LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 26 mars
M.P.S.I.2

2023 2024

IS23

♡ 0 ♡ Montrez que $(a_{2.n})$ et $(a_{2.n+1})$ sont bornées si et seulement si (a_n) est bornée. Montrez que $(a_{2.n+30})$ et $(a_{2.n+17})$ sont bornées si et seulement si (a_n) est bornée. 3 pt.

♡ 1 ♡ Résolvez $x^{\ln(25)} + 25^{\ln(x)} = 10$ d'inconnue réelle x. 2 pt.

♡ 2 ♡ Sachant $a = e^{i.\pi/5}$, calculez $\prod_{k=0}^{1234} a^k$ et $\prod_{k=0}^{1234} a^{k!}$. 2 pt.

♡ 3 ♡ (a_n) et (b_n) sont deux suites réelles positives, on suppose que $a_n + b_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Montrez que (a_n) et (b_n) tendent vers 0. 2 pt. Pourquoi le raisonnement « on note α la limite de (a_n) et β la limite de (b_n). On sait que α et β sont positifs ou nuls (limites de suites positives) et que $\alpha + \beta$ est nul (limite de $(a_n + b_n)$, donc $\alpha = \beta = 0$ » est-il une arnaque ? 1 pt.

♡ 4 ♡ Montrez que si la suite réelle $\left(\sum_{n=0}^{N} |a_n|\right)_N$ converge, alors la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)_N$ converge aussi. 2 pt.

♡ 5 ♡ Montrez pour tout x réel : $\ln(1 + e^x) \geqslant \ln(2) + \frac{x}{2}$. Dans quel cas a-t-on égalité ? 2 pt.

♡ 6 ♡ On pose $u_n = \frac{n+3}{n^3 + 3.n + 2}$. Retrouvez les coefficients : $u_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \frac{e}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)_{n\to+\infty}$. 3 pt.

♢ 0 ♢ Pour tout n, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $a_n = \frac{H_n}{n.(n+1)}$. Montrez $H_n \leqslant 1 + \ln(n)$ 2 pt. Étudiez les variations de $t \longmapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ puis montrez pour N supérieur ou égal à 3 $\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(n)}{n^2} \leqslant \frac{\ln(2)}{4} + \int_{t=2}^{N} \frac{\ln(t)}{t^2}.dt$. 3 pt. Déduisez que la série de terme général a_n est croissante majorée, et montrez que la somme de la série est égale à $\zeta(2)$. 3 pt.

♢ 1 ♢ Montrez $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 2.i} = \frac{i.\pi}{(2 + 2.i)}$ (éléments simples, conjugué, canonique). 4 pt.

♢ 2 ♢ On pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\varphi = M \longmapsto M + Tr(M).U$. Montrez que φ est un endomorphisme de $(M_4(\mathbb{R}), +, .)$. Donnez son noyau. φ est il injectif ? 3 pt. On se donne A dans $(M_4(\mathbb{R}), +, .)$ et on veut résoudre $\varphi(M) = A$ d'inconnue M. Par analyse, calculez $Tr(M)$, puis par synthèse, trouvez la solution. 2 pt.
Donnez une base de $K = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid U.X = 0_4\}$. $K_1 = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid U.X = (1 + \sqrt{3}).X\}$ et $K_2 = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid U.X = (1 - \sqrt{3}).X\}$. Diagonalisez U (sans passer par $\det(U - \lambda.I_4)$; normalement, vous avez tout !). 2 pt.

♮ 0 ♮ Un théorème de Riemann dit qu'entre deux cubes consécutifs il existe toujours un nombre premier. On va l'admettre.
Écrivez alors un programme `Python` qui pour n donné construit une suite de n entiers premiers `p=[3, 29, ...]` vérifiant `p[k])**3< p[k+1] < (p[k]+1)**3` pour tout k. 4 pt.

♣ 0 ♣ On considère qu'on dispose donc d'une suite (p_n) de nombres premiers vérifiant : $\forall k,\ (p_k)^3 < p_{k+1} < (p_k + 1)^3$.
On construit alors les suites $u_n = (p_n)^{3^{-n}}$ et $v_n = (p_n + 1)^{3^{-n}}$. Montrez que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante. 3 pt.
Montrez que (u_n) converge, vers une limite qu'on va noter α (nombre de Mills) et montrez que pour tout n $[\alpha^{3^n}]$ est un nombre premier. 3 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE | 2023 2024

Mardi 26 mars

M.P.S.I.2

IS23 CORRECTION

Suites bornées. IS23

• Si la suite (a_n) est bornée (disons par M), alors toutes ses sous suites sont bornées (aussi par M).

• Supposons maintenant $(a_{2.n})$ et $(a_{2.n+1})$ bornées (disons par M et N). On a alors $\forall n,\ |a_{2.n}| \leqslant M,\ |a_{2.n+1}| \leqslant N$.
Alors pour tout p, on a, par disjonction de cas $|a_p| \leqslant Max(M,\ N)$.
La suite est bornée.

• Si la suite (a_n) est bornée (disons par M), alors toutes ses sous suites (y compris celles qui commencent un peu en retard) sont bornées (aussi par M).

• Supposons maintenant $(a_{2.n+30})$ et $(a_{2.n+17})$ bornées (disons par M et N). On a alors $\forall n,\ |a_{2.n}| \leqslant M,\ |a_{2.n+1}| \leqslant N$.
Alors pour tout p plus grand que 30, on a, par disjonction de cas $|a_p| \leqslant Max(M,\ N)$ (pour p impair, on l'écrit $n = 2.p + 17$ avec $p = \dfrac{n-17}{2} \in \mathbb{N}$ entier et positif, et pour n pair, on l'écrit $a_{2.n+30}$ avec $n = \dfrac{p-30}{2} \in \mathbb{N}$.
La suite est bornée à partir du rang 30. Globalement, elle est bornée (par $Max(M,\ N,\ |a_0, \dots |a_{29}|)$.

Une équation logarithmique. IS23

Pour que l'équation ait un sens, on va imposer $x > 0$. Ensuite, tout devient facile

$$x^{\ln(a)} = (e^{\ln(x)})^{\ln(a)} = e^{\ln(x).\ln(a)} = (e^{\ln(a)})^{\ln(x)} = a^{\ln(x)}$$

L'équation est donc $e^{\ln(x).\ln(25)} + e^{\ln(x).\ln(a)} = 10$ soit $e^{\ln(x).\ln(25)} = 5$. On passe au logarithme : $\ln(x).\ln(25) = \ln(5)$ et on simplifie par $\ln(5)$ (non nul).
Il reste $\ln(x) = 1/2$ soit $x = \sqrt{e}$.

Une racine de l'unité. IS23

On note qu'on a $a^{10} = 1$ et $a^5 = -1$. On calcule alors $\prod_{k=0}^{1234} a^k = a^S$ avec $S = \sum_{k=0}^{1234} k = \dfrac{1234.1235}{2} = 617.1235$. C'est un multiple iumpair de 5.$\prod_{k=0}^{1234} a^k = (a^5)^{S/5} = -1$.

Il va de soi que si S n'avait pas été un multiple de 5, l'écriture $(a^5)^{S/.5}$ aurait été une gigantesque arnaque.

Pour l'autre produit, on sait que $a^{k!}$ vaut 1 dès que k dépasse 5 (l'exposant est un multiple de 5). Il reste

$$\prod_{k=0}^{1234} a^k = \prod_{k=0}^{4} a^{k!}.\prod_{k=5}^{1234} (a^5)^{\frac{k!}{5}} = a^{0!+1!+2!+3!+4!}.1 = a^{34} = a^4 = e^{4.i.\pi/5}$$

Suites positives de somme qui tend vers 0. IS23

Le raisonnement « je note α la limite de (a_n) est une arnaque ou pour le moins une preuve d'une naïveté inconcevable.
La suite a le droit de ne pas avoir de limite.

Rappelons qu'on a $(-1)^n + (-1)^{n+1} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$ mais on ne peut pas dire qu'on introduit la limite de la première suite et de la deuxième. Aucune n'en a.

En fait, le résultat est un cadeau.
Si (a_n) est positive, on a $0 a_n$ pour tout n.
Si (b_n) est positive, on ajoute $0 \leqslant a_n \leqslant a_n + b_n$.
Si $(a_n + b_n)$ converge vers 0, les gendarmes concluent que (a_n) tend aussi vers 0.

On fait ensuite la même chose avec (b_n).

On pouvait aussi en revenir aux ε et encadrer de la même façon $0 \leqslant a_n \leqslant a_n + b_n \leqslant \varepsilon$ à parti d'un certain rang N_ε.

Développement asymtotique. IS23

Si on a posé $u_n = \dfrac{n+3}{n^3+3.n+2}$ on a déjà $u_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ et immédiatement $u_n = 0 + \dfrac{0}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}$.

On reprend nos habitudes en soustrayant l'équivalent

$$u_n - \frac{1}{n^2} = \frac{n+3}{n^3+3.n+2} - \frac{1}{n^2} = \frac{3.n^2 - 3.n - 2}{n^2.(n^3+3.n+2)} \sim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^3}$$

On a progressé $u_n = 0 + \dfrac{0}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{3}{n^3} + o\Big(\dfrac{1}{n^3}\Big)_{n\to+\infty}$ mais on ne s'arrête pas là

$$u_n - \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3} = \frac{n+3}{n^3+3.n+2} - \frac{n+3}{n^3} = \frac{-3.n^2 - 11.n - 6}{n^3.(n^3+3.n+2)} \sim_{n\to+\infty} -\frac{3}{n^4}$$

On peut encadrer $\boxed{u_n = 0 + \dfrac{0}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{3}{n^3} - \dfrac{3}{n^4} + o\Big(\dfrac{1}{n^4}\Big)_{n\to+\infty}}$

On peut aussi poser la division euclidienne non arrêtée :

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
n & +3 & & & & n^3 & +3.n & +2 \\
-(n & & +\frac{3}{n} & +\frac{2}{n^2}) & & = & = & = \\
 & 3 & -\frac{3}{n} & -\frac{2}{n^2} & & \frac{1}{n^2} & +\frac{3}{n^3} & -\frac{3}{n^4} \\
 & -(3 & & +\frac{9}{n^2} & +\frac{6}{n^3}) & & & \\
 & & -\frac{3}{n} & -\frac{11}{n^2} & -\frac{6}{n^3} & & & \\
 & & -(etc & ... & ... & & &
\end{array}$$

Une inégalité. IS23

Pour prouver $\ln(1+e^x) \geqslant \ln(2) + \dfrac{x}{2}$ pour tout x on construit la fonction différence et on la dérive

$$\Big(x \longmapsto \ln(1+e^x) - \ln(2) - \frac{x}{2}\Big)' = \Big(x \longmapsto \frac{e^x - 1}{2.(1+e^x)}\Big)$$

On peut y reconnaître une tangente hyperbolique cachée, mais on s'en moque. Tout ce qui compte est son signe, puis le tableau de variations (avec la valeur au minimum) :

x	$]-\infty,\ 0]$	$x=0$	$[0,\ +\infty[$
$f'(x) = \dfrac{e^x-1}{2.(e^x+1)}$	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(x)$est positif pour tout x et ne s'annule qu'en 0.

On peut aussi comparer $1+e^x$ et $e^{\ln(2)+x/2}$ (puis revenir pars logarithme).
Or, la différence $1+e^x - e^{\ln(2)+x/2}$ vaut $1+e^x - 2.e^{x/2}$ et se factorise en $(1-e^{x/2})^2$.

Une intégrale complexe. IS23

$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 2.i}$ ne pose pas de problème de dénominateur. La fonction sous le signe somme est localement intégrable. Mais on va s'arrêter avant l'infini et poser $I_A = \int_0^A \frac{dt}{t^2 - 2.i}$. On commence par factoriser le dénominateur $t^2 - 2.i = (t - 1 - i).(t + 1 + i)$.

En effet, il fallait trouver les complexes de carré i c'est à dire résoudre $r^2.e^{2.i.\theta} = 2.e^{i.\pi/2}$.
On pouvait aussi résoudre $x^2 - y^2 = 0$, $2.i.x.y = 2.i$.

On décompose en éléments simples par la méthode des pôles

$$\frac{1}{t^2 - 2.i} = \frac{1}{(t - 1 - i).(t + 1 + i)} \text{ et } \frac{1}{t - 1 - i} - \frac{1}{t + 1 + i} = \frac{2 + 2.i}{(t - 1 - i).(t + 1 + i)}$$

On va donc séparer par linéarité, puis conjuguer :

$$I_A = \frac{1}{2 + 2.i}.\Big(\int_0^A \frac{dt}{t - 1 - i} - \int_0^A \frac{dt}{t + 1 + i}\Big)$$

$$I_A = \frac{1}{2 + 2.i}.\Big(\int_0^A \frac{(t - 1 + i).dt}{(t - 1 - i).(t - 1 + i)} - \int_0^A \frac{(t + 1 - i).dt}{(t + 1 + i).(t + 1 - i)}\Big)$$

On a à présent quatre intégrales

$$\int_0^A \frac{t - 1}{t^2 - 2.t + 2}.dt,\ \int_0^A \frac{1}{t^2 - 2.t + 2}.dt,\ \int_0^A \frac{t + 1}{t^2 + 2.t + 2}.dt,\ \int_0^A \frac{1}{t^2 + 2.t + 2}.dt$$

Il est heureux de les voir s'intégrer aisément

$$\int_0^A \frac{t - 1}{t^2 - 2.t + 2}.dt = \Big[\frac{\ln(t^2 - 2.t + 2)}{2}\Big]_0^A,\ \int_0^A \frac{1}{(t - 1)^2 + 1}.dt = \Big[Arctan(t - 1)\Big]_0^A$$

En recollant les morceaux :

$$I_A = \frac{1}{2 + 2.i}.\Big[\frac{\ln(t^2 - 2.t + 2)}{2} - \frac{\ln(t^2 + 2.t + 2)}{2} + i.Arctan(t - 1) - i.Arctant(t + 1)\Big]_0^A$$

Les deux logarithmes se compensent en 0, mais aussi en $+\infty$ si on les fusionne en $\frac{1}{2}.\ln\Big(\frac{t^2 - 2.t + 2}{t^2 + 2.t + 2}\Big)$, avec le fraction qui tend vers 1 en $+\infty$.
Que nous reste-t-il ? Les arctangentes effectivement. En $+\infty$ les deux $\frac{\pi}{2}$ vont se compenser.
Et il reste finalement des $Arctan(1)$ et $Arctan(-1)$: $\frac{1}{2 + 2.i}.(2.i.\frac{\pi}{4})$.

Série harmonique et somme télescopique. IS23

La majoration $H_n \leqslant \ln(n) + 1$ est une comparaison série intégrale classique (question de cours en fait, non ?).
Pour tout k de $\mathbb{N} - \{0,\ 1\}$, pour tout t de $[k - 1,\ k]$ on a $\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{t}$ puis $\frac{1}{k} = \int_{k-1}^k \frac{dt}{k} \leqslant \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$.
On somme de 2 à N : $H_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_{2-1}^N \frac{dt}{t}$ et c'est la majoration demandée (et tant pis pour la minoration de H_n par $\ln(n + 1)$, ce sera pour un autre jour).

On recommence avec $t \longmapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$? Encore faut il que cette application soit décroissante.
On la dérive en $t \longmapsto \frac{1 - 2.\ln(t)}{t^3}$. Elle décroit sur $[\sqrt{e},\ +\infty[$ donc a fortiori sur $[2,\ +\infty[$.

On se donne n plus grand que 3, on a pour tout t de $[n-1,\ n]$: $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \leqslant \dfrac{\ln(t)}{t^2}$.
On intègre : $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \dfrac{\ln(t)}{t^2}.dt$. On somme de 3 à N et on ajoute deux termes dont un est nul :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(2)}{4} + \sum_{n=3}^{N} \frac{\ln(n)}{n^2} \leqslant \frac{\ln(2)}{4} + \int_{2}^{N} \frac{\ln(t)}{t^2}.dt$$

Comment relier ceci à a_n ? On majore H_n, on décompose en éléments simple, on majore $\dfrac{1}{n.(n+1)}$ par $\dfrac{1}{n^2}$

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1+\ln(n)}{n.(n+1)} = \frac{1}{n.(n+1)} + \frac{\ln(n)}{n.(n+1)} \leqslant \frac{1}{n.(n+1)} + \frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{\ln(n)}{n^2}$$

La minoration permet de dire que la série de terme général $a_n$positif est croissante ($A_{N+1} - A_n + \sum_{n=1}^{N+1} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n = a_{N+1} \geqslant 0$). Ensuite on majore par une constante (n doit quitter le membre tout au bout à droite [1])

$$\sum_{n=1^N} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(n)}{n^2} \leqslant 1 - \frac{1}{N+1} + \frac{\ln(2)}{4} + \int_{2}^{N} \frac{\ln(t)}{t^2}.dt$$

$$\sum_{n=1^N} a_n \leqslant 1 + \frac{\ln(2)}{4} + \Big[- \frac{\ln(t)}{t} - \frac{1}{t} \Big]_2^N$$

La primitive a été obtenue par parties

$\ln(t)$	$\hookrightarrow$	$1/t$
$1/t^2$	$\hookleftarrow$	$-1/t$

$$\sum_{n=1^N} a_n \leqslant 1 + \frac{\ln(2)}{4} + + \frac{\ln(2)+2}{2} - \frac{\ln(n)+1}{n} \leqslant 1 + \frac{\ln(2)}{4} + + \frac{\ln(2)+2}{2}$$

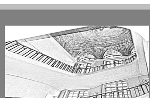
Par croissance et majoration, la série converge vers son plus petit majorant, c'est à dire sa somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n.(n+1)}$.

Passons au calcul de la somme en la voyant comme une famille sommable et en intervertissant les sigmas

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n.(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k.n.(n+1)} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k}.\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)$$

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}. \sum_{n=k}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}.\Big(\frac{1}{k} - \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N+1}\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}.\Big(\frac{1}{k}\Big) = \zeta(2)$$

On notera qu'il est plus rapide de bidouiller les sigma que de prouver la convergence de la série.



Endomorphisme sur les matrices. IS23

Si M est une matrice carrée de taille 4 alors $Tr(M)$ existe et est un réel. La combinaison $M + Tr(M).U$ est alors une matrice de taille 4.
Le caractère « endo » est prouvé.

Pour la linéarité, on doit comparer $\varphi(\alpha.M + \beta.N)$ et $\alpha.\varphi(M) + \beta.\varphi(N)$ (α et β réels, M et N matrices carrées de taille 4).
Dans les deux cas, on trouve $\alpha.M + \alpha.Tr(M).U + \beta.N + \beta.Tr(N).U$. Il y a bien égalité.

Pour le noyau, on résout $M + Tr(M).U = 0_{4,4}$ (matrice nulle).
On peut si on n'a pas peur des calculs inutiles poser seize coefficients et résoudre.

1. pardon ? j'ai écrit que le n devait quitter le membre d'extrême droite ?

Après tout, vous ne devez pas avoir peur des calculs, puisque vous êtes en prépa MPSI[2].

Mais il est plus simple de travailler par conditions nécessaires (voir la question sur $\varphi(M) = A$ plus loin).
On passe à la trace (opérateur linéaire : $Tr(A+\lambda.B) = Tr(A) + \lambda.Tr(B)$, même quand λ est un réel de la forme $Tr(M)$) en raisonnant par équivalences

$$M + Tr(M).U = 0_{4,4} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} M & +Tr(M).U & = & 0_{4,4} \\ Tr(M) & +Tr(M).Tr(U) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} M & +Tr(M).U & = & 0_{4,4} \\ Tr(M) & +2.Tr(M) & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$M + Tr(M).U = 0_{4,4} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} & Tr(M) & = & 0 \\ M & +0.U & = & 0_{4,4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow M = 0_{4,4}$$

La seule matrice du noyau de φ est la matrice nulle.

Seule difficulté : se souvenir de la définition du noyau : question de cours.
Raisonner proprement par équivalences et pas avec ds « je passe à la trace, puis si j'y pense, je remonte en haut ».

Un théorème du cours nous dit alors que l'endomorphisme φ est injectif.

Et si on est flemmard, en raisonnant sur les dimensions, on dit qu'il est bijectif de $(M_4\mathbb{R}), +, .)$ dans lui même.

On résout l'équation $\varphi(M) = A$ avec la même rigueur des équivalences pour ne rien perdre

$$M + Tr(M).U = A \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} M & +Tr(M).U & = & A \\ Tr(M) & +Tr(M).Tr(U) & = & Tr(A) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} M & +Tr(M).U & = & 0_{4,4} \\ Tr(M) & +2.Tr(M) & = & Tr(A) \end{array} \right\}$$

$$M + Tr(M).U = 0_{4,4} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} & Tr(M) & = & Tr(A)/3 \\ M & +\frac{Tr(A)}{3}.U & = & A \end{array} \right\}$$

L'unique solution est donc $M = A - \dfrac{Tr(A)}{3}.U$. Mais par prudence, on synthétise :

$$\varphi\Big(A - \frac{Tr(A)}{3}.U\Big) = \Big(A - \frac{Tr(A)}{3}.U\Big) + Tr\Big(A - \frac{Tr(A)}{3}.U\Big).U = \Big(A - \frac{Tr(A)}{3}.U\Big) + \Big(Tr(A) - \frac{Tr(A)}{3}.2\Big).U = A - 0.U = A$$

Ceci nous confirme d'ailleurs en une fois injectivité et surjectivité de φ de $M_4(\mathbb{R}), +, .)$ dans lui même.

Et on a une pensée émue pour les masochistes qui auront écrit seize coefficients et tout résolu comme des brutes.
Mais on a besoin de ceux là aussi pour réussir les concours.

On résout l'équation $M.X = 0_4$ en donnant un nom aux quatre composantes du vecteur X. On trouve quatre équations, mais en fait, il y a trois fois la même : $x + t = 0$ (trois premières lignes) et d'autre part $x + y + z + t = 0$ (dernière ligne). On trouve $t = -x$ et $z = -y$. On a la forme des vecteurs, puis une bas :

$$K = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \\ -t \end{pmatrix} \mid (x,\ y) \in \mathbb{R}^2\} = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

Les deux vecteurs de la formule ci dessus (indépendants et engendrant K) en forment une base.

On pouvait aussi lire la matrice U en disant : ce sont les images des quatre vecteurs de la base canonique. Et on a $f(\overrightarrow{e_1}) = f(\overrightarrow{e_4})$ (première et dernière colonne), donc $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_4}$ est dans le noyau. De même les colonnes d milieu donnent $f(\overrightarrow{e_2}) = f(\overrightarrow{e_3})$ puis $f(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{0}$. On a un autre vecteur dans le noyau. On a donc au moins une dimension 2. Resterait à la majorer pour conclure.

Pour l'autre sous-espace, on résout $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & +t & = & (1+\sqrt{3}).x \\ x & & & +t & = & (1+\sqrt{3}).y \\ x & & & +t & = & (1+\sqrt{3}).z \\ x & +y & +z & +t & = & (1+\sqrt{3}).t \end{array} \right|$. On trouve $t = \sqrt{3}.x$ (L_1) puis $y = z = x$ (L_2 et L_3). On doit ensuite vérifier dans L_4 : $3.x + \sqrt{3}.x = (1+\sqrt{3}).\sqrt{3}.x$. x n'est pas forcé d'être nul. Tous les

2. *quand on inventera la prépa MI, on en rediscutera*

multiples du vecteur X_1 sont dans ce second sous-espace. Pour celui avec $1-\sqrt{3}$, on a presque la même chose avec celui qui s'appelle X_2 :

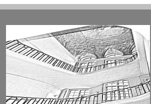
$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

On a des vecteurs vérifiant $U.X = 0.X$, des vecteurs vérifiant $U.?X = \lambda.X$ avec $\lambda = 1 \pm \sqrt{3}$. On a des vecteurs propres. Ce seront les colonnes de la matrice de passage P. Et les coefficients de Dseront les valeurs propres 0 et $1 \pm \sqrt{3}$.

L'élève non matheux a résolu $U.P = P.D$ avec des coefficients partout, comme la première fois où il aura croisé la diagonalisation en cours. Gentil, mais pas très efficace. Il aura le bac.
L'élève non matheux a appris par cœur dans les livres $\det(U - \lambda.I_4)$ pour trouver les valeurs propres puis $M.U = \lambda.U$ pour chaque colonne de D. Pas très efficace non plus.
L'élève matheux aura cherché « diagonaliser, c'est quoi ? c'est trouver une base de vecteurs propres, et j'ai fait quoi ? ».

On a bien $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$
On vérifie que P est inversible en calculant son déterminant.

Le premier qui me dit D n'est pas inversible, donc U n'est pas diagonalisable, je lui fais bouffer tous ses cours d'histoire du lycée et du collège, pour lui apprendre à vivre et à raisonner.



Générateur de nombres premiers. IS23

De quoi va-t-on avoir besoin ? D'un test de primalité :

`def test(n) :`
`....for k in range(2, n) :`
`........if n% k == 0 :`
`............return False`
`....return True`
	`def test(n)  :`
	`...for k in range(2,`
	`int(sqrt(n))+2)  :`
	`........if n%k == 0  :`
	`............return False`
	`....return True`
		`def test(n)  :`
		`....d = 2`
		`....while n%d  != 0 and d*d <= n  :`
		`........d += 1`
		`return d*d > n`

D'une procédure qui cherche le premier nombre premier après un entier donné
 	
Enfin, un constructeur :
	`def next_prime(N) :`
	`....n = N`
	`....while not(premier(n)) :`
	`........n += 1`
	`....return n`
		`def liste(n)  :`
		`....L = [3]`
		`....while len(L)< n  :`
		`........L.append(next_prime(L[-1]**3)`
		`....return L`

Évidemment, on pourra/devra optimiser ces procédures pour gagner du temps, car la suite grimpe vite :
`[3, 29, 24391, 14510715208481, 3055388613462301256452407743005777548691, ...]`

On suppose donc construite la suite de Mills infinie.
Chaque a_n et chaque b_n existe.
Si on doit comparer a_n et a_{n+1}, autant comparer des puissances bien choisies, puisque ce sont des réels positifs. On va donc comparer $(a_n)^{3^{n+1}}$ et $(a_{n+1})^{3^{n+1}}$.
On effectue

$$(a_{n+1})^{3^{n+1}} - (a_n)^{3^{n+1}} = (p_{n+1}) - (a_n)^{3^n.3} = (p_{n+1}) - ((a_n)^{3^n})^3 = (p_{n+1}) - (p_n)^3$$

C'est positif par construction
De la même façon, pour la suite (b_n)

$$(b_{n+1})^{3^{n+1}} - (b_n)^{3^{n+1}} = (p_{n+1}+1) - (b_n)^{3^n.3} = (p_{n+1}+1) - (p_n+1)^3$$

p_{n+1} est plus petit que $(p_n+1)^3$ par construction. mais il ne peut y être égal, car $(p_n+1)^3$ n'est pas un nombre premier. la différence est donc bien négative.

Par construction aussi, on a $a_n \leqslant b_n$ pour tout n.

On écrit un grand jeu d'inégalités $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b_0$
La suite (a_n) est croissante, majorée par le réel b_0, elle converge vers une limite α qui majore tous les a_n.

De même,b_n converge vers son plus grand minorant, qu'on va noter β.
Mais on a donc par passage à la limite dans$a_n \leqslant b_n$: $\alpha \leqslant \beta$.
Mais on a aussi $a_n \leqslant \alpha$ pour tout n (plus petit minorant) et $b_n \geqslant \beta$ pour tout n aussi.
On a donc $a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$ pour tout n.

On passe à la puissance 3^n (croissante sur $\mathbb{R}^+$) : $(a_n)^{3^n} \leqslant \alpha \leqslant (b_n)^{3^n}$ et donc $p_n \leqslant \alpha^{3^n} \leqslant p_n + 1$.
L'entier p_n et son suivant encadrent α^{3^n}. La partie entière de ce réel vaut $_n$.
Et c'est un nombre premier.

Le nombre de Mills α permet d'engendrer une infinité de nombres premiers.
Mais ça grimpe trop vite pour que les calculs soient même fiables.

Avec la suite des nombres premiers initialisée à 2, on a $\alpha = 1,30637788386....$