^2-2.u_n+1-2-(u_n)^2+4.u_n-4$$

On simplifie et il reste $2.u_n-3$. C'est positif. La suite (a_n) est croissante.

On mène le même type de calculs pour (b_n) :

$$(b_{n+1})^{2^{n+1}}-(b_n)^{2^{n+1}} = (u_n-1)^2-1-(u_n-1)^2 = (u_n)^2-2.u_n+1-2-(u_n)^2+2.u_n-1$$

Cette fois, la différence est négative. la suite (b_n) décroit.

Grand classique :

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$$

La suite (a_n) est croissante majorée (par b_1), elle converge.
La suite (b_n) est décroissante minorée (par a_1), elle converge.

En notant α la limite de la suite (a_n) et β la limite de la suite (b_n) (rien ne les force à ce stade à être égales), on a par passage à la limite dans

$$a_n \leqslant a_{n+p} \leqslant b_{n+p} \leqslant b_n$$

on a $a_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_n$ (oui, c'est p qui est parti à l'infini).

L'encadrement large au possible $a_1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_1$ permet de cerner α entre b et $b+1$.

Pour tout n, on avait :

$$a_n < \alpha < b_n$$

On passe à la puissance 2^n (croissance)

$$(a_n)^{2^n} < (\alpha)^{2^n} < (b_n)^{2^n}$$

On revient aux définition

$$(u_n - 2) < (\alpha)^{2^n} < (u_n - 1)$$

Comme $u_n - 1$ est un entier, on déduit $[\alpha^{2^n}] = u_n - 2$.
On ajoute 2 : $[\alpha^{2^n}] + 2 = u_n$.
Mais u_n est le carré de $u_{n-1} - 1$ (construction de la suite).
$[\alpha^{2^n}] + 2$ est un carré. Pour tout n. C'est donc que notre nombre est pétillant.

Il y a donc au moins un entier pétillant dans chaque intervalle$[k,\ k+1]$ et on a un moyen de le « construire ».

Avec des guillemets car c'est la limite d'une suite.

On peut, pour la plaisir même écrire un script Python.

Je trouve ainsi que 4.896849955310805 doit être pétillant.
Et aux erreurs d'arrondis près, les nombres suivants sont des carrés parfaits

[25, 576, 330625, 109312229377, 11949163490932621836290, 142782508133037097454211720301427084257918978]

Source : concours général 2023.

◦25◦

Soit (a_n) une suite croissante admettant une sous-suite $(a_{\varphi(n)})$ décroissante. Montrez que (a_n) est constante à partir d'un certain rang.

La suite (a_n) est croissante. La sous-suite $(a_{\varphi(n)})$ est donc aussi croissante, par extraction.
Mais comme on la suppose aussi décroissante, elle est donc constante.
Notons C la valeur commune de tous les $c_{\varphi(n)}$.
L'objectif est alors de montrer que tous les a_k sont égaux à C à partir d'un certain rang. Quel rang ? Disons $\varphi(0)$.

On se donne un entier k quelconque plus grand que $\varphi(0)$. On l'encadre : $\varphi(0) \leqslant k \leqslant \varphi(k)$.
Mais par croissance, on a donc $C = a_{\varphi(0)} \leqslant a_k \leqslant a_{\varphi(k)} = C$.
Par antisymétrie de l'ordre : $a_k = C$.

◦26◦

♡ Étudiez la convergence de la suite $((-1)^n.(4.n^2 + 2.n + 1))$, de sa moyenne de Cesàro, de la moyenne de Cesàro de sa moyenne de Cesàro, et ainsi de suite.
Encore une fois un conseil (mais comme vous vous obstinez à croire que les maths sont des formules et du calcul, ne le lisez pas et retournez passer le bac) *: calculez déjà les premiers termes.*

Calculons les premiers termes de la suite, de sa moyenne et de la moyenne de sa moyenne...

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	-7	21	43	73	111	157	211
Cesàro	1	-3	5	-7	9	-11	13	-15
Cesàro de Cesàro	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

	a diverge
Aurait on une suite a telle que	sa moyenne diverge c'est $(-1)^n.(2.n+1))$
	la moyenne de sa moyenne diverge (c'est $((-1)^n)$
	la moyenne de la moyenne de sa moyenne converge (vers 0)

On démontre alors par récurrence les formules : $c_n = (-1)^n.(2.n+1)$.
C'est initialisé ci dessus.
On suppose, pour un n donné quelconque :

$$\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.(4.k^2+2.k+1) = (-1)^{n-1}.(2.n-1)$$

On passe au rang suivant :

$$\frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(4.k^2+2.k+1) = \frac{1}{n+1}.\Big((-1)^n.(4.n^2+2.n+1)+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.(4.k^2+2.k+1)\Big)$$

On remplace grâce l'hypothèse :

$$\frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(4.k^2+2.k+1) = \frac{1}{n+1}.\Big((-1)^n.(4.n^2+2.n+1)+n.(-1)^{n-1}.(2.n-1)\Big)$$

On factorise :

$$\frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(4.k^2+2.k+1) = \frac{1}{n+1}.\Big((-1)^n.(4.n^2+2.n+1-2.n^2+n)\Big)$$

On simplifie :

$$\frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(4.k^2+2.k+1) = \frac{1}{n+1}.\Big((-1)^n.(2.n^2+3.n+1\Big)$$

On factorise :

$$\frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(4.k^2+2.k+1) = \frac{(-1)^n}{n+1}.(n+1).(2.n+1)$$

On simplifie :

$$\frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(4.k^2+2.k+1) = (-1)^n.(2.n+1)$$

C'était la formule attendue.

Cet exercice est une belle récurrence, niveau Sup. C'est le type de travail qu'on attend de vous en MP et en PSI pour réussir à la base. Et après, il y aura aussi des théorèmes évidemment, mais ce type d'exercice est un bon début.

Je vous laisse montrer ensuite $\frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(2.k+1) = (-1)^n$.

Ce que je cache derrière cet exercice : des ensembles emboités les uns dans les autres :
A_0 *: les suites convergentes*
A_1 *: les suites convergentes ou non mais dont la moyenne de Cesàro converge*
A_2 *: les suites qui ne convergent pas forcément mais dont la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro converge*
et ainsi de suite.
Le théorème « si une suite converge, alors sa moyenne converge vers la même limite » dit : $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \ldots$.

∘27∘

♠ Soient u et v deux suites. On suppose que $u.v$ tend vers 0 à l'infini. Montrez par un contre-exemple qu'on ne peut pas en déduire que u ou v tend vers 0 à l'infini.
On veut montrer qu'il existe une sous-suite de u ou une sous-suite de v qui tend vers 0 à l'infini. Montrez qu'il existe N_0 vérifiant $|u_{N_0}.v_{N_0}| \leqslant 1$. Montrez qu'il existe N_1 plus grand que N_0 vérifiant $|u_{N_1}.v_{N_1}| \leqslant 1/4$. Montrez qu'il existe N_2 plus grand que N_1 vérifiant $|u_{N_2}.v_{N_2}| \leqslant 1/16$. Montrez l'existence d'une suite croissance (N_n) vérifiant $|u_{N_n}.v_{N_n}| \leqslant 1/4^n$. On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_{N_n}| \leqslant 1/2^n\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid |v_{N_n}| \leqslant 1/2^n\}$. Montrez : $A^c \cap B^c = \emptyset$. Déduisez $A \cup B = \mathbb{N}$. Déduisez que A ou B est infini. Concluez.

Prenons la suite $(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ldots)$ et son « complément » $(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0\ldots)$.
Aucune ne tend vers 0, mais leur produit converge vers 0 (il est carrément nul).

On suppose que $(u_n.v_n)$ converge vers 0. On traduit : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists R_\varepsilon,\ \forall n \geqslant R_\varepsilon,\ |u_n.v_n| \leqslant \varepsilon$.
En particulier (pour ε), à partir du rang R_1 on a $|u_n.v_n| \leqslant 1$.
En particulier (pour n) on a $|u_{R_1}.v_{R_1}| \leqslant 1$. On posera donc $N_0 = R_1$.

On recommence avec $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$. A partir du rang $R_{1/4}$ on a la majoration $|u_n.v_n| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
Quel n choisir alors pour avoir non seulement $N_1 > N_0$ mais aussi $N_1 \geqslant R_{1/4}$?
Tout simplement $Max(R_{1/4},\ N_1 + 1)$.

Supposons construits les indices croissants $N_0 < N_1 < \ldots < N_n$ vérifiant $|u_{N_k}.v_{N_k}| \leqslant \frac{1}{4^k}$ pour tout k de 0 à n.
On sait qu'à partir du rang $R_{1/4^{n+1}}$ on a $|u_p.v_p| \leqslant \dfrac{1}{4^{n+1}}$. Mais on veut un rang plus grand que N_n.
On va donc choisir $N_{n+1} = Max(R_{1/4^{n+1}},\ N_n + 1)$.

Les ensembles $A = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_{N_n}| \leqslant 1/2^n\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid |v_{N_n}| \leqslant 1/2^n\}$ sont des ensembles d'entiers.
On a aussi $A^c = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_{N_n}| > 1/2^n\}$ et $B^c = \{n \in \mathbb{N} \mid |v_{N_n}| > 1/2^n\}$.
On poursuit avec $A^c \cap B^c = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_{N_n}| > 1/2^n\ et\ |v_{N_n}| > 1/2^n\}$.
S'il y avait un entier n dans cet ensemble, il vérifierait $|u_{N_n}| > \dfrac{1}{2^n}$ et $|v_{N_n}| > \dfrac{1}{2^n}$ puis par produit entre réels positifs $|u_{N_n}.v_{N_n}| > \dfrac{1}{4^n}$.
Et par construction de la suite des indices (N_n) ceci est impossible.

On retient l'idée : si le produit de deux nombres est petit, alors au moins un des deux est petite.
Ce peut être les deux. Mais il se peut qu'il y en ait un « grand » mais alors l'autre est « très petit ».
Et en fait, l'idée est « si $a.b < \varepsilon$ alors $a \leqslant \sqrt{\varepsilon}$ ou $b \leqslant \sqrt{\varepsilon}$.
Et il suffit de raisonner par contraposée.

On passe au complémentaire par les lois de Morgan :

$$A^c \cap B^c = \emptyset\ donc\ (A \cup B)^c = \emptyset\ puis\ (A \cup B) = \mathbb{N}$$

Et vous savez quoi ? Si leur réunion fait $\mathbb{N}$ alors l'un au moins est infini (contraposée là encore).

Sans perte de généralité, on va dire que A est infini.

Il existe une infinité d'entiers n vérifiant $|u_{N_n}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

On indexe ces entiers par ordre croissant, et on a une sous-sous-suite $(u_{N_{\varphi(n)}})$ vérifiant $\forall n,\ |u_{N_{\varphi(n)}}| \leqslant \dfrac{1}{2^{\varphi(n)}}$.
Par encadrement, cette sous-suite de (a_p) tend vers 0.

∘28∘

Montrez que si a est une suite d'entiers naturels strictement positifs, croissante, non constante égale à 1, alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k}$ converge. Montrez que la limite est rationnelle si la suite (a_n) est stationnaire.

On regarde ici ce qu'on appelle une série de Engel.
La suite est faite d'entiers strictement positifs. Aucun dénominateur $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k$ ne va s'annuler.

La suite n'est pas constante égale à 1. Il existe donc au moins un terme a_{n_0} strictement plus grand que 1.
Mais alors, à partir du rang n_0 tous les termes sont plus grands que a_{n_0}.
dans le produit, on peut donc minorer par $(a_{n_0})^{truc}$.
Proprement, pour n plus grand que n_0

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = \Big(\prod_{k=0}^{n_0-1} a_k\Big).\Big(\prod_{k=n_0}^{n} a_k\Big) \geqslant \Big(\prod_{k=0}^{n_0-1} a_k\Big).\Big(\prod_{k=n_0}^{n} a_{n_0}\Big) = \Big(\prod_{k=0}^{n_0-1} a_k\Big).(a_{n_0})^{n-n_0+1}$$

Pour me simplifier la vie, je pose $A = \Big(\prod_{k=0}^{n_0-1} a_k\Big).(a_{n_0})^{-n_0+1}$ (que je qualifie de constante car il ne dépend pas de n)
et j'ai $\prod_{k=0}^{n} a_k \geqslant A.(a_{n_0})^n$.
Je passe à l'inverse $\frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} \leqslant \frac{1}{A.(a_{n_0})^n}$. Je reconnais une série géométrique de raison $\frac{1}{a_{n_0}}$.
La série à termes positif $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k}$ est croissante avec N. On va la majorer pour la faire converger.
On somme avec N plus grand que n_0

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} + \sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} + \frac{1}{A}.\sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{(a_{n_0})^n}$$

On effectue la somme et on majore

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} + \frac{1}{A}.\frac{\frac{1}{(a_{n_0})^{-n_0}} - \frac{1}{(a_{n_0})^{-N}}}{1-\frac{1}{a_{n_0}}}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} + \frac{1}{A}.\frac{\frac{1}{(a_{n_0})^{-n_0}}}{1-\frac{1}{a_{n_0}}}$$

Le joli majorant du membre de droite ne dépend pas de N. C'est un majorant.

La série croissante majorée converge.

Tout devient facile si la suite est constante à partir du rang n_0. Nos inégalités sont alors des égalités dans tout ce qui précède

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} + \frac{1}{A}.\frac{\frac{1}{(a_{n_0})^{-n_0}} - \frac{1}{(a_{n_0})^{-N}}}{1-\frac{1}{a_{n_0}}}$$

et en sommant tout

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k} + \frac{1}{A}.\frac{\frac{1}{(a_{n_0})^{-n_0}}}{1-\frac{1}{a_{n_0}}}$$

Les sommes et produits finis du membre de droite donnent un rationnel.

Mais on ne trouve sa valeur simple.

◦29◦

♡ On a bien sûr $(n+1) \sim_{n\to+\infty} n$. A-t-on $\sin(n+1) \sim_{n\to+\infty} \sin(n)$? A-t-on $\ln(n+1) \sim_{n\to+\infty} \ln(n)$? A-t-on $\exp(n+1) \sim_{n\to+\infty} \exp(n)$? A-t-on $Arctan(n+1) \sim_{n\to+\infty} Arctan(n)$? A-t-on $\sqrt{n+1} \sim_{n\to+\infty} \sqrt{n}$? A-t-on $\sqrt[n+1]{n+1} \sim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$? A-t-on $(n+1)^{n+1} \sim_{n\to+\infty} (n)^n$? A-t-on $(n+1)! \sim_{n\to+\infty} n!$?

◦30◦

Créez une classe où soixante pour cent des filles sont anglicistes et ou trente cinq pour cent des anglicistes sont des garçons.

Comme rien n'est précisé, on va dire qu'on a deux découpages : garçons/filles d'une part, anglicistes/germanistes de l'autre (tant pis pour les hispanophones ou autres).

On note les quatre effectifs et on traduit les deux informations :

	garçons	filles
anglicistes	a	b
germanophones	c	d

soixante pour cent des filles sont anglicistes	trente cinq pour cent des anglicistes sont des garçons
(tableau : garçons / filles ; anglicistes : a, b ; germanophones : c, d)	(tableau : garçons / filles ; anglicistes : a, b ; germanophones : c, d)
$\dfrac{b}{b+d} = \dfrac{60}{100}$	$\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{35}{100}$

On n'a donc que deux équations : $3.d = 2.b$ et $13.a = 7.b$.

On peut donc choisir c comme on veut, sans influence sur le reste, puis par exemple $b = 39$ pour avoir des effectifs entiers :

	garçons	filles	
anglicistes	21	39	60 anglicistes
germanophones	c	26	
		65 filles	

On vérifie : pourcentage d'anglicistes parmi les filles $\dfrac{39}{65} = \dfrac{3}{5} = \dfrac{60}{100}$

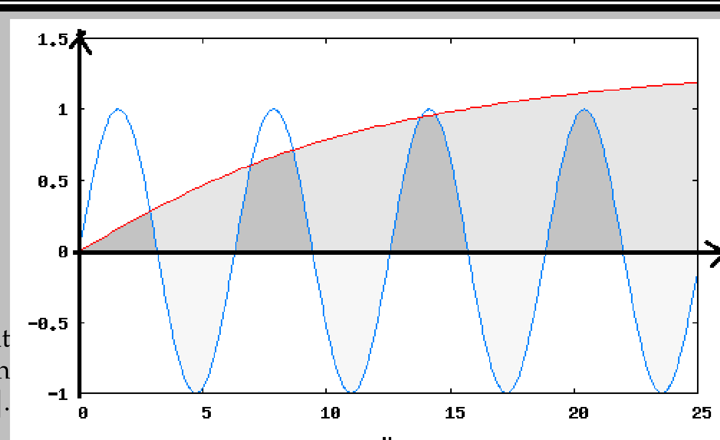
et pourcentage de garçons parmi les anglicistes : $\dfrac{21}{60} = \dfrac{7}{20} = \dfrac{35}{100}$.

Et il peut y avoir trois mille garçons germanophones, ça ne changerait rien aux informations initiales.

◦31◦

Soit $E, \leqslant$ un ensemble ordonné. Montrez que toute partie de E admet un élément maximal si et seulement si toute suite croissante de E est stationnaire (c'est à dire « constante à partir d'un certain rang »). Montrez que c'est le cas pour $(\mathbb{Z}, \leqslant)$.

◦32◦

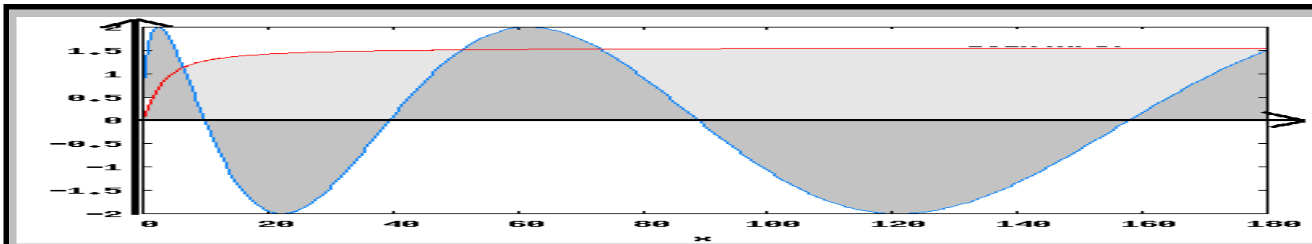


λ est un réel strictement positif donné. Pour tout n, on note u_n le nombre de solutions de l'équation $\sin(x) = Arctan(x/\lambda)$ dans l'intervalle $[0,\ n]$. Montrez que la suite (u_n) converge.

Le sinus reste borné, majoré par 1, l'arctangente tend vers $\pi/2$. Il finit donc par dépasser le sinus.

Plus précisément, quand n dépasse $\dfrac{4.\lambda}{\pi}$, l'arctangente dépasse 1 et il n'y a pas de nouvelle racine. La suite (u_n) qui les compte devient stationnaire, donc convergente.

Sur notre exemple, la suite (u_n) est (1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 6,...).



Pour tout n, on note v_n le nombre de solutions de l'équation $2.\sin(\sqrt{x}) = Arctan(x/\lambda)$ dans l'intervalle $[0,\ n]$.
Montrez que la suite (v_n) diverge.
Non, s'il vous plait, on ne se lance pas dans des calculs, c'est des maths. On réfléchit d'abord.

Cette fois, le nombre de solutions va tendre vers l'infini.

∘33∘

On note $(E, +, ., \times)$ l'algèbre des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$. Deux suites a et b sont dites voisines si la moyenne de Cesàro de leur différence tend vers 0 à l'infini. Montrez qu'on définit ainsi une relation d'équivalence.
Indiquez pour les suites suivantes si elles sont équivalentes et/ou voisines de la suite (n^2) :

(n^2+n)	$(n^2+n.\ln(n))$	$\left(\dfrac{n^3+\ln(n+1)}{n+1}\right)$	$(n.\ln(n+1))$	$(2.n^2+n)$

Montrez que deux suites stationnaires *(c'est à dire "constantes à partir d'un certain rang")* sont voisines si et seulement si elles ont la même limite.
Un élève prétend qu'une suite a est voisine de la suite constante égale à 1 si et seulement si elle converge vers 1. A-t-il raison ?

Deux parties A et B de $\mathbb{N}$ sont dites "de même masse" si leurs fonctions indicatrices sont deux suites voisines. Montrez qu'on définit ainsi une relation d'équivalence sur $P(\mathbb{N})$.
Montrez que les ensembles finis ont tous la même masse.
Montrez que l'ensemble $\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ a la même masse que les ensembles finis.
Montrez que si A et B sont des parties de $\mathbb{N}$ de même masse, alors A^c et B^c ont la même masse.
Montrez que l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs ont la même masse, mais n'ont pas la même masse que $\mathbb{N}$.
Montrez que l'ensemble A des nombres qui sont multiples de 2 ou de 3 a la même masse que l'ensemble B des nombres qui ne sont pas multiples de 3.
Écrivez une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne deux booléens $(1_A(n),\ 1_B(n))$ pour les deux parties A et B définies ci dessus.

∘34∘

♡ Montrez que la réunion de deux segments n'est pas forcément un segment.
Montrez que la réunion de deux segments ayant un point commun est encore un segment.
Montrez que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[0,\ \frac{n}{n+1}\right]$ n'est plus un segment.

$[0,\ 1] \cup [2,\ 3]$ n'est pas un segment.

Si $[a,\ b]$ et $[\alpha,\ \beta]$ ont un point commun c, leur réunion est $[Min(\alpha, a),\ Max(\beta, b)]$.
Sans restreindre la généralité, on va supposer $a \leqslant \alpha$.
Tout point de $[Min(a, \alpha), c]$ est dans $[a,\ c]$ donc dans $[a,\ b]$ donc dans la réunion.
Tout point de $[c,\ Max(\beta, b)]$ est dans $[c,\ \beta]$ (ou $[c,\ b]$, sans perte de généralité). Il est donc dans $[c,\ \beta]$ donc dans la réunion $[a,\ b] \cup [\alpha,\ \beta]$.
Et on montre l'inclusion dans l'autre sens.
Ou on fait un dessin.

$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[0,\ \frac{n}{n+1}\right] = [0,\ 1[$. C'est un intervalle, mais pas un segment.
Les réels négatifs ne sont dans aucun intervalle, donc pas dans la réunion.
1 n'est dans aucun de ces intervalles, donc pas dans la réunion. De même, les réels plus grand que 1.
Tout réel α de $[0,\ 1[$ est dans au moins un de ces ensembles. Il suffit d'avoir $\dfrac{n}{n+1} \geqslant \alpha$.
C'est réalisé pour $n = \left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\right] + 1$.

∘35∘

Montrez que $x \longmapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne sur $[1,\ +\infty[$ *(sans utiliser un théorème sur la dérivée)*.

On se donne x et y plus grands que 1 et on majore après usage de la quantité conjuguée :
$\left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| \leqslant \dfrac{|y-x|}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{|y-x|}{1+1}$ car $\sqrt{x} \geqslant 1$ *(et pareil pour y).*

Remarque : C'est direct et rapide.
Et il est très décevant de voir des élèves sortir des réflexes « dérivée bornée implique lipschitzienne » pour traiter cet exercice. Ce sont en général les élèves qui ont appris UNE chose et croient que comme en terminale avec UNE CHOSE on traite chaque exercice contenant le mot « lipschitzienne ».
Non, on est en maths, et justement, on varie les points de vue. C'est ça l'intelligence mathématique.

∘36∘

♡ On définit $u_0 < 0$ et $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$. Montrez que (u_n) est négative. Montrez que (u_n) est croissante. Montrez que (u_n) converge et calculez sa limite.
On définit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$. Montrez que (u_n) est positive. Montrez que (u_n) est croissante. Montrez que (u_n) ne peut pas converger. Concluez.

On commence par le cas $u_0 < 0$.
Par récurrence déjà initialisée, u_n est négatif pour tout n.
Si pour un n donnéu_n est négatif, alors e^{u_n}est plus petit que 1 et u_{n+1} est négatif.

On se donne n et on veut montrer $u_{n+1} \geqslant u_n$. Il suffit de comparer $e^x - 1$ et x.
Or, on sait $e^x \geqslant 1 + x$ pour tout x.
On a donc $e^{u_n} \geqslant u_n + 1$ pour tout n ce qui est bien l'inégalité cherchée.

Comment a-t-on cette minoration ?
Le faux mathématicien (suivez mon regard) dira : par développement limité : $e^x = 1 + x + ...$ et trois petits points c'est positif.
Quelle arnaque ! Jamais personne ne vous croira.
Le mathématicien de lycée crée l'application $t \longmapsto e^t - t - 1$, la dérive, la trouve décroissante puis croissante.
Or, en 0 , quand elle atteint son minimum, elle est nulle.
C'est donc qu'elle est toujours positive.
C'est joli et on applaudit. Mais on dit que c'est lourd.
L'élève de Prépas sort la formule de Taylor à l'ordre 1 : $e^x = 1 + x + x^2.\int_0^1 (1-t).e^{t.x}.dt$. Le reste intégrale est l'intégrale d'une application positive (multiplié par x^2 positif). Il est donc positif.
Et il ne sera nul qu'en 0.
On constate que le faux matheux a presque trouvé la bonne réponse. mais il a confondu développement limité et formule de Taylor, ce qui prouve qu'il n'est pas matheux du tout alors qu'il a presque les bonnes intuitions. Quel gâchis !

La suite est croissante, négative, elle converge.

Par passage à la limite, sa limite λ vérifie $e^\lambda = 1 + \lambda$. Et la seule solution est $\lambda = 0$.

On était tenté de le dire, mais il fallait le prouve,r c'est vers 0 que converge (u_n).

Passons au cas positif. Cette fois, la récurrence passe aussi bien.
Si pour un n donné quelconque on suppose $u_n > 0$ alors e^{u_n}est plus grand que 1 et u_{n+1} est aussi positif.

L'inégalité $e^{u_n} \geqslant 1 + u_n$ est vraie, quel que soit le signe de u_n.
La suite est encore croissante.

Étant croissante majorée, elle n'a que deux possibilités.
Diverger vers $+\infty$ (et ce sera le cas par élimination).
Converger vers son plus petit majorant. Mais dans ce cas, sa limite μ vérifie $e^\mu = 1 + \mu$ ce qui donne $\mu = 0$. Mais une suite croissante strictement positive ne peut converger vers 0.

On a donc bien $u_n \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} +\infty$.

Attention, il fallait bien raisonner ici par élimination.

◦37◦ Montrez que la série de terme général $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)^2}$ converge.

On note $A_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n+1}}$. Montrez : $|A_{N^2+2.N} - A_{N^2-1}| \geqslant \frac{2.N}{\sqrt{N^2}}$. Déduisez que (A_N) diverge.

Le terme général $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Condition nécessaire validée.
Il est de signe quelconque (disons qu'il change parfois), on va regarder la série avec valeur absolue.
$\sum_{n=0}^{N} \left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)^2}\right|$ est croissante. On majore terme à terme $\left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1).(n+2)}$.
La série de terme général $\frac{1}{(n+1).(n+2)}$ converge (avec une somme connue, par télescopage).
Par théorème de convergence absolue, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)^2}$existe.

Mais on ignore sa valeur.

Le terme général $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n+1}}$ tend vers 0. on n'a pas la divergence dite grossière.
Mais rien ne permet de conclure.

Si on tente la convergence en valeur absolue, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n+1}}\right|$ *est infini, et on ne peut pas conclure.*

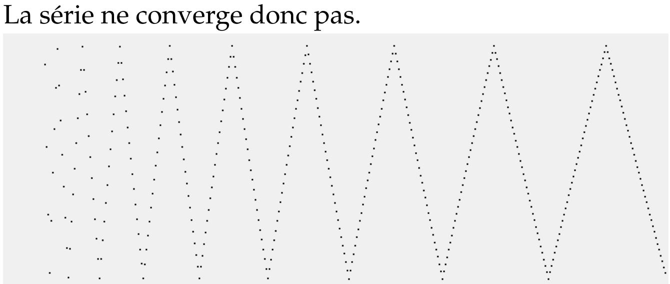
On calcule la différence proposée par relation de Chasles :

$$A_{N^2+2.N} - A_{N^2-1} = \sum_{n=0}^{N^2+2.N} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)} - \sum_{n=0}^{N^2-1} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)} = \sum_{n=N^2}^{N^2+2.N} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{(n+1)}$$

Mais tant que n est entre N^2 et $N^2+2.N$, il vérifie $N^2 \leqslant n < N^2+2.N+1$ puis $N \leqslant \sqrt{n} < N+1$.
On a donc $[\sqrt{n}] = N$ pour tous les termes de la somme en même temps.
On peut donc sortir le $(-1)^N$ et passer à la valeur absolue

$$|A_{N^2+2.N} - A_{N^2-1}| = \left|(-1)^N. \sum_{n=N^2}^{N^2+2.N} \frac{1}{(n+1)}\right| = \sum_{n=N^2}^{N^2+2.N} \frac{1}{(n+1)}$$

Combien a-t-on de termes ? On en a $2.N+1$.
Le plus petit est le dernier, et il vaut $\frac{1}{\sqrt{N^2+2.N+1}}$.
On peut donc minorer cette somme par $\frac{2.N+1}{\sqrt{N^2+2.N+1}}$.
Ce minorant a pour limite 2 quand N tend vers $+\infty$.
Si la série convergeait vers une somme S, les deux quantités $A_{N^2+2.N}$ et A_{N^2-1} devraient converger vers la même limite, et la différence tendrait vers 0.
Tout en étant minorée par 2. C'est contradictoire.
La série ne converge donc pas.



∘38∘

♡ Quels sont les complexes z pour lesquels au moins une des deux séries suivantes converge : $\left(\sum_{n=0}^{N} e^{n.z}\right)_N$, $\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} e^{k.z}}\right)_N$.

$\sum_{n=0}^{N} z^n$ converge si et seulement si $|z|$ est strictement plus petit que 1.

C'est du cours, mais si vous y tenez. On pose $S_N = \sum_{n=0}^{N} z^n$.

On calcule $S_N - S_{N-1} = z^N$. Si $|z|$ est supérieur ou égal à 1, la différence $S_N - S_{N-1}$ ne converge pas vers 0, la suite ne peut donc pas converger.

Sinon, on peut calculer $S_N = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$. Avec la condition maintenant suffisante $|z| < 1$, la convergence est assurée vers $\frac{1}{1-z}$.

On a donc : $\sum_{n=0}^{N} z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$.

Cette phrase me déplait, car on y mélange phrase en français $\sum_{n=0}^{N} z^n$ converge si et seulement si (avec un nom propre $\sum_{n=0}^{N} z^n$) et phrase en langage mathématique $|z| < 1$.

Si vous comprenez l'incohérence langagière, vous êtes matheux.
Si elle ne vous choque pas, vous êtes physicien oui, on peut être les deux).
Si elle vous choque, vous êtes vraiment matheux.

Passons à $\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} e^{k.z}}\right)_N$ où on traite à part le cas $z = 1$.

Pour z égal à 1, on a $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} e^{k.z}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1}$, la série diverge.

Sinon, $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} e^{k.z}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1-z}{1-z^{n+1}}$ si tout va bien.

Oui, je dis « si tout va bien », car si z est une racine de l'unité (complexe de la forme $e^{2.i.k.\pi/p}$ pour au moins un couple $(k,\ p)$, c'est à dire de la forme $e^{i.r.\pi}$avec r rationnel), l'un des termes de $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} e^{k.z}}$ n'existe même pas.

On simplifie $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} e^{k.z}} = (z-1).\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{z^{n+1}-1}$ et on s'intéresse à la série de terme général $\frac{1}{z^{n+1}-1}$ et aussi à celle de terme général $\frac{1}{|z^{n+1}-1|}$.

Condition nécessaire : le terme général doit tendre vers 0.
Il faut donc que z^{n+1} tend vers l'infini : $|z| > 1$.

Est elle suffisante ? Pour $|z| > 1$, on a $|z^{N+1} - 1| \sim |z|^{N+1}$ quand N tend vers l'infini.
Le critère de comparaison sur les séries à termes positifs dit :
$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{|z^{n+1}-1|}$ et $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{|z|^{n+1}}$ sont de même nature.Or, $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{|z|^{n+1}}$ converge (géométrique, de raison plus petite que 1 en valeur absolue.

On a donc la convergence de $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{|z^{n+1}-1|}$.

Le théorème de convergence en valeur absolue donne la convergence de $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{z^{n+1}-1}$ et de la série proposée.

Bilan :

	$\|z\|<1$	$z=1$	$\|z\|=1$	$z=-1$	$\|z\|>1$
$\left(\sum_{n=0}^{N} e^{n.z}\right)_N$	converge	diverge	diverge	diverge	diverge
$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} e^{k.z}}\right)_N$	diverge	diverge	existence ?	n'existe pas	converge

---

∘39∘ **Montrez que la série de terme général $\frac{i^n}{n+1}$ converge.**

Le numérateur est borné, il vaut alternativement 1, i, -1 et $-i$.
Le dénominateur tend vers l'infini. Le terme général tend vers 0.
La condition nécessaire est validée. mais on ne peut pas encore conclure.

En module, le terme général vaut $\frac{1}{n+1}$. La série de terme général $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}$ diverge. On ne peut donc pas appliquer un théorème de convergence en valeur absolue.

Les termes sont dans $\mathbb{C}$, on ne peut pas utiliser le critère des séries alternées.
Mais si on sépare partie réelle et partie imaginaire :
$\sum_{n=0}^{N} \frac{i^n}{n+1} = \sum_{2.p\leqslant N} \frac{(-1)^p}{2.p+1} + \sum_{2.p+1\leqslant N} \frac{i.(-1)^p}{2.p+2}$ (c'est la façon la plus simple que j'ai trouvé pour l'écrire).
La série de terme général $\left(\frac{(-1)^p}{2.p+1}\right)_{p\geqslant 0}$ converge, en appliquant le critère spécial des séries alternées (la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant).
La série de terme général $\left(\frac{(-1)^p}{2.p+2}\right)_{p\geqslant 0}$ converge, en appliquant le critère spécial des séries alternées (la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant).

On multiplie la seconde par i et on somme : notre série initiale converge.

Ça manque un peu de rigueur, suivant le rang auquel on s'est arrêté. Il faut être plus rigoureux, suivant la valeur de N modulo 4 :

N modulo 4	0	1	2	3
$N=$	$4.q$	$4.q+1$	$4.q+2$	$4.q+3$
parte réelle	$\sum_{p=0}^{2.q} \frac{(-1)^p}{2.p+1}$	$\sum_{p=0}^{2.q} \frac{(-1)^p}{2.p+1}$	$\sum_{p=0}^{2.q+1} \frac{(-1)^p}{2.p+1}$	$\sum_{p=0}^{2.q+1} \frac{(-1)^p}{2.p+1}$
partie imaginaire	$i.\sum_{p=0}^{2.q-1} \frac{(-1)^p}{2.p+2}$	$i.\sum_{p=0}^{2.q} \frac{(-1)^p}{2.p+1}$	$i.\sum_{p=0}^{2.q} \frac{(-1)^p}{2.p+1}$	$i.\sum_{p=0}^{2.q+1} \frac{(-1)^p}{2.p+1}$

On utilise le théorème de convergence des séries alternées, et un théorème de recouvrement de $\mathbb{N}$ par parité/imparité.

Bonus : et la somme vaut $\frac{\pi}{4} + i.\frac{\ln(2)}{2}$.
Bonus du bonus : $\exp\left(i.\left(\frac{\pi}{4} + i.\frac{\ln(2)}{2}\right)\right) = e^{i.\pi/4}.e^{-\ln(2)/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.e^{i.\pi/4} = \frac{i}{2}$.