



00. Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow -\infty} +\infty$ et $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Montrez que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, atteint en au moins un point.
La méthode astucieuse consistera à définir $\varphi = \theta \mapsto \text{Arctan}(f(\tan(\theta)))$ sur $] -\pi/2, \pi/2[$ et même si possible $[-\pi/2, \pi/2]$.

01. On rappelle la définition de A est un ouvert de $\mathbb{R} : \forall \alpha \in A, \exists \varepsilon > 0, [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \subset A$.
Montrez que si A et B sont ouverts, alors $A \cap B$ et $A \cup B$ sont ouverts.
Montrez que chaque $]2^{-n}, 2^n[$ est ouvert. Montrez que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]2^{-n}, 2^n[$ n'est plus un ouvert.
Montrez que si chaque A_i est un ouvert, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est encore un ouvert.
Soit A un ouvert et (b_n) une suite à valeurs dans A^c (complémentaire). On suppose que (b_n) converge vers β . Montrez (par l'absurde) que β est aussi dans A^c .

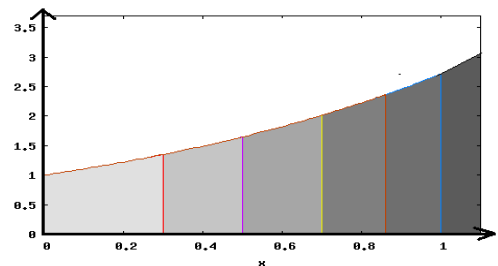
02. Soit f une application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. On pose $I = \int_0^1 f(t).dt$.
Montrez que pour tout n , il existe une subdivision de $[0, 1]$:
 $0 = x_{n,0} < x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n} = 1$ vérifiant $\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(t).dt = \frac{I}{n}$.

Interprétez géométriquement.

Pour rédiger cette question, on aura intérêt à définir F (la primitive de f nulle en 0) et à faire intervenir F^{-1} (sa réciproque de $[0, I]$ dans $[0, 1]$ après en avoir prouvé l'existence).

Au fait, pourquoi les note-t-on $(x_{n,0}, \dots, x_{n,n})$ et pas juste $(x_0, \dots, x_n)$?

g est continue. Montrez que $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} g(x_{n,k})$ converge vers $\frac{\int_0^1 f(t).g(t).dt}{\int_0^1 f(t).dt}$ quand n tend vers l'infini.

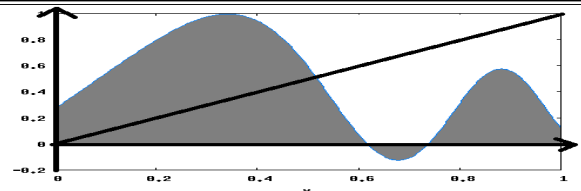


03. Soit f continue ; donnez la limite de la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ lorsque b tend vers a .

04. Soit f une application continue et périodique de période 1. Montrez que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

05. Soit f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\int_0^1 f(t).dt = \frac{1}{2}$.

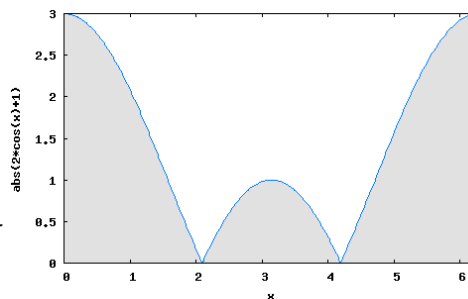
Montrez que f admet au moins un point fixe (en étudiant le signe de $f - Id$ et son intégrale).



06. Montrez qu'il y a à tout instant deux points de l'équateur diamétralement opposés où la température est la même. Est-ce encore vrai pour deux points de l'Équateur ?
C'est une application du théorème des valeurs intermédiaires.

07. Montrez que si f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $\text{Arctan} \circ f$ et $f \circ \text{Arctan}$ sont bornées.

08. Soit f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que pour tout n de $\mathbb{N}$ il existe c_n dans $[0, 1]$ vérifiant $f(0) + n.f(1) = (n+1).f(c_n)$.



♡ Montrez que $|\sin|$ n'est pas une primitive de $|\cos|$. Calculons

09. $\int_0^{2\pi} |1 + 2 \cdot \cos(t)| \cdot dt.$

10. ♡ f est croissante de classe C^1 . Montrez que $\int_0^\pi f(t) \cdot \cos(t) \cdot dt$ est négative.

11. ♡ Un élève donne les théorèmes suivants pour les applications D^1 :

	Vrai	Faux
si f est bornée sur $\mathbb{R}$ alors f' l'est aussi		
si f' est bornée sur $\mathbb{R}$ alors f l'est aussi		
si f est bornée sur $[a, b]$ alors f' l'est aussi		
si f' est bornée sur $[a, b]$ alors f l'est aussi		

Exemplz contre ça si il faut.

12. ♡ Montrez que si f est lipschitzienne de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ alors $1/f$ l'est aussi (il faudra penser à introduire $\inf(f(x) \mid x \in [0, 1])$).

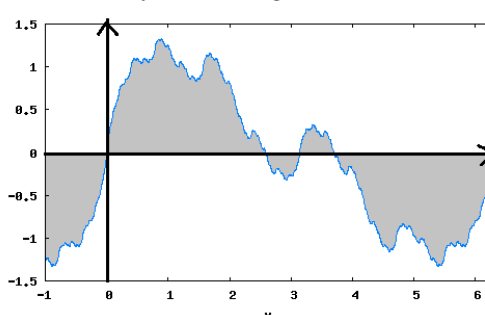
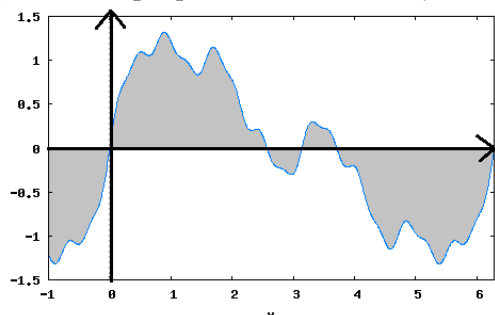
13. Construire une suite qui admet une sous-suite strictement croissante de limite 1 et une sous-suite strictement décroissante de limite 0.

14. En quels point la dérivée de $x \mapsto |\ln(|x|)|$ est elle discontinue ?

15. Soit f de classe C^1 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout n , on pose $I_n = \int_0^1 t^n \cdot f(t) \cdot dt$. Montrez par encadrement que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Déterminez la limite de $((n+1) \cdot I_n)$. Déterminez la limite de $(n \cdot I_n)$.

16. ♣ On suppose qu'il existe une application f continue injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que $t \mapsto f(e^{it})$ va de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ et a pour image un intervalle $[\alpha, \beta]$. Montrez que $t \mapsto f(e^{-it})$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ a pour image le même intervalle. Déduisez que f n'est finalement pas injective. Montrez qu'en revanche que l'application qui à $x + i \cdot y$ associe le réel formé en intercalant les deux développements décimaux de x et y va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sans être continue. Est elle injective ?

17. Pour tout n , on définit $f_N = x \mapsto \sum_{n=0}^N \frac{\sin(2^n \cdot x)}{2^n}$. Montrez que chaque f_N est continue et lipschitzienne de rapport N . Montrez que pour tout x , la suite $(f_N(x))$ est de Cauchy et converge. Sa limite sera notée f_∞ .



On se donne x et y . Montrez : $|f_\infty(x) - f_\infty(y)| \leq |f_\infty(x) - f_N(x)| + |f_\infty(y) - f_N(y)| + |f_N(x) - f_N(y)| \leq 2^{1-N} + (N+1) \cdot |y - x|$.

On se donne ε , montrez qu'il existe N et η vérifiant $\forall(y, y), |y - x| \leq \eta \Rightarrow |f_\infty(x) - f_\infty(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Déduisez que f_∞ est continue en tout point.

◦18◦ u_0 est donné et pour tout n , on pose $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{4u_n + 2}$ (on posera $f = x \mapsto \frac{x+3}{4x+2}$). Montrez que la liste des valeurs interdites pour u_0 est (i_n) où l'on pose $i_n = \frac{4 \cdot 5^n + 3 \cdot (-2)^n}{4 \cdot (-2)^n - 4 \cdot 5^n}$ (calculez $f(i_n)$).
Montrez que cette suite converge vers -1 mais que -1 n'est pas une valeur interdite pour u_0 .

◦19◦ ♥ Montrez que toute application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ est de signe constant (mots clefs : valeurs intermédiaires, absurde).

◦20◦ Soit f continue de I (intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point), dans $\mathbb{R}$, injective.
On se donne u et v dans I vérifiant $u < v$. Montrez alors $f(u) < f(v)$ ou $f(v) < f(u)$.

On suppose ici $f(u) < f(v)$. On se donne t entre u et v . Montrez par l'absurde et en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires sur $[u, t]$ ou sur $[t, v]$: $f(u) < f(t) < f(v)$.

Montrez que si en revanche on a $f(u) > f(v)$ alors on a $\forall t \in]u, v[, f(u) > f(t) > f(v)$.

Que répondez vous à l'élève qui prétend avoir démontré alors : f est donc décroissante sur tout $[u, v]$?

On se donne a et b avec $a < b$. On suppose pour cette étape $f(a) < f(b)$.

On se donne x et y vérifiant $a < x < y < b$. Montrez alors $f(a) < f(x) < f(b)$ puis $f(a) < f(x) < f(y)$ en faisant jouer à a, x, y et b les rôles de u, v et t de la question précédente.

Que répondez vous à l'élève qui dit avoir démontré alors : f est donc décroissante sur tout $[u, v]$?

Que pouvez vous déduire dans le cas $f(a) > f(b)$.

Déduisez que f est monotone sur l'intervalle I (même si I est de la forme $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$ ou $]\alpha, \beta[$).

◦21◦ ♥ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$ vérifiant $f(0) = 2$. Résolvez l'équation intégrale d'inconnue x : $\int_0^x f(t).dt = 9$.

◦22◦ Pour tout n , on pose $f_n = x \mapsto \frac{\sin(3^n \cdot x)}{2^n}$ et $F_N = \sum_{k=0}^N f_k$. Montrez que pour tout x , $\sum_{k=0}^n \frac{1 + \sin(3^k \cdot x)}{2^k}$ et $F_n(x)$

convergent. La somme $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ sera notée $F(x)$.

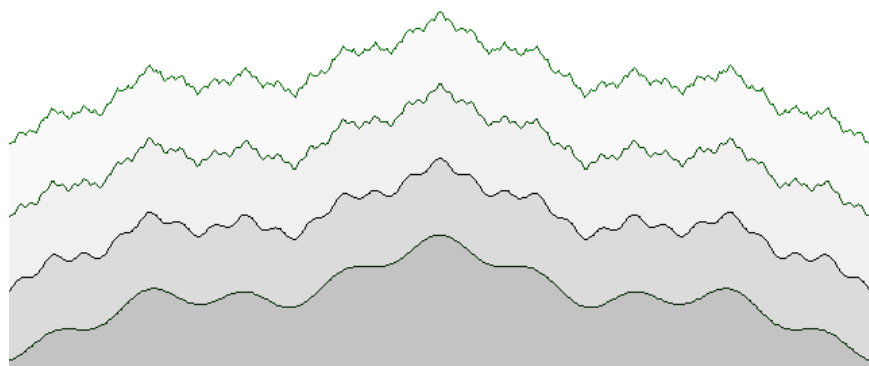
Montrez que F_n est lipschitzienne de rapport $\frac{3^{n+1}}{2^n}$.

On se donne une suite (a_p) qui converge vers α (quantifiez). On veut montrer que $(F(a_p))$ converge vers $F(\alpha)$ (ce qui traduira la continuité de F).

Montrez : $|F(a_p) - F(\alpha)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + |F_n(a_p) - F_n(\alpha)| + \frac{\varepsilon}{3}$ pour n égal à $\left\lceil -\frac{\ln(\varepsilon/3)}{\ln(2)} \right\rceil + 1$.

Déduisez $|F(a_p) - F(\alpha)| \leq \varepsilon$ pour p plus grand qu'une valeur à préciser.

Utilisez Python et ses modules tout prêts : votre procédure prend en entrée n, a et b et représente sur le même graphe F_0 à F_n sur le segment $[a, b]$.



Montrez que la série de terme général $f'_k(0)$, de même que la série de terme général $f_k(\pi/9)$, de même que toute série de terme général $f'_k(\theta)$ avec θ de la forme $p.\pi.2^{-q}$.

Ceci ne prouve pas encore que F n'est dérivable nulle part, mais ça peut en donner une idée.

Pour f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on pose $|f|_\infty = \sup\{|f(t)| \mid t \in [0, 1]\}$.

Calculez $|x \mapsto x + a|_\infty$ en fonction du réel a .

Calculez $|t \mapsto \sin(2.\pi.t) + a|_\infty$ en fonction de a .

Calculez $|t \mapsto 8.t^2 - 5.t - 1|_\infty$.

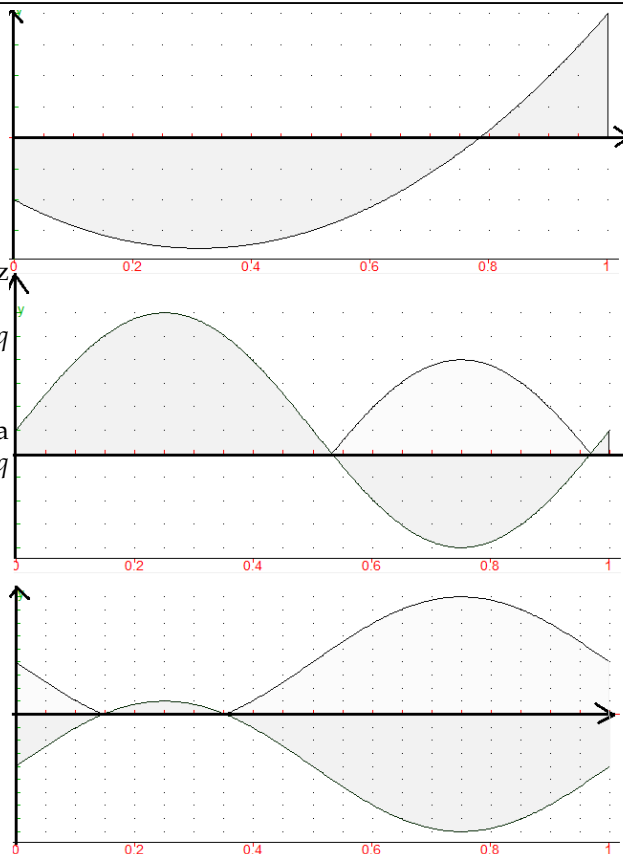
Pour quelles valeurs de a a-t-on $|t \mapsto e^t - a|_\infty = 2$.

Pour tout n , on pose $g_n = t \mapsto t^n$. Calculez

$|g_p - g_q|_\infty$ pour p et q entiers naturels donnés.

La norme $|g_p - g_q|_\infty$ tend elle vers 0 quand p et q tendent vers l'infini ?

Calculez $|\cos^p - \cos^q|_\infty$ pour tout couple (p, q) . La norme $|\cos^p - \cos^q|_\infty$ tend elle vers 0 quand p et q tendent vers l'infini ?



◦23◦

◦24◦

Soit f continue de I (intervalle réel) dans $\mathbb{R}$. On suppose f non monotone.

Montrez alors qu'il existe a, b et c vérifiant $a < b < c$ et $(f(c) - f(b)).(f(b) - f(a)) < 0$.

On définit alors $\varphi = t \mapsto (f(c) - f(b)).(f(b + t.(c-b)) - f(a + t.(b-a)))$.

Donnez le signe de $\varphi(0)$ et de $\varphi(1)$. Déduez $\exists t \in [0, 1], f(b + t.(c-b)) = f(a + t.(b-a))$.

Que venez vous de redémontrer ?

◦25◦

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \circ f$ admet un unique point fixe α .

Montrez que $f - Id$ ne peut pas rester de signe constant. Concluez que f admet un point fixe., et montrez que c'est α .

◦26◦

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f n'a pas de point fixe et vérifie $f(0) > 0$. Montrez : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$. Déduez $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) > x$. Déduez le résultat suivant : si $g \circ g$ admet au moins un point fixe, alors g admet au moins un point fixe.

◦27◦

Pour tout n , on note a_n la solution dans $]0, +\infty[$ de l'équation $\ln(x) = n.\pi + \text{Arctan}(x)$ (existence ? unicité ?).

Montrez que la suite (a_n) est croissante et tend vers $+\infty$.

Montrez que la série de terme général $(a_n)_{n \geq 0}$ diverge.

◦28◦

♥ Résolvez $z + \bar{z} = |z|$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.

◦29◦

La suite (u_n) est définie par $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2.\sqrt{n+u_n}}$. Donnez sa limite quand n tend vers l'infini.

◦30◦

Soit f continue de $[0, 1]$ dans lui même. Montrez que pour tout n l'équation $f(x) = x^n$ admet au moins une

solution (appliquez le théorème des valeurs intermédiaires).

◦31◦ $\sqrt{10}, \sqrt{10.\sqrt{10}}, \sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10}}}, \sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10}}}}, \sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10}}}}}$

Mettez cette suite sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrez qu'elle est croissante, majorée et donnez sa limite.

◦32◦ $\sqrt[2]{a}$ est un réel strictement positif donné. On définit la suite u par $u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2}$ pour tout n (et $u_0 = a$ par exemple).

Montrez que la suite u converge.

On pose alors $r_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$. Exprimez r_{n+1} à l'aide de r_n . Montrez : $|u_n - \sqrt{a}| = O(r_0^{(2^n)})$ (la convergence est très très rapide !).

◦33◦ Montrez que si f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie $\int_{-1}^1 f(t).dt = 0$ alors elle admet au moins un point fixe (on pourra étudier $f - Id$ sur $[-1, 1]$ et montrer qu'elle ne peut pas rester de signe constant).

◦34◦ u_0 est entre 0 et 1, et $u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{1-u_n}}$. Étudiez la suite.

◦35◦ Soit (a_n) une suite bornée. Montrez que $\left(\sum_{n=0}^N \frac{a_n}{2^n}\right)$ est alors une suite de Cauchy.

◦36◦ Montrez que l'image d'une suite de Cauchy par une application lipschitzienne est une suite de Cauchy.

◦37◦ Montrez que si la suite (a_n) vérifie : $\forall n, |a_n| \leq \frac{1}{2^n}$ alors elle est de Cauchy. Réciproque ?

Montrez que si la suite (a_n) vérifie $\forall n, |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$ alors elle est de Cauchy.

I~0) On note E l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel.

I~1) Montrez que $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur $m(E, +, .)$, sachant que l'on pose $\|f\| = \sup(|f(t)| \mid t \in [0, 1])$.

N est une norme sur $(F, +, .)$ où F est un espace vectoriel

E	Existence	pour tout $\vec{u}$ de E , $N(\vec{u})$ existe
P	Positivité	$\forall \vec{u} \in E, N(\vec{u}) \geq 0$
S	Séparation	$\forall \vec{u} \in E, \vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow N(\vec{u}) > 0$ $\forall \vec{u} \in E, N(\vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$
H	Homogénéité	$\forall (\lambda, \vec{u}) \in \mathbb{R} \times E, N(\lambda.\vec{u}) = \lambda .N(\vec{u})$
I	Inégalité triangulaire	$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, N(\vec{u} + \vec{v}) \leq N(\vec{u}) + N(\vec{v})$

Je vous donne quand même le début d'une des preuves pour que vous ne vous contentiez pas d'affirmations péremptives "il est évident que" :

on se donne f et g ; pour tout x , on a : $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$ et ensuite, à vous de rédiger avec des mots et pas avec des trucs dont vous dites que c'est des maths...

I~2) Pour f dans E , on pose $L(f) = \sup\left\{\frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} \mid 0 \leq a < b \leq 1\right\}$. Montrez que L est une semi norme sur $(E, +, .)$ (semi-norme, c'est EPHI).

I~3) Montrez pour f de classe C^1 : $L(f) = \|f'\|$. Et si vous préférez des photos de François-Xavier, j'ai aussi.

I~4) Calculez la norme $\|f\|$ et la semi-norme pour les applications suivantes :

$s_n = \theta \mapsto \sin(n.\theta)$	$c_n = \theta \mapsto \cos(n.\theta)$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto 2.x - 1 $	$x \mapsto \ln(1 + x)$
---------------------------------------	---------------------------------------	-----------------	-----------------------	------------------------

I~5) Montrez que $f \mapsto |f(0)| + L(f)$ est une norme (notée Λ). Montrez pour tout f de $\|f\| \leq \Lambda(f)$. Existe-t-il K vérifiant $\forall f \in E, L(f) \leq K.\|f\|$.

II~0) Une suite (f_n) d'éléments de E vérifie $\forall \epsilon, \exists K_\epsilon, \forall (p, q), K_\epsilon \leq p \leq q \Rightarrow L(f_p - f_q) \leq \epsilon$. Montrez que pour tout x de $[0, 1]$, la suite $(f_n(x))$ converge vers un réel que l'on va noter $f(x)$.

II~1) Montrez que f ainsi définie (limite des f_n) est dans E .

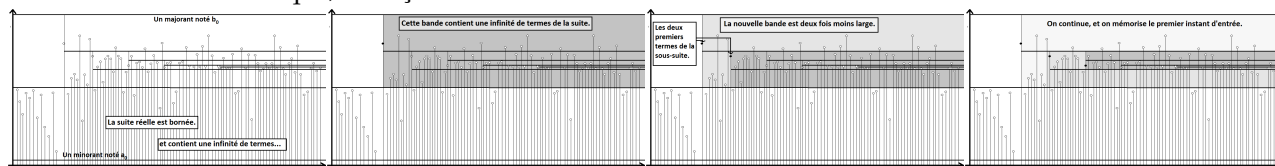
II~2) Montrez que la suite $(F_n(x))$ est croissante majorée et converge (étudiez $t \mapsto t + \frac{x-t^2}{2}$ sur $[0, 1]$).

II~3) La limite des P_n est elle dans E ?

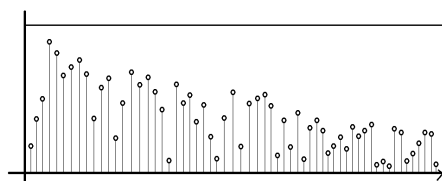
◦38◦

Théorème de Bolzano Weierstrass, l'autre démonstration.

La démonstration classique, c'est ça :



Partons pour la nouvelle.



On prend une suite réelle bornée (u_n) à valeurs dans $[a, b]$. Pour montrer qu'elle admet une sous-suite convergente, on construit une sous-suite monotone.

On pose $A = \{n \mid \forall p \geq n, u_p \leq u_n\}$.

Explicitiez A pour chacune des suites suivantes : $\left(\frac{1}{2^n}\right), ((-1)^n), \left(\frac{(-1)^n}{2^n}\right)$,

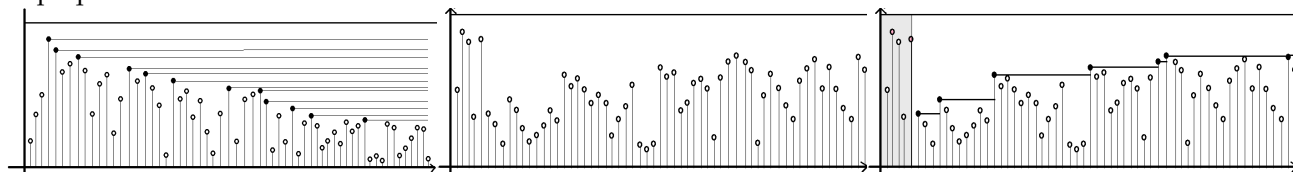
Montrez que si A est infini, alors en indexant les éléments de A dans l'ordre croissant $A = \{n_0, n_1, n_2, n_3, \dots\}$ alors la suite (u_{n_k}) est monotone.

On suppose que A est fini. Montrez qu'il existe alors n_0 tel que tous les entiers à partir de n_0 sont hors de A .

Déduisez alors $\exists n_1 > n_0, u_{n_1} > u_{n_0}$.

Puis $\exists n_2 > n_1, u_{n_2} > u_{n_1}$. Montrez qu'il existe une sous-suite de (u_n) strictement croissante.

Expliquez le lien avec ces dessins.



Ce qui suit est un gros morceau de Centrale PSI 2020. Les parties sont donc liées entre elles...

Lycee Charlemagne

MPSI2

Année 2023/24

Lambert.

I~0) On note f l'application $x \mapsto x.e^x$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrez que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$ dont la réciproque (de $[-e^{-1}, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$) sera notée W en hommage à Lambert¹. Justifiez que W est continue et même C^∞ de $]-1, +\infty[$ dans $]-1, +\infty[$.

I~1) Calculez $W(0)$ et $W'(0)$. Justifiez $W(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$. Montrez : $W''(0) = -2$.

I~2) Montrez $W(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$.

I~3) Calculez $W(e)$ et justifiez $\int_0^e W(t).dt = e - 1$.

I~4) Montrez que f réalise un homéomorphisme de $]-\infty, -1]$ sur $[-e^{-1}, 0[$ dont la réciproque sera notée V .

I~5) Donnez en fonction de m le nombre de solutions de l'équation $x.e^x = m$ d'inconnue réelle x (nombre noté n_x). Calculez $\int_{-3}^3 n_x.d x$.

I~6) En utilisant V et W , donnez suivant m les solutions de $x.e^x \leq m$ d'inconnue réelle x , et illustrez graphiquement les différents cas.

1. Jean-Henri Lambert ; né à Mulhouse (à l'époque « cité état » indépendante) en 1728, il écrivit en allemand, en français et en latin des textes mathématiques et philosophiques, il était expert en cartographie et en astronomie, ce fut lui qui en premier prouva l'irrationalité de π : il n'y a aucun W dans cette présentation, donc la lettre W s'impose

I~7) Pour a et b réels non nuls, donnez le nombre de solutions de l'équation d'inconnue réelle $x : e^{a \cdot x} + b \cdot x = 0$. Exprimez ces solutions à l'aide de W et V .

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24
Une formule d'Abel.		

II~0) n est un entier naturel donné et a un complexe donné. On pose $A_0 = 1$ et $A_k = \frac{X \cdot (X - k \cdot a)^{k-1}}{k!}$ pour tout k de 1 à n .

Montrez que $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une base de $(\mathbb{C}_n[X], +, \cdot)$.

II~1) Démontrez pour k entre 1 et n : $A'_k(X) = A_{k-1}(X - a)$.

II~2) Déduisez pour j et k entre 0 et n la valeur de $A_k^{(j)}(j \cdot a)$ (séparer suivant la position de j par rapport à k).

II~3) Soit P un polynôme d'écriture $\sum_{k=0}^n a_k \cdot A_k$ sur la base déjà citée. Montrez $P^{(j)}(j \cdot a) = a_j$ pour tout j de 0 à n .

II~4) Déduisez : $(x + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot x \cdot (x - k \cdot a)^{k-1} \cdot (y + k \cdot a)^{n-k}$ pour tout triplet (x, y, n) de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{N}$.

II~5) Déduisez $n \cdot y^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot (-k \cdot a)^{k-1} \cdot (y + k \cdot a)^{n-k}$.

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24
Développement limité.		

III~0) Justifiez : $W(t) = t \cdot (1 + W(t)) \cdot W'(t)$ pour tout t .

III~1) Déduisez pour tout n : $W^{(n)}(0) = (-n)^{n-1}$.

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24
Approximation de W .		

IV~0) Pour tout réel positif x , on définit $\phi_x = t \mapsto x \cdot e^{-x \cdot e^{-t}}$ (plus lisible : $x \cdot \exp(-x \cdot \exp(-t))$). Montrez que $W(x)$ est point fixe de ϕ_x .

IV~1) Montrez : $0 \leq \phi'_x(t) \leq \frac{x}{e}$ pour tout réel t (retrouvez $f(\dots)$ dans ϕ'_x).

IV~2) On pose $w_0(x) = 1$ et $w_{n+1}(x) = \phi_x(w_n(x))$ pour tout n . Montrez pour tout x de $[0, e]$ et tout n de $\mathbb{N}$: $|w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n \cdot |1 - W(x)|$. Déduisez que la suite $(w_n(x))$ converge vers $W(x)$.

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24
Application aux probabilités.		

Un message constitué d'une suite de bits est transmis sur un canal. Cependant, ce canal n'est pas fiable : chaque bit risque d'être inversé, indépendamment des autres, avec la probabilité $1 - p$ (dans $]0, 1[$). Pour fiabiliser la transmission, on découpe le message et on transmet des blocs de r bits. Chaque bloc comprend à la fois des bits du message d'origine et des bits supplémentaires qui permettent de détecter et corriger une erreur. On note X le nombre d'inversions survenues lors de la transmission d'un bloc de r bits et on admet que X est une variable aléatoire. Pour que la transmission soit suffisamment fiable, on souhaite que la probabilité qu'il y ait au moins deux erreurs dans un même paquet soit faible. Plus précisément, on considère α dans

$]0, 1[$ et on veut réaliser la condition $P(X \geq 2) \leq 1 - \alpha$. Montrez : $P(X = k) = \binom{r}{k} \cdot (1 - p)^k \cdot p^{r-k}$.

Vérifiez $\sum_{k=0}^r P(X = k) = 1$ et $\sum_{k=0}^r k \cdot P(X = k) = r \cdot (1 - p)$ (espérance)

puis $\sum_{k=0}^n k^2 \cdot P(X = k) - \left(\sum_{k=0}^n k \cdot P(X = k)\right)^2 = r \cdot p \cdot (1 - p)$ (variance).

Justifiez : $\sum_{k=2}^r P(X = k) \leq \sum_{k=2}^r \frac{k}{2} \cdot P(X = k) \leq \frac{r \cdot (1 - p)}{2}$.

Montrez que la condition $P(X \geq 2) \leq 1 - \alpha$ est satisfaite pour $r \leq 2 \cdot \frac{1 - \alpha}{1 - p}$. Montrez que ceci équivaut à

$x \cdot e^x \leq -\alpha \cdot a \cdot e^{-a}$ si on a posé $a = \frac{p \cdot \ln(p)}{1 - p}$ et $x = r \cdot \ln(p) - a$. C'est là qu'intervient la fonction de Lambert !

Rapport du jury :

Ce problème s'intéresse à des fonctions ne s'exprimant pas à l'aide des fonctions usuelles, définies comme réciproques sur certains intervalles de la fonction $x \mapsto x.e^x$.

On établit diverses propriétés de ces fonctions, en particulier le fait que l'une d'elle est développable en série entière au voisinage de zéro. Deux applications en probabilité sont mises en avant (une seule pour nous).

Ce sujet, d'une longueur très raisonnable, comporte plusieurs parties assez indépendantes et permet de contrôler les connaissances des candidats dans des domaines variés d'analyse et de probabilité de première et seconde année.

Il n'encourage cependant pas le grappillage, chaque question nécessitant soit une bonne compréhension du contexte soit une vraie connaissance du cours. Quelques questions plus difficiles n'ont été comprises que par les meilleurs candidats.

Analyse globale des résultats Les candidats ont su exploiter le sujet pour montrer leurs compétences en choisissant les parties les plus à leurs convenances et ne sont jamais restés bloqués sur un point. La plupart des questions est assez simple et a permis de bien classer les candidats en fonction de leur compréhension de la question, de la précision des connaissances et de la rigueur de la réponse.

Par ailleurs le jury a moins apprécié la présentation des copies, l'écriture et l'abus d'abréviations mystérieuses et, bien pire encore, les contre vérités flagrantes, surtout accompagnées de « d'après le cours », et les escroqueries.

Les meilleurs candidats sont ceux qui prennent le temps de comprendre chaque question et d'argumenter chaque réponse.

00

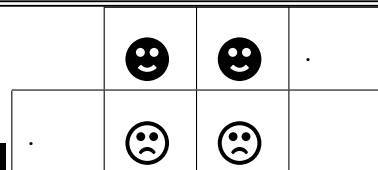
♠ La liste L contient tous les "anagrammes" de 123456789, c'est à dire les nombres formés de ces neuf chiffres, dans un ordre quelconque, de 123456789 à 987654321 en passant par 354289761.

On tape le script suivant

```
N, P, T, C, S = 0, 0, 0, 0, 0
for nombre in L :
    ....N += 1
    ....P += ((nombre %2)==0)
    ....T += ((nombre %3)==0)
    ....C += ((nombre %5)==0)
    ....S += nombre
    ....O += ((nombre %11)==0)
print(N, P, T, C, S, O)
```

Que lirez vous ?

♠ Écrivez un script qui engendre la liste L.

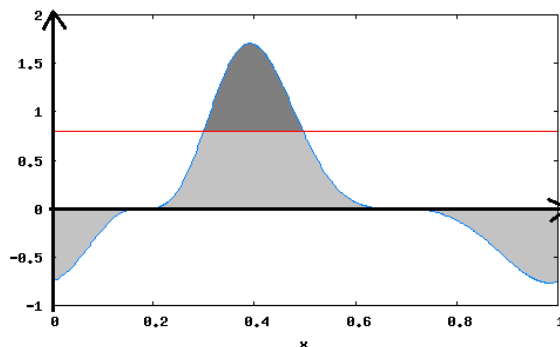


Chaque jeton peut se déplacer d'une case horizontalement ou verticalement. Deux jetons ne peuvent pas occuper la même case. Trois non plus. Il faut échanger les blancs et les noirs. Pour quelles valeurs de n existe-t-il une solution en n déplacements ?

02

Soient f et g continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $f^2 = g^2$. Montrez qu'on a $\forall x, f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$. Montrez qu'on n'a pas forcément $(\forall x, f(x) = g(x))$ ou $(\forall x, f(x) = -g(x))$.

Montrez que si f et g continues vérifient $\forall x, f^2(x) = g^2(x) \neq 0$ alors on a $f = g$ ou $f = -g$.



♡ Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrez qu'il existe au moins un x de $[0, 1]$ vérifiant $f(x) = f(x + 1/5)$ (supposez par l'absurde que $x \mapsto f(x + 1/5) - f(x)$ est de signe constant sur $[0, 4/5]$).

03

♣ Construisez une application continue vérifiant $f(0) = f(1)$ mais telle qu'il n'existe aucun x vérifiant $f(x) = f(x + \sqrt{2}/2)$.

04

Montrez qu'il ne peut pas exister f continue et bijective de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ (utiliser le T.V.I.).