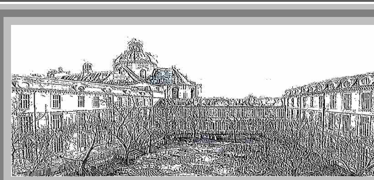
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 1 avril
M.P.S.I.2



2023 2024

TD24

∘0∘
```
def Suite(n) :
....L = [2, 6, 7, 4, 2, *, 5, 4, 8, *, 3, 9, 3, 5, 5]
....return L[n%15]
```
Remplacez les * pour que `Suite` soit la somme d'une suite de période 3 et d'une suite de période 5.

∘1∘ ♡ Explicitez un N_ϵ pour la convergence de $\dfrac{e^n+1}{e^n+5}$ vers 1 quand n tend vers l'infini.

∘2∘ On donne u_0 et on pose $u_{n+1}=(u_n)^3$ pour tout n. Exprimez u_n à l'aide de u_0 et n.
On donne v_0 et on pose $v_{n+1}=(v_n)^n$ pour tout n. Exprimez v_n à l'aide de v_0 et n.

∘3∘ Quand on a une suite réelle (a_n) de limite α non nulle, on montre l'implication $|a_n-\alpha|\leqslant\alpha/2\to|a_n|\geqslant\alpha/2$ en passant par $\alpha-\alpha/2\leqslant a_n\leqslant\alpha+\alpha/2$. Montrez que ce résultat est vrai aussi dans $\mathbb{C}$.

∘4∘ Montrez que de toute suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.
Montrez que de toute suite réelle on peut extraire au moins une sous-suite qui converge (au sens large, soit vers un réel, soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$.
Donnez une suite réelle non bornée, qui admet une sous-suite qui converge vers 1, une vers 0 et une vers -1.
Montrez que de toute suite complexe convergente, on peut extraire une sous-suite bornée.

∘5∘ La suite (u_n) est définie par $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{2.\sqrt{n+u_n}}$. Donnez sa limite quand n tend vers l'infini.

∘6∘ On pose $0<a_0\leqslant b_0$ et pour tout n, on pose $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $a_{n+1}=\sqrt{a_n.b_{n+1}}$.
Montrez qu'elles convergent vers la même limite λ.
On pose $d_n=\dfrac{b_n}{a_n}$. Prouvez $d_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+d_n}{2}}$.
Montrez : $b_n=a_n.ch(2^{-n}.\alpha)$ et $2^n.a_n.sh(2^{-n}.\alpha)=a_0.sh(\alpha)$ pour tout n (α est une mesure que vous préciserez).
Déduisez $\lambda=\dfrac{\sqrt{(b_0)^2-(a_0)^2}}{\alpha}$ et $(b_n-a_n)\sim_{n\to+\infty}a_0.\alpha.sh(\alpha).2^{-n}$.

∘7∘ Montrez : $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}|i^2-j^2|=\frac{n^2.(n+1).(n+2)}{3}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}|i-j|^2=\frac{n.(n+1)^2.(n+2)}{6}$ (voyez tout ça dans un tableau à double entrée et sommez en colonne ou en ligne).

∘8∘ On définit $f=x\longmapsto\begin{cases}1 & si\quad \exists(a,b)\in\mathbb{Z}^2\quad x=a+b.\sqrt{2}\\ 0 & sinon\end{cases}$. Acceptez vous de représenter graphiquement f ?
Montrez que f est périodique de période 1.
Montrez que f n'est pas périodique de période $\dfrac{1}{2}$.

∘9∘ ♡ On veut montrer que pour n entier, $\sqrt{n}$ est soit entier (comme $\sqrt{16}$), soit irrationnel (comme $\sqrt{7}$).
On suppose $\sqrt{n}=\dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux. Montrez qu'il existe a et b entiers vérifiant $a.n.q+b.p=\sqrt{n}$.
Concluez.

∘10∘ On définit : $u_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}.u_n+\sqrt{3}-2}{2.u_n+\sqrt{6}}$. Montrez que u est bornée. Rappel : $4.\cos(\pi/12)=\sqrt{2}+\sqrt{6}$.
Rappel : on compose les homographies en multipliant les matrices.

∘11∘ Vrai ou faux : la somme de deux suites non bornées est non bornée.
Vrai ou faux : la somme de deux suites réelles positives non majorées est non majorée.

∘12∘ ♡ Deux suites sont liées par $\left\{\begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & u_n & + & v_n \\ v_{n+1} & = & 4.u_n & + & v_n \end{array}\right|$ avec u_0 et v_0 donnés.
Montrez que si l'on a $\exists p \in \mathbb{N},\ u_p = v_p = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = 0$.
Montrez que si l'on a $\exists p \in \mathbb{N},\ u_p = u_{p+1} = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = 0$.
Montrez que si l'on a $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ p \neq q,\ u_p = u_q = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = 0$.

∘13∘ L'exercice est "*limite quand n tend vers $+\infty$ de* $\sqrt[n]{n!}$". L'élève Agin-Tensiff passe par la forme exponentielle : $\exp\left(\dfrac{\ln(n!)}{n}\right)$.
Il sépare la factorielle : $\dfrac{\ln(n)+\ln(n-1)+\ldots+\ln(1)}{n}$. Chacun des termes de la somme *(de $\ln(n)/n$ à $\ln(1)/n$)* tend vers 0 ; la somme tend vers 0. Par continuité de l'exponentielle, $\sqrt[n]{n!}$ converge vers 1.
Pourtant, l'ordinateur donne à 10^{-1} près

$\sqrt[20]{20!}$	$\sqrt[30]{30!}$	$\sqrt[40]{40!}$	$\sqrt[50]{50!}$
8.3	12.0	15.7	19.4

.
Alors qui a tort ? Que doit on trouver ?
Tiens, au fait, et si ça avait été à vous de calculer avec Python $\sqrt[n]{n!}$ pour n "*grand*", qu'auriez vous fait ?
Il parait qu'avec une somme de Riemann droite pour $\ln(t)$ entre 0 et 1 on a un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$. A vous de le faire.

∘14∘ Montrez que la série de terme général $\left(\dfrac{1}{(\ln(n))^2}\right)_{n\geqslant 2}$ diverge (comparez à la série harmonique).

∘15∘ Montrez que si $((a_n)^2)$ est sommable, alors $(a_n.a_{n+1})$ l'est aussi.
Indication pour que vous ne partiez pas dans des trucs « si la suite est croissante... si la suite est décroissante... et donc j'ai traité tous les cas »[1], pensez à la comparaison des moyennes...

∘16∘ Montrez : $\displaystyle\sum_{0\leqslant p\leqslant q} \frac{1}{2^{p+q}} = \frac{8}{3}$ (et montrez donc que la famille est sommable).
Calculez $\displaystyle\sum_{0\leqslant p\leqslant q} \frac{(-1)^{p-q}}{2^{p+q}}$.

∘17∘ ♡ Décomposez $((-1)^n)_n$ comme somme d'une suite réelle croissante et d'une suite réelle décroissante en donnant une formule explicite pour le n^{ieme} terme de chacune.
Même question avec $((-1)^n.n)_n$.

∘18∘ ♡ Prolongez par continuité en 0 et en 1 $x \longmapsto \dfrac{x-1}{\ln(x)}$.
♡ En considérant comme valide le théorème de Fubini ($\displaystyle\int_{x=a}^{x=b}\left(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y).dy\right).dx = \int_{y=c}^{y=d}\left(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y).dx\right).dy$), montrez : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}.dx = \ln(2)$ (on pourra faire intervenir l'application $(x,\ y) \longmapsto x^y$ sur $[0,\ 1]$).
Calculez pour a et b positifs $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)}.dx$ après avoir prolongée en 0 et en 1 l'application sous le signe somme.

∘19∘ Donnez le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, puis celui de son inverse.
Rappel : $\chi_M(X) = \det(M - X.I_n)$. Et pour $\chi_{M^{-1}}$ aurez vous besoin de calculer M^{-1} ? Ca dépend de « je suis matheux ou pas ».

∘20∘ ♡ On pose $u_n = n^{1/n}$. Déterminer le plus grand terme de cette suite et sa limite.

1. eh, les suites ni croissantes ni décroissantes, ça existe !

∘21∘ Calculez module et argument de $2^{i.\pi/3}$. Calculez module et argument de $e^{(e^{i.\pi/3})}$. Calculez module et argument de $(e^e)^{i.\pi/3}$.

∘22∘ Pouvez vous trouvé les quatre erreurs qu'il y à dans cette phrases ?

∘23∘ Montrez que $((1),\ ((-1)^n))$ est une base de l'espace des suites périodiques de période 2.

∘24∘ Montrez que toute suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ bornée admet une sous-suite périodique.

∘25∘ Prouvez que de toute suite de période 5 *(exactement)* on peut extraire une suite de période 11 *(exactement)*.

∘26∘ ♡ On pose : $u_n = (-1)^n.(2.n+1)$ pour tout n. Calculez $\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour n de 0 à 7. Montrez que la suite u diverge, de même que sa moyenne de Cesàro. Montrez que la moyenne de Cesàro de sa moyenne de Cesàro converge.
Donnez une suite dont la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro converge vers 1 sans que sa moyenne de Cesàro ne converge.
♣ Donnez une suite dont la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro converge vers 1 sans que la moyenne de Cesàro de sa moyenne de Cesàro ne converge.
Rappel : la moyenne de Cesàro de la suite (a_n) est la suite (c_n) définie par $c_{n+1} = \dfrac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1}$.

∘27∘ ♣ Créez une suite réelle positive non bornée dont la moyenne de Cesàro converge vers 0.

∘28∘ Trouvez des couples de suites servant d'exemple pour chacune des quatre cases :

	$u_n - v_n \rightarrow_{n\to+\infty} 0$	$u_n - v_n \not\rightarrow_{n\to+\infty} 0$
$u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$		
$u_n \not\sim_{n\to+\infty} v_n$		

∘29∘ ♡ Montrez qu'une suite complexe est périodique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

∘30∘ On sait que si u et v sont bornées, alors $u.v$ l'est aussi. Montrez que la réciproque n'est pas vraie *(peut on avoir même "ni u ni v n'est bornée" ?)*.
Montrez que si $u+v$ et $u.v$ sont bornées, alors u et v le sont aussi.

∘31∘ Frais ou veau :
∘1∘ Si il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers α et une sous-suite de (b_n) qui converge vers β, alors il existe une sous-suite de $(a_n + b_n)$ qui converge vers $\alpha + \beta$?
∘2∘ Si toutes les suites extraites de (a_n) convergent, alors (a_n) converge.
∘3∘ Si il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers α alors il existe une sous-suite de $([a_n])$ qui converge vers $[\alpha]$.
∘4∘ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^2)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou -1.
∘5∘ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^2)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou une sous-suite de (a_n) qui converge vers -1.
∘6∘ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^3)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou -1.

∘32∘ ♡ Soit a une suite réelle positive ; on note A la série associée ($A_N = \sum_{k=0}^{N} a_k$). Montrez que $(A_{2.n})$ converge si et seulement si (A_n) converge.
Et si on enlève « positive », est ce encore vrai ?

∘33∘ On note E l'ensemble des suites réelles périodiques. Montrez que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel.
Montrez que tout élément de E admet une sous-suite convergente.

Pour tout u dans E, on note $\sigma(u)$ la suite (u_{n+1}). Montrez que $\sigma(u)$ est dans E et que σ est une application linéaire. Montrez que ses seules valeurs propres sont 1 et -1 et donnez le sous-espace propre associé à chacune. Aurait on pu trouver d'autres valeurs propres pour des suites complexes ?
Pour tout u dans E, on note $\varphi(u)$ la suite $(u_{2.n})$. Montrez que $\varphi(u)$ est dans E et que φ est une application linéaire.
Pour tout n, on note $\zeta(u)$ la suite de terme général $u_{2.[n/2]}$. Montrez que l'opérateur ζ est linéaire de E dans E et donnez son spectre.

Pour tout n, on note $\psi(u)$ la suite obtenue en permutant deux à deux les termes de la suite u : $(u_1,\ u_0,\ u_3,\ u_2,\ u_5,\ u_4,\dots)$.
Donnez une formule générale pour $\psi(u)_n$ *(et expliquez pourquoi la notation $\psi(u_n)$ n'a aucun sens)*. Montrez que ψ est une application linéaire de E dans E. Donnez ses valeurs propres et la dimension de chaque sous espace propre.
$\overrightarrow{u}$ vecteur propre de f c'est $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ et $\exists\lambda,\ f(\overrightarrow{u})=\lambda.\overrightarrow{u}$.
λ valeur propre de f c'est $\exists\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{O},\ f(\overrightarrow{u})=\lambda.\overrightarrow{u}$.

∘34∘ ♡ Vrai ou faux : si la suite (a_n) a pour moyenne de Cesàro (c_n) alors la suite extraite $(a_{2.n})$ a pour moyenne de Cesàro la suite $(c_{2.n})$?

∘35∘ ♡ Vers quoi convergent *(si elles convergent)* ?

1	2	3	4	5	6
$\left(\dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}}\right)$	$\left(\dfrac{3^n+2^{2.n+1}}{3^n-4^n}\right)$	$(\sqrt[n]{n^2})$	$\left(\dfrac{e^n}{n^n}\right)$	$\left(\dfrac{e^{2.n}}{n^n}\right)$	$\left(\sum_{k=0}^n(-1)^{n-k}.k!\right)$

∘36∘ ♠ Soit (a_n) une suite réelle. On pose $A=\{n\in\mathbb{N}\mid\forall p\geqslant n,\ a_p\leqslant a_n\}$.
Déterminez A si (a_n) est croissante.
Déterminez A si (a_n) est décroissante.
On suppose A infini. On pose alors $n_0=Min(n\mid n\in A\}$, $n_1=Min(n\mid n\in A\ et\ n>n_0\}$ et plus généralement $n_{k+1}=Min(n\mid n\in A\ et\ >n_k\}$.
Montrez que chaque n_k existe.
Montrez que la suite $k\longmapsto n_k$ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et que la suite (a_{n_k}) est décroissante.

On suppose A fini. Montrez $\exists K_0,\ \forall,,\ (n\geqslant K_0\Rightarrow(\exists p>n,\ a_p>a_n)$.
Déduisez $\exists K_1>K_0,\ a_{K_1}>a_{K_0}$ puis $\exists K_2>K_1,\ a_{K_2}>a_{K_1}$.
Construisez une suite (a_{K_i}) extraite de (a_n), strictement croissante.

∘37∘ On suppose $(a_n+b_n)\longrightarrow_{n\to+\infty}0$ et $(e^{a_n}+e^{b_n})\longrightarrow_{n\to+\infty}2$. Que pensez vous du raisonnement : on note α la limite de a et β la limite de b. On a alors $a=-b$ et $e^a+e^b=2$; on déduit $ch(a)=1$ puis $a=0$ et $b=0$.
En quoi ce « raisonnement » est il faux ? Aboutissez quand même au bon résultat.

∘38∘ Ça vous fait quel effet de savoir que vous êtes suspendu à la terre, retenu fort heureusement grâce à la gravitation qui vous empêche de tomber ?
Au fait, « galaktos » en grec ça veut dire lait. Quel rapport avec galaxie ?

∘39∘ Un élève donne les définitions suivantes de la convergence d'une suite :

`a`	$\forall\varepsilon\geqslant0,\ \exists N_\epsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\geqslant N_\epsilon)\Rightarrow\lvert u_n-a\rvert\leqslant\varepsilon$
`b`	$\forall\varepsilon>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \exists N_\epsilon\in\mathbb{N},\ (n\geqslant N_\epsilon)\Rightarrow\lvert u_n-a\rvert\leqslant\varepsilon$
`c`	$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall\varepsilon>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\geqslant N)\Rightarrow\lvert u_n-a\rvert\leqslant\varepsilon$
`d`	$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\epsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\leqslant N_\epsilon)\Rightarrow\lvert u_n-a\rvert\geqslant\varepsilon$

trouvez l'erreur, et dites ce qu'on peut déduire.

∘40∘ On a donné à Léo les dix chiffres de 0 à 9. Il en a fait quatre nombres : un nombre à un chiffre, un nombre à deux chiffres, un à trois chiffres, un à quatre chiffres. Les quatre sont des carrés parfaits. Pouvez vous refaire la même chose ? Et si on veut toutes les solutions, on prend `Python` ?

∘41∘ Pour tout entier naturel n, on note $s(n)$ le nombre de chiffres premiers dans l'écriture de n (exemple : $s(2019)=$

1[2], $s(1789) = 1$, $s(5435) = 3$). Montrez que la série de terme général $\frac{s(n)}{n^2}$ est croissante et majorée (intégrale $\int_1^n \frac{\ln(t)}{t^2}.dt$?). Écrivez un script Python qui pour N donne calcule la valeur approchée de $\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k^2}$.

◦42◦ Montrez que pour toute suite réelle (u_n) il existe au moins une extraction φ telle que $(\sin(u_{\varphi(n)})$ converge.

◦43◦ Pour tout n, on pose $u_n = \frac{\cos(2.n.\pi/3)}{\sqrt[3]{[n/3]+1}}$. Calculez $u_{3.p} + u_{3.p+1} + u_{3.p+2}$ pour tout entier naturel p. Déduisez que la série de terme général u_n converge *(on distinguera pour* $\sum_{n=0}^{N} u_n$ *suivant la valeur de N modulo 3)*.

Montrez que la série de terme général $(u_n)^3$ diverge.

◦44◦ Donnez une formule explicite pour u_n définie par u_0 donné et $u_{n+1} = \frac{(u_n)^3}{2}$ pour tout n.

◦45◦ Pour toute suite réelle a, on définit sa moyenne de Cezéro par $z_n = \frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.a_k}{n+1}$ pour tout n. Quelle(s) propriété(s) passe(nt) de a à z : bornée, constante, croissante, majorée.
Construisez a pour que z soit constante égale à 1.
Construisez a pour que z soit la suite $((-1)^n)$.

◦46◦ ♡ Pour tout n, on définit $a_n = \binom{3.n}{n}$. Donnez la limite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, puis de $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$ quand n tend vers l'infini.

En appliquant le théorème de 16 arômes, donnez la limite de $\sqrt[n]{\binom{3.n}{n}}$ quand n tend vers l'infini.

◦47◦ Montrez que la série de terme général $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ diverge. Indication : $A_{(2.p+1)^2} - A_{4.p^2}$ tend il vers 0 ?

2. on rappelle que 0 et 1 ne sont ni premiers, ni composés)