LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 1 avril
M.P.S.I.2

2023 2024

TD24

◦0◦

```
def Suite(n) :
....L = [2, 6, 7, 4, 2, *, 5, 4, 8, *, 3, 9, 3, 5, 5]
....return L[n%15]
```

Remplacez les * pour que `Suite` soit la somme d'une suite de période 3 et d'une suite de période 5.

Le programme Python crée bien une suite (en tout cas la fonction qui calcule le n^{ieme} terme d'une suite) périodique, de période 15 dont les valeurs successives sont celles de la liste.
Il n'est pas dit qu'elle puisse s'écrire comme somme d'une tri-périodique et d'une penta-périodique.
Raisonnons par condition nécessaire :

α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ
a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
2	6	7	4	2		5	4	8		3	9	3	5	5

On a 13 équations, et huit inconnues... Normalement, ça plante.
Oui, on attaque ça comme un algébriste, c'est à dire qu'on mesure avant de se ruer sur des calculs qu'on ne saura pas interpréter, en se persuadant à tort que « si on fait des calculs, on fait plaisir aux profs »...

$$\begin{array}{cccccccccc}
a & & & & & +\alpha & & & = & 2 \\
& b & & & & & +\beta & & = & 6 \\
& & c & & & & & +\gamma & = & 7 \\
& & & d & & +\alpha & & & = & 4 \\
& & & & e & & +\beta & & = & 2 \\
& b & & & & +\alpha & & & = & 5 \\
& & c & & & & +\beta & & = & 4 \\
& & & d & & & & +\gamma & = & 8
\end{array}$$

huit équations, huit inconnues...
Et pourtant, il y a un problème. Le déterminant est nul.
En effet, il reste une part de liberté.
Il n'y a pas de somme directe. En notant P_k l'espace des suites périodiques de période k, on veut ici que notre suite (vivant dans P_{15} de dimension 15) soit dans la somme $P_3 + P_5$.
Et on a en effet $P_3 + P_5$ et pas $P_3 \oplus P_5$.
On sait : $P_3 \cap P_5 = P_1$ de dimension 1.
On peut ajouter une suite constante à la première et la soustraire à la seconde, la somme doit redonner la même suite.

On peut donc faire une choix arbitraire, tel que $a = 0$.

Le système de huit équations à huit inconnues donne alors

$a = 0$	$b = 3$	$c = 1$	$d = 2$	$e = -1$
$\alpha = 2$	$\beta = 3$	$\gamma = 6$		

Mais ATTENTION. On fait des maths. On raisonne.
La condition est nécessaire. Est elle suffisante ?

2	3	6	2	3	6	2	3	6	2	3	6	2	3	6
0	3	1	2	-1	0	3	1	2	-1	0	3	1	2	-1
2	6	7	4	2		5	4	8		3	9	3	5	5
E	E	E	E	E		E	E	E		V	V	V	V	V

La mention E signifie que c'est le système d'équation qu'on a imposé.
La mention V signifie qu'on vérifie. Et ici, tout va bien (évidemment, j'ai conçu l'exercice à partir des deux suites que j'ai additionnées).

On a retrouvé les deux valeurs qui manquaient :

```
L = [2, 6, 7, 4, 2, 6, 5, 4, 8, 1, 3, 9, 3, 5, 5]
```

Remarque | Un bel exercice où la part calcul est peut être un peu lourde selon certains, mais où la part réflexion algébriste est fondamentale...
Vous l'avez aimé : vous avez l'esprit MP.
Vous l'avez aimé, mais seulement les calculs : vous avez l'esprit PSI.
Vous n'avez pas aimé, mais vous avez compris : vous avez l'esprit PC.
Vous n'avez rien compris, mais vous avez aimé : vous avez l'esprit TSI.
Vous n'avez ni aimé ni compris : vous avez l'esprit ailleurs.

◦1◦ ♡ Explicitez un N_ϵ pour la convergence de $\dfrac{e^n+1}{e^n+5}$ vers 1 quand n tend vers l'infini.

◦2◦ On donne u_0 et on pose $u_{n+1} = (u_n)^3$ pour tout n. Exprimez u_n à l'aide de u_0 et n.
On donne v_0 et on pose $v_{n+1} = (v_n)^n$ pour tout n. Exprimez v_n à l'aide de v_0 et n.

$u_n = (u_0)^{3^n}$ pour tout n par récurrence sur n.
La suite n'est pas géométrique. C'est une faute d'élève vraiment buté que de qualifier de suite géométrique toute suite vérifiant $u_{n+1} = \lambda_n.u_n$, avec un λ_n qui dépend de n...

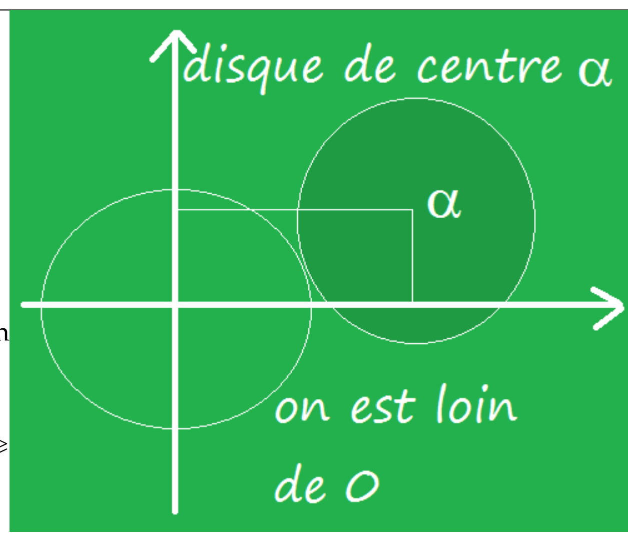
$v_n = 1$ dès que n a dépasse 1. En effet, $v_1 = (v_0)^0 = 1$ et après on y reste.

◦3◦ Quand on a une suite réelle (a_n) de limite α non nulle, on montre l'implication $|a_n - \alpha| \leqslant |\alpha|/2 \Rightarrow |a_n| \geqslant |\alpha|/2$ en passant par $\alpha - \alpha/2 \leqslant a_n \leqslant \alpha + \alpha/2$. Montrez que ce résultat est vrai aussi dans $\mathbb{C}$.

On sait faire sur $\mathbb{R}$ (dans le cas α positif, quitte à remplacer (a_n) par $(-a_n)$:
à partir du rang $N_{\alpha/2}$, on a $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$, ce qui signifie $\alpha - \dfrac{\alpha}{2} \leqslant u_n \leqslant \alpha + \dfrac{\alpha}{2}$.
On obtient d'un côté $\dfrac{\alpha}{2} \leqslant u_n$. et u_n est « loin de 0.

Si α est négatif, on fait de même : à partir du rang $N_{|\alpha|/2}$, on a $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{|\alpha|}{2}$ et on trouve $u_n \leqslant \dfrac{|\alpha|}{2}$, et $u_n$est négatif, « loin de 0 ».
C'est ce qu'on utilise pour montrer que si une suite réelle a une limite non nulle, alors tous les termes de $\dfrac{1}{u_n}$ sont définis à partir d'un certain rang, et « loin de 0 ».

C'est ce qui permet aussi de dire que si f est continue en a avec $\alpha = f(a) \neq 0$, alors sur un intervalle $[a - \eta_{a,|\alpha|/2},\ a + \eta_{a,|\alpha|/2}]$, f reste de signe constant.



Mais dans $\mathbb{C}$, comment passer de « z est proche de α » non nul à « z reste loin de 0 ».
On prend un disque de rayon « la moitié du module » :
$|z-\alpha| \leqslant \dfrac{|\alpha|}{2} \Rightarrow \Big|z\Big| = \Big|-z\Big| = \Big|\alpha - (\alpha - z)\Big| \geqslant \Big||\alpha| - |g-\alpha|\Big| = |\alpha| - |g-\alpha| \geqslant |\alpha| - \dfrac{|\alpha|}{2}$.

◦4◦ Montrez que de toute suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.
Montrez que de toute suite réelle on peut extraire au moins une sous-suite qui converge (au sens large, soit vers un réel, soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$.
Donnez une suite réelle non bornée, qui admet une sous-suite qui converge vers 1, une vers 0 et une vers -1.
Montrez que de toute suite complexe convergente, on peut extraire une sous-suite bornée.

Une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ bornée ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
Par principe des tiroirs, l'une d'entre (qu'on appellera β) elle est prise une infinité de fois. En indexant par ordre

croissant la liste des indices pour lesquels la suite vaut β, on a une extraction. Et la suite extraite est constante, donc convergente.

Sinon, une suite bornée à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est aussi une suite réelle bornée. Elle admet donc au moins une sous-suite qui converge.

On prend une suite quelconque.
Si elle n'est pas majorée, alors on peut extraire une sous-suite qui tend vers $+\infty$.
En gros, il suffit de quantifier « non bornée » : $\forall A,\ \exists n,\ u_n > A$. On pend pour A des nombres de plus en plus grands et le tour est joué (il faut quand même construire $\varphi(n+1) = Inf(k \mid a_k \geqslant 2.a_{\varphi(n)})$).

Si elle n'est pas minorée, on fait de même (en changeant le signe) et on a une sous-suite qui diverge vers $-\infty$.

Dans le cas qui exclut les deux précédents, elle est majorée et minorée. Donc bornée. On utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass.

La suite $\left(\cos\left(n.\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ pend sans arrêt les valeurs 0, 1, -1 (et 0 c'est deux fois plus souvent que les autres).
Sa sous suite $\left(\cos\left((2.n+1).\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ converge vers 0.
Sa sous suite $\left(\cos\left((4.n).\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ converge vers 1.
Sa sous suite $\left(\cos\left((4.n+2).\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ converge vers -1.

Et si vous voulez moins périodique : $\left(2^{-n} + \cos\left((2.n+1).\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

Toute suite complexe convergente est bornée, c'est tout !

∘5∘ La suite (u_n) est définie par $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{2.\sqrt{n+u_n}}$. Donnez sa limite quand n tend vers l'infini.

On ne peut pas dire « je passe à la limite », car rien ne nous dit déjà que u_n a bien une limite. Et les formes sont indéterminées.

On va extraire explicitement u_n de la formule : $2.\sqrt{n+u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$, puis $u_n = \dfrac{1}{4.(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2} - n$.
Sous cette forme, rien n'est évident, le dénominateur tend vers 0, la fraction tend vers l'infini, la forme est indéterminée.
Avant de réduire au dénominateur commun, utilisons la quantité conjugués :

$$u_n = \frac{1}{4.\left(\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^2} - n = \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}{4} - n = \frac{n+1+n+2.\sqrt{n^2+n}-4.n}{4}$$

On simplifie : $u_n = \dfrac{2.\sqrt{n^2+n}-(2.n-1)}{4}$ et on va encore utiliser la quantité conjuguées :

$$u_n = \frac{4.n^2+4.n-(4.n^2-4.n+1)}{4.(\sqrt{4.n^2+4.n}+(2.n+1))} = \frac{8.n-1}{4.(\sqrt{4.n^2+4.n}+(2.n+1))}$$

L'heure est venue pour nous de passer aux équivalents : $u_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{8.n}{4.(2.n+2.n)}$.

La suite est équivalente à une constate non nulle, elle converge vers celle ci : $u_n \longrightarrow_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}$.

On notera que c'est ici une formule qui peut évoquer à la fois une notion de dérivée :
$\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}$ *est un taux d'accroissement de la fonction racine carrée, tandis que* $\dfrac{1}{2.\sqrt{n+u_n}}$ *est la dérivée quelquepart entre n et $n+1$.*

On peut aussi y voir du calcul intégral :

$$\int_{t=0}^{1} \frac{dt}{2.\sqrt{n+t}} = \int_{x=n}^{n+1} \frac{dx}{2.\sqrt{x}} = \left[\sqrt{x}\right]_n^{n+1} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

∘6∘

On pose $0 < a_0 \leqslant b_0$ et pour tout n, on pose $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $a_{n+1} = \sqrt{a_n.b_{n+1}}$.
Montrez qu'elles convergent vers la même limite λ.
On pose $d_n = \dfrac{b_n}{a_n}$. Prouvez $d_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+d_n}{2}}$.
Montrez : $b_n = a_n.ch(2^{-n}.\alpha)$ et $2^n.a_n.sh(2^{-n}.\alpha) = a_0.sh(\alpha)$ pour tout n (α est une mesure que vous préciserez).
Déduisez $\lambda = \dfrac{\sqrt{(b_0)^2 - (a_0)^2}}{\alpha}$ et $(b_n - a_n) \sim_{n\to+\infty} a_0.\alpha.sh(\alpha).2^{-n}$.

Par récurrence évidente, non traitée ici, les suites sont strictement positives.
On montre ensuite $a_n \leqslant b_n$ pour tout n.
C'est initialisé, et ensuite on suppose $a_n \leqslant b_n$ à un rang n quelconque donné, puis on calcule

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \sqrt{b_n.b_{n+1}} - \sqrt{a_n.b_{n+1}} = \sqrt{b_{n+1}}.\Big(\sqrt{b_{n+1}} - \sqrt{a_n}\Big) = \sqrt{b_{n+1}}.\frac{b_{n+1} - a_n}{\sqrt{b_{n+1}} + \sqrt{a_n}}$$

en enchainant comme à chaque fois de petites idées simples.
Enfin, $b_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - \dfrac{a_n + a_n}{2}$ et on utilise l'hypothèse de rang n.

Maintenant qu'on a cette inégalité pour tout n, on calcule $b_{n+1} - b_n$ et on le trouve négatif (c'est $\dfrac{a_n - b_n}{2}$).
On calcule aussi $a_{n+1} - a_n$ ou même $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ puisque tout est positif.

Les suites vérifient $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_1 \leqslant b_0$.
ce ne sont pas encore des suites adjacentes, car il n'est pas évident que $b_n - a_n$ tend vers 0.
Mais on passe par un chemin tout aussi simple : (a_n) est croissante majorée par b_0. Elle converge, on note sa limite α.
(b_n) est décroissante minorée par (a_0), elle converge vers une limite β.
En passant à la limite dans $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, on trouve $\alpha = \beta$.
Les deux suites sont la même limite.

On calcule

$$d_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{b_{n+1}}{\sqrt{a_n.b_{n+1}}} = \sqrt{\frac{b_{n+1}}{a_n}} = \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2.a_n}} = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1 + +\frac{b_n}{a_n}\Big)}$$

Ici, pas de récurrence, c'est un calcul direct.

Les formules $b_n = a_n.ch(2^{-n}.\alpha)$ et $2^n.a_n.sh(2^{-n}.\alpha) = a_0.sh(\alpha)$ se démontrent par récurrence. En posant $\alpha = Argch(b_0/a_0)$.

Dans la formule $2^n.a_n.sh(2^{-n}.\alpha) = a_0.sh(\alpha)$, on a une forme indéterminée avec $2^n.sh(2^{-n}.\alpha)$. Mais si on l'écrit $\alpha.\dfrac{sh(2^{-n}.\alpha)}{2^{-n}.\alpha}$, on a une limite de la forme $\dfrac{sh(t)}{t}$ avec t qui tend vers 0. On l'écrit $\dfrac{sh(t) - sh(0)}{t - 0}$. Elle tend vers $ch(0)$ égal à 1.

On lève l'indétermination et on fait tendre n vers l'infini : $\lambda.\alpha = a_0.sh(\alpha)$. On isole, et on remplace $sh(\alpha)$ en fonction de $th(\alpha)$.

∘7∘

Montrez : $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} |i^2 - j^2| = \frac{n^2.(n+1).(n+2)}{3}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} |i - j|^2 = \frac{n.(n+1)^2.(n+2)}{6}$ (voyez tout ça dans un tableau à double entrée et sommez en colonne ou en ligne).

Partons du plus compliqué : $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} |i^2 - j^2|$. Il y a $(n+1)^2$ termes (i et j varient de manière indépendante).

Séparons en trois $\displaystyle\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} |i^2 - j^2|$, $\displaystyle\sum_{0\leqslant i=j\leqslant n} |i^2 - j^2|$ et $\displaystyle\sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} |i^2 - j^2|$.
Celle du milieu est nulle.
Les deux autres sont égales par symétrie des rôles.
On se concentre sur $\displaystyle\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} (j^2 - i^2)$.

On la découpe en $\displaystyle\sum_{0\leqslant j\leqslant n}\Big(\sum_{i=0}^{j-1}(j^2-i^2)\Big)$.

Pour chaque j, la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{j-1}(j^2-i^2)$ est faite de j termes égaux à j^2 : total j^3

la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} i^2$ réputée pour valoir $\dfrac{(j-1).j.(2.j-1)}{6}$

On somme ensuite ces termes $\dfrac{4.j^3+3.j^2-j}{6}$ en séparant $\dfrac{4}{6}.\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j^3=\dfrac{4}{6}.\dfrac{j^2.(j+1)^2}{4}$

$\dfrac{3}{6}.\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j^2=\dfrac{3}{6}.\dfrac{j.(j+1).(2.j+1)}{6}$

$\dfrac{1}{6}.\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j^3=\dfrac{1}{6}.\dfrac{j.(j+1)}{2}$ (formules du cours)

Et on ré-assemble.

On pouvait aussi voir un tableau tel que

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4
1	1	0	1	2	3
2	2	1	0	1	2
3	3	2	1	0	1
4	4	3	2	1	0

On perçoit bien le découpage en trois

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0		1	2	3	4
1			1	2	3
2				1	2
3					1
4					

,

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0				
1		0			
2			0		
3				0	
4					0

et

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1	1				
2	2	1			
3	3	2	1		
4	4	3	2	1	

Et dans

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1	1				
2	2	1			
3	3	2	1		
4	4	3	2	1	

on peut aussi très vite découper en diagonales

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1	1				
2		1			
3			1		
4				1	

,

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1					
2	2				
3		2			
4			2		

,

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1					
2					
3	3				
4		3			

,

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1					
2					
3					
4	4				

On a n fois le 1, $n-1$ fois le 2, $n-2$ fois le 3 et ainsi de suite.

On calcule donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k).k$ et là le calcul est plus rapide : $n.\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k-\sum_{k=0}^{n} k^2$.

Avec cette même idée, la somme des carrés donne

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	4	9	16
1	1	0	1	4	9
2	4	1	0	1	4
3	9	4	1	0	1
4	16	9	2	1	0

On laisse tomber une diagonale, et on double $2.\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k).k^2$

(oui, en fait, la diagonale est comptée deux fois, mais elle est nulle).

Cette fois, c'est $2.n.\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2-\sum_{k=0}^{n} k^3$. Et on a au final la formule indiquée.

◦8◦ On définit $f = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & \exists(a,b)\in\mathbb{Z}^2 \quad x = a+b.\sqrt{2} \\ 0 & sinon & \end{array} \right|$. Acceptez vous de représenter graphiquement f ?
Montrez que f est périodique de période 1.
Montrez que f n'est pas périodique de période $\frac{1}{2}$.

On se donne x. S'il est de la forme $a+b.\sqrt{2}$, alors $a+1$ s'écrit $(a+1)+b.\sqrt{2}$.
On calcule les deux images : $f(a+b.\sqrt{2}) = 1$ et $f(a+1+b.\sqrt{2}) = 1$.

S'il n'est pas de la forme $a+b.\sqrt{2}$, il en est de même de $a+1$ (raisonnement par l'absurde).

Pourrait elle être périodique de période $\frac{1}{2}$?
On aurait alors $1 = f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right)$.
Ceci signifierait que $\frac{1}{2}$ s'écrirait $a+b.\sqrt{2}$ avec a et b entiers.
Et ça c'est impossible.

Mais pourquoi ? Après tout, en choisissant bien a et b, peut être. Comme avec Bézout.
Mais on aurait alors $1 = 2.a+2.b.\sqrt{2}$ et donc $\sqrt{2} = \frac{1-2.a}{2.b}$. Et $\sqrt{2}$ serait rationnel.
Ou alors b serait nul, mais il y a une contradiction de parité.

◦9◦ ♡ On veut montrer que pour n entier, $\sqrt{n}$ est soit entier (comme $\sqrt{16}$), soit irrationnel (comme $\sqrt{7}$).
On suppose $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux. Montrez qu'il existe a et b entiers vérifiant $a.n.q+b.p = \sqrt{n}$.
Concluez.

La fraction $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ étant supposée irréductible, on peut écrire une identité de Bézout entre p et q :
$\exists(a,\ b)\in\mathbb{Z}^2,\ a.p+b.q = 1$
On la multiplie par $\sqrt{n}$ à droite, par $\frac{p}{q}$ à gauche, ce qui ne change rien : $a.p.\frac{p}{q}+b.p = \sqrt{n}$.
Mais si on a posé $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, on a immédiatement $n = \frac{p^2}{q^2}$ puis $n.q = \frac{p^2}{q}$.
Notre formule devient donc $a.n.q+b.p = \sqrt{n}$.

Le réel $\sqrt{n}$ est donc une combinaison d'entiers, c'est un entier ($(\mathbb{Z},+,.)$ est un anneau).

On a donc prouvé $\forall n,\ (\sqrt{n}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{n}\in\mathbb{Z})$

C'est aussi $\forall n,\ \overline{(n\in\mathbb{Q})}\ ou\ \sqrt{n}\in\mathbb{Z}$.
On reconnaît la formulation « soit entier, soit irrationnel ».

◦10◦ On définit : $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}.u_n+\sqrt{3}-2}{2.u_n+\sqrt{6}}$. Montrez que u est bornée. Rappel : $4.\cos(\pi/12) = \sqrt{2}+\sqrt{6}$.
Rappel : on compose les homographies en multipliant les matrices

Itérer la suite, c'est composer des homographies : $u_n = h\circ h\circ\ldots\circ h(u_0)$.

Composer des homographies, c'est multiplier des matrices : $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3}-2 \\ 2 & \sqrt{6} \end{pmatrix}^n$.

A^{12} est $\begin{pmatrix} -4096 & 0 \\ 0 & -4096 \end{pmatrix}$
En termes d'homographies, $h^{12} = Id$.

Et pour la suite $u_{n+12} = u_n$.

Étant périodique, la suite est bornée.

∘11∘

Vrai ou faux : la somme de deux suites non bornées est non bornée.
Vrai ou faux : la somme de deux suites réelles positives non majorées est non majorée.

La suite (n) n'est pas bornée, de même que la suite $(-n)$. Mais leur somme est bornée. On appelle ceci un contre-exemple.

En revanche, si les deux suites sont positives, on n'a plus le moyen de compenser l'une par l'autre.
Prenons (a_n) et (b_n) positives, et supposons les non majorées.
On traduit en écrivant la négation de « majorée » pour la suite (a_n) :

$$\forall M,\ \exists n,\ a_n > M$$

Mais par positivité de (b_n) on a forcément

$$\forall M,\ \exists n,\ a_n + b_n > M + 0 = M$$

C'est la quantification de $(a_n + b_n)$ non majorée.

On peut aussi partir de (a_n) et (b_n) positives, et prouver une contraposée :
si $(a_n + b_n)$ est majorée, alors (a_n) et (b_n) le sont.
Et ça repose sur $a_n \leqslant a_n + b_n \leqslant M$.

∘12∘

♡ Deux suites sont liées par $\left\{\begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & u_n & + & v_n \\ v_{n+1} & = & 4.u_n & + & v_n \end{array}\right|$ avec u_0 et v_0 donnés.
Montrez que si l'on a $\exists p \in \mathbb{N},\ u_p = v_p = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = 0$.
Montrez que si l'on a $\exists p \in \mathbb{N},\ u_p = u_{p+1} = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = 0$.
Montrez que si l'on a $\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \neq q,\ u_p = u_q = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = 0$.

On suppose à un rang p : $u_p = v_p = 0$.
Alors par exemple au rang $p+1$: $\left\{\begin{array}{rcrcrl} u_{p+1} & = & u_p & + & v_p & = 0 \\ v_{p+1} & = & 4.u_p & + & v_p & = 0 \end{array}\right|$.
Et par récurrence, on propage aux rangs suivants.
proprement : si à un certain rang n supérieur ou égal à p on a $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors on l'a aussi au rang $n+1$ en écrivant $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$.
On a la nullité de tout le monde au delà du rang p.
La récurrence doit aussi remonter, avec l'aide de la matrice inverse :
$\frac{1}{3}.\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$.

Si deux termes u_p et u_{p+1} sont nuls, alors la relation $u_{p+1} = u_p + v_p$ permet de dire que v_p est nul aussi.
Et par la question précédente, tous les termes des deux suites sont nuls.

Si on suppose que deux termes différents de la suite u sont nuls u_p et u_q (avec $q > p$ sans restreindre la généralité), alors on va pouvoir montrer que u_p et v_p sont nuls, et on sera ramené au premier cas.
On écrit $\begin{pmatrix} u_q \\ v_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{q-p} . \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$, ce qui donne $\begin{pmatrix} 0 \\ v_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{q-p} . \begin{pmatrix} 0 \\ v_p \end{pmatrix}$.
Mais la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{q-p}$ est une matrice à coefficients entiers naturels strictement positifs qu'on va noter $\begin{pmatrix} a_{q-p} & b_{q-p} \\ c_{q-p} & d_{q-p} \end{pmatrix}$ sans même les calculer.
La lecture de la première ligne de $\begin{pmatrix} 0 \\ v_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{q-p} & b_{q-p} \\ c_{q-p} & d_{q-p} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ v_p \end{pmatrix}$ donne $v_p = 0$ comme demandé.

Le tout sans même diagonaliser la matrice ni calculer explicitement le terme d'indice n.

∘13∘ L'exercice est "*limite quand* n *tend vers* $+\infty$ *de* $\sqrt[n]{n!}$". L'élève Agin-Tensiff passe par la forme exponentielle : $\exp\left(\frac{\ln(n!)}{n}\right)$.

Il sépare la factorielle : $\frac{\ln(n)+\ln(n-1)+\ldots+\ln(1)}{n}$. Chacun des termes de la somme *(de* $\ln(n)/n$ *à* $\ln(1)/n$*)* tend vers 0 ; la somme tend vers 0. Par continuité de l'exponentielle, $\sqrt[n]{n!}$ converge vers 1.

Pourtant, l'ordinateur donne à 10^{-1} près

$\sqrt[20]{20!}$	$\sqrt[30]{30!}$	$\sqrt[40]{40!}$	$\sqrt[50]{50!}$
8.3	12.0	15.7	19.4

.

Alors qui a tort ? Que doit on trouver ?

Tiens, au fait, et si ça avait été à vous de calculer avec Python $\sqrt[n]{n!}$ pour n "*grand*", qu'auriez vous fait ?

Il parait qu'avec une somme de Riemann droite pour $\ln(t)$ entre 0 et 1 on a un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$. A vous de le faire.

L'élève a écrit une grosse bêtise. Chaque terme de la « somme » tend vers 0, mais le nombre de termes tend vers l'infini.

C'est une faute classique de débutant.

Le théorème sur les sommes de suites convergentes, c'est $(a_n+b_n+c_n+\ldots+v_n)$ avec un nombre clairement défini de suites.

En revanche, dans $\sum_{k=0}^{n}\frac{\ln(k)}{n}$, le nombre de termes dépend de n. LES VARIABLES !

Erreur de débutant aussi, faire tendre n vers l'infini dans une partie de la formule et pas dans l'autre. LES VARIABLES !

Prenons un exemple simplissime : $1=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}$ (n fois). On fait tendre n vers l'infini, chaque terme de la « somme » tend vers 0. La « somme » tend vers 0 : $1=0$.

Ou alors $1=\frac{n}{n}$. On fait tendre n vers l'infini seulement au dénominateur : $1=\frac{n}{\infty}=0$.

On fait tendre n vers l'infini seulement au numérateur : $1=\frac{\infty}{n}=$.

Évidemment, ici, ça se voit... Mais le nombre de fois où vous faites un coup comme ça sans le voir...

Mais le correcteur, lui, il le voit.

Partie sur les sommes de Riemann à faire..

∘14∘ Montrez que la série de terme général $\left(\frac{1}{(\ln(n))^2}\right)_{n\geqslant 2}$ diverge (comparez à la série harmonique).

Le terme général est positif. La suite des sommes partielles est croissante.

On a ensuite $0<\ln(n)\leqslant\sqrt{n}$ pour n plus grand que 1.

Il s'ensuit que $\frac{1}{(\ln(n))^2}$ est plus grand que $\frac{1}{n}$. Comme la série de terme général $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ diverge, par minoration la série de terme général $\left(\frac{1}{(\ln(n))^2}\right)_{n\geqslant 1}$ diverge.

On peut aussi écrire $\frac{1}{\ln(n))^2}\geqslant\frac{1}{n.\ln(n)}$ et faire une comparaison série intégrale de $\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n.\ln(n)}$ avec $\int_2^{n+1}\frac{dt}{t.\ln(t)}$.

On intègre en $\ln(\ln(n))$ et la divergence est acquise.

Erreur croisée parfois en colle : confusion entre $(\ln(n))^2$ *et* $\ln(n^2)$*. Ce qui ici ne change rien à la conclusion de l'exercice.*

∘15∘ Montrez que si $((a_n)^2)$ est sommable, alors $(a_n.a_{n+1})$ l'est aussi.

Indication pour que vous ne partiez pas dans des trucs « si la suite est croissante... si la suite est décroissante... et donc j'ai traité tous les cas »[a], pensez à la comparaison des moyennes...

a. eh, les suites ni croissantes ni décroissantes, ça existe !

On suppose donc : $\sum_{n\in\mathbb{N}(a_n)}^{2}<+\infty$.

Ou plus proprement : $\left\{\sum_{i\in J}(a_i)^2 \mid J\ finie\right\}$ est majoré par un réel S.

On veut montrer que $\left\{\sum_{i\in J}|a_i.a_{i+1}| \mid J\ finie\right\}$ est aussi majoré (définition par la somme « au pire, avec des valeurs absolues).

La clef (offerte par l'énoncé), c'est $\sqrt{a.b}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$ ou $(a.b)\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$ (un classique).

On majore donc $|a_i.a_{i+1}|\leqslant\dfrac{(a_i)^2+(a_{i+1})^2}{2}$.

On majore donc pour toute partie finie J : $\sum_{i\in J}|a_i.a_{i+1}|\leqslant\dfrac{1}{2}.\Big(\sum_{\in J}(a_i)^2+\sum_{i\in J}(a_{i+1})^2\Big)$.

Chacune des deux sommes est majorée par S (pour l'une, on a un ensemble J' obtenu par décalage de J, fini aussi). La somme du premier membre l'est aussi.

Cela dit, on n'a pas la valeur de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n.a_{n+1}$ à partir de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n.a_n$; juste une majoration.

∘16∘ Montrez : $\sum_{0\leqslant p\leqslant q}\dfrac{1}{2^{p+q}}=\dfrac{8}{3}$ (et montrez donc que la famille est sommable).

Calculez $\sum_{0\leqslant p\leqslant q}\dfrac{(-1)^{p-q}}{2^{p+q}}$.

On se donne N quelconque, et on calcule déjà

$$\sum_{0\leqslant p\leqslant q\leqslant N}\frac{1}{2^{p+q}}=\sum_{q=0}^{N}\Big(\frac{1}{2^q}\sum_{p=0}^{q}\frac{1}{2^p}\Big)=\sum_{q=0}^{N}\frac{1}{2^q}.\Big(2-\frac{1}{2^q}\Big)=2.\sum_{q=0}^{N}\frac{1}{2^q}-\sum_{q=0}^{N}\frac{1}{4^q}$$

On trouve $2.\Big(2-\dfrac{1}{2^N}\Big)-\dfrac{1-\dfrac{1}{4^{N+1}}}{1-\dfrac{1}{4}}$. On fait tendre N vers l'infini. il reste $4-\dfrac{4}{3}$ ce qui fait bien $\dfrac{8}{3}$.

Doit on prouver la sommabilité ?

Ce calcul a prouvé la majoration de chaque $\sum_{0\leqslant p\leqslant q\leqslant N}\dfrac{1}{2^{p+q}}$ par $\dfrac{8}{3}$.

Ensuite, toute partie finie K de $\{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \mid 0\leqslant p\leqslant q\}$ peut être incluse dans un $\{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \mid 0\leqslant p\leqslant q\leqslant N\}$ pour N bien choisi.

On a donc $\sum_{(p,q)\in K}\dfrac{1}{2^{p+q}}\leqslant\sum_{0\leqslant p\leqslant q\leqslant N}\dfrac{1}{2^{p+q}}\leqslant\dfrac{8}{3}$ et toutes les sommes à support fini sont majorées par ce réel.

$\sum_{0\leqslant p\leqslant q}\dfrac{(-1)^{p-q}}{2^{p+q}}$ est sommable, puisque la somme avec des valeurs absolues vaut $\dfrac{8}{3}$ (elle est finie).

On la calcule à horizon fini :

$$\sum_{0\leqslant p\leqslant q\leqslant N}\frac{(-1)^{p+q}}{2^{p+q}}=\sum_{q=0}^{N}\Big(\frac{(-1)^q}{2^q}\sum_{p=0}^{q}\frac{(-1)^p}{2^p}\Big)=\sum_{q=0}^{N}\frac{(-1)^q}{2^q}.\frac{1-\dfrac{(-1)^{q+1}}{2^{q+1}}\Big)}{1+\dfrac{1}{2}}=\frac{2}{3}.\sum_{q=0}^{N}\frac{1}{(-2)^q}+\sum_{q=0}^{N}\frac{1}{4^q}$$

Le calcul final donne $\dfrac{8}{9}$.

∘17∘ ♡ Décomposez $((-1)^n)_n$ comme somme d'une suite réelle croissante et d'une suite réelle décroissante en donnant une formule explicite pour le n^{ieme} terme de chacune.
Même question avec $((-1)^n.n)_n$.

Il n'y a pas unicité de la décomposition. Mais on peut proposer ce qui suite

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...	$2.p$	$2.p+1$	$2.p+2$	$2.p+3$
u_n	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...	1	-1	1	-1
c_n	1	1	3	3	5	5	7	7	...	$2.p+1$	$2.p+1$	$2.p+3$	$2.p+3$
d_n	0	-2	-2	-4	-4	-6	-6	-8	...	$-2.p$	$-2.p-2$	$-2.p-2$	$-2.p-4$

L'idée : quand la suite initiale $((-1)^n)$ (notée (u_n)) croît (et passe de -1 à 1), c'est la suite (c_n) qui s'en change (tandis que (d_n) reste à la même valeur), tandis que si (u_n) passe de 1 à -1, c'est la suite décroissante qui diminue de 2.

Formules expliciter à valider :

$c_{2.p} = 2.p + 1$	$c_{2.p+1} = 2.p + 1$
$d_{2.p} = -2.p$	$d_{2.p+1} = -2.p - 2$

(plus lourdes à exprimer avec une formule générale en $c_n = n + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$).

On vérifie ensuite $c_n + d_n = (-1)^n$ pour tout n.
On vérifie aussi la croissance de (c_n) par

$$c_{n+1} - c_n = \begin{array}{lclll} c_{2.p+1} - c_{2.p} & = & 2.p + 1 - (2.p + 1) & = 0 \geqslant 0 & si \quad n = 2.p \\ c_{2.+2} - c_{2.p+1} & = & 2.p + 3 - (2.p + 1) & = 2 \geqslant 0 & si \quad n = 2.p + 1 \end{array}$$

(à quantifier en fait en « si $\exists p \in \mathbb{N},\ n = 2.p$)

Et pour l'autre suite...

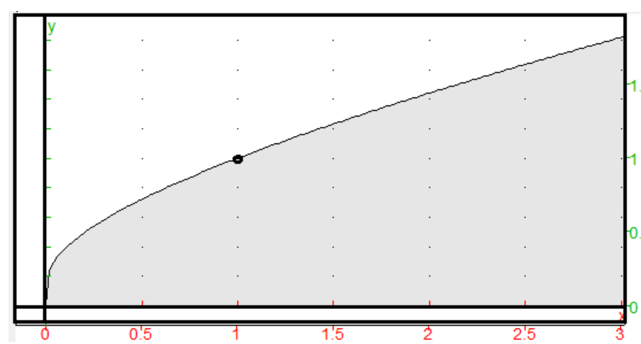
◦18◦ ♡ Prolongez par continuité en 0 et en 1 $x \longmapsto \dfrac{x-1}{\ln(x)}$.

♡ En considérant comme valide le théorème de Fubini $\left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \Big(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y).dy\Big).dx = \int_{y=c}^{y=d} \Big(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y).dx\Big).dy\right)$, montrez : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}.dx = \ln(2)$ (on pourra faire intervenir l'application $(x,\ y) \longmapsto x^y$ sur $[0,\ 1]$).

Calculez pour a et b positifs $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)}.dx$ après avoir prolongée en 0 et en 1 l'application sous le signe somme.

$x \longmapsto \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ est défini sur $]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[$ *(existence du logarithme, mais aussi non-annulation de ce logarithme).*

Quand x tend vers 0, le numérateur a une limite finie, et le dénominateur tend vers l'infini. Le quotient tend vers 0.



Quand$x$ tend vers 1, on refait le coup de l'inverse du taux d'accroissement du logarithme :

$\dfrac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1}$ tend vers $\dfrac{1}{1}$.

La fonction se prolonge par la valeur 1.

Et vers $+\infty$, par croissances comparées la fonction tend vers l'infini.

On pose comme propos : $f = (x,\ y) \longmapsto x^y$ *(fonction de deux variables, continue et même dérivable).*

On va calculer les deux intégrales $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \Big(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y).dy\Big).dx$ et $\displaystyle\int_{y=c}^{y=d} \Big(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y).dx\Big).dy$ avec des bornes correspondant au carre $[0,\ 1]^2$.

$\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \Big(\int_{y=0}^{y=1} x^y.dy\Big).dx =$ $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \Big(\int_{y=0}^{y=1} e^{y.\ln(x)}.dy\Big).dx$ $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \Big(\int_{y=0}^{y=1} x^y.dy\Big).dx = \int_{x=0}^{x=1} \Big[\frac{e^{y.\ln(x)}}{\ln(x)}\Big]_{y=0}^{1}.dx$ $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \Big(\int_{y=0}^{y=1} x^y.dy\Big).dx = \int_{x=0}^{x=1} \frac{e^{\ln(x)} - e^0}{\ln(x)}.dx$ $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \Big(\int_{y=0}^{y=1} x^y.dy\Big).dx = \int_{x=0}^{x=1} \frac{x-1}{\ln(x)}.dx$ (intégrale d'une application continue sur un segment, après prolongation ou prolongement)	$\displaystyle\int_{y=0}^{y=1} \Big(\int_{x=0}^{x=1} x^y.dx\Big).dy = \int_{y=0}^{y=1} \Big[\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big]_{x=0}^{1}.dy$ $\displaystyle\int_{y=0}^{y=1} \Big(\int_{x=0}^{x=1} x^y.dx\Big).dy = \int_{y=0}^{y=1} \frac{1^{y+1} - 0}{y+1}.dy$ $\displaystyle\int_{y=0}^{y=1} \Big(\int_{x=0}^{x=1} x^y.dx\Big).dy = \int_{y=0}^{y=1} \frac{1}{y+1}.dy$ $\displaystyle\int_{y=0}^{y=1} \Big(\int_{x=0}^{x=1} x^y.dx\Big).dy = [\ln(y+1)]_{y=0}^{1}$ $\displaystyle\int_{y=0}^{y=1} \Big(\int_{x=0}^{x=1} x^y.dx\Big).dy = \ln(2)$

On ne peut pas progresser sur celui de la première colonne.

Mais comme on a fini celui de la seconde, on utilise les théorème de Fubini pour les dire égaux :

$$\int_{x=0}^{x=1} \frac{x-1}{\ln(x)}.dx = \ln(2)$$

On reprend la même idée, mais avec cette fois $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \Big(\int_{y=a}^{y=b} x^y.dy\Big).dx$.

La première colonne donne $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \frac{x^b - x^a}{\ln(x)}.dx$ (on prolonge en $x = 0$ par la valeur 0 et en $x = 1$ par la valeur

La seconde donne $\ln(1+b) - \ln(1+a)$ soit encore $\ln\Big(\dfrac{b+1}{a+1}\Big)$.

Comment a-t-on trouvé la valeur en $x = 1$?
Comme x tend vers 1, on l'écrit $x = 1 + h$ et on effectue des développements limites :

$$\frac{(1+h)^b - (1+h)^a}{\ln(1+h)} = \frac{(1+b.h+o(h)) - (1+a.h+o(h))}{h+o(h)} = \frac{(b-a).h+o(h)}{h+o(h)} = \frac{b-a+o(1)}{1+o(1)}$$

Le tout tend bien vers $b - a$.
On peut aussi écrire :

$$\frac{x^b - x^a}{\ln(x)} = \frac{x^b - 1}{\ln(x)} - \frac{x^a - 1}{\ln(x)} = \frac{\dfrac{x^b-1}{x-1}}{\dfrac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}} - \frac{\dfrac{x^a-1}{x-1}}{\dfrac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}}$$

On fait tendre x vers 1 et ces quatre taux d'accroissement tendent vers b, 1, 1 et a.

∘19∘ Donnez le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, puis celui de son inverse.
Rappel : $\chi_M(X) = \det(M - X.I_n)$. Et pour $\chi_{M^{-1}}$ aurez vous besoin de calculer M^{-1} ? Ça dépend de « je suis matheux ou pas ».

Avec trace, déterminant et trace de la comatrice, on trouve $X^3 - 4.X^2 - X + 4$.

On peut calculer son inverse *(déterminant non nul)*, trouver sa trace, son déterminant [1] et retrouver même $X^3 - \dfrac{1}{4}.X^2 + X - \dfrac{1}{4}$.

Mais on peut l'avoir sans se fatiguer.
La définition est $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda.I_3 - A)$.
Et on veut $\chi_{A^{-1}}(\lambda)$ c'est à dire $\det(\lambda.I_3 - A^{-1})$.
Et là, on ruse : $\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) = \det(\lambda.A.A^{-1} - A^{-1})$

$$\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) = \det((\lambda.A - I_3).A^{-1})$$
$$\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) = \det(\lambda.A - I_3).\det(A^{-1})$$
$$\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) = \det\Big(\lambda.(A - \frac{1}{\lambda}.I_3)\Big).\det(A^{-1})$$
$$\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) = \lambda^3.\det\Big(A - \frac{1}{\lambda}.I_3\Big).\det(A^{-1})$$
$$\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) = -\lambda^3.\det\Big(\frac{1}{\lambda}.I_3 - A\Big).\det(A^{-1})$$
$$\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) = -\lambda^3.\det(A^{-1}).\chi_A\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)$$

On vérifie ici :

$$-\lambda^3.\frac{1}{4}.\Big(\frac{1}{\lambda^3} - 4.\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} - 4\Big)$$

Tout ça pour ça.

On peut aussi dire que les racines de $\chi_{A^{-1}}$ sont les inverses des racines de χ_A.
En effet, les termes de la diagonale de D^{-1} sont les inverses des termes de la diagonale de D *(en ayant posé $AP.D.P^{-1}$*

---

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$, la trace de A^{-1} est celle de $\dfrac{1}{\det(A)}.Com(A)$, on la connait déjà

et donc $A^{-1} = P.D^{-1}.P$).

∘20∘

♡ On pose $u_n = n^{1/n}$. Déterminer le plus grand terme de cette suite et sa limite.

Cette suite est bien définie à partir du rang 1, et c'est $\left(\exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)_n$.
On peut la voir comme une fonction, pour laquelle on ne regarde que les abscisses entières.
Elle a le même sens de variation que son logarithme : $n \longmapsto \frac{\ln(n)}{n}$.
On rend la variable réelle le temps de lire les variations, afin de pouvoir dériver : $n \longmapsto \frac{1-\ln(n)}{n^2}$.

La fonction réelle a son maximum en e.

La suite a son maximum en 2 ou 3 (croissante de 1 à 2 , décroissante de 3 à l'infini).
On compare $2^{1/2}$ et $3^{1/3}$.
Sans calculatrice, merci. Il suffit de les élever à la puissance 6 :

$$(2^{1/2})^6 = 2^3 = 8 < 9 = 3^2 = (3^{1/3})^6$$

Le plus grand terme est $\boxed{\sqrt[3]{3}}$

La limite en $+\infty$ est 1 car $\frac{\ln(n)}{n}$ tend vers $\boxed{0}$ (croissances comparées[2].

∘21∘

Calculez module et argument de $2^{i.\pi/3}$. Calculez module et argument de $e^{(e^{i.\pi/3})}$. Calculez module et argument de $(e^e)^{i.\pi/3}$.

$2^{i.\pi/3}$	$e^{i.\ln(2).\pi/3}$	1	$\frac{\ln(2).\pi}{3}$
$e^{(e^{i.\pi/3})}$	$e^{\frac{1+i.\sqrt{3}}{2}}$	$e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$(e^e)^{i.\pi/3}$	$e^{i.e.\pi/3}$	1	$\frac{e.\pi}{3}$

Aucun de ces angles n'est sympathique ni classique.
L'exercice devrait être un classique en Terminale, pour vous habituer à manipuler l'exponentielle complexe...

∘22∘

Pouvez vous trouvé les quatre erreurs qu'il y à dans cette phrases ?

« trouvé » au lieu de « trouver »	« à » au lieu de « a »
phrases au pluriel	« quatre » au lieu de « trois »

∘23∘

Montrez que $((1),\ ((-1)^n))$ est une base de l'espace des suites périodiques de période 2.

En notant $(E, +, .)$ l'espace vectoriel es suites périodiques de période 2 (en tant que sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .)$), ce deux suite sont dans e.

Et toute suite de e est de la forme $(a,\ b,\ a,\ b,\ a,\ b\ldots)$. Et on écrit son terme général : $u_n = \begin{matrix} a & si & n\ pair \\ b & si & n\ impair \end{matrix} = \frac{a+b}{2}.1 + \frac{a-b}{2}.(-1)^n$.

∘24∘

Montrez que toute suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ bornée admet une sous-suite périodique.

Par principe des tiroirs déjà croisé dans un autre exercice, si une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est bornée, il existe une valeur qui est atteinte une infinité de fois.
On construit alors une suite constante.
Et une suite constante est périodique. De période 1.

∘25∘

Prouvez que de toute suite de période 5 *(exactement)* on peut extraire une suite de période 11 *(exactement)*.

La suite est périodique non constante. Elle prend donc au moins deux valeurs différentes.

2. au pluriel, car pour les comparer, il en faut plusieurs, on réfléchit, merci !

De la forme $(a, b, c, d, e, a, b, c, d, e, a, b, c, d, e, a, b, c, d, e, \dots)$.

On construit une sous-suite qui prend dix fois de suite la valeur a, puis la valeur b (différente de a, sinon, c, ou d ou e). Puis à nouveau onze fois a, puis b. Et ainsi de suite.

Si la suite initiale s'appelle (u_n), il suffit de dire $V_n = \begin{array}{lll} u_{5.n} & si & n \neq 0\ [11] \\ u_{5.n+1} & si & n = 0\ [11] \end{array}$.

L'erreur des élèves est de vouloir extraire une sous-suite selon un critère $b_n = a_{2.n}$ ou $b_n = a_{3.n+1}$ ou $b_n = a_{5.n+7}$ ou toute autre formule d'une rigidité cadavérique, qui n'accepte aucune fantaisie...

∘26∘

♡ On pose : $u_n = (-1)^n.(2.n+1)$ pour tout n. Calculez $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour n de 0 à 7. Montrez que la suite u diverge, de même que sa moyenne de Cesàro. Montrez que la moyenne de Cesàro de sa moyenne de Cesàro converge.
Donnez une suite dont la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro converge vers 1 sans que sa moyenne de Cesàro ne converge.
♣ Donnez une suite dont la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro converge vers 1 sans que la moyenne de Cesàro de sa moyenne de Cesàro ne converge.
Rappel : la moyenne de Cesàro de la suite (a_n) est la suite (c_n) définie par $c_{n+1} = \dfrac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1}$.

∘27∘

♣ Créez une suite réelle positive non bornée dont la moyenne de Cesàro converge vers 0.

On va prendre plein de termes nuls, et de temps en temps un terme grand. Mais vraiment pas souvent, pour que la moyenne tende vers 0.
On dit que $a_n$est nul, sauf quand n est une puissance de 2. Et donc, pour $n = 2^k$, on posera $a_n = k$.

0	0	1	0	2	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	4	0	...

La suite (a_n) n'est pas bornée, puisque sa sous-suite (a_{2^k}) diverge vers $+\infty$.

Et la moyenne ?
Calculons par exemple c_{2^N}. C'est une somme de $2^N + 1$ termes, dont beaucoup sont nuls.
Mais il y a quand même $a_{2^0} = 0$, $a_{2^1} = 1$, $a_{2^2} = 2$ jusqu'à $a_{2^N} = N$.
La somme au numérateur vaut donc $1 + 2 + \ldots + N$.
La moyenne de Cesàro vaut $\dfrac{}{2^N + 1}$.
Par croissances comparées, c'est la suite géométrique qui l'emporte sur le polynôme quand N tend vers l'infini.

Et si n n'est pas une puissance de 2 ? On le cerne entre deux puissances de 2 : $2^N \leqslant n < 2^{N+1}$.
Par exemple : $64 \leqslant 100 < 128$. Proprement : $N = \left[\dfrac{\ln(n)}{\ln(2)}\right]$.
La somme au numérateur vaut encore $1 + 2 + \ldots + N$ (et depuis $u_{2^N} = N$, il n'y a eu que des 0 : $a_2^N + 1$=0 , $a_{2^N+2} = 0$ et ainsi de suite).
Mais alors $c_n = \dfrac{N.(N+1)}{2.(n+1)}$.
On l'encadre par 0 et $\dfrac{N.(N+1)}{2.(2^N)}$ car $2^N \leqslant n$.
Quand n tend vers l'infini, N tend aussi vers l'infini, et les croissances comparées invoquées font encore tendre la-dite moyenne vers 0.

∘28∘

Trouvez des couples de suites servant d'exemple pour chacune des quatre cases :

	$u_n - v_n \to_{n\to+\infty} 0$	$u_n - v_n \not\to_{n\to+\infty} 0$
$u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$		
$u_n \not\sim_{n\to+\infty} v_n$		

	$u_n - v_n \to_{n\to+\infty} 0$	$u_n - v_n \not\to_{n\to+\infty} 0$
$u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$	$u_n = v_n = 1$	$u_n = n$ et $v_n = n+1$
$u_n \not\sim_{n\to+\infty} v_n$	$u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$	$u_n = n$ et $v_n = n^2$

∘29∘

♡ Montrez qu'une suite complexe est périodique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

On prend (z_n) périodique de période p.
Pour tout n, on a $z_{n+p} = z_n$ et en passant aux parties réelles et imaginaires $\forall n,\ \Re e(z_n) = \Re e(z_{n+p})$ puis $\forall n,\ \Im m(z_n) = \Im m(z_{n+p})$.
Les deux suites réelles sont périodiques (de période p et peut être de période plus petite).

Si (x_n) et (y_n) sont périodiques de périodes p et q, alors la combinaisons $(x_n + i.y_n)$ est périodique de période $p \vee q$ (p.p.c.m.).

∘30∘ On sait que si u et v sont bornées, alors $u.v$ l'est aussi. Montrez que la réciproque n'est pas vraie *(peut on avoir même "ni u ni v n'est bornée" ?)*.
Montrez que si $u + v$ et $u.v$ sont bornées, alors u et v le sont aussi.

$(n.\sin(n.\pi/2))$ et $(n.\cos(n.\pi/2))$.

Viète !

∘31∘ Frais ou veau :
∘1∘ Si il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers α et une sous-suite de (b_n) qui converge vers β, alors il existe une sous-suite de $(a_n + b_n)$ qui converge vers $\alpha + \beta$?
∘2∘ Si toutes les suites extraites de (a_n) convergent, alors (a_n) converge.
∘3∘ Si il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers α alors il existe une sous-suite de $([a_n])$ qui converge vers $[\alpha]$.
∘4∘ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^2)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou -1.
∘5∘ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^2)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou une sous-suite de (a_n) qui converge vers -1.
∘6∘ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^3)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou -1.

A faire.

∘32∘ ♡ Soit a une suite réelle positive ; on note A la série associée ($A_N = \sum_{k=0}^{N} a_k$). Montrez que $(A_{2.n})$ converge si et seulement si (A_n) converge.
Et si on enlève « positive », est ce encore vrai ?

Comme a est positive, la série associée A est croissante.
Elle n'a alors que deux possibilités : converger
ou diverger vers $+\infty$.
Si elle divergeait, alors sa sous-suite $(A_{2.n})$ divergerait aussi.
Comme elle converge, on élimine cette possibilité.
Il ne nous reste que (A_n) converge.

Sinon, on pouvait aussi encadrer A_n par $A_{2.p}$ et $A_{2.p+2}$ pour $p = \left[\frac{n}{2}\right]$ (par positivité de la suite a)
et conclure par théorème d'encadrement.

Si la suite est de signe quelconque, on n'a plus accès à ces deux modèles d'arguments.
Mais ça ne vaut pas dire que c'est impossible de prouver que (A_n) converge.
Mais on a un contre-exemple. Et là, c'est sans faille.

Devinez lequel : $a_n = (-1)^n$ pour tout n.
La série $A_{2.n}$ vaut toujours 1, elle converge.

Mais (A_n) vaut $\left(\dfrac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)}\right)$. Elle diverge.

◦33◦

On note E l'ensemble des suites réelles périodiques. Montrez que $(E,+,.)$ est un espace vectoriel.
Montrez que tout élément de E admet une sous-suite convergente.

Pour tout u dans E, on note $\sigma(u)$ la suite (u_{n+1}). Montrez que $\sigma(u)$ est dans E et que σ est une application linéaire. Montrez que ses seules valeurs propres sont 1 et -1 et donnez le sous-espace propre associé à chacune. Aurait on pu trouver d'autres valeurs propres pour des suites complexes ?
Pour tout u dans E, on note $\varphi(u)$ la suite $(u_{2.n})$. Montrez que $\varphi(u)$ est dans E et que φ est une application linéaire.
Pour tout n, on note $\zeta(u)$ la suite de terme général $u_{2.[n/2]}$. Montrez que l'opérateur ζ est linéaire de E dans E et donnez son spectre.

Pour tout n, on note $\psi(u)$ la suite obtenue en permutant deux à deux les termes de la suite u : $(u_1,\ u_0,\ u_3,\ u_2,\ u_5,\ u_4,\ldots)$. Donnez une formule générale pour $\psi(u)_n$ *(et expliquez pourquoi la notation $\psi(u_n)$ n'a aucun sens)*. Montrez que ψ est une application linéaire de E dans E. Donnez ses valeurs propres et la dimension de chaque sous espace propre.

$\overrightarrow{u}$ vecteur propre de f c'est $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ et $\exists\lambda,\ f(\overrightarrow{u})=\lambda.\overrightarrow{u}$.
λ valeur propre de f c'est $\exists\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{O},\ f(\overrightarrow{u})=\lambda.\overrightarrow{u}$.

Pour extraire une suite convergente d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ périodique de période p, il suffit de prendre la suite $(a_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$.
Ou d'utiliser le théorème de Bolzano Weierstrass, mais il y a de l'abus là.

Si (a_n) est périodique de période p, alors (a_{n+1}) est périodique, de même période.

La linéarité s'écrit en travaillant au bon étage : On se donne deux suites (a_n) et (b_n). On doit juste comparer $(a_{n+1}+b_{n+1})$ et $(a_{n+1})+(b_{n+1})$.

On prend une valeur propre λ et un vecteur propre associé : une suite a vérifiant $\sigma(a)=\lambda.a$.
On traduit $a_{n+1}=\lambda.a_n$ pour tout n.
Ceci signifie que la suite a est une suite géométrique de raison λ.
Mais comme elle doit être périodique, il y a comme un petit problème.
Sauf si elle est constante ou géométrique de raison -1.
Sur $\mathbb{C}$on aurait pu prendre des suites géométriques dont la raison soit une racine p-eme de l'unité.

◦34◦

♡ Vrai ou faux : si la suite (a_n) a pour moyenne de Cesàro (c_n) alors la suite extraite $(a_{2.n})$ a pour moyenne de Cesàro la suite $(c_{2.n})$?

Faux.

(a_n) a pour moyenne de Cesàro	$c_0=a_0$		$c_2=\dfrac{a_0+a_1+a_2}{3}$		$c_1=\dfrac{a_0+a_1++a_5}{5}$
		$c_1=\dfrac{a_0+a_1}{2}$		$c_3=\dfrac{a_0+a_1+a_2+a_3}{4}$	

Déjà, (c_2) n'a rien à avoir avec γ_1 qui vaut $\dfrac{a_0+a_2}{2}$ (si c'est la moyenne de Cesàro de $(a_{2.n})$.

◦35◦

♡ Vers quoi convergent *(si elles convergent)* ?

1	2	3	4	5	6
$\left(\dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}}\right)$	$\left(\dfrac{3^n+2^{2.n+1}}{3^n-4^n}\right)$	$(\sqrt[n]{n^2})$	$\left(\dfrac{e^n}{n^n}\right)$	$\left(\dfrac{e^{2.n}}{n^n}\right)$	$\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}.k!\right)$

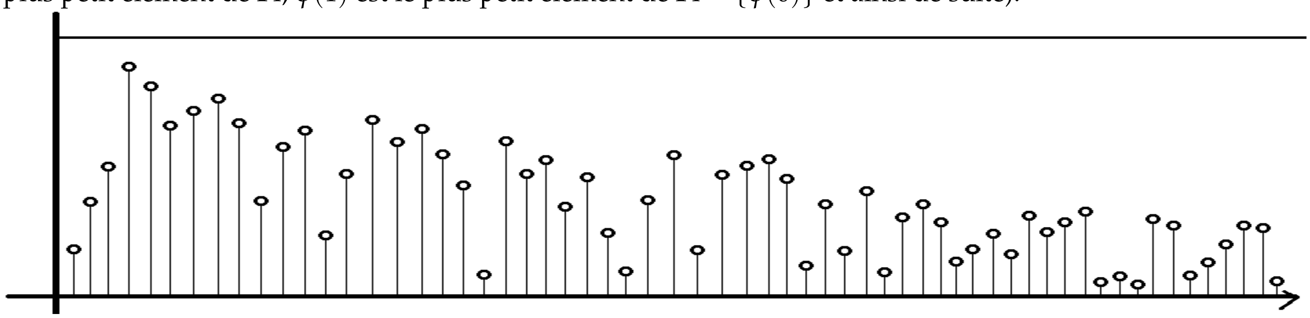
∘36∘

♠ Soit (a_n) une suite réelle. On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p \geqslant n,\ a_p \leqslant a_n\}$.
Déterminez A si (a_n) est croissante.
Déterminez A si (a_n) est décroissante.
On suppose A infini. On pose alors $n_0 = Min(n \mid n \in A\}$, $n_1 = Min(n \mid n \in A\ et\ n > n_0\}$ et plus généralement $n_{k+1} = Min(n \mid n \in A\ et\ > n_k\}$.
Montrez que chaque n_k existe.
Montrez que la suite $k \longmapsto n_k$ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et que la suite (a_{n_k}) est décroissante.

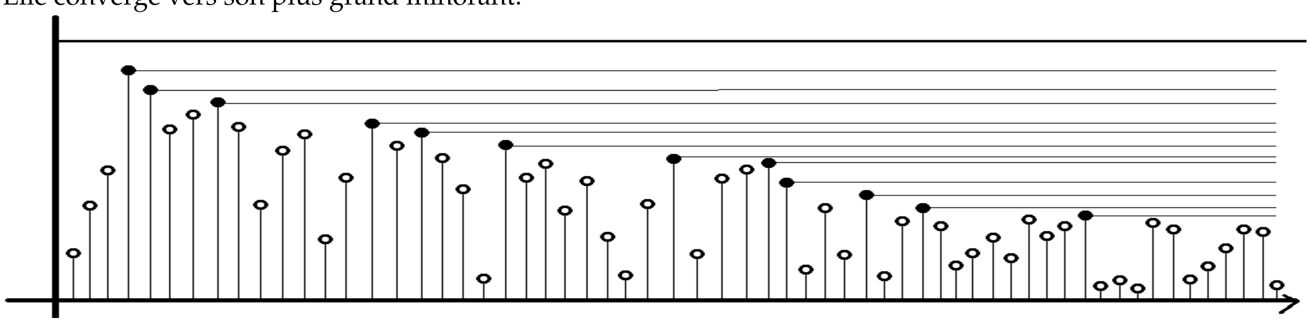
On suppose A fini. Montrez $\exists K_0,\ \forall,,\ (n \geqslant K_0 \Rightarrow (\exists p > n,\ a_p > a_n)$.
Déduisez $\exists K_1 > K_0,\ a_{K_1} > a_{K_0}$ puis $\exists K_2 > K_1,\ a_{K_2} > a_{K_1}$.
Construisez une suite (a_{K_i}) extraite de (a_n), strictement croissante.

Je vous renvoie au cours.
Ou au fascicule « beaux théorèmes de Sup » :
On définit l'ensemble d'indices suivant : $\mathbb{A} = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p \geqslant n,\ u_p \leqslant u_n\}$ (il s'agit des indices des termes qui majorent tous les termes qui suivent).
$\mathbb{A}$ est une partie de $\mathbb{N}$ qui est soit infinie, soit finie.

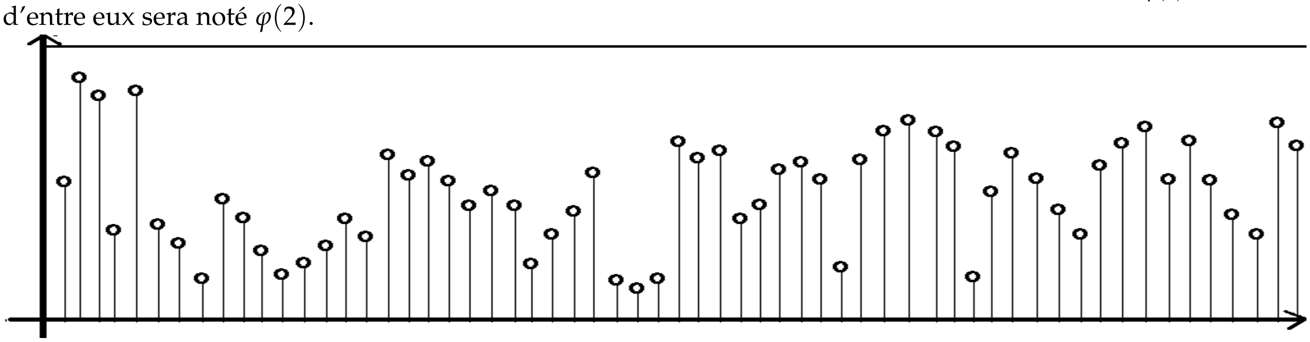
Premier cas : si $\mathbb{A}$ est infini, alors on en indexe les éléments par ordre croissant : $\varphi\ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ n & \longmapsto & \varphi(n) \end{array}$ ($\varphi(0)$ est le plus petit élément de $\mathbb{A}$, $\varphi(1)$ est le plus petit élément de $\mathbb{A} - \{\varphi(0)\}$ et ainsi de suite).



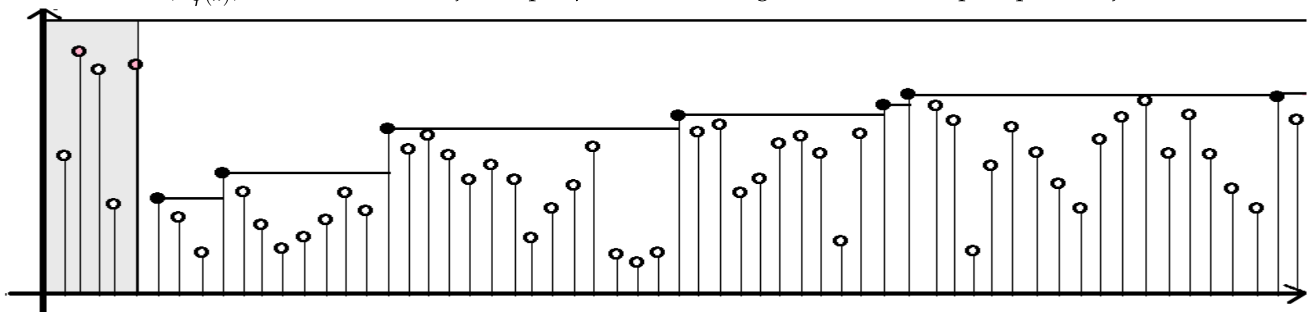
Par construction, chaque indice $\varphi(k)$ vérifie $\forall p \geqslant \varphi(k),\ u_p \leqslant u_{\varphi(k)}$; en particulier $u_{\varphi(k+1)} \leqslant u_{\varphi(k)}$.
La suite $(u_{\varphi(k)})$ est décroissante. Elle est extraite de la suite (a_n), donc elle est minorée.
Elle converge vers son plus grand minorant.



Second cas : si $\mathbb{A}$ est fini, alors au delà d'un certain entier M, tous les entiers sont dans $\mathbb{A}^c$.
On pose alors $\varphi(0) = M + 1$. Par définition de $\varphi(0) \notin \mathbb{A}$, il existe au moins un élément p plus grand que $\varphi(0)$ vérifiant $u_p > u_{\varphi(0)}$. On prend le premier d'entre eux (qui ne peut pas être égal à $\varphi(0)$ par inégalité stricte) et on le note $\varphi(1)$.
On recommence : $\varphi(1)$ n'est pas dans $\mathbb{A}$, il existe donc au moins un indice p vérifiant $u_p > u_{\varphi(1)}$. Le premier d'entre eux sera noté $\varphi(2)$.



De proche en proche, on construit φ vérifiant $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ pour tout k (ainsi que $\varphi(k+1) > \varphi(k)$).
La sous-suite $(u_{\varphi(k)})$ est croissante, majorée (par β_0). Elle converge donc vers son plus petit majorant.



Dans les deux cas, on a construit une sous-suite monotone bornée, donc convergente.

◦37◦

On suppose $(a_n + b_n) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$ et $(e^{a_n} + e^{b_n}) \longrightarrow_{n\to+\infty} 2$. Que pensez vous du raisonnement : on note α la limite de a et β la limite de b. On a alors $a = -b$ et $e^a + e^b = 2$; on déduit $ch(a) = 1$ puis $a = 0$ et $b = 0$.
En quoi ce « raisonnement » est il faux ? Aboutissez quand même au bon résultat.

Le raisonnement proposé est une monstrueuse connerie, dès sa première ligne.
Qui vous a dit que les suites avaient une limite ? Personne.

Rappelons au passage l'ânerie suivante : *si $(a_n + b_n)$ et $(a_n \times b_n)$ convergent vers λ et μ, vers quoi convergent (a_n) et (b_n) ?*
On note α la limite de (a_n) et β celle de (b_n).
Par passage à la limite : $\alpha + \beta = \lambda$ et $\alpha.\beta = \mu$.
On retrouve fièrement α et β par les formules de Viète.
Et on est un fieffé connard.
En effet, il se peut que ni a ni b ne converge.
Prenons $((-1)^n)$ et son opposé. Leur produit vaut -1 (converge) et leur somme vaut 0 (converge).

◦38◦

Ça vous fait quel effet de savoir que vous êtes suspendu à la terre, retenu fort heureusement grâce à la gravitation qui vous empêche de tomber ?
Au fait, « galaktos » en grec ça veut dire lait. Quel rapport avec galaxie ?

Galaxie, c'est parce que la première galaxie connue est « la voie lactée ». Et on l'appelle ainsi à cause de la teinte de lait qu'elle donne dans le ciel.
Quant à l'idée de rester accroché « tête en bas » à la terre, elle me plait. Tout repose sur « c'est quoi le haut, c'est quoi le bas ».
D'ailleurs, tenez un jour une mappemonde « dans le sens inverse », avec l'Australie et la grande part de l'Afrique dans l'hémisphère « du haut », et vous verrez que votre vision changera peut être.

◦39◦

Un élève donne les définitions suivantes de la convergence d'une suite :

a	$\forall\varepsilon \geqslant 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_\epsilon) \Rightarrow \lvert u_n - a\rvert \leqslant \varepsilon$
b	$\forall\varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_\epsilon) \Rightarrow \lvert u_n - a\rvert \leqslant \varepsilon$
c	$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall\varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N) \Rightarrow \lvert u_n - a\rvert \leqslant \varepsilon$
d	$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \leqslant N_\epsilon) \Rightarrow \lvert u_n - a\rvert \geqslant \varepsilon$

trouvez l'erreur, et dites ce qu'on peut déduire.

a	$\forall\varepsilon \geqslant 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_\epsilon) \Rightarrow \lvert u_n - a\rvert \leqslant \varepsilon$

On autorise $\varepsilon = 0$. Et ça change tout.
En effet, à partir du rang N_0 on a $|u_n - a| \leqslant 0$ c'est à dire $u_n = a$.
La suite est constante à partir du rang N_0.

Et évidemment elle converge. Mais quand même, il y a des suites qui convergent vers a sans valoir a.

b	$\forall\varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_\epsilon) \Rightarrow \lvert u_n - a\rvert \leqslant \varepsilon$

Vu l'ordre des quantificateurs, N_εa aussi le droit de dépendre de n.
Et comme on demande juste qu'une implication soit vraie, je choisis $N_\varepsilon = n + 1$.
L'implication $(n \geqslant n+1) \Rightarrow |u_n - a| \leqslant \varepsilon$ est donc vraie (« faux implique... ».
Toutes les suites (convergentes ou non vérifient cette quantification).

c	$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall\varepsilon>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\geqslant N)\Rightarrow |u_n-a|\leqslant\varepsilon$

A partir du rang N, on a pour tout ε : $|u_n-a|\leqslant\varepsilon$.
Mais ceci ne laisse pas le choix : $|u_n-a|$ est nul.

Si vous voulez convaincre le physicien dites « comme c'est vrai pour tout ε, je fais tendre ε vers 0, et par passage à la limite, $|a_n-a|$ est plus petit que 0.
Si vous voulez convaincre le mathématicien, dites « si a_n n'était pas égal à a, alors a_n-a serait non nul et pour le εparticulier $\varepsilon=\dfrac{u_n-a|}{2}$, on aurait une contradiction.

La suite est constante à partir du rang N.

d	$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\epsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\leqslant N_\epsilon)\Rightarrow |u_n-a|\geqslant\varepsilon$

C'est avant le rang N_ε qu'elle est loin de a.
A finir.

∘40∘

On a donné à Léo les dix chiffres de 0 à 9. Il en a fait quatre nombres : un nombre à un chiffre, un nombre à deux chiffres, un à trois chiffres, un à quatre chiffres. Les quatre sont des carrés parfaits. Pouvez vous refaire la même chose ? Et si on veut toutes les solutions, on prend `Python` ?

On doit prendre dix chiffres et fabriquer une liste de carrés parfaits a, $\overline{bc}$, $\overline{def}$ et $\overline{ghij}$.
Les valeurs possibles pour a sont 0, 1, 4 et 9.
Les valeurs possibles pour b sont 16, 25, 36, 49, 64 et 81. Certaines sont incompatibles avec a.
Pour c la liste s'allonge, même si on élimine 100, 121 et quelques autres qui utilisent plusieurs chiffres en double.
On trouve les douze solutions suivantes :

0, 16, 784, 5329	0, 25, 784, 1369	0, 25, 784, 1936	0, 25, 841, 7396
0, 36, 729, 5184	0, 81, 324, 7569	0, 81, 576, 3249	0, 81, 729, 4356
1, 36, 784, 9025	9, 16, 784, 3025	9, 81, 324, 7056	9, 81, 576, 2304

```
Carres = [[ ] for long in range(5)] #on va créer la liste des carrés
for k in range(100) : #le plus grand 99²
....carre=str(k*k) #on en fait une chaine
....long=len(carre) #on va voir dans quelle liste l'insérer
....Carres[long].append(carre) #on l'insère
print(Carres) #on vérifie
Tout = list('0123456789') #l'anagramme à trouver
for a in Carres[1] : #on l'appelle a
....for b in Carres[2] : #et il y a b
........for c in Carres[3] : #puis c
............for d in Carres[4] : #et enfin d
................Mot=a+b+c+d #on met les quatre carrés bout à bout
................if sorted(Mot) == Tout : #on teste si c'est un anagramme de 0123456789
....................print(a,b,c,d) #si oui, on l'affiche
print('Fini') #pour savoir si le programme a fini
```

∘41∘

Pour tout entier naturel n, on note $s(n)$ le nombre de chiffres premiers dans l'écriture de n (exemple : $s(2019)=1$[a], $s(1789)=1$, $s(5435)=3$). Montrez que la série de terme général $\dfrac{s(n)}{n^2}$ est croissante et majorée (intégrale $\displaystyle\int_1^n\frac{\ln(t)}{t^2}.dt$?). Écrivez un script Python qui pour N donne calcule la valeur approchée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k}{k^2}$.

[a] on rappelle que 0 et 1 ne sont ni premiers, ni composés)

Bon, les chiffres, c'est de 0 à 9.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
premier			x	x		x		x		
composé					x		x		x	x
ni premier ni composé	x	x								

Bref, on doit compter combien il y a de 2, de 3, de 5 et de 7 dans l'écriture de n.
On va prendre n, le faire fondre en divisant par 10, et pour chaque chiffre extrait, on regarde si il vaut 2, 3, 5 ou 7.

```
def ComptePrem(n) :
....nn = n #on travaille sur copie
....compt
....while nn > 0 :
........chiffre = nn%10
........nn = nn/10
........if chiffre in [2, 3, 5, 7] :
............compte += 1
....return compt
```

```
def ComptePrem(n) :
....compt = 0
....Mot = str(n)
....for chiffre in Mot :
........if chiffre in ['2','3','5','7'] :
............compt += 1
....return compt
```

Si on travaille sur entiers, le test est chiffre in liste de chiffres, si on travaille sur string, le test est sur chiffre in liste de caractères.

On a crée la petite procédure utile. Il vaut mieux découper le travail, et éviter l'étirement du programme.
La série est à termes positif, elle croit. Pour la faire converger, il suffit de la majorer.

```
def Somme(N) :
....S = 0
....for n in range(1, N+1) : #gare aux bornes
........S += ComptePrem(n)/(n*n)
....return S
```

Mais on ne peut pas majorer $\frac{s(n)}{n^2}$ par $\frac{K}{n^2}$ puisque le nombre de chiffre de n peut être grand, et pas mal de ses chiffres peuvent être premiers (et même tous (écrivez des 2323235323...7, ce n'est pas ce qui manque).
Mais $s(n)$ est au maximum égal au nombre de chiffres de n. Et ce nombre de chiffres, c'est $log(n)$. Ou plus précisément : $\left[\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\right]+1$.

On est face à une série majorée par $\frac{\ln(n)}{n^2}$. Cette fois, c'est mieux.

Si on majore $\ln(n)$ par n, on ne peut rien faire : $\frac{s_n}{n^2}=O\left(\frac{1}{n}\right)$ n'est pas pertinent, puisque la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

Si en revanche on écrit $\ln(n)=o(\sqrt{n})$, on a $\frac{s(n)}{n^2}=\frac{o(\sqrt{n})}{n^2}=o\left(\frac{1}{n.\sqrt{n}}\right)$.

La série de terme général $\frac{1}{n.\sqrt{n}}$converge (exposant strictement plus grand que 1). par domination, la série de terme général $\frac{s(n)}{n^2}$ converge.

Pour avoir posé l'exercice en I.S., j'ai le souvenir de trop nombreux élèves qui ont créé une procédure de test de primalité classique,

```
def Premier(c) :
....for j in range(2, c) :
........if c % j == 0 :
............return False
....return True
```

c'est certes une procédure correcte.
Mais à quoi bon la créer et l'utiliser si c'est juste pour vérifier ensuite qui de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 est premier...

◦42◦ Montrez que pour toute suite réelle (u_n) il existe au moins une extraction φ telle que $(\sin(u_{\varphi(n)})$ converge.

La suite $(\sin(u_n))$ est bornée. Nul ne m'interdira de lui appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

◦43◦ Pour tout n, on pose $u_n=\frac{\cos(2.n.\pi/3)}{\sqrt[3]{[n/3]+1}}$. Calculez $u_{3.p}+u_{3.p+1}+u_{3.p+2}$ pour tout entier naturel p. Déduisez que la série de terme général u_n converge *(on distinguera pour $\sum_{n=0}^{N}u_n$ suivant la valeur de N modulo 3)*.
Montrez que la série de terme général $(u_n)^3$ diverge.

Réflexe élémentaire : le terme général tend vers 0. Le numérateur est borné, le dénominateur tend vers l'infini.
On n'a pas de divergence grossière, mais pas encore de convergence.

Dans la somme $u_{3.p}+u_{3.p+1}+u_{3.p+2}$, les termes $\left[\frac{n}{3}\right]$ sont tous égaux : $\left[\frac{3.p}{3}\right]=\left[\frac{3.p+1}{3}\right]=\left[\frac{3.p+2}{3}\right]=p$.

La somme vaut donc $\dfrac{\cos\left(\frac{6.p.\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{6.p.\pi}{3}+\frac{2.\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{6.p.\pi}{3}+\frac{4.\pi}{3}\right)}{\sqrt[3]{p+1}}$. le numérateur est... nul. *(vous avez reconnu $1+j+j^2$?)*

On a envie de dire « quand on somme par paquets de trois, il ne reste rien ».

Mais la définition de la convergence de la série, c'est $\sum_{n=0}^{N} u_n$ converge quand N tend vers l'infini.
Et N qui tend vers l'infini prend des valeurs qui ne sont pas forcément des multiples de 3.
On va donc distinguer les cas.

$N=3.P-1$	$\sum_{n=0}^{3.P-1} u_n = \sum_{p=0}^{p-1} u_{3.p}+u_{3.p+1}+u_{3.p+2}=0$
$N=3.P$	$\sum_{n=0}^{3.P} u_n = u_{3.P}+\sum_{p=0}^{p-1} u_{3.p}+u_{3.p+1}+u_{3.p+2}=u_{3.P}$
$N=3.P+1$	$\sum_{n=0}^{3.P} u_n = u_{3.P}+u_{3.P+1}+\sum_{p=0}^{p-1} u_{3.p}+u_{3.p+1}+u_{3.p+2}=u_{3.p}+u_{3.P+1}$

Comme le terme général tend vers 0, les trois sommes partielles extraites $(U_{3.P-1})$, $(U_{3.P})$ et $(U_{3.P+1})$ convergent vers la même limite nulle.
Par recouvrement, la série converge (vers 0).

On élève au cube cette fois. Le terme général continue à tendre vers 0.

$n=$	$3.p$	$3.p+1$	$3.p+2$
$(u_n)^3=$	$\dfrac{1}{p+1}$	$\dfrac{-1}{4.(p+1)}$	$\dfrac{-1}{4.(p+1)}$

Cette fois, le regroupement $(u_{3.p})^3+(u_{3.p+1})^3+(u_{3.p+2})^3$ donne $\dfrac{1}{2.(p+1)}$.

Les sommes partielles extraites $\sum_{n=0}^{3.P-1}(u_n)^3$ donnent $\sum_{p=0}^{P-1}\dfrac{1}{2.(p+1)}$.
On identifie la série harmonique, qui diverge.

Inutile de regarder aussi $(U_{3.P})$ et $(U_{3.P+1})$; si déjà $(U_{3.P-1})$ diverge, la série diverge.

◦44◦ Donnez une formule explicite pour u_n définie par u_0 donné et $u_{n+1}=\dfrac{(u_n)^3}{2}$ pour tout n.

On calcule les premiers termes :

u_0	$u_1=\dfrac{(u)_0^3}{2}$	$u_2=\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{(u_0)^3}{2}\right)^3=\dfrac{(u_0)^9}{2^4}$	$u_3=\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{(u_0)^3}{2^4}\right)^3=\dfrac{(u_0)^{27}}{2^{13}}$	$u_4=\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{(u_0)^3}{2^{13}}\right)^3$

L'exposant de u_0 est facile à trouver : 3^n.
Celui de 2 que l'on va noter α_n obéit à une règle simple : $\alpha_{n+1}=1+3.\alpha_n$: $\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{(u_0)^{3^n}}{2^{\alpha_n}}\right)^3=\dfrac{(u_0)^{3.3^n}}{2^{1+3.\alpha_n}}$.
Quitte à tâtonner, on trouve vite $\alpha_n=\dfrac{3^n-1}{2}$ et on le prouve par récurrence sur n.

Sinon, et si on suivait le cours ? Ou si on le précédait ?
On soustrait à α_n le point fixe caractérisé par $\omega=1+3.\omega$.
La suite $\left(\alpha_n+\dfrac{1}{2}\right)$ est alors géométrique de raison 3 : $\alpha_{n+1}+\dfrac{1}{2}=1+3.\alpha_n+\dfrac{1}{2}=3.\left(\alpha_n+\dfrac{1}{2}\right)$
On a donc $\left(\alpha_n+\dfrac{1}{2}\right)=3^n.\left(\alpha_0+\dfrac{1}{2}\right)$ d'où $\alpha_n=\frac{3^n}{2}-\frac{1}{2}$.

.

On résume : $\boxed{u_n=(u_0)^{(3^n)}.2^{\frac{1-3^n}{2}}=\dfrac{(u_0)^{(3^n)}}{\sqrt{2}^{3^n-1}}}$

◦45◦ Pour toute suite réelle a, on définit sa moyenne de Cezéro par $z_n=\dfrac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.a_k}{n+1}$ pour tout n. Quelle(s) propriété(s) passe(nt) de a à z : bornée, constante, croissante, majorée.
Construisez a pour que z soit constante égale à 1.
Construisez a pour que z soit la suite $((-1)^n)$.

∘46∘

♡ Pour tout n, on définit $a_n = \binom{3.n}{n}$. Donnez la limite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, puis de $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$ quand n tend vers l'infini.

En appliquant le théorème de 16 arômes, donnez la limite de $\sqrt[n]{\binom{3.n}{n}}$ quand n tend vers l'infini.

La suite (a_n) est bien définie, jamais nulle : $a_n = \frac{(3.n)!}{(2.n)!.n!}$.

On effectue un quotient : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3.n+3)!}{(3.n)!}.\frac{(2.n)!}{(2.n+2)!}.\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(3.n+1).(3.n+2).(3.n+3)}{1}.\frac{1}{(2.n+1).(2.n+2)}.\frac{1}{n+1}$.

L'ensemble a une limite : $\frac{27}{4}$.

Par passage au logarithme, $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$ converge vers $\ln(27/4)$.

Par théorème de Cesàro, $\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} \ln(a_{k+1}) - \ln(a_k)$ converge vers $\ln(9/4)$ quand n tend vers l'infini.

Par télescopage, $\frac{\ln(a_n) - \ln(a_0)}{n}$ converge vers $\ln(27/4)$.

Par retour à l'exponentielle (continue), $\sqrt[n]{a_n}$converge vers $\frac{27}{4}$.

∘47∘

Montrez que la série de terme général $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ diverge. Indication : $A_{(2.p+1)^2} - A_{4.p^2}$tend il vers 0 ?

Oui, bon, la suite tend vers 0 puisque le numérateur vaut 1 ou -1 tandis que le dénominateur tend vers l'infini.

Mais la série $A_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$...

Son terme général tend vers 0. C'est bon signe, mais ça ne prouve rien de rien.
D'ailleurs, ça va mal se passer.

On va donc étudier $\frac{-1}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \ldots$.
Aucune monotonie, puisque parfois, l'accroissement est positif, parfois il est négatif.

Comme suggéré, regardons $A_{(2.p+1)^2} - A_{4.p^2}$.

Par relation de Chasles, c'est une somme $\sum_{n=4.p^2+1}^{(2.p+1)^2} \frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$.

On est entre deux carrés d'entiers. On se dt que l'exposant doit être le même pour tous.

En fait, on va prendre plutôt $A_{(2.p+1)^2-1} - A_{4.p^2-1}$. Cette fois, c'est vraiment $\sum_{n=4.p^2}^{(2.p+1)^2-1} \frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$.

Si n est entre $4.p^2$ et $(2.p+1)^2$, on a $2.p \leqslant \sqrt{n} < (2.p+1)$ puis $[\sqrt{n}] = 2.p$ et $(-1)^{[\sqrt{n}]} = 1$.

On a donc $A_{(2.p+1)^2-1} - A_{4.p^2-1} = \sum_{n=4.p^2}^{(2.p+1)^2-1} \frac{1}{n}$.

On va comparer avec une intégrale, classiquement, pour encadrer ce terme.

Ou alors on va commencer par plus simple.
On compte le nombre de termes et on encadre par le plus petit et le plus grand :

$$A_{(2.p+1)^2-1} - A_{4.p^2-1} = \sum_{n=4.p^2}^{(2.p+1)^2-1} \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{4.p^2}.((2.p+1)^2 - 4.p^2)$$

$$A_{(2.p+1)^2-1} - A_{4.p^2-1} = \sum_{n=4.p^2}^{(2.p+1)^2-1} \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{(2.p+1)^2}.((2.p+1)^2 - 4.p^2)$$

Finalement, oui, cette « différence de Cauchy » tend vers 0 avec p.

∘48∘

Le programme officiel nous invite à connaître : $n! = o(n^n)_{n\to+\infty}$.
Mais qu'en est il de $\sqrt{n^n}$ face à $n!$?
Qu'en est il de n^n face à $(2.n!)$?
Qu'en est il de $2.n^{2.n}$ face $(2.n)!$?

On va utiliser le lemme de comparaison logarithmique sur les quotients $a_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ où u_n est le quotient de nos deux suites.

$\sqrt{n^n}$ face à $n!$	n^n face à $(2.n!)$	$2.n^{2.n}$ face à $(2.n!)$
$u_n = \dfrac{n^{n/2}}{n!}$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{(n+1)/2}}{(n+1)!}.\dfrac{n!}{n^{n/2}}$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{(n-1)/2}}{n^{n/2}}$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\dfrac{1/2}{n/2}\right)^{n/2}.\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$	$u_n = \dfrac{n^n}{(2.n)!}$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{(n+1)}}{(2.n+2)!}.\dfrac{(2.n)!}{n^n}$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^n}{2.(2.n+1)}.\dfrac{1}{n^n}$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.\dfrac{1}{4.n+2}$	$u_n = \dfrac{2.n^{2.n}}{(2.n)!}$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{2.n+2}}{(2.n+2)!}.\dfrac{(2.n)!}{2.n^{2.n}}$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{2.n+2}}{(2.n+2).(2.n+1)}.\dfrac{1}{n^{2.n}}$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\dfrac{2}{2.n}\right)^{2.n}.\dfrac{(n+1)}{2.(2.n+1)}$
tend vers $e^{1/2}.0$	tend vers $e.0$	tend vers $e^2/4 > 1$
le quotient tend vers 0	le quotient tend vers 0	le quotient tend vers $+\infty$
$\sqrt{n^n} = o(n!)$	$n^n = o((2.n)!)$	$(2.n)! = o(2.n^{2.n})$

D'autres preuves sont possibles, par exemple en utilisant $n! = o(n^n)$ avec $2.n$ ou $[n/2]$ à la place de n.

∘49∘

Donnez le limite, puis un éventuel équivalent du type $a.n^\alpha$ quand n tend vers $+\infty$ pour les formes (indéterminées) suivantes

$(n+1)-n$	$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$	$(n+1)^4-n^4$	$\ln(n+1)-\ln(n)$	$e^{n+1}-e^n$
$(2.n+1)-n$	$\sqrt{2.n+1}-\sqrt{n}$	$(2.n+1)^4-n^4$	$\ln(2.n+1)-\ln(n)$	$e^{2.n+1}-e^n$
$(n^2+1)-n$	$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}$	$(n^2+1)^4-n^4$	$\ln(n^2+1)-\ln(n)$	$e^{n^2+1}-e^n$

	$(n+1)-n$	$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$	$(n+1)^4-n^4$	$\ln(n+1)-\ln(n)$	$e^{n+1}-e^n$
limite	1	0	$+\infty$	0	$+\infty$
équivalent	$1.n^0$	$\dfrac{1}{2}.n^{-1/2}$	$4.n^3$	n^{-1}	rien
	$(2.n+1)-n$	$\sqrt{2.n+1}-\sqrt{n}$	$(2.n+1)^4-n^4$	$\ln(2.n+1)-\ln(n)$	$e^{2.n+1}-e^n$
limite	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\ln(2)$	$+\infty$
équivalent	$1.n^1$	$(\sqrt{2}-1).n^{1/2}$	$15.n^4$	$\ln(2).n^0$	rien
	$(n^2+1)-n$	$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}$	$(n^2+1)^4-n^4$	$\ln(n^2+1)-\ln(n)$	$e^{n^2+1}-e^n$
limite	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
équivalent	$1.n^2$	$1.n^1$	$1.n^8$	rien	rien

Pour les polynômes de degré 4, c'est le binôme qui nous le dit.

Pour les racines, on passe par la quantité conjuguée.

Pour le logarithme, c'est le classique $\ln(n+1)-\ln(n) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$.
Sinon $\ln(n^2+1)-\ln(n)$ est équivalent à $2.\ln(n)-\ln(n)$ ce qui fait $\ln(n)$ et n'est pas polynômial.

Pour l'exponentielle, on factorise par exemple $e^{n+1}-e^n = e^n.(e-1)$.

◦50◦

Petit quiz très formateur.
si f est $\boxed{}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $[0,\ +\infty[$ alors elle l'est aussi sur tout $\mathbb{R}$.

Quels mots pouvez mettre dans le cadre :

croissante	continue	monotone
bornée	continue à droite	lipschitzienne

Donnez un argument, ou sinon un contre-exemple.

Même question avec « si f est $\boxed{}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $]0,\ +\infty[$ alors elle l'est aussi sur tout $\mathbb{R}$ ». (pas pareil...)

Si f est $\boxed{\text{croissante}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $[0,\ +\infty[$ alors elle l'est aussi sur tout $\mathbb{R}$.
On se donne x et y dans $\mathbb{R}$, on suppose $x \leqslant y$ et on étudie quatre cas. pardon, trois.

	$x \leqslant 0$	$0 \leqslant x$
$y \leqslant 0$	$f(x) \leqslant f(y)$	impossible
	car f croissante sur $\mathbb{R}^-$	
$0 \leqslant y$	$f(x) \leqslant f(0) \leqslant f(y)$	$f(x) \leqslant f(y)$
	avec les deux hypothèses	car f croissante sur $\mathbb{R}^+$

Dans tous les cas, on peut conclure favorablement.

Si f est $\boxed{\text{croissante}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $]0,\ +\infty[$ alors elle ne l'est pas forcément sur tout $\mathbb{R}$.
Elle a le droit de sauter en 0. On prend $x \longmapsto \left\{\begin{array}{lll} 1 & si & x \leqslant 0 \\ 0 & si & x > 0 \end{array}\right|$.

Si f est $\boxed{\text{continue}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $[0,\ +\infty[$ alors elle l'est aussi sur tout $\mathbb{R}$.
Elle est continue en tout point a de $]-\infty,\ 0[$,
Elle est continue à gauche en 0, et aussi à droite, donc elle est continue en 0.
Elle est continue en tout point a de $]0,\ +\infty[$.

Si f est $\boxed{\text{continue}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $]0,\ +\infty[$ alors elle ne l'est pas forcément sur tout $\mathbb{R}$.
Elle a le droit de sauter en 0. On prend $x \longmapsto \left\{\begin{array}{lll} 1 & si & x \leqslant 0 \\ 0 & si & x > 0 \end{array}\right|$ là encore.

Attention en effet, la phrase « f est continue sur $]-\infty,\ 0]$ » ne regarde f que sur cet intervalle, et ne nous renseigne que sur la continuité à gauche en 0.

Si f est $\boxed{\text{monotone}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $[0,\ +\infty[$ alors elle ne l'est pas forcément sur tout $\mathbb{R}$.
Elle peut ne pas avoir la même monotonie de chaque côté, comme $x \longmapsto x^2$ ou la valeur absolue.

A plus forte raison encore avec $]-\infty,\ 0]$ et $]0,\ +\infty[$ où on peut utiliser le même contre-exemple.

Si f est $\boxed{\text{bornée}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $[0,\ +\infty[$ alors elle est bornée sur tout $\mathbb{R}$.
Si f est $\boxed{\text{bornée}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $]0,\ +\infty[$ alors elle est bornée sur tout $\mathbb{R}$.
Il suffit de prendre le maximum des deux majorants.

Si f est $\boxed{\text{lipschitzienne}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $[0,\ +\infty[$ alors elle est bornée sur tout $\mathbb{R}$.
Il suffit de prendre le maximum des deux rapports de Lipschitz K et K' venant de

$$\big(\forall(x,\ y) \in\ ]-\infty,\ 0]^2,\ |f(y)-f(x)| \leqslant K.|y-x|\big)\ et\ \big(\forall(x,\ y) \in\ [0,\ +\infty[^2,\ |f(y)-f(x)| \leqslant K'.|y-x|\big)$$

On prend a et b dans $\mathbb{R}$.
Si ils sont tous deux négatifs, on a $|f(b)-f(a)| \leqslant K.|b-a| \leqslant Max(K,\ K').|b-a|$.
Si ils sont tous deux positifs, on a $|f(b)-f(a)| \leqslant K'.|b-a| \leqslant Max(K,\ K').|b-a|$.
Si a est négatif et b positif, on écrit

$$|f(b)-f(a)| = |f(b)-f(0)+f(0)-f(a)| \leqslant |f(b)-f(0)| + |f(0)-f(a)|$$

$$|f(b)-f(a)| \leqslant K.|b-0| + K'.|0-a|$$

$$|f(b)-f(a)| \leqslant Max(K,K').|b-0| + Max(K,K').|0-a|$$

$$|f(b)-f(a)| \leqslant Max(K,K').\big(b+(-a)\big) = Max(K,K').|b-a|$$

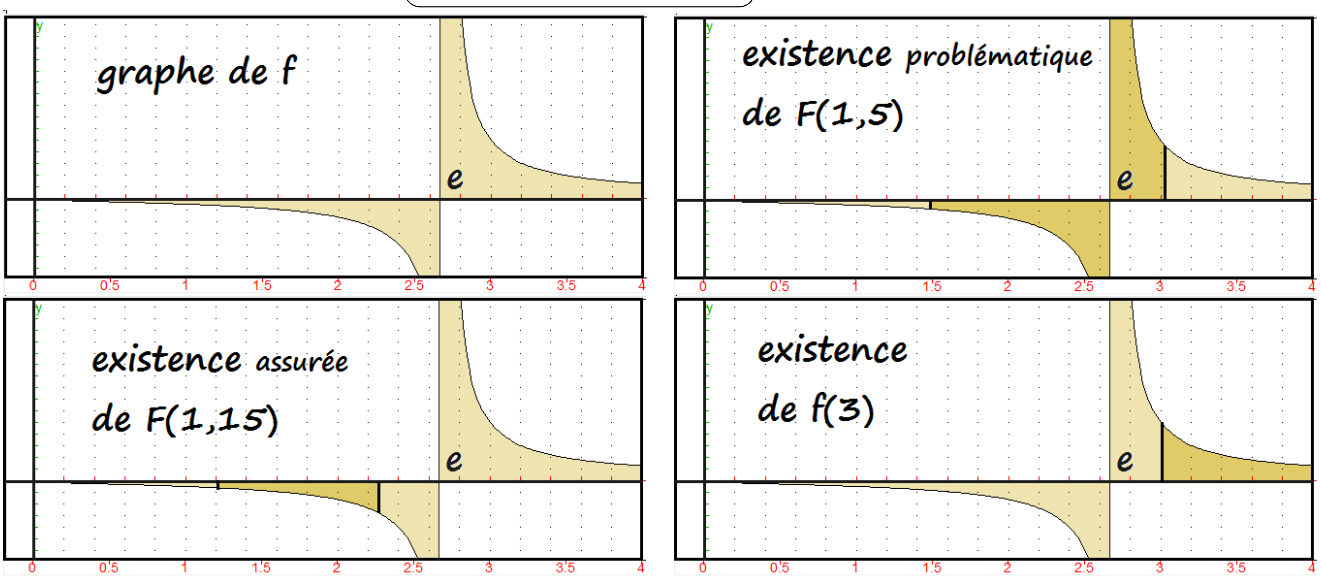
Si a est positif et b négatif, je ne vais quand même pas le rédiger !

Si f est $\boxed{\text{lipschitzienne}}$ sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $]0,\ +\infty[$ alors elle ne l'est pas forcément sur tout $\mathbb{R}$.
On a le droit de la faire sauter en 0. On peut prendre encore le même contre-exemple.
Ou $x \longmapsto x$ sur $]0,\ +\infty[$ et $x \longmapsto -x-1$ sur $]-\infty,\ 0]$.

∘51∘ Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)-1}$ puis de $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2.x} \frac{dt}{\ln(t)-1}$ *(et ce ne devra pas du tout être les mêmes domaines...)*

On va poser $f = x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)-1}$.
Il faut que $\ln(x)$ existe : $]0,\ +\infty[$.
Il faut ensuite que ce logarithme ne vaille pas 1 : $]0,\ e[\cup]e,\ +\infty[$ (largement préférable à $]0,\ +\infty[-\{e\}$ dans lequel on ne voit plus les intervalles[3].
La condition est même suffisante : $\boxed{D_f =]0,\ e[\cup]e,\ +\infty[}$

Maintenant, la question est : pour quels x peut on calculer $\displaystyle\int_x^{2.x} \frac{dt}{\ln(t)-1}$, ce qui revient à demander que $\dfrac{1}{\ln(t)-1}$ existe pour tous les t de $[x,\ 2.x]$.
Bien évidemment, ceci nécessite que x et $2.x$ soient dans D_f précédemment trouvé.
Mais aussi tous les t entre x et $2.x$.
Bref, il faut que x soit strictement positif, déjà. mais ensuite, il faut que e ne soit pas entre x et $2.x$.
Ceci revient à exclure tout $\left[\dfrac{e}{2},\ e\right]$. $\boxed{D_F = \left]0,\ \dfrac{e}{2}\right[\cup \left]e,\ +\infty\right[}$



Et si on s'entraînait à TeX ? $D_f =]0,\ e[\cup]e,\ +\infty[$ c'est
\$D_f = \rbrack0, e\lbrack \cup \rbrack e, +\infty \lbrack\$.
Les dollars **\$** c'est pour passer en mode mathématique (obtenu par **Ctrl M** sous certains environnements).
Les crochets, c'est des **\lbrack** et **\rbrack** (**l**eft et **r**ight). Et l'infini, c'est **\infty**. Et **\cup** c'est union. Devinez ce que sera **\cap**. Il y a même **\bigcup**, plus esthétique.
Et l'underscore **_f**, c'est pour placer **f** en indice.

∘52∘ ♡ Montrez l'équivalence entre $a_n \sim b_n$ et $b_n = a_n + o(a_n)$.

C'est du cours.
On suppose que nos suites ne s'annulent jamais (ou en tout cas sont non nulles à partir d'un certain rang), afin de pouvoir donner les définitions par quotients.
$a_n \sim b_n$ c'est $\dfrac{b_n}{a_n}$ tend vers 1.
$b_n = a_n + o(a_n)$ c'est $b_n - a_n = o(a_n)$ c'est à dire $\dfrac{b_n - a_n}{a_n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

3. et bien plus encore à $]0,\ +\infty[-e$ qui n'a pas de sens.... enfin, si, ce serait $]0-e,\ +\infty-e[$ et même $]-e,\ +\infty[$

Il y a bien équivalence entre $\frac{b_n}{a_n}$ tend vers 1 et $\frac{b_n}{a_n} - 1$ tend vers 0.

∘53∘ ♡ Pour tout n, on pose $a_n = n^{\ln(n)}$. Donnez sa limite en $+\infty$.
La série de terme général $1/a_n$ converge-t-elle ?
Donnez la limite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ quand n tend vers l'infini *(indication :* $\ln(n^2+n).\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$*)*.

Classique : pour étudier a^bavec a et b qui bougent, il faut revenir à $a^b = e^{b.\ln(a)}$ (indiqué dans la feuille de rentrée dès septembre, et en petit test de vacances d'été avec $3^{\ln(2)}$ et $2^{\ln(3)}$).

Ici : $a_n = e^{(\ln(n))^2}$. Il tend vers l'infini, et $\frac{1}{a_n}$existe et tend vers 0.
Dès que n a dépassé 10 (en fait dès que n a dépassé e^2), on a $0 \leqslant \frac{1}{n^{\ln(n)}} \leqslant \frac{1}{n^2}$. La série de terme général $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 10}$ converge (Riemann).
Par théorème de majoration des séries termes positifs, la série de terme général $\left(\frac{1}{n^{\ln(n)}}\right)_{n\geqslant 10}$.
Par addition, la série de terme général $\left(\frac{1}{n^{\ln(n)}}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.
Rapidité de Spé : $\frac{1}{n^{\ln(n}} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et on passe à la suite de l'exercice.

Le quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ donne bien $\exp\left((\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2\right)$.
On factorise $a^2 - b^2$ en $a(-b).(a+b)$ et on profite de la propriété de morphisme du logarithme :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \exp\left(\ln\left(n^2+n\right).\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$$

Et qu'a-t-on gagné ? Une forme indéterminée : $\ln(n^2+n)$ tend vers l'infini (comme $\ln(n+1)+\ln(n)$), donc équivalent à $2.\ln(n)$).
$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0 (à la vitesse de $\frac{1}{n}$ par l'équivalent $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$).
On utilise donc des équivalents : $\ln(n^2+n).\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{2.\ln(n)}{n}$.
Le terme de droite tend vers 0 (croissances comparées) et entraîne celui de gauche.
Par continuité de l'exponentielle, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$converge vers 1 quand n tend vers l'infini.

∘54∘

Étape 0	la suite	$(1,$	$\frac{1}{2},$	$\frac{1}{4},$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\ldots\frac{1}{2^n},\ldots)$	converge vers 0
Étape1	la suite	$(1,$	$1,$	$\frac{1}{4},$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\ldots\frac{1}{2^n},\ldots)$	converge vers 0
Étape2	la suite	$(1,$	$1,$	$1,$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\ldots\frac{1}{2^n},\ldots)$	converge vers 0
Étape3	la suite	$(1,$	$1,$	$1,$	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\ldots\frac{1}{2^n},\ldots)$	converge vers 0
Étape4	la suite	$(1,$	$1,$	$1,$	1	1	$\frac{1}{32}$	$\ldots\frac{1}{2^n},\ldots)$	converge vers 0
Écrivez la formule pour le terme général à l'étape p.									
Étape$p$	la suite	$(1,$	$1,$	$1,$	1	1	$\frac{1}{32}$	$\ldots\frac{1}{2^n},\ldots)$	converge vers 0
Faites tendre p vers $+\infty$.									
	la suite	$(1,$	$1,$	$1,$	1	1	1	$\ldots 1,\ldots)$	converge vers 0

Euh, il y a une erreur, là !

Oui, évidemment. Il y a des propriétés qui sont valables « pour tout n » , mais ne se propagent pas « par passage à la limite ».
Comme la propriété « n est un entier fini ».

Sinon, à la p^{ieme} étape, la suite a pour terme général $a_n = 1$ si $n \leqslant p$ et 2^{-n} sinon.
Il doit y avoir moyen de compacter en une seule formule avec un $2^{-Max(n,p)}$. Mais quelle utilité ?

∘55∘ Montrez que si $(a_n)^2 + (b_n)^2$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$, alors (a_n) et (b_n) tendent vers 0.

Ah oui, il s'agit de suites réelles. Sinon, vous avez un contre-exemple, non ?

∘56∘ (a_n) et (b_n) sont deux suites réelles. On suppose que $(\sin^2(a_n).\sin^2(b_n))$ converge vers 1. Montrez que $(\cos(a_n))$ et $(\cos(b_n))$ convergent vers 0.

∘57∘ Montrez que $\left(\dfrac{0!+1!+2!+\ldots+(n-2)!}{n!}\right)$, $\left(\dfrac{0!+1!+2!+\ldots+(n-1)!}{n!}\right)$ et $\left(\dfrac{0!+1!+2!+\ldots+n!}{n!}\right)$ convergent et donnez leur limite.

∘58∘ On veut montrer que si (a_n) et (b_n) (suites réelles) convergent vers α et β alors $(Min(a_n,\ b_n))$ converge vers $Min(\alpha,\ \beta)$.
Première méthode, par disjonction de cas.
On suppose $\alpha < \beta$. Montrez qu'à partir d'un certain rang, on a $Min(a_n,\ b_n)) = b_n$ et concluez.
On suppose $\alpha > \beta$. Montrez qu'à partir d'un certain rang, on a $Min(a_n,\ b_n)) = a_n$ et concluez.
On suppose $\alpha = \beta$. Concluez.

Deuxième méthode. Utilisez une formule du cours pour $Min(a,\ b)$.

∘59∘ Soit f continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. On la suppose (à tort, je sais, mais on va raisonner par l'absurde) non bornée.
Montrez que pour tout n, $\{x \in [a,\ b] \mid f(x) \geqslant n\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide bornée. Déduisez qu'elle admet une borne inférieure qu'on va noter $a_n$et une borne supérieure qu'on va noter b_n.
Montrez que la suite (a_n) est croissante, et que la suite (b_n) est décroissante et majore (a_n).
Déduisez que les deux suites convergent vers deux réels α et β (qui pourront être égaux, ça ne me gène pas).
Montrez : $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = +\infty$. Concluez.
Qu'avez vous re-démontré ?

∘60∘ Montrez que si (a_n) est croissante à partir d'un certain rang, alors elle est minorée.

Supposons la suite (a_n) croissante à partir du rang R.
On a alors $a_n \geqslant a_R$ pour n plus grand que R. Et avant ? Il n'y a qu'un nombre fini de termes.

$$\begin{array}{ccccc} & n < R & ou & R \leqslant n \\ \forall n \in \mathbb{N}, & Min(a_0, \ldots, a_{R-1}) & & a_R \leqslant a_n \\ & Min(a_0, \ldots, a_{R-1} & , & a_R) \leqslant a_n \end{array}$$

∘61∘ On définit : $f = x \longmapsto \sqrt[\log_{10}(x)]{x}$. Représentez graphiquement f et calculez $\displaystyle\int_1^2 f(t).dt$.

On a posé $f = x \longmapsto \sqrt[\log_{10}(x)]{x}$ sur $]0,\ +\infty[$ a priori. Mais on revient à la définition de $\sqrt[a]{x} = x^{\frac{1}{a}} = \exp(\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.
On rappelle aussi : $\log_c(b) = \dfrac{\ln(b)}{\ln(c)}$. On a donc $\sqrt[\log_{10}(x)]{x} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{\ln(x)/\ln(10)}\right) = e^{\ln(10} = 10$.
Le graphe est donc une demi-droite d'ordonnée 10.

Enfin $\displaystyle\int_1^2 f(t).dt = \int_1^2 10.dt = 10.1 = 10$ (sans passer par $\Big[10.x\Big]_1^2$, on a des neurones et surtout, on voit les intégrales).

∘62∘ Complétez : $f = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & ☺ \\ ☻ & ☼ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour avoir $Ker(f) = Vect(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix})$, et $Im(f)$ d'équation $3.x + y = 0$. Calculez le déterminant de la matrice. Diagonalisez la.

On écrit $f = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour se simplifie la vie (application bien linéaire).
Le noyau nous dit $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (et on a aussi $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3.\lambda \\ 2.\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour tout λ).
On a donc la forme $f = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ b & -3.b/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Mais on veut aussi que chaque vecteur $\begin{pmatrix} x & -3.y/2 \\ b.x & -3.b.y/2 \end{pmatrix}$ vérifie $3.\Big(x - \dfrac{3.y}{2}\Big) + b.\Big(x - \dfrac{3.y}{2}\Big) = 0$ pour tout couple $(x,\ y)$.

On veut donc $dsp(3+b).x-(3+b).\frac{3.y}{2}=0$ pour tout couple $(x,\ y)$. Avec des cas particuliers, la condition $b=-3$ est nécessaire. Mais aussi suffisante pour tous les couples. On résume : $f=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3 & 9/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Même sans avoir trouvé la matrice, son déterminant est nul, puisque l'application est ni injective (noyau non réduit à $\overrightarrow{0}$), ni surjective (image réduite à une droite au lieu du plan).

Si on doit la diagonaliser (et on le doit), on a une valeur propre égale à 0 (avec pour vecteur propre les vecteurs du noyau) et l'autre valeur propre vaut $\frac{11}{2}$.

Vous voulez un vecteur $\frac{11}{2}$propre ? Prenez le dans $Im(f)$. Vous savez que son image est dans $Im(f)$ et lui est donc proportionnelle.

Donc, sans rien résoudre : $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 11/2 \end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. On vérifie :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3 & 9/2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 11/2 \\ 0 & -33/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 11/2 \end{pmatrix}$$

∘63∘

a est une suite réelle positive. On suppose : $a_n+(a_n)^2=o(1)_{n\to+\infty}$, montrez $a_n=o(1)_{n\to+\infty}$.
b est une suite réelle. Montrez qu'on peut avoir $b_n+(b_n)^2=o(1)_{n\to+\infty}$ sans avoir pour autant $b_n=o(1)_{n\to+\infty}$.
b est une suite réelle. Montrez qu'on peut avoir $c_n+(c_n)^2=o(1)_{n\to+\infty}$ sans avoir pour autant « (c_n) converge ».

On suppose que $a_n+(a_n)^2$ converge vers 0. Il faut montrer que a_n converge vers 0.

Surtout, ne commencez pas votre raisonnement en disant « notons α la limite de a_n ».
C'est complètement idiot. Une suite n'a pas forcément de limite ! C'est vivre dans un monde idéalisé même pas joli.

Mais il y a une hypothèse : réelle positive. On écrit donc simplement : $\boxed{0\leqslant a_n\leqslant a_n+(a_n)^2}$

Le théorème du gendarme et du mur donne la convergence de (a_n) vers 0.

Si on n'a rien sur le signe de (b_n), on ne peut plus rien faire.
Et d'ailleurs, $b_n+(b_n)^2$ peut carrément être nul pour $b_n=-1$.
On donne donc un contre-exemple : la suite constante égale à -1.

Mais on peut même la choisir non convergente.
Prenons la suite dont un terme sur deux vaut 0 et un terme sur deux vaut -1.
Elle ne converge pas *(deux sous-suites ont des limites distinctes)*. Mais la somme $c_n+(c_n)^2$ est constante égale à 0. Elle converge vers 0.

∘64∘

Sachant $\sqrt{0,44444\ldots}=\frac{p}{q}$ (irréductible), calculez $p+q$.

Mais qui est $0,4444\ldots$? Trois approches.

$\bullet_1$ On sort le 4 : $4\times 0,111\ldots$. On met un 9 artificiel : $\frac{4}{9}\times 0,999\ldots$. On reconnaît un classique : $\frac{4}{9}\times 1$.

$\bullet_2$ C'est une série géométrique $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{10^k}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{4}{10}-4.\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}=\frac{4}{9}$.

$\bullet_3$ On pose $x=0,444\ldots$ alors $10.x-x=4,444\ldots-0,444\ldots=4$.

Dans tous les cas, on calcule le rationnel $\boxed{\sqrt{\frac{4}{9}}}$ et la somme cherchée vaut $4+9$ ce qui fait 13.

∘65∘

J'ai acheté deux hexaèdres réguliers (beh si : des dés à six faces) non équilibrés, mais tout deux du même modèle (mêmes probabilités pour chaque face). Je les ai lancés tant de fois que le tableau suivant me donne la probabilité d'obtenir les sommes de 2 à 12 :

$P(A+B=2)$	$P(A+B=3)$	$P(A+B=4)$	$P(A+B=5)$	$P(A+B=6)$	$P(A+B=7)$	$P(A+B=8)$	$P(A+B=9)$	$P(A+B=10)$	$P(A+B=11)$	$P(A+B=12)$
1/64	1/16	1/16	3/32	7/32	3/32	13/64		7/64	1/32	1/64

Pouvez vous retrouver ?

On nous donne le tableau

$P(A+B=2)$	$P(A+B=3)$	$P(A+B=4)$	$P(A+B=5)$	$P(A+B=6)$	$P(A+B=7)$	$P(A+B=8)$	$P(A+B=9)$	$P(A+B=10)$	$P(A+B=11)$	$P(A+B=12)$
1/64	1/16	1/16	3/32	7/32	3/32	13/64		7/64	1/32	1/64

Il manque une case ? pas grave, on sait que la somme des probabilités vaut 1.

Sinon, on note p_1 à p_6 les probabilités $P(A=k)=P(B=k)=p_k$. Et on dresse une table des trente six lancers possibles avec leur probabilité :

	$A=1$	$A=2$	$A=3$	$A=4$	$A=5$	$A=6$
$B=1$	$p_1\times p_1$	$p_1\times p_2$	$p_1\times p_3$	$p_1\times p_4$	$p_1\times p_5$	$p_1\times p_6$
$B=2$	$p_2\times p_1$	$p_2\times p_2$	$p_2\times p_3$	$p_2\times p_4$	$p_2\times p_5$	$p_2\times p_6$
$B=3$	$p_3\times p_1$	$p_3\times p_2$	$p_3\times p_3$	$p_3\times p_4$	$p_3\times p_5$	$p_3\times p_6$
$B=4$	$p_4\times p_1$	$p_4\times p_2$	$p_4\times p_3$	$p_4\times p_4$	$p_4\times p_5$	$p_4\times p_6$
$B=5$	$p_5\times p_1$	$p_5\times p_2$	$p_5\times p_3$	$p_5\times p_4$	$p_5\times p_5$	$p_5\times p_6$
$B=6$	$p_6\times p_1$	$p_6\times p_2$	$p_6\times p_3$	$p_6\times p_4$	$p_6\times p_5$	$p_6\times p_6$

et

	$A=1$	$A=2$	$A=3$	$A=4$	$A=5$	$A=6$
$B=1$				$p_1\times p_4$		
$B=2$			$p_2\times p_3$			
$B=3$		$p_3\times p_2$				
$B=4$	$p_4\times p_1$					
$B=5$						
$B=6$						

Sur le second tableau, j'ai mis en valeur l'événement $A+B=5$ avec ses quatre possibilités : $4+1$, $3+2$, $2+3$ et $1+4$.

C'est ainsi qu'on a $p_4\times p_1+p_3\times p_2+p_2\times p_3+p_1\times p_4=\dfrac{3}{32}$.

Mais encore mieux. La seule façon d'avoir un total de 2 est le double 1. On a donc $(p_1)^2=\dfrac{1}{64}$ et donc $p_1=\dfrac{1}{8}$.

On ne prend pas $p_\& =-\dfrac{1}{8}$ car c'est une probabilité. Et on voit déjà que le dé n'est pas équilibré, sinon on aurait $p_k=\dfrac{1}{6}$ pour tout k.

Mais on a ensuite $\dfrac{1}{16}=P(A+B=3)=p_1\times p_2+p_2\times p_1$. Ayant déjà p_1, on déduit $p_2=\dfrac{1}{4}$ (on tombe plus facilement sur 2 que sur 1 avec ces dés).

On poursuit : $\dfrac{1}{16}=P(A+B=4)=p_1\times p_3+p_2\times p_2+p_3\times p_1=2\times\dfrac{p_3}{8}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$. On trouve cette fois $p_3=0$.

Oui, notre dé ne tombera jamais sur la face 3. C'est comme ça, il doit y avoir un aimant répulsif.

On a ensuite $2\times\dfrac{1}{8}.p_4+2\times 0\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{32}$ donc $p_4=\dfrac{3}{8}$.

On a presque fini : comment avoir 6 : $2\times\frac{1}{8}\times p_5+2\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}+0\times 0=\frac{7}{32}$: $p_5=\dfrac{1}{8}$.

On trouve p_6 par « somme égale à 1 » ou par $P(A+B=8)=\dfrac{13}{64}$.

On peut vérifier la cohérence sur les derniers.

On résume

	1/8	1/4	0	3/8	1/8	1/8
1/8	1/64	2/64	0	3/64	1/64	1/64
1/4	2/64	4/64	0	6/64	2/64	2/64
0	0	0	0	0	0	0
3/8	3/64	6/64	0	9/64	3/64	3/64
1/8	1/64	2/64	0	3/64	1/64	1/64
1/8	1/64	2/64	0	3/64	1/64	1/64

et on somme en diagonale pour retrouver les données de l'énoncé (toutes avec dénominateur 64 pour la lisibilité).

◦66◦

On pose $u_0=1$ et $u_{n+1}=2.u_n+\dfrac{1}{u_n}$. Montrez que la suite (u_n) existe et prouvez $u_n\geqslant 2^n$ pour tout n.
On pose $v_n=2^{-n}.u_n$. Calculez $v_{n+1}-v_n$. Montrez que (v_n) est croissante, majorée. déduisez l'existence d'un réel λ vérifiant $u_n\sim_{n\to+\infty}\lambda.2^n$.
Écrivez un script Python qui détermine λ à 10^{-3} près.

Par récurrence sur n, chaque terme de la suite existe, et est positif.

Par positivité : $u_{n+1}=2.u_n+\dfrac{1}{u_n}\geqslant 2.u_n$.

Par récurrence sur n : $\forall n,\ u_n\geqslant 2^n.u_0=2^n$.

On a posé $v_n = 2^{-n}.u_n$donc

$$v_{n+1} = 2^{-n-1}.u_{n+1} = 2^{-n-1}.\Big(2.u_n + \frac{1}{u_n}\Big) = 2_n^{-n}.u_n + \frac{1}{2^{n+1}.u_n} = v_n + \frac{1}{2^{n+1}.u_n}$$

On a immédiatement $v_{n+} - v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}.u_n} > 0$. La suite (v_n) est croissante.

On majore ensuite : $v_{n+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}.2^n}$ puisque $u_n > 2^n$. On somme de 0 à $N-1$:

$$v_N - v_0 = \sum_{n=0}^{N-1} (v_{n+1} - v_n) \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2.4^n} = \frac{1}{2}.\frac{1 - \dfrac{1}{4^{N+1}}}{1 - \dfrac{1}{4}} \leqslant \frac{2}{3}$$

La suite (v_n) est majorée. Elle converge vers son plus petit majorant.

En notant λ la limite de v , on a $2^{-n}.u_n$ qui converge vers λ et donc $u_n$qui est équivalent à $\lambda.2^n$.

Pour le calcul de λ on peut le jouer à la physicienne : calculer $u_n/2^n$ pour n grand.

```
u, d = 1, 1
for n in range(1000) :
....u = 2*u+1/u
....d = 2*d
print(u/d)
```
et même `print(round(u/d, 4))` pour n'avoir que quatre chiffres significatifs.

Sinon, on peut calculer $u_n/2^n$ et s'arrêter quand la valeur ne bouge presque plus.
```
a, d, old = 1, 1, 0
while abs(a/d-old) > 10**(-4) :
....old = a/d
....a = 2*a+1/a
....d = d*2
```

∘67∘

Complétez : $\forall x \in \mathbb{R}$, (☻ $\leqslant x \leqslant 5) \Leftrightarrow (|x -$ ☺$| \leqslant 4)$ / $\forall x \in \mathbb{R}$, $(|x - 6| \leqslant$ ♪$) \Rightarrow (8 \geqslant x \geqslant$ ♫$)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ (-3 \leqslant x \leqslant 5) \Leftrightarrow (|x - 1| \leqslant 4)$ car $1 - 4 = -3$ et $1 + 4 = 5$

$\forall x \in \mathbb{R},\ (|x - 6| \leqslant 2) \Leftrightarrow (8 \geqslant x \geqslant 4)$ car $6 + 2 = 8$ et $6 + -2 = 4$

Mais en fait, c'est purement visuel, avec « milieu » et « rayon ».

∘68∘

Associez à chaque résultat faux son contre-exemple, et montrez que c'en est bien un :

$a_n \sim b_n \Rightarrow e^{a_n} \sim e^{b_n}$ A	$a_n \sim b_n \Rightarrow \sin(a_n) \sim \sin(b_n)$ B	$a_n \sim b_n \Rightarrow \ln(a_n) \sim \ln(b_n)$ C	$a_n \sim b_n \Rightarrow (a_n - b_n \to 0)$ D	$a_n \sim b_n \Rightarrow (1 + a_n) \sim (1 + b_n)$ E
α $a_n = n$ et $b_n = n + \pi$	β $a_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ et $b_n = \dfrac{n+1}{n}$	γ $a_n = \dfrac{1-n}{n}$ et $b_n = \dfrac{2-n}{n}$	δ $a_n = n^2$ et $b_n = n^2 - n$	ε $a_n = n^2$ et $b_n = n^2 - n$

On a bien sûr $n + \pi \sim n$ (le quotient $1 + \dfrac{\pi}{n}$ converge vers 1).

Le quotient $\dfrac{\sin(n+\pi)}{\sin(n)}$ existe toujours et vaut toujours -1. Il ne peut donc pas converger vers 1.

De même : $\dfrac{e^{n+\pi}}{e^n}$ converge vers e^{π}et pas vers 1.

Pire encore si j'ose dire : $\dfrac{e^{n^2-n}}{e^{n^2}}$ tend vers 0 alors que $\dfrac{n^2 - n}{n^2}$ converge vers 1.

De même $(n^2 - n) - (n^2)$ ne tend pas vers 0. On n'a donc pas $(a_n \sim b_n) \Rightarrow (a_n - b_n \to 0)$.

En fait $(a_n \sim b_n) \Rightarrow (b_n - a_n = o(a_n))$ et c'est tout. Avec équivalence même.

Les deux suites $a_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ et $b_n = \dfrac{n+1}{n}$ tendent vers 1, leur quotient aussi.

Mais $\dfrac{\ln(b_n)}{\ln(a_n)} = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} \sim \dfrac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}} = n$. Ce quotient ne tend pas vers 1. Avec d'autres exemples, on le fait tendre vers ce qu'on veut.

On pourra quand même montrer : $(a_n \sim b_n) \Rightarrow (\ln(a_n) \sim \ln(b_n))$ quand on aura des suites infiniment grandes.

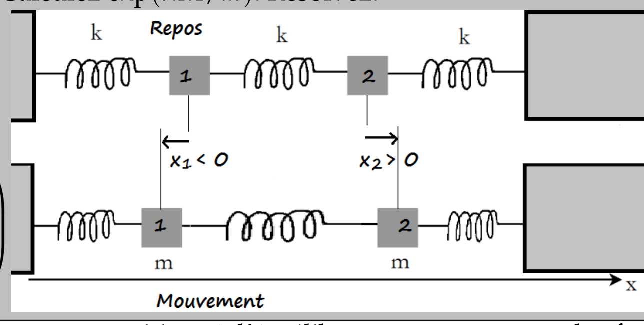
∘69∘

On dispose trois ressorts (même constante de raideur k) et deux masses (identiques $m_1 = m_2$) sur une tige entre deux points fixes A et B (sur une tige dont la réaction compense le poids). Les mesures algébriques x_1 et x_2 sont mesurées par rapport aux positions au repos. Justifiez $U' = M.U$. (avec $a = \sqrt{k/m}$). Montrez que M a pour spectre $\{i.a,\ -i.a,\ i.\sqrt{3}.a,\ -i.\sqrt{3}.a\}$. Diagonalisez M. Calculez $\exp(t.M/m)$. Résolvez.

$$U = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2.a^2 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 & -2.a^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 3^5 = 243$$

avec $a = \sqrt{k/m}$, $P = \begin{pmatrix} i.a & & -i.a.\sqrt{3} & i.a.\sqrt{3} \\ i.a & -i.a & i.a.\sqrt{3} & \\ 1 & 1 & & -1 \\ & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$5^6 = 15625$



Comme les mesures algébriques sont données par rapport aux positions à l'équilibre, on peut mesurer les forces de rappel.
Prenons le cas de la première masse, les rôles étant symétriques. Le ressort 1 d'allongement x_1 donne $-k.x_1$.
Le ressort 2 d'allongement $x_2 - x_1$ donne $k.(x_2 - x_1)$.
On somme : $k.x_2 - 2.k.x_1$.
Le principe fondamental de la dynamique se traduit par $k.x_2 - 2.k.x_1 = m.x_1''$ (*masse* $\times$ *acceleration*).
C'est la première ligne du produit matriciel après division par m et en posant $k/m = a^2$.
Pour la seconde masse, on a $m.x_2'' = k.x_1 - 2.k.x_2$. C'est la seconde ligne de la matrice.

Les deux lignes suivantes s'écrivent $x_1' = x_1'$ et $x_2' = x_2'$ ce qui est assez logique dans les deux cas.

On a $U' = M.U$ avec U le vecteur colonne « vitesses puis positions » (de dérivée accélérations puis vitesses). On peut résoudre formellement en $U_t = e^{t.M}.U_0$.

Mais il faut diagonaliser M. On va calculer

$$\det(\lambda.I_4 - M) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2.a^2 & -a^2 \\ 0 & \lambda & -a^2 & 2.a^2 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda. \begin{vmatrix} \lambda & -a^2 & 2.a^2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2.a^2 & -a^2 \\ \lambda & -a^2 & 2.a^2 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \lambda^4 + 4.a^2.\lambda^2 + 3.a^4$$

On nous propose le spectre, autant vérifier les quatre imaginaires purs : $i.a$ et $\sqrt{3}.i.a$ et leurs opposés. Sinon, on pouvait résoudre en posant $X = \lambda^2$ et trouver $X_1 = -a^2$ et $X_2 = -3.a^2$.

On a le spectre, on tient la matrice D avec ses quatre valeurs propres distinctes.
On cherche P (on complète) en résolvant $M.U_0 = i.a.U_0$ puis $M.U_1 = -i.a.U_1$ et enfin $M.U_2 = i.\sqrt{3}.a.U_2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2.a^2 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 & -2.a^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i.a & -i.a & -i.a.\sqrt{3} & i.a.\sqrt{3} \\ i.a & -i.a & i.a.\sqrt{3} & -i.a.\sqrt{3} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i.a & -i.a & -i.a.\sqrt{3} & i.a.\sqrt{3} \\ i.a & -i.a & i.a.\sqrt{3} & -i.a.\sqrt{3} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i.a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i.a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i.a.\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i.a.\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

On a complété la matrice. D'ailleurs, quitte à inverser les questions, avec P, on trouve vecteurs propres et les valeurs propres qui vont avec.

Avec $M = P.D.P^{-1}$ on a $t.M = P.t.D.P^{-1}$ et $(t.M)^n = P.(t.D)^n.P^{-1}$ avec $t^n.D^n$ de termes diagonaux $(t.\lambda_k)^n$.

On somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(t.M)^n}{n!} = P.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n.D^n}{n!}.P^{-1} = P.\Delta_t.P^{-1}$ avec Δ_t de termes diagonaux $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda_k.t)^n}{n!}$ c'est à dire $e^{\lambda_k.t}$.
On a donc

$$\exp(t.M) = \begin{pmatrix} i.a & -i.a & -i.a.\sqrt{3} & i.a.\sqrt{3} \\ i.a & -i.a & i.a.\sqrt{3} & -i.a.\sqrt{3} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} e^{i.a.t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i.a.t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i.a.\sqrt{3}.t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i.a.\sqrt{3}.t} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i.a & -i.a & -i.a.\sqrt{3} & i.a.\sqrt{3} \\ i.a & -i.a & i.a.\sqrt{3} & -i.a.\sqrt{3} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Les coefficients seront des combinaisons (réelles à la fin) des exponentielles complexes.

On trouve que nos oscillations sont des combinaisons de

$t \longmapsto \cos(a.t)$	$t \longmapsto \cos(a.\sqrt{3}.t)$
$t \longmapsto \sin(a.t)$	$t \longmapsto \sin(a.\sqrt{3}.t)$

Tiens, mais la locution « modes propres » de la physique serait elle associée à nos valeurs propres et vecteurs propres ?

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

Centrale PC

I∼0) On note UP l'ensemble des suites réelles ultimement périodiques ($\exists R \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant R,\ a_{n+p} = a_n$). Montrez que c'est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .)$. Est il de dimension finie ?

Ma correction sera émaillée d'extraits du rapport du jury de Centrale-Supelec.
Je vous livre d'ailleurs tout de suite une première remarque de leur part :

Quelques remarques générales pour commencer :
notons de graves fautes de raisonnement dans les raisonnements par récurrence : « supposons qu'une propriété est vraie pour tout n et montrons-la pour n+1 », mauvaise initialisation de la récurrence lorsqu'il faut faire deux vérifications au départ.
l'incapacité à nier une assertion, par exemple « a est bornée ».
Signalons encore l'utilisation abusive de « il est clair que », « il est évident que », l'invocation d'un théorème du cours pour justifier une assertion sans citer le dit théorème ni vérifier que les hypothèses sont satisfaites, la facilité avec laquelle est signalée une erreur de texte lorsque le résultat obtenu n'est pas celui annoncé (jusqu'à trois erreurs dénoncées dans une même copie !).
Enfin, le vocabulaire est très souvent imprécis (confusion entre nombre et chiffre, entre bornée et majorée).

On va utiliser la notion de sous-espace vectoriel (en précisant de qui).

La suite nulle est ultimement périodique (rang 0 période 1).

Prenons deux suites ultimement périodiques (rangs R et R', périodes p et p'). On a alors
$\forall n \geqslant Max(R, R'),\ u_{n+q} = u_n$ en posant q le $p.p.c.m.$ de p et p'.

Rapport du jury : La définition d'un espace vectoriel n'est pas toujours connue. La recherche d'une période commune à deux suites ultimement périodiques n'apparaît pas toujours nécessaire. Il y a confusion entre cardinal et dimension d'un espace vectoriel.

L'espace des suites ultimement périodiques contient déjà celui des suites périodiques (avec $R = 0$). Et cet espace des suites périodiques est de dimension non finie. En effet, on peut y trouver de familles libres de suites aussi grandes que l'on veut.

On se donne N et on construit des suites de périodes 2, 3, 5, 7, 11 jusqu'au N^{ieme} nombre premier (astuce pour qu'elles forment une famille libre).

La k^{ieme} suite, associée au nombre p_k est définie par $n \longmapsto \left\{\begin{array}{lll} 1 & si & n \text{ multiple de } p_k \\ 0 & sinon & \end{array}\right|$.

Par exemple $(1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1\ldots)$ *pour l'entier premier* 5.

On notera v_{p_k} cette suite (de terme général $v_{p_k,n}$ il faut deux indices).

On montre la liberté de cette famille $(v_2,\ v_3,\ v_5, \ldots v_{p_N})$ en se donnant N réels et en supposant $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k.v_{p_k} = 0$ (suite nulle).
On veut montrer que les a_k sont tous nuls.

Pour comprendre :
$a_1.(1,0,1,0,1,0,1,0\ldots) + a_2.(1,0,0,1,0,0,1,0\ldots) + a_3.(1,0,0,0,0,1,0,0\ldots) = (0,0,0,0,0,0,0,0\ldots)$ *donne, rien qu'en regardant les termes d'indices* 2, 3 *et* 5 : $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Regardons le terme d'indice $n = 2$ dans $\sum_{k=1}^{N} a_k.v_{p_k} = 0$. Il vaut $a_1.1 + 0$. Donc a_1 est nul.
Regardons le terme d'indice $n = 3$ dans $\sum_{k=1}^{N} a_k.v_{p_k} = 0$. Il vaut $0 + a_2.1 + 0$. Donc a_2 est nul.
Regardons le terme d'indice $n = 5$ dans $\sum_{k=1}^{N} a_k.v_{p_k} = 0$. Il vaut $0 + a_3.1 + 0$. Donc a_3 est nul.
C'est en regardant le terme d'indice $n = p_k$ dans $\sum_{k=1}^{N} a_k.v_{p_k} = 0$ qu'on trouve $a_k = 0$.
Ayant une famille libre aussi grande qu'on veut, l'espace est de dimension infinie.

Rapport du jury : La justification de la dimension infinie est, sauf dans quelques très bonnes copies, très imprécise.

II∼0) Montrez que toute suite ultimement périodique (a_n) est bornée.

Soit une suite (a_n) périodique de période p à partir du rang R.
Elle ne prend alors qu'un nombre fini de valeurs.

On peut même en donner la liste a_0 *jusqu'à* a_{R-1} *puis les valeurs de* a_R *à* a_{R+p-1} *reprises ensuite de manière périodique.*
On peut majorer la suite en valeur absolue par $Max(|a_0|, |a_1 \ldots |a_{R+p-1}|)$.

II∼1) Déduisez que si (a_n) est ultimement périodique et x dans $[0,\ 1[$ alors la famille $(a_n.x^n)$ est sommable, et montrez que sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.x^k$ est une fraction rationnelle en x.

On note K un majorant de la suite ultimement périodique (en l'occurrence $K = Max(|a_0|, |a_1 \ldots |a_{R+p-1}|)$).
Pour montrer que la famille $(a_n.x^n)$ (indexée par $\mathbb{N}$) est sommable, on va la majorer en valeur absolue par une famille sommable de référence : $|a_n.x^n| \leqslant K.x^n$.
Et la famille $(K.x^n)$ est sommable, il suffit de regarder les sommes partielles

$$\sum_{n=0}^{N} K.x^n = K.\frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \leqslant \frac{K}{1 - x}$$

Le majorant ne dépend plus que de x et pas de N.
La famille $(K.x^n)$ est sommable, et par majoration en valeur absolue, la famille $(a_n.x^n)$ l'est aussi.

On somme en séparant par paquets (familles sommables) :
• du rang 0 au rang $R - 1$: $\sum_{n=0}^{R-1} a_n.x^n$: c'est un polynôme
• du rang R à l'infini en regroupant par période

$$\sum_{n=R}^{+\infty} a_n.x^n = \sum_{n=R}^{R+p-1} \Big(a_n. \sum_{k=0}^{+\infty} a^{n+k.p}\Big) = \sum_{n=R}^{R+p-1} \Big(a_n.x^n. \sum_{k=0}^{+\infty} (x^p)^k\Big) = \sum_{n=R}^{R+p-1} \Big(a_n.x^n.\frac{1}{1 - x^p}\Big)$$

Cette fois, on a une fraction rationnelle.
La somme est une fraction rationnelle

$$\frac{\sum_{n=R}^{R+p-1} a_n.x^n}{1 - x^p} + \sum_{n=0}^{R-1} a_n.x^n$$

Exemple : $a = (1,2,3,4,-1,5,7,-1,5,7,-1,5,7,\ldots)$ *(rang* 4 *, période* 3*)*
La somme cherchée vaut

$$1 + 2.x + 3.x^2 + 4.x^3 + \Big((-1 + 5.x + 7.x^2).x^4 + (-1 + 5.x + 7.x^2).x^7 + (-1 + 5.x + 7.x^2).x^{10} + \ldots\Big)$$

On regroupe :

$$1+2.x+3.x^2+4.x^3+(-1+5.x+7.x^2).x^4.(1+x^3+x^6+x^9+\dots)=1+2.x+3.x^2+4.x^3+\frac{-x^4+5.x^5+7.x^6}{1-x^3}$$

à condition bien sûr que x reste entre 0 et 1.

III∼0) On définit la suite de Fivebonacci : $FV_0=FV_1=1$ et $FV_{n+2}=(FV_{n+1}+FV_n)\%5$. Calculez ses vingt premier termes, et montrez qu'elle est ultimement périodique (période ?).

Pour calculer les termes :

```
def Five(n) :
....L = [1, 1]
....for k in range(n-1) :
........new = (L[-2]+L[-1]) % 5
........L.append(new)
....return(L)
```

A la main :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$FV[n]$	1	1	2	3	0	3	3	1	4	0	4	4	3	2	0	2	2	4	1	0	1	1	2

Finit on par revoir les mêmes termes ?
Oui : $FV_{20}=FV_{21}=1$, comme F_0 et F_1.
On redémarre avec le même germe.
La suite va se répéter. Proprement, on va montrer :

$$FV_{n+20}=FV_n$$

pour tout n par récurrence à double hérédité.

On initialise donc par notre recherche : $FV_{20}=FV_0$ et $FV_{21}=FV_1$.
On se donne n et on suppose pour ce n : $FV_{n+20}=FV_n$ et $FV_{n+21}=FV_{n+1}$.
On calcule $FV_{n+2+20}=FV_{n+1+20}+FV_{n+20}$ par définition, puis $FV_{n+2+20}=FV_{n+1}+FV_n$ par hypothèse, puis enfin $FV_{n+2+20}=FV_{n+2}$ par définition.

On notera qu'avoir $FV_7=FV_0$ ne permettait pas de propager une périodicité de période 7.
On a besoin de récurrence à double hérédité.

La suite est non seulement ultimement périodique, mais même périodique.

III∼1) Calculez $\sum_{k=0}^{+\infty} FV_k.x^k$ pour tout x de $[0,\ 1[$.

Le calcul en regroupant les termes par lots de 20 donne

$$S(x)=\frac{1+x+2.x^2+3.x^3+3.x^5+3.x^6+x^7+4.x^8+4.x^{10}+4.x^{11}+3.x^{12}+2.x^{13}+2.x^{15}+2.x^{16}+4.x^{17}+x^{18}}{1-x^{10}}$$

J'en viens à regretter d'avoir modifié l'énoncé qui travaillait sur la suite modulo 2.

Rapport du jury. Beaucoup d'étudiants reconnaissent la suite de Fibonacci mais obéissant à un réflexe taupinal, ils donnent la forme explicite du terme général avec des $(1+\sqrt{5})^n$, ce qui n'est guère utile pour étudier les congruences.

IV∼0) On définit la suite (a_n) par $a_0=1$, $a_{2.n}=a_n$ et $a_{2.n+1}=-a_n$ pour tout n. Déterminez $(a_n)_{n\leqslant 30}$.

Le script de construction donne $a_p=a_{p/2}$ si p pair (poser $p=2.n$) et $a_p=-a_{(p-1)/2}$ si p impair (poser $p=2.n+1$ et utiliser $a_{2.n+1}=-a_n$).

Voici les 31 premières valeurs

```
[1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1]
```

IV∼1) Écrivez un script Python qui pour N donné retourne la liste $[a_0, \dots a_N]$.

```
def s(N) : #int -> list of int
....L = [1]
....for k in range(1, N+1) : #oui, range(n) c'est N termes, d'où N+1 au total de a0 à aN
........if k%2 == 0 : #test de parité
............L.append(L[k//2])
........else :
............L.append(-L[(k-1)//2])
....return(L)
```

IV∼2) Montrez que pour tout x de $[0,\ 1[$, la famille $(a_n.x^n)$ est sommable. On pose alors $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$.

Par construction, tous les termes de la suite existent (c'est peut être le plus délicat) et valent -1 ou 1.

La famille $(a_n.x^n)$ est dominée (en valeur absolue) par la famille (x^n), sommable (série géométrique de somme $\dfrac{1}{1-x}$).

La somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$ existe pour tout x de $[0,\ 1[$.

IV∼3) Montrez que $S(x^2)$ existe aussi et prouvez : $S(x) = (1-x).S(x^2)$.

Mais quand x est entre 0 et 1, x^2 y est aussi, et donc $S(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.(x^2)^n$ existe aussi.

Multiplions par 1 et par x et soustrayons (toujours partir du membre le pus compliqué) :

$$S(x^2) - x.S(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^{2.n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^{2.n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2.n}.x^{2.n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2.n+1}.x^{2.n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p.x^p$$

en utilisant la définition de $a_{2.n}$et $a_{2.n+1}$ et en réunissant les termes de la famille sommable (avec $p = 2.n$ et $p = 2.n+1$ on forme une partition de $\mathbb{N}$).
On a bien $S(x) = (1-x).S(x^2)$ pour tout x de $[0,\ 1[$.

IV∼4) Montrez que pour tout x de $[0,\ 1[$: $\left(\prod_{k=0}^{n}(1-x^{(2^k)})\right)$ est décroissante, minorée, et convergente, et montrez que sa limite est justement $S(x)$.

On se donne encore x dans $[0,\ 1[$ et on étudie $\left(\prod_{k=0}^{n}(1-x^{(2^k)})\right)$ en fonction de n.

Chaque $x^{(2^k)}$ reste entre 0 et 1. Chaque terme du produit $\left(\prod_{k=0}^{n}(1-x^{(2^k)})\right)$ est entre 0 et 1.

On a donc une suite à valeurs dans $[0,\ 1]$.

Pour passer de n à $n+1$, on multiplie le réel positif $\prod_{k=0}^{n}(1-x^{(2^k)})$ par $(1-x^{(2^{n+1})})$ (positif plus petit que 1) :

$$0 \leqslant \prod_{k=0}^{n+1}(1-x^{(2^k)}) = (1-x^{2^{n+1}}).\prod_{k=0}^{n}(1-x^{(2^k)}) \leqslant \prod_{k=0}^{n}(1-x^{(2^k)})$$

La suite est décroissante, positive (minorée par 0), elle converge.

Reste à voir que sa limite est $S(x)$. Ce qui est bien, c'est qu'on a

$$S(x) = (1-x).S(x^2) = (1-x).(1-x^2).S((x^2)^2) = (1-x).(1-x^2).(1-x^4).S(x^8)$$

$$\prod_{k=0}^{n}(1-x^{(2^k)}) = (1-x).(1-x^2).(1-x^4)\dots(1-x^{2^n})$$

On fait tout en une fois. On montre par récurrence sur n : $S(x) = (1-x).(1-x^2)\dots(1-x^{2^n}).S(x^{2^{n+1}})$.
On fait tendre n vers l'infini (on sait que le produit infini converge).

Le réel $x^{2^{n+1}}$ converge vers 0 .
Par continuité, $S(x^{2^{n+1}})$ converge vers $S(0)$.
Et $S(0)$ vaut 1. On a donc $S(x) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}(1-x^{2^k}).1$.

Au fait, la continuité de la somme infinie S n'est pas évidente.
D'ailleurs les correcteurs de Centrale s'en sont plaint.
Mais on peut s'en passer.

$$|S(t)-1| = \Big|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.t^n\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\Big|a_n.t^n\Big| = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n = \frac{t}{1-t}$$

et par encadrement, $S(t)-1$ tend vers 0 quand t tend vers 0.

IV~5) Étudiez pour n donné $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{S(x)}{(1-x)^n}$.

n est un entier naturel fixé. On a écrit pour tout x de $[0,\ 1[$

$$S(x) = (1-x).(1-x^2)\dots(1-x^{2^n}).S(x^{2^{n+1}})$$

On divise par $(1-x)^n$:

$$\frac{S(x)}{(1-x)^n} = \frac{(1-x)}{1-x}.\frac{(1-x^2)}{1-x}.\frac{(1-x^4)}{1-x}\dots\frac{(1-x^{2^{n-1}})}{1-x}.(1-x^{2^n}).S(x^{2^n})$$

$$\frac{S(x)}{(1-x)^n} = (1).(1+x).(1+x+x^2+x^3)\dots\Big(\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} x^k\Big).(1-x^{2^n}).S(x^{2^n})$$

Chaque terme de la forme $\left(\frac{1-x^{2^k}}{1-x}\right)$ a une limite en 0.
Le terme $(1-x^{2^n})$ a une limite nulle en 0.
Le terme $S(x^{2^{n+1}})$ a une limite en 0.
Le produit tend vers 0 quand x tend vers 0.

IV~6) Déduisez que a n'est pas ultimement périodique.

Il est temps de trouver une contradiction et un bel argument.
Si la suite (a_n) était ultimement périodique, alors la somme $S(x)$ serait une fraction rationnelle : $S(x) = Q(x) + \dfrac{P(x)}{1-x^T}$ avec T la période ultime.

Mais alors en cherchant la limite de

$$\frac{S(x)}{(1-x)^n} = \frac{Q(x)}{(1-x)^n} + \frac{P(x)}{(1-x)^n.(1-x^T)}$$

en 1, on ne peut plus avoir 0 (en tout cas pour n plus grand que $\deg(Q)+T$).

V~0) On définit un opérateur : $f \longmapsto \phi(f) = \Big(x \longmapsto \int_0^x t.f(t).dt\Big)$ sur l'espace E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que ϕ est un endomorphisme de $(E,+,.)$ (ne vous trompez pas sur les étages).

Pour f donné, l'application $t \longmapsto t.f(t)$ existe, est continue. On peut l'intégrer sur tout segment et définir $\phi(f)(x)$ (et proprement $\Big(\phi(f)\Big)(x)$, et surtout pas $\phi(f(x))$ [4]
On se donne f et g, λ et μ et on compare $\phi(\lambda.f+\mu.g)$ et $\lambda.f+\mu.\phi(g)$.
On vérifie l'égalité de ces fonctions x par x :

$$\Big(\phi(\lambda.f+\mu.g)\Big)(x) = \int_0^x t.(\lambda.f(t)+\mu.g(t)).dt = \lambda.\int_0^x t.f(t).dt + \mu.\int_0^x t.g(t).dt = \Big(\lambda.\phi(f)+\mu.\phi(g)\Big)(x)$$

4. en effet, pouvez vous calculer $\phi(0)$ sachant que cela pourrait venir de $\phi(\sin)$ calculé en π ou $\phi(\cos)$ calculé en $\frac{\pi}{2}$; parler de $\Phi(f(x_0))$ signifie « si je connais f en x_0 je peux calculer $\phi(f)$ en x_0 tandis que $\phi(f)$ nécessite de connaître f partout sur $[0,\ x_0]$, même pour calculer juste $\phi(f)(x_0)$.

La réponse « par linéarité de l'intégrale ne sera pas suffisante, si on ne vous voit pas manipuler proprement x.
Surtout si après vous vous mettez à parler de $\phi(f)(\lambda.x+\mu.y)$ qui est totalement hors sujet.

Rapport du jury : C'est la partie qui a rapporté le plus de points aux candidats car elle est très classique. De nombreux étudiants se contentent de montrer que L est linéaire (ce qui est trivial) et oublient de montrer qu'elle va dans E.

Ah oui, tiens, ϕ va bien de E dans E ?

L'application $x \longmapsto \int_0^x t.f(t).dt$ est continue. Elle est même dérivable.

V∼1) Résolvez l'équation $\phi(f) = (x \longmapsto 0)$ en pensant à dériver.

On résout $\phi(f) = 0$ (fonction nulle).
On a une solution évidente : $f = (x \longmapsto 0)$. Mais est ce la seule ?

On suppose donc $\forall x,\ \int_0^x t.f(t).dt = 0$. On dérive : $\forall x,\ x.f(x) = 0$ pour tout x.[5]

$f(x)$ est nul pour tout x, sauf peut être pour $x = 0$.
Mais comme f est continue, la voilà nulle y compris en 0.

La seule solution de $\phi(f) = 0$ est $f = 0$.

le noyau de l'application linéaire ϕest réduit à 0.
ϕ est injective (linéarité, injectivité et noyau).

V∼2) Déduisez que ϕ est injectif. ϕest il bijectif de $(E,+,.)$ dans $(E,+,.)$?

Injectivité traitée ci dessus.
Affirmation trop rapide de celui qui a lu des livres en diagonale et n'a retenu que des demi-théorèmes : « par formule du rang, comme ϕ est injective, elle est bijective ».

Mais pour appliquer la formule du rang, la dimension doit être finie.
Ce qui n'est pas le cas ici.
Donc, on doit vraiment se pencher sur la question de la surjectivité.

Toute application continue g est elle de la forme $\phi(f)$ pour f bien choisie .

Et la réponse subtile est « non ».
L'application $x \longmapsto |x-1|$ est continue (donc dans $(E,+,.)$) mais pas dérivable.
Elle ne peut pas s'écrire $\phi(f)$ pour f bien choisie.
Si on avait $|x-1| = \int_0^x t.f(t).dt$, le membre de droite serait dérivable en 1 et pas celui de gauche.

V∼3) Pour α réel, résolvez l'équation $\phi(f) = \alpha.f$ d'inconnue f. Donnez le spectre de ϕ.

On résout $\phi(f) = \alpha.f$ d'inconnue f en revenant à l'étage des réels.
On veut donc $\alpha.f(x) = \int_0^x t.f(t).dt$ pour tout x.
On dérive de chaque côté : $\alpha.f'(x) = x.f(x)$ pour tout x.
C'est une équation différentielle qu'on écrit

$$f'(x) - \frac{x}{\alpha}.f(x) = 0$$

Le cas $\alpha = 0$ a été traité à part. On peut diviser par α.

Ses solutions sont de la forme $\exists A,\ \forall x,\ f(x) = A.e^{\frac{x^2}{2.\alpha}}$.

Je pensais avoir trouvé des vecteurs propres $f_\alpha$pour toutes les valeurs de α et je voulais conclure spectre $=\mathbb{R}$ puisque tous les α sont possibles.

5. Rappelons en effet que $x \longmapsto \int_0^x g(t).dt$ se dérive en $x \longmapsto g(x)$.

Sauf qu'il faut cherche A. Et on sait quand même $\alpha.f(0)=\int_0^0 t.f(t).dt=0$.
On a donc $A=0$. La seule solution est $f=(x\longmapsto 0)$.

Finalement, aucune application non nulle ne vérifie $\phi(f)=\alpha.f$.
Le spectre de ϕ est vide.

Au fait, on avait le droit de dériver la relation $\alpha.f(x)=\int_0^x t.f(t).dt$ comme un physicien qui croit que tout est dérivable ?
Oui. f est continue. Donc $x\longmapsto\int_0^x t.f(t).dt$ est dérivable (de dérivée $f.Id$, continue).
Mais alors $\alpha.f$ est dérivable. Et après division, f l'est aussi.
Et en mettant en boucle ce raisonnement, f est de classe C^∞.

VI∼0) Soit f continue et bornée, on pose $M=Sup(|f(t)|\mid t\in\mathbb{R})$. Montrez : $\forall x\in\mathbb{R},\ |\phi(f)(x)|\leqslant M.\dfrac{x^2}{2}$.

Si f est bornée, on peut donner un sens à $M=Sup\{|f(t)|\mid t\in\mathbb{R}\}$ (plus petit majorant d'une partie de $\mathbb{R}$ bornée non vide).
On se donne ensuite x positif et on majore :

$$|f(x)|=\Big|\int_0^x t.f(t).dt\Big|\leqslant\int_0^x|t.f(t)|.dt\leqslant\int_0^x t.|f(t)|.dt\leqslant\int_0^x t.M.dt=\frac{M.x^2}{2}$$

Pour x négatif, il faut remettre l'intervalle d'intégration dans le bon sens

$$|f(x)|=\Big|\int_0^x t.f(t).dt\Big|=\Big|\int_x^0 t.f(t).dt\Big|\leqslant\int_x^0|t.f(t)|.dt\leqslant\int_x^0|t|.|f(t)|.dt\leqslant\int_x^0|t|.M.dt=\frac{M.x^2}{2}$$

Rapport du jury. Les inégalités sont écrites sans valeur absolue, sans se soucier du signe des bornes de l'intégrale. Certains font preuve d'une mauvaise foi évidente, sortant la puissance de x de l'intégrale et retombant malgré tout sur le résultat annoncé.

On rappelle que l'inégalité triangulaire sur les intégrales n'est $\Big|\int_a^b\varphi(t).dt\Big|\leqslant\int_a^b|\varphi(t)|.dt$ que pour $a\leqslant b$. Sa formulation (lourde) est $\Big|\int_a^b\varphi(t).dt\Big|\leqslant\int_{Min(a,b)}^{Max(a,b)}|\varphi(t)|.dt$.

VI∼1) On définit (f_n) par $f_0=f$ et $\forall n,\ f_{n+1}=\phi(f_n)$. Montrez : $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ |f_n(x)|\leqslant\dfrac{x^{2.n}}{2^n.n!}.M$.

La formule $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ |f_n(x)|\leqslant\dfrac{x^{2.n}}{2^n.n!}.M$ semble sortir d'une récurrence.
En tout cas, on vient nettement de l'initialiser.

Pour n donné, on suppose $\forall x\in\mathbb{R},\ |f_n(x)|\leqslant\dfrac{x^{2.n}}{2^n.n!}.M$.
On se donne un x (positif) et on calcule : $f_{n+1}(x)=\phi(f_n)(x)=\int_0^x t.f_n(t).dt$.
On passe à la valeur absolue et on majore : $\Big|f_{n+1}(x)\Big|\leqslant\int_0^x|t.f_n(t)|.dt$.
On utilise (pour la variable t) l'hypothèse de rang n : $\Big|f_{n+1}(x)\Big|\leqslant\int_0^x|t|.\dfrac{M.t^{2.n}}{2^n.n!}.dt$.
On sort M et on intègre explicitement : $\Big|f_{n+1}(x)\Big|\leqslant\dfrac{M}{2^n.n!}.\Big[\dfrac{t^{2.n+2}}{2.n+2}\Big]_{t=0}^x$.
On regroupe et on a bien $\dfrac{x^{2.n+2}}{2^{n+1}.(n+1)!}.M$.
On fait de même pour x négatif avec l'intervalle $[x,\ 0]$.

Attention à l'ordre des quantificateurs.
On montre par récurrence sur n la propriété P_n : $\forall x\in\mathbb{R},\ |f_n(x)|\leqslant\dfrac{M.x^{2.n}}{2^n.n!}$.
Ce n'est pas « pour tout x, on montre par récurrence sur n : $f_n(x)|\leqslant\dfrac{M.x^{2.n}}{2^n.n!}$.

VII∼0) On choisit à présent et jusqu'à la fin $f = \sin$. Explicitez f_1 et f_2.

On calcule pour tout x $\int_0^x t.\sin(t).dt$ par parties ou par méthode a priori : $f_1 = (x \longmapsto \int_0^x t.\sin(t).dt)$ et on recommence avec $\int_0^x t.(sin(t) - t.\cos(t)).dt$.

$f_0(x) = \sin(x)$	$f_1(x) = \sin(x) - x.\cos(x)$	$f_2(x) = (3 - x^2).\sin(x) - 3.x.\cos(x)$

Rapoport du jury. L'intégration par parties est souvent correcte sans être toujours justifiée.

C'est vrai, pour intégrer par parties il faut justifier : les applications sont C^1 (pour que u' et v' existent, et pour que $u'.v$ soit continue donc intégrable).
C'est pourquoi on va plus vite en « proposant/vérifiant ».

VII∼1) Montrez sans récurrence pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$: $\int_0^x t^3.f_{n-1}(t).dt = x^2.f_n(x) - 2.f_{n+1}(x)$.

Comment prouver $\int_0^x t^3.f_{n-1}(t).dt = x^2.f_n(x) - 2.f_{n+1}(x)$ sans récurrence ?
Et si on essayant une intégration par parties ?
Mais quelles parties ? C'est là la belle idée. Prenons comme le second membre le suggère t^2 et $t.f_{n-1}(t)$.
Mais si. Dérivons t^2 et intégrons $t.f_{n-1}(t)$ en $f_n(t)$.

C'est logique, puisque $f_n(t) = \int_0^t u.f_{n-1}(u).du$.

t^2	$\hookrightarrow$	$2.t$
$t.f_{n-1}(t)$	$\hookleftarrow$	$f_n(t)$

$$\int_0^x t^3.f_{n-1}(t).dt = \Big[t^2.f_n(t)\Big]_{t=0}^x - \int_0^x 2.t.f_n(t).dt = x^2.f_n(x) - \int_0^x 2.t.f_n(t).dt$$

Et justement, $\int_0^x 2.t.f_n(t).dt$ est exactement $2.f_{n+1}(x)$.

Cette question n'était pas dans l'énoncé original.
Je l'ai ajoutée pour vous faciliter le travail pour la suite.
Et pour vous permettre d'avoir des questions où gagner des points.

VII∼2) Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$: $f_{n+1}(x) = (2.n+1).f_n(x) - x^2.f_{n-1}(x)$.

La formule $f_{n+1}(x) = (2.n+1).f_n(x) - x^2.f_{n-1}(x)$ est vraie au rang 1 :

$$f_2(x) = (3 - x^2).\sin(x) - 3.x.\cos(x) \ et \ (3).f_1(x) - x^2.f_0(x) = 3.(\sin(x) - x.\cos(x)) - x^2.(\sin(x))$$

Supposons la formule vraie au rang n à l'étage des fonctions : $f_{n+1}(t) = (2.n+1).f_n(t) - t^2.f_{n-1}(t)$ pour tout t.

On multiplie par t et on intègre de 0 à x (fixé quelconque) :

$$\int_0^x t.f_{n+1}(t).dt = (2.n+1).\int_0^x t.f_n(t).dt - \int_0^x t^3.f_{n-1}(t).dt$$

Par définition même, ceci donne déjà $f_{n+2}(x) = (2.n+1).f_{n+1}(t) - \int_0^x t^3.f_{n-1}(t).dt$.
Et comme par hasard, le dernier terme fait l'objet de ma question précédente :

$$f_{n+2}(x) = (2.n+1).f_{n+1}(t) - \Big(x^2.f_n(x) - 2.f_{n+1}(x)\Big) = (2.n+1+2).f_{n+1}(t) - x^2.f_n(x)$$

C'est la formule au rang $n+1$.

VII∼3) Pour p entier donné, on note F_p l'espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à p et on définit $H = (P, Q) \longmapsto (P' - Q, P + Q')$. Montrez que H est un endomorphisme de $F_p \times F_p$. Donnez son noyau. Montrez que H est un automorphisme de $F_p \times F_p$.

H prend bien deux polynômes et calcule un nouveau couple de polynômes (dérivation, somme).
Le degré ne peut pas augmenter (pas de produit...), on reste avec $P' - Q$ et $P + Q'$ dans F_p.
L'application va de $F_p \times F_p$ dans lui même.

On ne dit pas tout de suite si tout est atteint.

Passons à la linéarité.
On se donne $(P_1,\ Q_1)$ et $(P_2,\ Q_2)$. Leur somme est $(P_1 + P_2,\ Q_1 + Q_2)$.
L'image de la somme est $\Big((P_1 + P_2)' - (Q_1 + Q_2),\ (P_1 + P_2) + (Q_1 + Q_2)'\Big)$.
Elle est égale à $(P_1' - Q_1,\ P_1 + Q_1') + (P_2' - Q_2,\ P_2 + Q_2')$ (image de la somme, somme des images).

On se donne ensuite λ et on compare $\lambda.(P' - Q,\ P + Q')$ et $(\lambda.P' - \lambda.Q',\ .P + \lambda.Q')$.
Il y a encore égalité.

Conseil pratique : évitez si vous avez des polynômes, de les appeler P et P' ou Q et Q'. Vous risquez de confondre P'' (dérivée de P') et P'' dérivée seconde de P.

Rapport du jury. La question D1 est rarement complète : il y a confusion entre linéarité et bilinéarité, la démonstration de l'injectivité par l'étude du noyau précède souvent la démonstration de la linéarité.

Pour le noyau, on cherche un couple d'image nulle. Un tel couple vérifier $P' - Q = 0$ et $P + Q' = 0$.
On reporte : $P'' = -P$.
Mais P est un polynôme, il y a un problème de degré.
Si P est de degré d, P'' est de degré $d - 2$. La seule façon de s'en sortir est d'imposer $P = 0$.
Et en reportant dans $P' = Q$, Q est nul.

Le seul couple du noyau de H est la couple $(0,\ 0)$ (élément neutre de $F_p \times F_p$).

Comme le noyau est réduit au neutre, l'application H est injective (cours).

La formule du rang donne alors $\dim(F_p \times F_p) = 0 + \dim(Im(H))$.
Mais $Im(H)$ est inclus dans $F_p \times F_p$, avec cette égalité des dimensions, on a $Im(H) = F_p \times F_p$.

Bref, H est surjective de $F_p \times F_p$ dans lui même.
C'est bien une bijection de l'espace dans lui même. Un automorphisme.

L'énoncé demandait juste « automorphisme » sans insister sur « trouvez le noyau, puis justifiez comme un flemmard que l'image est l'espace entier ».
Sinon, vous noterez que j'ai tout rédigé sans mentionner la dimension de $F_p \times F_p$.
Et c'est $(p + 1) \times (p + 1)$.

VII∼4) Montrez : $H(S_p \times A_p) = A_p \times S_p$ (où S_p désigne le sous-espace des fonctions paires de F_p et A_p le sous-espace des fonctions impaires de F_p).

Que peut signifier $H(S_p \times A_p) = A_p \times S_p$?
On parle de $H(ensemble) = ensemble$ et pas $H(vecteur) = vecteur$.
Il faut montrer que H va de $S_p \times A_p$ dans $A_p \times S_p$ et même qu'elle atteint cet ensemble d'arrivée en entier.

Prenons $(P,\ Q)$ dans $S_p \times A_p$ (P est pair : $P(-x) = P(x)$ et S est impair $S(-x) = -S(x)$).

L'image $H((P, Q))$ est bien un couple de polynômes de degré inférieur ou égal à p.

Mais on rappelle

fonction paire	$\hookrightarrow$	fonction impaire
	dérivation	
fonction impaire	$\hookrightarrow$	fonction paire

P pair	Q' pair	$P + Q'$ pair
Q impair	P' impair	$P' - Q$ impair

Le couple image $(P' - Q,\ P + Q')$ est de la forme $(impair,\ pair)$. Il est donc dans $A_p \times S_p$.

H va bien de $S_p \times A_p$ dans $A_p \times S_p$.

Mais est ce qu'on atteint tout ? Est ce que chaque couple $(R,\ S)$ avec R impair et S pair s'écrit il $(R,\ S) = (P' - Q,\ P + Q')$ avec P et Q bien choisis ?

Trouver un antécédent n'est pas évident.

Mais l'algébriste dit « H est injective, elle ne perd donc pas de dimensions ».
L'image de $S_p \times A_p$ par H est de même dimension que $S_p \times A_p$.

Et comme c'est un sous-espace vectoriel de $A_p \times S_p$, cette égalité des dimensions fait remplir tout le sous-espace vectoriel.

Rapport du jury. Dans la question D2, la démonstration d'une inclusion (la plus facile) suffit à montrer l'égalité de deux ensembles.

Au fait, $\dim(A_p \times S_p) = \dim(A_p) \times \dim(S_p)$ *mais je ne peux pas en dire plus, tout dépend de la parité de p pour chacune des dimensions.*

VIII∼0) Montrez que pour tout n il existe un unique couple $(P_n,\ Q_n)$ dans $S_n \times A_n$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sin(x) \times P_n(x) + \cos(x) \times Q_n(x)$.

On doit prouver existence et unicité de deux suites de polynômes vérifiant $f_n = \sin .P_n + \cos .Q_n$.

On sent venir la récurrence :

$f_0(x) = \sin(x)$		$f_1(x) = \sin(x) - x.\cos(x)$		$f_1(x) = (3 - x^2).\sin(x) - 3.x.\cos(x)$	
$P_0 = 1$	$Q_0 = 0$	$P_0 = 1$	$Q_0 = -X$	$P_2 = 3 - X^2$	$Q_2 = -3.X$

Les premiers polynômes existent et respectent les règles de parité indiquées.

On va profiter de notre formule $f_{n+1}(x) = (2.n+1).f_n(x) - x^2.f_{n-1}(x)$ pour les construire de proche en proche par récurrence.

Récurrence à double hérédité déjà initialisée.
En supposant alors que P_n, Q_n, P_{n-1} et Q_{n-1} existent pour un n donné, on peut donc écrire

$$f_{n+1}(x) = (2.n+1).f_n(x) - x^2.f_{n-1}(x)$$

$$f_{n+1}(x) = (2.n+1).(P_n(x).\sin(x) + Q_n(x).\cos(x)) - x^2.(P_{n-1}(x).\sin(x) + Q_{n-1}(x).\cos(x))$$

on distribue, on regroupe et on trouve

$$f_{n+1}(x) = \sin(x).\Big((2.n+1).P_n(x) - x^2.P_{n-1}(x)\Big) + \cos(x).((2.n+1).Q_n(x) - x^2.Q_{n-1}(x)\Big)$$

On pose naturellement $P_{n+1}(x) = (2.n+1).P_n(x) - x^2.P_{n-1}(x)$. Un polynôme. Pair.
Puis on pose aussi $Q_{n+1}(x) = (2.n+1).Q_n(x) - x^2.Q_{n-1}(x)$. Encore un polynôme. Et impair cette fois.

A ce stade, on a l'existence de ces polynômes.
On a bien deux suites, calculables de proche en proche.

Et l'unicité ?
On suppose $f_n(x) = \sin(x).P(x) + \cos(x).Q(x) = \sin(x).R(x) + \cos(x).S(x)$ pour tout x (avec P et R dans S_n et Q et S dans A_n)
On a alors $\sin(x).(P(x) - R(x)) = \cos(x).(S(x) - Q(x))$ pour tout x.
Prenons $x = k.\pi$ pour k de 0 à n.
On a alors $(S(k.\pi) - P(k.\pi)).(-1)^k = 0$ pour tout k de 0 à n (et m^me pour tout k de $\mathbb{Z}$, mais pas besoin d'en faire trop).
Le polynôme $S - P$ a plus de racines que son degré. Il est donc nul.

Maintenant qu'on a $S = P$, on reporte : $\sin(x).(P(x) - R(x)) = 0$ pour tout x.
Encore une fois (avec autre chose que des multiples de π) le polynôme $P - R$ a une infinité de racines.
Il est nul.

On est bien arrivé à $P = R$ et $Q = S$.

Rapport du jury. Dans la question D3, l'application H n'est jamais utilisée. L'étude de l'unicité est intégrée dans le raisonnement par récurrence, donc au procédé de construction, les vérifications sont partielles (degré ou parité mais très rarement les deux).

Et si justement on reprenait notre raisonnement en utilisant H ?
Et une récurrence simple.

On suppose à un rang n donné $f_n(x) = \sin(x).P_n(x) + \cos(x).Q_n(x)$ pour tout x.

On cherche f_{n+1} qui s'écrit $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t).t.dt$.
Ceci revient à demander : $(f_{n+1})' = Id.f_n$ et $f_{n+1}(0) = 0$.
On la cherche sous la forme $f_{n+1}(x) = \sin(x).P_{n+1}(x) + \cos(x).Q_{n+1}(x)$ avec P paire et Q impaire.
On a déjà $f_{n+1}(0) = \sin(0).P_{n+1}(0) + \cos(0).Q_{n+1}(0) = 0.P_{n+1}(0) + \cos(0).0 = 0$ car Q_{n+1} est impair, du moins on lui demande.

Reste l'autre condition. On dérive f_{n+1} et on trouve

$$(f_{n+1})'(x) = \cos(x).P_{n+1}(x) + \sin(x).(P_{n+1})'(x) - \sin(x)..Q_{n+1}(x) + \cos(x).(Q_{n+1})'(x)$$

En regroupant :

$$(f_{n+1})'(x) = \sin(x).\Big((P_{n+1})'(x) + Q_{n+1}(x)\Big) + \cos(x).\Big((Q_{n+1})'(x) + P_{n+1}(x)\Big)$$

Notre requête $(f_{n+1})' = Id.f_n$ se ramène donc à existe-t-il (P_{n+1}, Q_{n+1}) dans $S_{n+1} \times A_{n+1}$ vérifiant

$$\sin(x).\Big((P_{n+1})'(x) - Q_{n+1}(x)\Big) + \cos(x).\Big((Q_{n+1})'(x) + P_{n+1}(x)\Big) = \sin(x).\Big(x.P_n(x)\Big) + \cos(x).\Big(x.Q_n(x)\Big)$$

On veut un antécédent par H dans $S_{n+1} \times A_{n+1}$ à $(X.P_n,\ X.Q_n)$ (dans $A_{n+1} \times S_{n+1}$ justement).
Et c'est la bijectivité de H qui nous le donne !

Classe, non ?

VIII∼1) Explicitez P_n et Q_n pour n de 0 à 2 (inclus).
On a déjà calculé :

$f_0(x) = \sin(x)$		$f_1(x) = \sin(x) - x.\cos(x)$		$f_1(x) = (3 - x^2).\sin(x) - 3.x.\cos(x)$	
$P_0 = 1$	$Q_0 = 0$	$P_0 = 1$	$Q_0 = -X$	$P_2 = 3 - X^2$	$Q_2 = -3.X$

VIII∼2) Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$: $P_{n+1}(x) = (2.n+1).P_n(x) - x^2.P_{n-1}(x)$.
Ça aussi, c'est plus haut.

VIII∼3) Déduisez que les P_n sont tous à coefficients entiers.
De proche en proche, chaque P_n est à coefficients entiers.
Il suffit de mener une récurrence (à double hérédité).
P_0 et P_1 sont à coefficients entiers.
Si P_{n-1} et P_n le sont, alors par $(2.n+1).P_n(X) - X^2.P_{n-1}(X)$ est encore à coefficients entiers (structure d'anneau).

VIII∼4) On suppose que π est rationnel d'écriture irréductible $\pi = \dfrac{p}{q}$. Montrez que la suite $\Big((2.q)^n.P_n\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big)$ est une suite d'entiers. Quelle est sa limite ?
On va construire un raisonnement par l'absurde. On suppose donc que π s'écrit $\dfrac{p}{q}$.

P_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, à coefficients entiers.
On montre que $(2.q)^n.P_n\Big(\dfrac{p}{2.q}\Big)$ est un entier.
Chaque terme de la somme est rationnel. Mais le $(2.q)^n$ va effacer les dénominateurs.
Écrivons en effet $P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k.X^k$ (on devrait écrire $P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_{n,k}.X^k$ pour montrer que le polynôme change avec n).
On a alors

$$(2.q)^n.P_n\Big(\frac{p}{2.q}\Big) = (2.q)^n.\sum_{k=0}^{n} \alpha_k.\Big(\frac{p}{2.q}\Big)^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.p^k.(2.q)^{n-k}$$

Tous les termes de la somme sont entiers. Comme $(\mathbb{Z}, +, .)$ est un anneau, on a un entier.

On calcule aussi

$$f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right).Q_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

On multiplie :

$$(2.q)^n.P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2.q)^n.f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Il est temps d'utiliser les résultats des parties préliminaires sur nos applications f_n :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leqslant \frac{x^{2.n}}{2^n.n!}.M$$

où M est un majorant de l'application initiale (ici le sinus, donc $M = 1$).
On a donc

$$\left|(2.q)^n.P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant (2.q)^n.\frac{\left(\frac{p}{2.q}\right)^{2.n}}{2^n.n!}.1 = \frac{p^{2.n}}{4^n.q^n.n!}$$

Que dire de ce majorant ? Il tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Par croissances comparées.

Par encadrement, la suite $\left(\left|(2.q)^n.P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\right)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
On peut d'ailleurs enlever les valeurs absolues.

Quand on vous demande vers quoi converge une suite qui n'a pas une forme simple, il y a de fortes chances que ce soit vers 0 et que vous l'obteniez par encadrement.

VIII$\sim$5) Déduisez que π est irrationnel.

Ceci permet il de conclure ?
La suite $\left((2.q)^n.P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ est une suite d'entiers de limite nulle.
Elle est forcément nulle à partir d'un certain rang.
Il suffit de prendre la définition de la convergence vers 0 avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$. L'entier $(2.q)^n.P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ à partir du rang $N_{1/2}$ il ne peut être que nul.

On a donc $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ à partir d'un certain rang R.
Le coup de génie est alors de remonter dans le passé :

$$f_{R+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2.n+1).f_R\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.f_{R-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$f_{R-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est nul aussi.
On recommence avec $f_R\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2.n+1).f_{R-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.f_{R-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, c'est au tour de $f_{R-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
Par récurrence propre, chaque $f_{R-k}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est nul.
On remonte jusqu'à $f_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
Mais ceci donne $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Et c'est notre contradiction.

Rapport du jury. La partie « $(2.q)P_n^n.(\pi/2)$ est entier » est en général correcte et le reste n'est pratiquement jamais abordé.

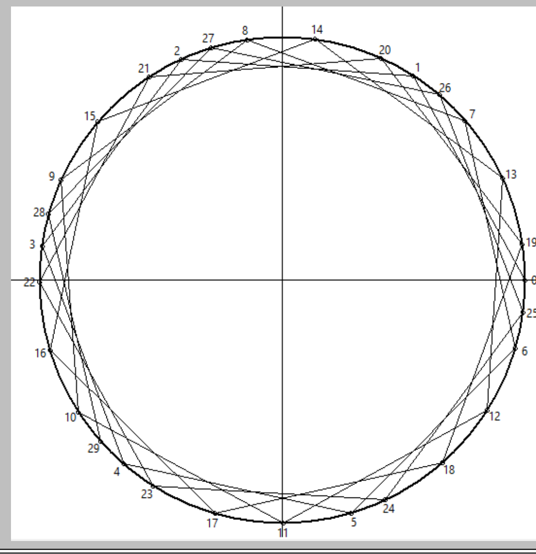
IX∼0)

IX∼1) On définit à présent : $a_n = 1$ si $\sin(n) > 0$, 0 sinon. Écrivez un script Python qui détermine les n premiers termes de cette suite (avec l'approche du physicien qui fait confiance au calcul avec des flottants).

Déterminez $(a_n)_{n\leqslant 20}$

IX∼2) On suppose que cette suite est ultimement périodique. Montrez qu'il existe deux entiers N et T ($T > 0$) tels que $\sin(k.T)$ soit de signe constant pour k plus grand que N. Déduisez que $(\cos(k.T))_{k\geqslant N}$ est une suite positive.

IX∼3) On pose $G = \{n.T + 2.k.\pi \mid (n,k) \in \mathbb{Z}^2\} = T.\mathbb{Z} + 2.\pi.\mathbb{Z}$. Montrez que G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ mais qu'il ne peut pas s'écrire $a.\mathbb{Z}$ même pour a bien choisi.



Rapport du jury. Cette partie est très peu abordée sauf B1 et B2 (sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$) que beaucoup ont dû voir en exercices.

On note que comme πest irrationnel, $\sin(n)$ n'est jamais une une fois qu'on a dépassé 0.

```
from math import sin
def signesinus(n) :
....L = [0 for k in range(n+1) ]
....for k in range(n+1) :
.......if sin(k) > 0 :
...........L[k] = 1
....return(L)
```

Mais on peut aussi aller chercher `[int(sin(k)>0) for k in range(n+1)]` sachant que `int` transforme un booléen en 1 ou 0.

On préfèrera construire d'avance une liste de termes valant tous 0 pour ensuite en mettre certains à 1.
ceci permet d'avoir tout de suite une longueur de liste fixe (un tableau) et pas une liste qui grandit avec des pointeurs qui pointent toujours plus loin et cherchent de la place en mémoire.

On fait confiance au graphe pour lire le signe des sinus successifs :

$\sin 0$	$\sin 1$	$\sin 2$	$\sin 3$	$\sin 4$	$\sin 5$	$\sin 6$	$\sin 7$	$\sin 8$	$\sin 9$	$\sin 10$
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
$\sin 11$	$\sin 12$	$\sin 13$	$\sin 14$	$\sin 15$	$\sin 16$	$\sin 17$	$\sin 18$	$\sin 19$	$\sin 20$	
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	

Un peu monotone. Ou faussement périodique.
Mais les choses vont se décaler un peu plus tard.
[0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, **0, 0, 0, 0,** 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, **1, 1, 1, 1,** 0, 0
oui, il y aura quatre 0 d'affilée.

Si on suppose la suite (a_n) ultimement périodique, disons de période T à partir du rang R, alors dès que $k.T$ est plus grand que R, on a $a_{(k+1).T} = a_{k.T}$.
On a donc pour k plus grand que $[R/T]$: la suite $a_{k.T}$ est constante.
Si elle est constante égale à 1, c'est que tous les $(\sin(k.T))_{k>[R/T]}$ sont strictement positifs.
Si elle est constante égale à 0, c'est que tous les $(\sin(k.T))_{k>[R/T]}$ sont strictement négatifs.
On rappelle en effet que les $(\sin(k.T)$ ne peuvent pas être nuls, puisque $k.T$ est entier et les multiples non nuls de π sont irrationnels.

Pourquoi les $\cos(k.T)$ sont tous positifs ?

Mais parce qu'il y a un lien entre $\sin(k.T)$, $\cos(k.T)$ et $\sin(2.k.T)$! On peut diviser (sinus jamais nul) :

$$\cos(k.T) = \frac{\sin(2.k.T)}{2.\sin(k.T)}$$

Numérateur et dénominateur sont de même signe (le terme $\sin(2.k.T)$ est extrait de la suite $(\sin(p.T))$). Le quotient est positif.

IX∼1) On pose $G^+ = G \cap \mathbb{R}^{+*}$. Montrez que G^+ admet une borne inférieure α. Montrez que si α est dans G^+ alors $G = \alpha.\mathbb{Z}$.

$(\mathbb{R}, +)$ est un groupe.
L'ensemble G contient 0 en prenant $n = k = 0$.
Il est stable par addition et passage à l'opposé.
Prenons en effet deux éléments g et g' dans G.
On les écrit $g = n.T + 2.k.\pi$ et $g' = n'.T + 2.k'.\pi$ avec n, n', k et k' entiers. Leur différence $g - g'$ s'écrit $(n - n').T + 2.(k - k').\pi$. Elle est dans G.

On a bien un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Si ce sous groupe est engendré par un élément a, il est formé des multiples de a et uniquement eux.
Ainsi, T est un multiple de a ($T = 1.T + 2.0.\pi \in G$) : $\exists p \in \mathbb{Z},\ T = p.a$.
De même, $2.\pi$ est un multiple de a ($2.\pi = 0.T + 2.1.\pi \in G$) : $\exists q \in \mathbb{Z},\ 2.\pi = q.a$.

Si on passe au quotient : $\dfrac{2.\pi}{T} = \dfrac{q.a}{p.a}$ et donc π est un quotient d'entiers : $\dfrac{q.T}{2.p}$.
Or, on sait (et ici on l'a montré) que π est irrationnel.

On a donc une contradiction.

> *Le cours (de seconde année) nous dit qu'il y a deux types de sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$: les sous-groupes engendrés par un élément, de la forme $a.\mathbb{Z}$, et des sous-groupes « partout denses » comme $\mathbb{Q}$.*

G^+ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (elle contient $2.T$), minorée (par 0). Elle admet donc une borne inférieure.

> *On va montrer que cette borne inférieure est 0. Par l'absurde.*

Supposons a dans G (comme $Inf[1, +\infty[= 1$).
Alors pour tout n de $\mathbb{N}$, $n.a$ est dans G (stabilité du sous-groupe et récurrence).
Mais pour tout n de $\mathbb{Z}$,$n.a$ est dans G (stabilité du sous-groupe par passage à l'opposé).
On a donc déjà $a.\mathbb{Z} \subset G$.

Prenons maintenant un élément g de G. On l'encadre par deux multiples de a : $n.a \leqslant g < (n+1).a$ (il suffit de prendre $n = \left[\dfrac{g}{a}\right]$.
On soustrait : $0 \leqslant g - n.a < a$. L'élément $g - n.a$ est dans G (stabilité). Il est strictement plus petit que a, borne inférieure de G'). Il ne peut donc pas être dans G'. C'est donc qu'il est nul.
Finalement, tout élément g de G est de la forme $n.a$. On a la double inclusion.

Mais elle conduit à une absurdité comme on l'a vu.
Ce raisonnement par l'absurde se termine : a n'est pas dans G^+.
La borne inférieure n'est pas atteinte.

IX∼2) α n'est donc pas dans G^+. On suppose $\alpha > 0$. Montrez qu'il existe g et g' dans G^+ vérifiant $\alpha < g' < g < 2.\alpha$. Déduisez $\alpha = 0$.

Supposons que la borne inférieure a soit strictement positive (comme $Inf]1,\ +\infty[$).
Par définition, tout intervalle $[a,\ a+\varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$) contient au moins un élément de G^+(et donc de G), sinon la borne inférieure serait rejetée un peu plus loin, au delà de $a + \varepsilon$.

En particulier, pour ε il existe au moins un élément g de G^+ entre a et $2.a$.

On recommence avec $\varepsilon = g - a$. Il existe cette fois un g' entre a et $a + (g - a)$.

On a bien trouve un couple vérifiant $a < g' < g < 2.a$ avec g et g' dans G.
Mais alors, par soustraction : $0 < g - g' < a$.
On a trouve un élément $g - g'$ de G^+ entre 0 et a. C'est contradictoire.

Finalement, par l'absurde encore, la borne inférieure de G^+est 0.

Comme pour $]0, +\infty[$ *ou même* $\mathbb{Q}^{+*}$.

IX∼3) Maintenant que l'on sait $\alpha = 0$, montrez que pour tout n il existe g_n dans G vérifiant $0 < g_n < 10^{-n}$.

La borne inférieure de G^+est 0. C'est le plus grand minorant. Tout nombre strictement positif n'est plus un minorant.
Pour tout ε, il existe au moins un élément de G^+ entre 0 et $0 + \varepsilon$.
On applique ce résultat à $\varepsilon = 10^{-n}$.

On a crée une suite d'éléments de G^+ vérifiant $\forall n,\ 0 < g_n < 10^{-n}$.

IX∼4) Soit x un réel. Montrez qu'il existe une suite d'éléments de G qui converge vers x.

Si x est un réel quelconque, par densité, on va construire une suite d'éléments de G qui converge vers x.
Pour tout n, considérons $[x - g_n,\ x]$. C'est certes un « petit » intervalle à gauche de x, mais il va contenir un élément de G.
Il suffit de bien choisir son multiple de g_n.

On part de 0 *et on avance avec des pas de longueur* g_n *plus petite que la longueur de l'intervalle. On va poser le pied dedans*

En l'occurrence, on prend $\left[\dfrac{x}{g_n}\right].g_n$.
C'est un multiple entier de g_n, donc c'est un élément du sous-groupe G.
Il vérifie $\dfrac{x}{g_n} - 1 < \left[\dfrac{x}{g_n}\right] \leqslant \dfrac{x}{g_n}$ puis $x - g_n < \left[\dfrac{x}{g_n}\right].g_n \leqslant x$.
On a donc une suite d'éléments de g : $a_n = \left[\dfrac{x}{g_n}\right].g_n$ vérifiant $x - g_n \leqslant a_n \leqslant x$.
Comme g_n tend vers 0 (positif, majoré par 10^{-n}), par encadrement, (a_n) tend vers x.

C'est ça un ensemble « partout dense dans $\mathbb{R}$ » : tout élément de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite de points de l'ensemble.

IX∼5) Montrez qu'il existe une suite (k_n) d'entiers positifs tels que $(\cos(k_n.T))$ converge vers $-\frac{1}{2}$.

Prenons un x particulier : $\dfrac{2.\pi}{3}$ (si vous n'y pensez pas avec ces cosinus qui tendent vers $-\dfrac{1}{2}$, je fais quoi pour vous ?).
Il existe une suite (a_n) d'éléments de G qui converge vers $\dfrac{2.\pi}{3}$.
Notons $(k_n.T + 2.\pi.p_n)$ les éléments de cette suite (définition de G).
Mais alors $\cos(k_n.T + 2.\pi.p_n)$ converge vers $\cos\left(\dfrac{2.\pi}{2}\right)$ (continuité).
Par périodicité et calcul : $\cos(k_n.T)$ converge vers $-\dfrac{1}{2}$.

IX∼6) Montrez que $\{\cos(k_n.T) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (ensemble des termes de cette suite) n'est pas de cardinal fini.

IX∼7) Construisez alors une suite (y_n) strictement croissante extraite de (k_n) telle que $\cos(y_n.T)$ converge vers $-\dfrac{1}{2}$.

IX∼8) La suite (a_n) est elle ultimement périodique ?

On a l'impression de tenir notre contradiction : la suite $(\cos(k_n.T))$ converge vers $-\dfrac{1}{2}$ alors même qu'à partir d'un certains rang, tous ses termes sont positif.

Mais il manque un détail. La formulation $\cos(k_n.T)$ ne donne pas forcément une sous-suite de $(\cos(n))$, car $n \longmapsto k_n.T$ n'est pas forcément croissante.
Si déjà vous voyez cette difficulté, vous avez une bonne partie des points.

Si vous argumentez en disant « je réordonne les $k_n.T$ pour en faire une suite croissante, la convergence ne change pas », vous avez aussi gagné.

Maintenant, il faut rendre ceci rigoureux.
On prend le plus petit élément de l'ensemble ,des $k_n.T$. On l'appelle $y_0.T$.
On prend ensuite le plus petit élément de $\{k_n.T \mid n \in \mathbb{N}\} - \{y_0.T\}$. On le note $y_1.T$.

Et on recommence avec le plus petit élément de $\{k_n.T \mid n \in \mathbb{N}\} - \{y_0.T,\ y_1.T\}$.
Et ainsi de suite.

Mais serait il possible qu'il ne este plus rien à prendre à un moment ?
Vous allez me dire que l'ensemble $\{k_n.T \mid n \in \mathbb{N}\}$ est infini !
Non, a priori, ce qui est infini, c'est $\mathbb{N}$.
Mais il peut y avoir des $k_n$égaux entre eux.

Seulement voilà. Si l'ensemble $\{k_n.T \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fini, alors la suite $k_n.T$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, de même que la suite $(\cos(k_n.T))$.
Alors qu'elle converge. C'est donc qu'elle est stationnaire (constante à partir d'un certain rang).
Mais la constant serait $-\dfrac{1}{2}$.
Et la suite ne peut valoir $-\dfrac{1}{2}$ qu'avec $k.T = \pm\dfrac{2.\pi}{3}\ [2.\pi]$, ce qui est incohérent avec « π est irrationnel ».

Bref, la suite (a_n) de l'énoncé n'est pas ultimement périodique.
On peut même dire qu'elle fait un peu n'importe quoi.
[0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1]
En général, trois 0 trois 1 (normal, la période du sinus c'est $2.\pi$). mais de temps en temps il y a quatre 1 ou quatre 0 consécutifs.