LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 1 avril
M.P.S.I.2

2023 2024

TD24

∘0∘
```
def Suite(n) :
....L = [2, 6, 7, 4, 2, *, 5, 4, 8, *, 3, 9, 3, 5, 5]
....return L[n%15]
```
Remplacez les * pour que `Suite` soit la somme d'une suite de période 3 et d'une suite de période 5.

∘1∘ ♡ Explicitez un N_ϵ pour la convergence de $\dfrac{e^n+1}{e^n+5}$ vers 1 quand n tend vers l'infini.

∘2∘ On donne u_0 et on pose $u_{n+1}=(u_n)^3$ pour tout n. Exprimez u_n à l'aide de u_0 et n.
On donne v_0 et on pose $v_{n+1}=(v_n)^n$ pour tout n. Exprimez v_n à l'aide de v_0 et n.

∘3∘ Quand on a une suite réelle (a_n) de limite α non nulle, on montre l'implication $|a_n-\alpha|\leqslant\alpha/2\to|a_n|\geqslant\alpha/2$ en passant par $\alpha-\alpha/2\leqslant a_n\leqslant\alpha+\alpha/2$. Montrez que ce résultat est vrai aussi dans $\mathbb{C}$.

∘4∘ Montrez que de toute suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.
Montrez que de toute suite réelle on peut extraire au moins une sous-suite qui converge (au sens large, soit vers un réel, soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$.
Donnez une suite réelle non bornée, qui admet une sous-suite qui converge vers 1, une vers 0 et une vers -1.
Montrez que de toute suite complexe convergente, on peut extraire une sous-suite bornée.

∘5∘ La suite (u_n) est définie par $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{2.\sqrt{n+u_n}}$. Donnez sa limite quand n tend vers l'infini.

∘6∘ On pose $0<a_0\leqslant b_0$ et pour tout n, on pose $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $a_{n+1}=\sqrt{a_n.b_{n+1}}$.
Montrez qu'elles convergent vers la même limite λ.
On pose $d_n=\dfrac{b_n}{a_n}$. Prouvez $d_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+d_n}{2}}$.
Montrez : $b_n=a_n.ch(2^{-n}.\alpha)$ et $2^n.a_n.sh(2^{-n}.\alpha)=a_0.sh(\alpha)$ pour tout n (α est une mesure que vous préciserez).
Déduisez $\lambda=\dfrac{\sqrt{(b_0)^2-(a_0)^2}}{\alpha}$ et $(b_n-a_n)\sim_{n\to+\infty}a_0.\alpha.sh(\alpha).2^{-n}$.

∘7∘ Montrez : $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}|i^2-j^2|=\frac{n^2.(n+1).(n+2)}{3}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}|i-j|^2=\frac{n.(n+1)^2.(n+2)}{6}$ (voyez tout ça dans un tableau à double entrée et sommez en colonne ou en ligne).

∘8∘ On définit $f=x\longmapsto\left\{\begin{array}{lll}1 & si & \exists(a,b)\in\mathbb{Z}^2\quad x=a+b.\sqrt{2}\\ 0 & sinon & \end{array}\right|$. Acceptez vous de représenter graphiquement f ?
Montrez que f est périodique de période 1.
Montrez que f n'est pas périodique de période $\dfrac{1}{2}$.

∘9∘ ♡ On veut montrer que pour n entier, $\sqrt{n}$ est soit entier (comme $\sqrt{16}$), soit irrationnel (comme $\sqrt{7}$).
On suppose $\sqrt{n}=\dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux. Montrez qu'il existe a et b entiers vérifiant $a.n.q+b.p=\sqrt{n}$.
Concluez.

∘10∘ On définit : $u_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}.u_n+\sqrt{3}-2}{2.u_n+\sqrt{6}}$. Montrez que u est bornée. Rappel : $4.\cos(\pi/12)=\sqrt{2}+\sqrt{6}$.
Rappel : on compose les homographies en multipliant les matrices.

∘11∘ Vrai ou faux : la somme de deux suites non bornées est non bornée.
Vrai ou faux : la somme de deux suites réelles positives non majorées est non majorée.

∘12∘ ♡ Deux suites sont liées par $\left\{\begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & u_n & + & v_n \\ v_{n+1} & = & 4.u_n & + & v_n \end{array}\right|$ avec u_0 et v_0 donnés.
Montrez que si l'on a $\exists p \in \mathbb{N},\ u_p = v_p = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = 0$.
Montrez que si l'on a $\exists p \in \mathbb{N},\ u_p = u_{p+1} = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = 0$.
Montrez que si l'on a $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ p \neq q,\ u_p = u_q = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = 0$.

∘13∘ L'exercice est "*limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt[n]{n!}$*". L'élève Agin-Tensiff passe par la forme exponentielle : $\exp\left(\dfrac{\ln(n!)}{n}\right)$.
Il sépare la factorielle : $\dfrac{\ln(n) + \ln(n-1) + \ldots + \ln(1)}{n}$. Chacun des termes de la somme *(de $\ln(n)/n$ à $\ln(1)/n$)* tend vers 0 ; la somme tend vers 0. Par continuité de l'exponentielle, $\sqrt[n]{n!}$ converge vers 1.
Pourtant, l'ordinateur donne à 10^{-1} près

$\sqrt[20]{20!}$	$\sqrt[30]{30!}$	$\sqrt[40]{40!}$	$\sqrt[50]{50!}$
8.3	12.0	15.7	19.4

.
Alors qui a tort ? Que doit on trouver ?
Tiens, au fait, et si ça avait été à vous de calculer avec Python $\sqrt[n]{n!}$ pour n "*grand*", qu'auriez vous fait ?
Il parait qu'avec une somme de Riemann droite pour $\ln(t)$ entre 0 et 1 on a un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$. A vous de le faire.

∘14∘ Montrez que la série de terme général $\left(\dfrac{1}{(\ln(n))^2}\right)_{n\geqslant 2}$ diverge (comparez à la série harmonique).

∘15∘ Montrez que si $((a_n)^2)$ est sommable, alors $(a_n.a_{n+1})$ l'est aussi.
Indication pour que vous ne partiez pas dans des trucs « si la suite est croissante... si la suite est décroissante... et donc j'ai traité tous les cas »[1], pensez à la comparaison des moyennes...

∘16∘ Montrez : $\displaystyle\sum_{0\leqslant p\leqslant q} \frac{1}{2^{p+q}} = \frac{8}{3}$ (et montrez donc que la famille est sommable).
Calculez $\displaystyle\sum_{0\leqslant p\leqslant q} \frac{(-1)^{p-q}}{2^{p+q}}$.

∘17∘ ♡ Décomposez $((-1)^n)_n$ comme somme d'une suite réelle croissante et d'une suite réelle décroissante en donnant une formule explicite pour le n^{ieme} terme de chacune.
Même question avec $((-1)^n.n)_n$.

∘18∘ ♡ Prolongez par continuité en 0 et en 1 $x \longmapsto \dfrac{x-1}{\ln(x)}$.
♡ En considérant comme valide le théorème de Fubini ($\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=c}^{y=d} f(x, y).dy\right).dx = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x, y).dx\right).dy$),
montrez : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}.dx = \ln(2)$ (on pourra faire intervenir l'application $(x,\ y) \longmapsto x^y$ sur $[0,\ 1]$).
Calculez pour a et b positifs $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)}.dx$ après avoir prolongée en 0 et en 1 l'application sous le signe somme.

∘19∘ Donnez le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, puis celui de son inverse.
Rappel : $\chi_M(X) = \det(M - X.I_n)$. Et pour $\chi_{M^{-1}}$ aurez vous besoin de calculer M^{-1} ? Ca dépend de « je suis matheux ou pas ».

∘20∘ ♡ On pose $u_n = n^{1/n}$. Déterminer le plus grand terme de cette suite et sa limite.

1. eh, les suites ni croissantes ni décroissantes, ça existe !

∘21∘ Calculez module et argument de $2^{i.\pi/3}$. Calculez module et argument de $e^{(e^{i.\pi/3})}$. Calculez module et argument de $(e^e)^{i.\pi/3}$.

∘22∘ Pouvez vous trouvé les quatre erreurs qu'il y à dans cette phrases ?

∘23∘ Montrez que $((1),\ ((-1)^n))$ est une base de l'espace des suites périodiques de période 2.

∘24∘ Montrez que toute suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ bornée admet une sous-suite périodique.

∘25∘ Prouvez que de toute suite de période 5 *(exactement)* on peut extraire une suite de période 11 *(exactement)*.

∘26∘ ♡ On pose : $u_n = (-1)^n.(2.n+1)$ pour tout n. Calculez $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour n de 0 à 7. Montrez que la suite u diverge, de même que sa moyenne de Cesàro. Montrez que la moyenne de Cesàro de sa moyenne de Cesàro converge.
Donnez une suite dont la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro converge vers 1 sans que sa moyenne de Cesàro ne converge.
♣ Donnez une suite dont la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro converge vers 1 sans que la moyenne de Cesàro de sa moyenne de Cesàro ne converge.
Rappel : la moyenne de Cesàro de la suite (a_n) est la suite (c_n) définie par $c_{n+1} = \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1}$.

∘27∘ ♣ Créez une suite réelle positive non bornée dont la moyenne de Cesàro converge vers 0.

∘28∘ Trouvez des couples de suites servant d'exemple pour chacune des quatre cases :

	$u_n - v_n \to_{n\to+\infty} 0$	$u_n - v_n \not\to_{n\to+\infty} 0$
$u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$		
$u_n \not\sim_{n\to+\infty} v_n$		

∘29∘ ♡ Montrez qu'une suite complexe est périodique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

∘30∘ On sait que si u et v sont bornées, alors $u.v$ l'est aussi. Montrez que la réciproque n'est pas vraie *(peut on avoir même "ni u ni v n'est bornée" ?)*.
Montrez que si $u+v$ et $u.v$ sont bornées, alors u et v le sont aussi.

∘31∘ Frais ou veau :
∘1∘ Si il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers α et une sous-suite de (b_n) qui converge vers β, alors il existe une sous-suite de $(a_n + b_n)$ qui converge vers $\alpha + \beta$?
∘2∘ Si toutes les suites extraites de (a_n) convergent, alors (a_n) converge.
∘3∘ Si il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers α alors il existe une sous-suite de $([a_n])$ qui converge vers $[\alpha]$.
∘4∘ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^2)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou -1.
∘5∘ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^2)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou une sous-suite de (a_n) qui converge vers -1.
∘6∘ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^3)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou -1.

∘32∘ ♡ Soit a une suite réelle positive ; on note A la série associée ($A_N = \sum_{k=0}^{N} a_k$). Montrez que $(A_{2.n})$ converge si et seulement si (A_n) converge.
Et si on enlève « positive », est ce encore vrai ?

∘33∘ On note E l'ensemble des suites réelles périodiques. Montrez que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel.
Montrez que tout élément de E admet une sous-suite convergente.

Pour tout u dans E, on note $\sigma(u)$ la suite (u_{n+1}). Montrez que $\sigma(u)$ est dans E et que σ est une application linéaire. Montrez que ses seules valeurs propres sont 1 et -1 et donnez le sous-espace propre associé à chacune. Aurait on pu trouver d'autres valeurs propres pour des suites complexes ?
Pour tout u dans E, on note $\varphi(u)$ la suite $(u_{2.n})$. Montrez que $\varphi(u)$ est dans E et que φ est une application linéaire.
Pour tout n, on note $\zeta(u)$ la suite de terme général $u_{2.[n/2]}$. Montrez que l'opérateur ζ est linéaire de E dans E et donnez son spectre.

Pour tout n, on note $\psi(u)$ la suite obtenue en permutant deux à deux les termes de la suite u : $(u_1,\ u_0,\ u_3,\ u_2,\ u_5,\ u_4, \ldots)$.
Donnez une formule générale pour $\psi(u)_n$ *(et expliquez pourquoi la notation $\psi(u_n)$ n'a aucun sens)*. Montrez que ψ est une application linéaire de E dans E. Donnez ses valeurs propres et la dimension de chaque sous espace propre.
$\overrightarrow{u}$ vecteur propre de f c'est $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\exists\lambda,\ f(\overrightarrow{u}) = \lambda.\overrightarrow{u}$.
λ valeur propre de f c'est $\exists\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{O},\ f(\overrightarrow{u}) = \lambda.\overrightarrow{u}$.

∘34∘ ♡ Vrai ou faux : si la suite (a_n) a pour moyenne de Cesàro (c_n) alors la suite extraite $(a_{2.n})$ a pour moyenne de Cesàro la suite $(c_{2.n})$?

∘35∘ ♡ Vers quoi convergent *(si elles convergent)* ?

1	2	3	4	5	6
$\left(\dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}}\right)$	$\left(\dfrac{3^n+2^{2.n+1}}{3^n-4^n}\right)$	$(\sqrt[n]{n^2})$	$\left(\dfrac{e^n}{n^n}\right)$	$\left(\dfrac{e^{2.n}}{n^n}\right)$	$\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}.k!\right)$

∘36∘ ♠ Soit (a_n) une suite réelle. On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p \geqslant n,\ a_p \leqslant a_n\}$.
Déterminez A si (a_n) est croissante.
Déterminez A si (a_n) est décroissante.
On suppose A infini. On pose alors $n_0 = Min(n \mid n \in A\}$, $n_1 = Min(n \mid n \in A \ et\ n > n_0\}$ et plus généralement $n_{k+1} = Min(n \mid n \in A\ et\ \ > n_k\}$.
Montrez que chaque n_k existe.
Montrez que la suite $k \longmapsto n_k$ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et que la suite (a_{n_k}) est décroissante.

On suppose A fini. Montrez $\exists K_0,\ \forall,,\ (n \geqslant K_0 \Rightarrow (\exists p > n,\ a_p > a_n)$.
Déduisez $\exists K_1 > K_0,\ a_{K_1} > a_{K_0}$ puis $\exists K_2 > K_1,\ a_{K_2} > a_{K_1}$.
Construisez une suite (a_{K_i}) extraite de (a_n), strictement croissante.

∘37∘ On suppose $(a_n + b_n) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$ et $(e^{a_n} + e^{b_n}) \longrightarrow_{n\to+\infty} 2$. Que pensez vous du raisonnement : on note α la limite de a et β la limite de b. On a alors $a = -b$ et $e^a + e^b = 2$; on déduit $ch(a) = 1$ puis $a = 0$ et $b = 0$.
En quoi ce « raisonnement » est il faux ? Aboutissez quand même au bon résultat.

∘38∘ Ça vous fait quel effet de savoir que vous êtes suspendu à la terre, retenu fort heureusement grâce à la gravitation qui vous empêche de tomber ?
Au fait, « galaktos » en grec ça veut dire lait. Quel rapport avec galaxie ?

∘39∘ Un élève donne les définitions suivantes de la convergence d'une suite :

`a`	$\forall\varepsilon \geqslant 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_\epsilon) \Rightarrow \lvert u_n - a\rvert \leqslant \varepsilon$
`b`	$\forall\varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_\epsilon) \Rightarrow \lvert u_n - a\rvert \leqslant \varepsilon$
`c`	$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall\varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N) \Rightarrow \lvert u_n - a\rvert \leqslant \varepsilon$
`d`	$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \leqslant N_\epsilon) \Rightarrow \lvert u_n - a\rvert \geqslant \varepsilon$

trouvez l'erreur, et dites ce qu'on peut déduire.

∘40∘ On a donné à Léo les dix chiffres de 0 à 9. Il en a fait quatre nombres : un nombre à un chiffre, un nombre à deux chiffres, un à trois chiffres, un à quatre chiffres. Les quatre sont des carrés parfaits. Pouvez vous refaire la même chose ? Et si on veut toutes les solutions, on prend `Python` ?

∘41∘ Pour tout entier naturel n, on note $s(n)$ le nombre de chiffres premiers dans l'écriture de n (exemple : $s(2019) =$

1^2, $s(1789) = 1$, $s(5435) = 3$). Montrez que la série de terme général $\frac{s(n)}{n^2}$ est croissante et majorée (intégrale $\int_1^n \frac{\ln(t)}{t^2}.dt$?). Écrivez un script Python qui pour N donne calcule la valeur approchée de $\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k^2}$.

∘42∘ Montrez que pour toute suite réelle (u_n) il existe au moins une extraction φ telle que $(\sin(u_{\varphi(n)})$ converge.

∘43∘ Pour tout n, on pose $u_n = \frac{\cos(2.n.\pi/3)}{\sqrt[3]{[n/3]+1}}$. Calculez $u_{3.p} + u_{3.p+1} + u_{3.p+2}$ pour tout entier naturel p. Déduisez que la série de terme général u_n converge *(on distinguera pour* $\sum_{n=0}^{N} u_n$ *suivant la valeur de N modulo 3)*.

Montrez que la série de terme général $(u_n)^3$ diverge.

∘44∘ Donnez une formule explicite pour u_n définie par u_0 donné et $u_{n+1} = \frac{(u_n)^3}{2}$ pour tout n.

∘45∘ Pour toute suite réelle a, on définit sa moyenne de Cezéro par $z_n = \frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.a_k}{n+1}$ pour tout n. Quelle(s) propriété(s) passe(nt) de a à z : bornée, constante, croissante, majorée.
Construisez a pour que z soit constante égale à 1.
Construisez a pour que z soit la suite $((-1)^n)$.

∘46∘ ♡ Pour tout n, on définit $a_n = \binom{3.n}{n}$. Donnez la limite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, puis de $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$ quand n tend vers l'infini.

En appliquant le théorème de 16 arômes, donnez la limite de $\sqrt[n]{\binom{3.n}{n}}$ quand n tend vers l'infini.

∘47∘ Montrez que la série de terme général $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ diverge. Indication : $A_{(2.p+1)^2} - A_{4.p^2}$tend il vers 0 ?

∘48∘ ♡ Le programme officiel nous invite à connaître : $n! = o(n^n)_{n\to+\infty}$.
Mais qu'en est il de $\sqrt{n^n}$face à $n!$?
Qu'en est il de n^n face à $(2.n!)$?
Qu'en est il de $2.n^{2.n}$ face $(2.n)!$?

∘49∘ ♡ Donnez le limite, puis un éventuel équivalent du type $a.n^\alpha$quand n tend vers $+\infty$ pour les formes (indéterminées) suivantes

$(n+1)-n$	$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$	$(n+1)^4-n^4$	$\ln(n+1)-\ln(n)$	$e^{n+1}-e^n$
$(2.n+1)-n$	$\sqrt{2.n+1}-\sqrt{n}$	$(2.n+1)^4-n^4$	$\ln(2.n+1)-\ln(n)$	$e^{2.n+1}-e^n$
$(n^2+1)-n$	$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}$	$(n^2+1)^4-n^4$	$\ln(n^2+1)-\ln(n)$	$e^{n^2+1}-e^n$

∘50∘ ♡ Petit quiz très formateur.
si f est $\boxed{}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $[0,\ +\infty[$ alors elle l'est aussi sur tout $\mathbb{R}$.

Quels mots pouvez mettre dans le cadre :

croissante	continue	monotone
bornée	continue à droite	lipschitzienne

Donnez un argument, ou sinon un contre-exemple.

Même question avec « si f est $\boxed{}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $]0,\ +\infty[$ alors elle l'est aussi sur tout $\mathbb{R}$ ». (pas pareil...).

∘51∘ Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto \frac{1}{\ln(x)-1}$ puis de $x \longmapsto \int_x^{2.x} \frac{dt}{\ln(t)-1}$ *(et ce ne devra pas du tout être les mêmes domaines...)*

∘52∘ ♡ Montrez l'équivalence entre $a_n \sim b_n$ et $b_n = a_n + o(a_n)$.

∘53∘ ♡ Pour tout n, on pose $a_n = n^{\ln(n)}$. Donnez sa limite en $+\infty$.

2. on rappelle que 0 et 1 ne sont ni premiers, ni composés)

La série de terme général $1/a_n$ converge-t-elle ?
Donnez la limite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ quand n tend vers l'infini *(indication :* $\ln(n^2+n).\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$*)*.

◦54◦

Étape 0	la suite	$\left(1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$	converge vers 0
Étape1	la suite	$\left(1, \quad 1, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$	converge vers 0
Étape2	la suite	$\left(1, \quad 1, \quad 1, \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$	converge vers 0
Étape3	la suite	$\left(1, \quad 1, \quad 1, \quad 1 \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$	converge vers 0
Étape4	la suite	$\left(1, \quad 1, \quad 1, \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{32} \quad \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$	converge vers 0
Écrivez la formule pour le terme général à l'étape p.			
Étape$p$	la suite	$\left(1, \quad 1, \quad 1, \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{32} \quad \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$	converge vers 0
Faites tendre p vers $+\infty$.			
	la suite	$\left(1, \quad 1, \quad 1, \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots 1, \ldots\right)$	converge vers 0

Euh, il y a une erreur, là !

◦55◦ Montrez que si $(a_n)^2+(b_n)^2$converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$, alors (a_n) et (b_n) tendent vers 0.
Ah oui, il 'sagit de suites réelles. Sinon, vous avez un contre-exemple, non ?

◦56◦ (a_n) et (b_n) sont deux suites réelles. On suppose que $(\sin^2(a_n).\sin^2(b_n))$ converge vers 1. Montrez que $(\cos(a_n))$ et $(\cos(b_n))$ convergent vers 0.

◦57◦ Montrez que $\left(\frac{0!+1!+2!+\ldots+(n-2)!}{n!}\right)$, $\left(\frac{0!+1!+2!+\ldots+(n-1)!}{n!}\right)$ et $\left(\frac{0!+1!+2!+\ldots+n!}{n!}\right)$ convergent et donnez leur limite.

◦58◦ On veut montrer que si (a_n) et (b_n) (suites réelles) convergent vers α et β alors $(Min(a_n,\ b_n))$ converge vers $Min(\alpha,\ \beta)$.
Première méthode, par disjonction de cas.
On suppose $\alpha<\beta$. Montrez qu'à partir d'un certain rang, on a $Min(a_n,\ b_n))=b_n$ et concluez.
On suppose $\alpha>\beta$. Montrez qu'à partir d'un certain rang, on a $Min(a_n,\ b_n))=a_n$ et concluez.
On suppose $\alpha=\beta$. Concluez.

Deuxième méthode. Utilisez une formule du cours pour $Min(a,\ b)$.

◦59◦ Soit f continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. On la suppose (à tort, je sais, mais on va raisonner par l'absurde) non bornée.
Montrez que pour tout n, $\{x\in[a,\ b]\mid f(x)\geqslant n\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide bornée. Déduisez qu'elle admet une borne inférieure qu'on va noter $a_n$et une borne supérieure qu'on va noter b_n.
Montrez que la suite (a_n) est croissante, et que la suite (b_n) est décroissante etmajore (a_n).
Déduisez que les deux suites convergent vers deux réels α et β (qui pourront être égaux, ça ne me gène pas).
Montrez : $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=+\infty$. Concluez.
Qu'avez vous re-démontré ?

◦60◦ Montrez que si (a_n) est croissante à partir d'un certain rang, alors elle est minorée.

◦61◦ On définit : $f=x\longmapsto \sqrt[\log_{10}(x)]{x}$. Représentez graphiquement f et calculez $\int_1^2 f(t).dt$.

◦62◦ a est une suite réelle positive. On suppose : $a_n+(a_n)^2=o(1)_{n\to+\infty}$, montrez $a_n=o(1)_{n\to+\infty}$.
b est une suite réelle. Montrez qu'on peut avoir $b_n+(b_n)^2=o(1)_{n\to+\infty}$ sans avoir pour autant $b_n=o(1)_{n\to+\infty}$.
b est une suite réelle. Montrez qu'on peut avoir $c_n+(c_n)^2=o(1)_{n\to+\infty}$ sans avoir pour autant « (c_n) converge ».

◦63◦ Sachant$\sqrt{0,44444\ldots}=\frac{p}{q}$ (irréductible), calculez $p+q$.

∘64∘ J'ai acheté deux hexaèdres réguliers (beh si : des dés à six faces) non équilibrés, mais tout deux du même modèle (mêmes probabilités pour chaque face). Je les ai lancés tant de fois que le tableau suivant me donne la probabilité d'obtenir les sommes de 2 à 12 :

$P(A+B=2)$	$P(A+B=3)$	$P(A+B=4)$	$P(A+B=5)$	$P(A+B=6)$	$P(A+B=7)$	$P(A+B=8)$	$P(A+B=9)$	$P(A+B=10)$	$P(A+B=11)$	$P(A+B=12)$
$1/64$	$1/16$	$1/16$	$3/32$	$7/32$	$3/32$	$13/64$		$7/64$	$1/32$	$1/64$

Pouvez vous retrouver ?

∘65∘ On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2.u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Montrez que la suite (u_n) existe et prouvez $u_n \geqslant 2^n$ pour tout n.
On pose $v_n = 2^{-n}.u_n$. Calculez $v_{n+1} - v_n$. Montrez que (v_n) est croissante, majorée. déduisez l'existence d'un réel λ vérifiant $u_n \sim_{n\to+\infty} \lambda.2^n$.
Écrivez un script Python qui détermine λ à 10^{-3} près.

∘66∘ Complétez : $\forall x \in \mathbb{R},\ (\text{☻} \leqslant x \leqslant 5) \Leftrightarrow (|x - \text{☺}| \leqslant 4)$ / $\forall x \in \mathbb{R},\ (|x-6| \leqslant \text{♪}) \Rightarrow (8 \geqslant x \geqslant \text{♫})$.

∘67∘ Associez à chaque résultat faux son contre-exemple, et montrez que c'en est bien un :

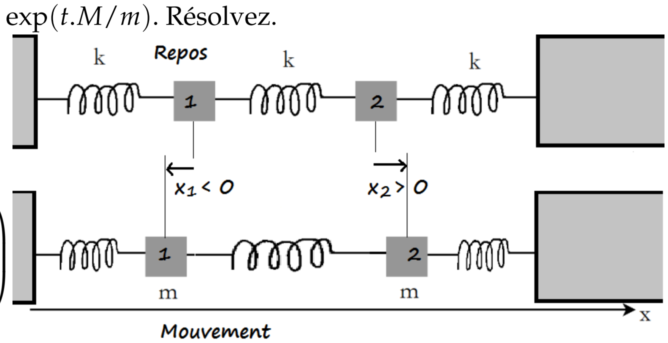
$a_n \sim b_n \Rightarrow e^{a_n} \sim e^{b_n}$ A	$a_n \sim b_n \Rightarrow \sin(a_n) \sim \sin(b_n)$ B	$a_n \sim b_n \Rightarrow \ln(a_n) \sim \ln(b_n)$ C	$a_n \sim b_n \Rightarrow (a_n - b_n \to 0)$ D	$a_n \sim b_n \Rightarrow (1+a_n) \sim (1+b_n)$ E
α $a_n = n$ et $b_n = n+\pi$	β $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ et $b_n = \frac{n+1}{n}$	γ $a_n = \frac{1-n}{n}$ et $b_n = \frac{2-n}{n}$	δ $a_n = n^2$ et $b_n = n^2 - n$	ε $a_n = n^2$ et $b_n = n^2 - n$

∘68∘ On dispose trois ressorts (même constante de raideur k) et deux masses (identiques $m_1 = m_2$) sur une tige entre deux points fixes A et B (sur une tige dont la réaction compense le poids). Les mesures algébriques x_1 et x_2 sont mesurées par rapport aux positions au repos. Justifiez $U' = M.U$. (avec $a = \sqrt{k/m}$). Montrez que M a pour spectre $\{i.a,\ -i.a,\ i.\sqrt{3}.a,\ -i.\sqrt{3}.a\}$. Diagonalisez M. Calculez $\exp(t.M/m)$. Résolvez.

$$U = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2.a^2 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 & -2.a^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ 3^5 = 243$$

avec $a = \sqrt{k/m}$, $P = \begin{pmatrix} i.a & & -i.a.\sqrt{3} & i.a.\sqrt{3} \\ i.a & -i.a & i.a.\sqrt{3} & \\ 1 & 1 & & -1 \\ & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$5^6 = 15625$



∘69∘ Source : Centrale PC.

I∼0) On note UP l'ensemble des suites réelles ultimement périodiques ($\exists R \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant R,\ a_{n+p} = a_n$). Montrez que c'est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .)$. Est il de dimension finie ?

II∼0) Montrez que toute suite ultimement périodique (a_n) est bornée.
II∼1) Déduisez que si (a_n) est ultimement périodique et x dans $[0,\ 1[$ alors la famille $(a_n.x^n)$ est sommable, et montrez que sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.x^k$ est une fraction rationnelle en x.

III∼0) On définit la suite de Fivebonacci : $FV_0 = FV_1 = 1$ et $FV_{n+2} = (FV_{n+1} + FV_n)\%5$. Calculez ses vingt premier termes, et montrez qu'elle est ultimement périodique (période ?).
III∼1) Calculez $\sum_{k=0}^{+\infty} FV_k.x^k$ pour tout x de $[0,\ 1[$.

IV∼0) On définit la suite (a_n) par $a_0 = 1$, $a_{2.n} = a_n$ et $a_{2.n+1} = -a_n$ pour tout n. Déterminez $(a_n)_{n\leqslant 30}$.
IV∼1) Écrivez un script Python qui pour N donné retourne la liste $[a_0, \dots a_N]$.
IV∼2) Montrez que pour tout x de $[0,\ 1[$, la famille $(a_n.x^n)$ est sommable. On pose alors $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$.
IV∼3) Montrez que $S(x^2)$ existe aussi et prouvez : $S(x) = (1-x).S(x^2)$.

IV~4) Montrez que pour tout x de $[0,\ 1[$: $\left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1-x^{(2^k)})\right)$ est décroissante, minorée, et convergente, et montrez que sa limite est justement $S(x)$.
IV~5) Étudiez pour n donné $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{S(x)}{(1-x)^n}$.
IV~6) Déduisez que a n'est pas ultimement périodique.

V~0) On définit un opérateur : $f \longmapsto \phi(f) = \left(x \longmapsto \displaystyle\int_0^x t.f(t).dt\right)$ sur l'espace E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que ϕ est un endomorphisme de $(E, +, .)$ (ne vous trompez pas sur les étages).
V~1) Résolvez l'équation $\phi(f) = (x \longmapsto 0)$ en pensant à dériver.
V~2) Déduisez que ϕ est injectif. ϕest il bijectif de $(E, +, .)$ dans $(E, +, .)$?
V~3) Pour α réel, résolvez l'équation $\phi(f) = \alpha.f$ d'inconnue f. Donnez le spectre de ϕ.

VI~0) Soit f continue et bornée, on pose $M = Sup(|f(t)| \mid t \in \mathbb{R})$. Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\phi(f)(x)| \leqslant M.\dfrac{x^2}{2}$.
VI~1) On définit (f_n) par $f_0 = f$ et $\forall n,\ f_{n+1} = \phi(f_n)$. Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2.n}}{2^n.n!}.M$.

VII~0) On choisit à présent et jusqu'à la fin $f = \sin$. Explicitez f_1 et f_2.
VII~1) Montrez sans récurrence pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$: $\displaystyle\int_0^x t^3.f_{n-1}(t).dt = x^2.f_n(x) - 2.f_{n+1}(x)$.
VII~2) Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$: $f_{n+1}(x) = (2.n+1).f_n(x) - x^2.f_{n-1}(x)$.
VII~3) Pour p entier donné, on note F_p l'espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à p et on définit $H = (P,\ Q) \longmapsto (P' - Q,\ P + Q')$. Montrez que H est un endomorphisme de $F_p \times F_p$. Donnez son noyau. Montrez que H est un automorphisme de $F_p \times F_p$.
VII~4) Montrez : $H(S_p \times A_p) = A_p \times S_p$ (où S_p désigne le sous-espace des fonctions paires de F_p et A_p le sous-espace des fonctions impaires de F_p).

VIII~0) Montrez que pour tout n il existe un unique couple $(P_n,\ Q_n)$ dans $S_n \times A_n$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sin(x) \times P_n(x) + \cos(x) \times Q_n(x)$.
VIII~1) Explicitez P_n et Q_n pour n de 0 à 2 (inclus).

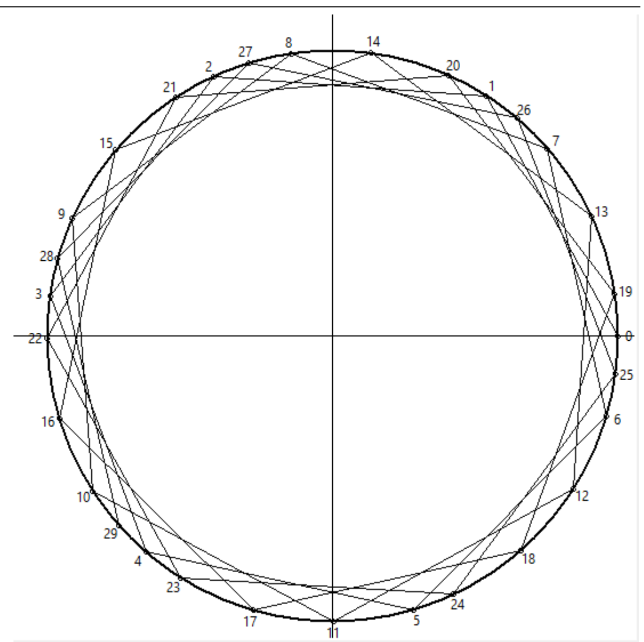
VIII~2) Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$: $P_{n+1}(x) = (2.n+1).P_n(x) - x^2.P_{n-1}(x)$.
VIII~3) Déduisez que les P_n sont tous à coefficients entiers.
VIII~4) On suppose que π est rationnel d'écriture irréductible $\pi = \dfrac{p}{q}$. Montrez que la suite $\left((2.q)^n.P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ est une suite d'entiers. Quelle est sa limite ?
VIII~5) Déduisez que π est irrationnel.

IX~1) On définit à présent : $a_n = 1$ si $\sin(n) > 0$, 0 sinon. Écrivez un script Python qui détermine les n premiers termes de cette suite (avec l'approche du physicien qui fait confiance au calcul avec des flottants).

Déterminez $(a_n)_{n\leqslant 20}$

IX~2) On suppose que cette suite est ultimement périodique. Montrez qu'il existe deux entiers N et T ($T > 0$) tels que $\sin(k.T)$ soit de signe constant pour k plus grand que N. Déduisez que $(\cos(k.T))_{k\geqslant N}$ est une suite positive.

IX~3) On pose $G = \{n.T + 2.k.\pi \mid (n, k) \in \mathbb{Z}^2\} = T.\mathbb{Z} + 2.\pi.\mathbb{Z}$. Montrez que G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ mais qu'il ne peut pas s'écrire $a.\mathbb{Z}$ même pour a bien choisi.



IX~0)

IX∼1) On pose $G^{+} = G \cap \mathbb{R}^{+*}$. Montrez que G^{+} admet une borne inférieure α. Montrez que si α est dans G^{+} alors $G = \alpha.\mathbb{Z}$.
IX∼2) α n'est donc pas dans G^{+}. On suppose $\alpha > 0$. Montrez qu'il existe g et g' dans G^{+} vérifiant $\alpha < g' < g < 2.\alpha$. Déduisez $\alpha = 0$.
IX∼3) Maintenant que l'on sait $\alpha = 0$, montrez que pour tout n il existe g_n dans G vérifiant $0 < g_n < 10^{-n}$.
IX∼4) Soit x un réel. Montrez qu'il existe une suite d'éléments de G qui converge vers x.
IX∼5) Montrez qu'il existe une suite (k_n) d'entiers positifs tels que $(\cos(k_n.T))$ converge vers $-\frac{1}{2}$.
IX∼6) Montrez que $\{\cos(k_n.T) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (ensemble des termes de cette suite) n'est pas de cardinal fini.
IX∼7) Construisez alors une suite (y_n) strictement croissante extraite de (k_n) telle que $\cos(y_n.T)$ converge vers $-\dfrac{1}{2}$.

IX∼8) La suite (a_n) est elle ultimement périodique ?

Vocalisation.
A noir
(Un blanc)
I roux,
U safran
O azur
Nous saurons au jour dit ta vocalisation :
A, noir carcan poilu d'un scintillant morpion
Qui bombinait autour d'un nidoral impur

Caps obscurs ; qui, cristal du brouillard ou du Khan,
Harpons des fjords hautaisn, Rois Blancs, frissons d'anis ?
I carmis, sang vomi, riant ainsi qu'n lis
dans un courroux ou dans un alcool mortifiant ;

U, scintillations, ronds divins du flots marins,
Paix du pâtis, tissus d'animaux, paix du fin
Sillon qu'un fol savoir aux grands fronts imprima ;

O, finitif clairon aux accords d'aiguisoir,
soupirs ahurissant Nadir ou Nirvana :
O l'omicron, rayon violin dans son voir.

ARTHUR RIMBAUD & GORGS PRC

A noir,
E blanc,
I rouge,
U vert,
O bleu : voyelles,
Je dirai quelque jour vos naissances latentes :
A, noir corset velu des mouches éclatantes
Qui bombinent autour des puanteurs cruelles,

Golfes d'ombre ; E, candeurs des vapeurs et des tentes,
Lances des glaciers fiers, rois blancs, frissons d'ombelles ;
I, pourpres, sang craché, rire des lèvres belles
Dans la colère ou les ivresses pénitentes ;

U, cycles, vibrements divins des mers virides,
Paix des pâtis semés d'animaux, paix des rides
Que l'alchimie imprime aux grands fronts studieux ;

O, suprême Clairon plein des strideurs étranges,
Silences traversés des Mondes et des Anges :
— O l'Oméga, rayon violet de Ses Yeux !

ARTHUR RIMBAUD