LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 2 avril
M.P.S.I.2

2023 2024

IS24

♡ 0 ♡ Montrez qu'une suite croissante non bornée diverge vers $+\infty$. 2 pt.

♡ 1 ♡ Montrez que la somme d'une suite qui diverge vers $+\infty$ et d'une suite bornée diverge vers $+\infty$. 2 pt.

♡ 2 ♡ Montrez : $(Arccos(x) + Arccos(y) = \alpha) \Rightarrow (x^2 - 2.x.y.\cos(\alpha) + y^2 = \sin^2(\alpha))$ en précisant le domaine pour nos variables. 3 pt.

♢ 0 ♢ Pour tout N, on pose $P_N = \prod_{n=1}^{N}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{(-1)^n}$. Montrez que $(P_{2.N})$ et $(P_{2.N+2})$ forment un couple de suites adjacentes. 4 pt.
Déduisez que $(P_{2.N})$ converge. Quelle valeur de N prendrez vous pour que P_N soit une approximation de la limite à 10^{-5} près ? 2 pt.

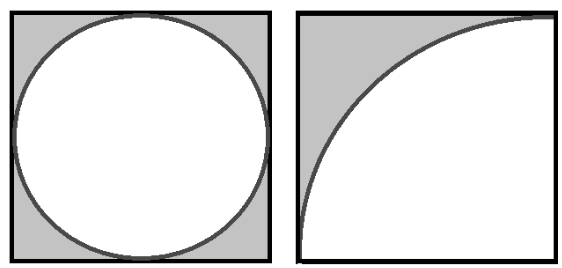
♢ 1 ♢ Moyenne. Si a et b sont deux réels strictement positifs, on pose $L(a,\ b) = \dfrac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)}$. Définissez $L(a,\ a)$ par prolongement continu quand b tend vers a. 1 pt. Vérifiez $\dfrac{a+b}{2} \geqslant L(a,\ b) \geqslant \dfrac{2.a.b}{a+b}$ (on pourra étudier les variations de $b \longmapsto (a+b).(\ln(b)-\ln(a)) - 2.(b-a)$ sur $]0,\ a]$ et sur $[a,\ +\infty[$). 4 pt.

♢ 2 ♢ Le physicien a trouvé $\sqrt[16]{1 + 80.(3^4+1).(3^8+1).(3^{16}+1)} \simeq 9$ à 10^{-3} près. C'est le hasard, ou c'est vraiment un entier ? 2 pt.

```
def alea( ) : #None -> int, int
....r = randrange(100)
....d, u = r//10, r%10
....return d+u, d*u
```

```
N = 100000
S, P, a, b, c, d = 0, 1, 0, 0, 0, 0
```

```
for n in range(10000) :
....s, p = alea( )
....S += s
....P *= p
....a += int((s, p) == (9, 0))
....b += int(p == 17)
....c += int(s == 12)
....d += int(s < 10 and p > 7)
```



Laquelle des deux aires grises est la plus grande ?

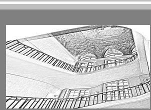
↑ 2 pt. $f := t \longmapsto \ln(e^t - 2.t)$.
Montrez que f est définie sur tout $\mathbb{R}$. 1 pt.
Donnez l'équation de sa tangente en 0. 1 pt.
Calculez $f''(0)$. 1 pt.

Quelle seront à peu près la valeur de `P/N`, de `a/N`, `b/N`, `c/N`, de `S/N`, 6 pt.

♠ 0 ♠ u_0 donné strictement positif, on pose pour tout n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+(u_n)^2}$. Montrez que la suite (u_n) est strictement positive, décroissante, convergente. Donnez sa limite. 3 pt. Montrez : $u_{n+1} \sim_{n\to+\infty} u_n$. 1 pt. Donnez une suite (a_n) vérifiant $a_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$ mais $a_{n+1} \not\sim_{n\to+\infty} a_n$. 1 pt. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$. Montrez que (v_n) converge vers 0 ainsi que sa moyenne de Cesàro. Déduisez $\dfrac{1}{n} = o(u_n)_{n\to+\infty}$. 3 pt. On pose $w_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ pour tout n. Montrez que (w_n) converge ainsi que sa moyenne de Cesàro. Trouvez a et α vérifiant $u_n \sim_{n\to+\infty} a.n^{\alpha}$. 3 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 2 avril
M.P.S.I.2

2023 2024
IS24
CORRECTION

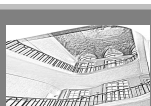


Questions de cours. IS24

Soit (a_n) une suite croissante. Elle est donc minorée par son premier terme a_0. Si on nous dit qu'elle est non bornée, c'est donc qu'elle est non majorée.
On se donne A quelconque ; ce n'est pas un majorant de la suite, il existe donc au moins un terme de la suite plus grand que A. On a donc un indice G_A vérifiant $a_{G_A} > A$. Mais alors par croissance, pour tout n plus grand que G_A on a $a_n \geqslant a_{G_A} > A$. On reconnaît

$$\forall A,\ \exists G_A,\ \forall n \geqslant G_A,\ a_n > A$$

On prend une suite (a_n) qui diverge vers $+\infty$ (quantification à recopier de ci-dessus) et une suite (b_n) bornée (par M). On montre alors que $(a_n + b_n)$ diverge vers $+\infty$. En effet, pour tout A (aussi grand soit il), on sait, à partir du rang G_{A+M} : $a_n \geqslant A + M$ et aussi $b_n \geqslant -M$ (vrai à tous les rangs, et on oublie la majoration inutile). On a alors $a_n + b_n \geqslant A + M - M = A$. C'est bon, on a notre machine $A \longmapsto G_{A+M}$.



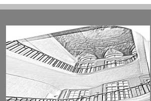
Aidons notre ami physicien. IS24

Aurait on une vraie égalité ? Posons $A = 1 + 80.(3^4+1).(3^8+1).(3^{16}+1)$ et interrogeons nous : n'aurait on pas $\sqrt[16]{A} = 9$, c'est à dire $A = 9^{16} = 3^{32}$?
On va donc étudier $3^{32} - 1$ qu'on va factoriser

$$3^{32} - 1 = (3^{16} - 1).(3^{16} + 1) = (3^8 - 1).(3^8 + 1).(3^{16} + 1)$$

et en recommençant : $3^{32} - 1 = (81 - 1).(3^4 + 1).(3^8 + 1).(3^{16} + 1)$ et donc $A = 1 + 3^{32} - 1 = 3^{32}$.
On a une vraie égalité.

Et pour les masochistes qui n'ont pas l'approche du matheux : $1 + 80.(3^4+1).(3^8+1).(3^{16}+1) = 1\,853\,020\,188\,851\,841$ *et on voit ce qu'on peut en faire.*



Moyenne logarithmique. IS24

On pose donc $L(a,\ b) = \left(\dfrac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a}\right)^{-1}$. Quand b tend vers a, le contenu de la parenthèse tend vers $\ln'(a)$ c'est à dire vers $\dfrac{1}{a}$ et on pose finalement

$$L(a,\ a) = \lim_{b \to a} L(a,\ b) = \frac{1}{1/a} = a$$

finalement assez logique si on décide d'appeler ça une moyenne, comme le suggère l'encadrement qui suit (par deux moyennes classiques).

On va montrer $\dfrac{b-a}{\ln(b) - \ln(a)} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ et regardant la différence comme fonction de b pour a fixé.
Mais comme il y a le signe d'un dénominateur, on va ruser et supposer $a < b$, quitte à intervertir les rôles en ayant déjà constaté $L(a,\ b) = L(b,\ a)$.

On va donc plutôt regarder le numérateur de $\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{b-a}{\ln(b) - \ln(a)}$ et c'est $(a+b).(\ln(b) - \ln(a)) - 2.(b-a)$.
On se fixe donc a et on pose $f = b \longmapsto (a+b).(\ln(b) - \ln(a)) - 2.(b-a)$.
On trouve $f' = b \longmapsto \ln(b) - \ln(a) + \frac{a-b}{b}$ et $f'' = b \longmapsto \dfrac{b-a}{b^2}$.
f'' est positive, f' est croissante sur $[a,\ +\infty[$, nulle en a.

f' est donc positive sur $[a,\ +\infty[$, et f est croissante. Comme elle est nulle en a, on déduit $f(b) \geqslant 0$ pour $b \geqslant a$.
On fait passer de l'autre côté et on a bien $\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)} \geqslant 0$ pour b plus grand que a.
D'ailleurs, pour b plus petit que a, dans $\dfrac{(a+b).(\ln(b)-\ln(a))-2.(b-a)}{2.(\ln(b)-\ln(a))}$, numérateur et dénominateur sont négatifs, la différence est positive.

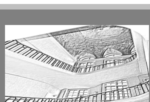
On peut le refaire avec des variations de fonctions.
On veut prouver après produits en croix : $b^2 - a^2 - 2.a.b.(\ln(b) - 'ln(a)) \geqslant 0$ pour b plus grand que a.
On définit donc $b \longmapsto b^2 - a^2 - 2.a.b.(\ln(b) - 'ln(a))$ qu'on note g. Elle est nulle en a.
Elle se dérive en $b \longmapsto 2.b - 2.a.(\ln(b) - \ln(a)) - 2.a$. On a encore $g'(a) = 0$.
On redérive : $g'' = b \longmapsto \frac{2.(b-a)}{b}$. g'' est positive que $[a,\ +\infty[$. g' est donc croissante.
Comme g' est nulle en a, elle est positive sur $[a,\ +\infty[$. Et g est croissante.
Comme g est nulle en a, elle est positive sur $[a,\ +\infty[$ et on a bien $b^2 - a^2 \geqslant 2.a.b.(\ln(b) - 'ln(a))$ puis $\dfrac{(b-a).(b+a)}{\ln(b)-\ln(a)} \geqslant 2.a.b$ et enfin $L(a,\ b) = \dfrac{(b-a)}{\ln(b)-\ln(a)} \geqslant \dfrac{2.a.b}{a+b}$

Maintenant, il y a moyen de faire plus simple. Enfin, c'est ce que dira le matheux.
Supposons $a < b$ toujours par symétrie des rôles. On a alors

$$\frac{1}{L(a,\ b)} = \frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}.\int_a^b \frac{dt}{t}$$

Mais sur l'intervalle $[a,\ b]$, le graphe de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est sous sa corde d'équation $y = \dfrac{a+b-x}{b-a}$ (vérifiez que c'est l'équation de la droite qui passe par $\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ et $\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$. On a donc $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{t} \leqslant \int_a^b \frac{a+b-t}{b-a}.dt$ et ceci nous donne après calcul $\displaystyle\int^b \frac{dt}{t} \leqslant \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).\frac{b-a}{2}$ (aire du trapèze).
On divise par $b-a$, on passe à l'inverse et on a l'inégalité demandée.

Je me demande si on peut passer de $L(a,\ b) \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ à l'autre en l'écrivant pour $1/a$ et $1/b$ ou pour a^2 et b^2.



Trigonométrie. IS24

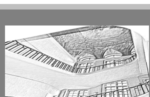
On suppose donc $Arccos(x) + Arccos(x) = \alpha$ (avec x et y entre -1 et 1), et on calcule $x^2 - 2.x.y.\cos(\alpha) + y^2$ et $\sin^2(\alpha)$. Mais déjà,

$$\cos(\alpha) = \cos(Arccos(x) + Arccos(x)) = \cos(Arccos(x)).\cos(Arccos(x)) - \sin(Arccos(x)).\sin(Arccos(x))$$

$$\cos(\alpha) = x.y - \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}$$

$$\sin(\alpha) = \cos(Arccos(x)).\sin(Arccos(x)) + \sin(Arccos(x)).\cos(Arccos(x)) = x.\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}.y$$

Il nous reste à vérifier $\left(x.\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}.y\right)^2 = x^2 - 2.x.y.\left(x.y. - \sqrt{1-x^2}\right).\sqrt{1-y^2}\Big) + y^2$
Le premier membre donne $x^2 - x^2.y^2 + y^2 - x^2.y^2 + 2.x.y.\sqrt{(1-x^2).(1-y^2)}$
Le second donne la même chose. Il y a bien égalité.



Suites adjacentes. IS24

On revient aux définition $P_N = \prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{(-1)^n} = \left(1+\frac{1}{1^2}\right)^{-1}.\left(1+\frac{1}{2^2}\right)^{1}\dots\left(1+\frac{1}{N^2}\right)^{(-1)^N}$ puis :

$$\begin{array}{rclcccccccc}
P_{2.N} & = & \prod_{n=1}^{2.N}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{(-1)^n} & = & \left(1+\frac{1}{1^2}\right)^{-1} & \left(1+\frac{1}{2^2}\right)^{1} & \dots & \left(1+\frac{1}{(2.N)^2}\right)^{1} & & & \\
P_{2.N+1} & = & \prod_{n=1}^{2.N+1}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{(-1)^n} & = & \left(1+\frac{1}{1^2}\right)^{-1} & \left(1+\frac{1}{2^2}\right)^{1} & \dots & \left(1+\frac{1}{(2.N)^2}\right)^{1} & \left(1+\frac{1}{(2.N+1)^2}\right)^{-1} & & \\
P_{2.N+2} & = & \prod_{n=1}^{2.N+2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{(-1)^n} & = & \left(1+\frac{1}{1^2}\right)^{-1} & \left(1+\frac{1}{2^2}\right)^{1} & \dots & \left(1+\frac{1}{(2.N)^2}\right)^{1} & \left(1+\frac{1}{(2.N+1)^2}\right)^{-1} & \left(1+\frac{1}{(2.N+2)^2}\right)^{1} & \\
P_{2.N+3} & = & \prod_{n=1}^{2.N+3}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{(-1)^n} & = & \left(1+\frac{1}{1^2}\right)^{-1} & \left(1+\frac{1}{2^2}\right)^{1} & \dots & \left(1+\frac{1}{(2.N)^2}\right)^{1} & \left(1+\frac{1}{(2.N+1)^2}\right)^{-1} & \left(1+\frac{1}{(2.N+2)^2}\right)^{1} & \left(1+\frac{1}{(2.N+3)^2}\right.
\end{array}$$

Tous ces termes existent. Chaque $\left(1+\frac{1}{(2.k)^2}\right)^1$ est plus grand que 1 et chaque $\left(1+\frac{1}{(2.k+1)^2}\right)^{-1}$ est entre 0 et 1.
Il est temps de calculer des différences, ou des quotients pour aller plus vite :

$$P_{2.N+3} - P_{2.N+2} = \left(1+\frac{1}{(2.N+3)^2}\right)^{-1}.P_{2.N+2} - P_{2.N+2} = P_{2.N+2}.\left(\frac{1}{1+\frac{1}{(2.N+3)^2}} - 1\right) = P_{2.N+2}.\left(\frac{-1}{1+(2.N+3)^2}\right) < 0$$

$$P_{2.N+2} - P_{2.N} = \left(1+\frac{1}{(2.N+2)^2}\right)^{1}.\left(1+\frac{1}{(2.N+1)^2}\right)^{-1}.P_{2.N} - P_{2.N} = P_{2.N}.\left(\frac{1+\frac{1}{(2.N+2)^2}}{1+\frac{1}{(2.N+1)^2}} - 1\right)$$

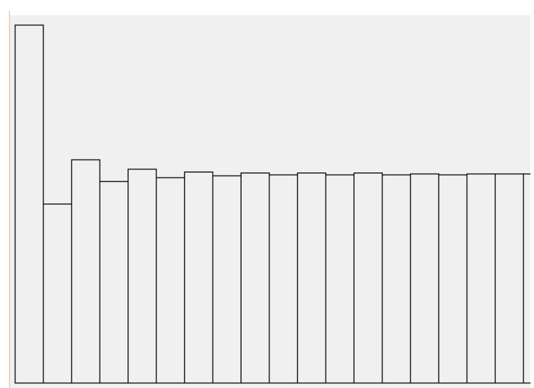
$$P_{2.N+2} - P_{2.N} = P_{2.N+2}.\left(\frac{-4.N-3}{(1+(2.N+3)^2).(2.N+2)^2}\right) < 0$$

Par le même type de calculs

$$P_{2.N+1} < P_{2.N+3} < P_{2.N+2} < P_{2.N}$$

L'une croit, l'autre décroit, celle qui croit majore celle qui décroit.

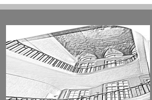
On peut d'ores et déjà dire que les deux vont converger. Maintenant qu'on sait que $P_{2.N}$ converge, la formule $P_{2.N+1} - P_{2.N} = P_{2.N}.\left(\frac{-1}{1+(2.N+1)^2}\right)$ garantit que la différence tend vers 0 tant qu'on n'avait pas la convergence de $P_{2.N}$), le produit du membre de droite était une forme indéterminée.



Déjà, la limite α est entre 0 et 1. La limite vérifie $P_{2.N+1} < \alpha < P_{2.N}$ et l'écart de cet encadrement est de l'ordre de $|P_{2.N+1} - P_{2.N}| = P_{2.N}.\left(\frac{1}{1+(2.N+1)^2}\right) \leqslant 1.\left(\frac{1}{1+(2.N+1)^2}\right)$.

Pour avoir une valeur de la limite à 10^{-5} près, il suffit de demander : $1+(2.N+1)^2 \geqslant 10^4$.

On va quand même exiger $2.N+1 \simeq 10^2$ soit $N = 50$.



Simulation aléatoire. IS24

Que fait `alea( )` ?
On tire au hasard (uniforme) un nombre `r` entre `0` (inclus) et `100` (exclu). Bref, un nombre à deux chiffres.
On en extrait le chiffre des dizaines (`d = r//10`) et des unités (`u = r%10`).
Puis on en calcule la somme et le produit, qu'on retourne sous forme de couple.
Bref, une expérience aléatoire, dont on connaît la loi cojointe.

Déjà, `s` peut aller de `0` (seul exemple a=0) à `18` (seul exemple a=99) et `p` peut aller de `0` (exemple a=20) à `81` (seule exemple a=99).

Et `s` et `p` sont quand même liés : si `p` vaut 15, les seuls `r` possibles sont 35 et 53, et `s` ne peut valoir que 8.

Ensuite, on va répéter l'expérience un grand nombre de fois (`N = 10000`). On réalise `alea( )` et on en affecte les résultats à `s` et `p`.

Pour `p`, comme on va avoir presque surement une expérience donnant `p = 0`, on aura à coup (presque) sûr `P = 0`.

Le compteur de booléens `a` indique le nombre de fois où on aura `s=9` et `p=0`. Ceci correspond à deux tirages `r` possibles parmi les 100 : `r = 09` ou `r = 90` (il faut un 0 et l'autre chiffre est un 9). La probabilité véritable est $\frac{2}{100}$ c'est à dire $1/50$. On peut espérer que la valeur moyenne `a/N` soit à peu près 0.01.

Le compteur de booléens `b` compte le nombre fois où on a `p = 17`. Mais c'est impossible mon bon monsieur. Le quotient `b/N` vaudra `0`, mais un vrai `0`.

Pour `c`, c'est plus long. On demande que `s` (somme des chiffres) vaille `12`. On a plusieurs couples possibles. Et donc plusieurs `r` : 39, 93, 84, 48, 75, 57, 66. La probabilité estimée `c/N` sera de l'ordre de $\frac{7}{100}$.

Pour `d`, la somme ne doit pas atteindre `10`, et le produit doit dépasser `7`. Les `r` possibles sont listés ci dessous

p	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18	20
	81, 18, 42, 24	33	25, 52		34, 43, 62, 26		27, 72	53, 35	44	29, 92	45, 54

On va obtenir vingt pour cent.

On somme tous les `s` possibles, puis à la fin on nous demande de diviser par `N`. On va donc estimer la valeur moyenne de `s` (ou son espérance).
Ça semble énorme, va-t-on à la main prendre tous les entiers de 0 à 99 et calculer pour chacun la somme des chiffres ?
Ce serait idiot (non, je ne traite pas d'idiot ceux qui auront calculé 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+1+2+3+4+...+18.
Mais si on dispose nos cent entiers dans un tableau de taille 10 sur 10.
Sur la première ligne, le chiffre des dizaines vaut 0. Et les unités vont de 0 à 9. Somme 45.
Sur la deuxième ligne, les mêmes unités de somme 45, et dix dizaines égales à 1. Total 55.
Sur la troisième ligne, les mêmes unités de somme 45, et dix dizaines égales à 2. Total 65.
Et ainsi de suite.
Sur la dixième ligne, les mêmes unités de somme 45, et dix dizaines égales à 9. Total 145.
Le total vaut 900. Et on pouvait l'avoir encore plus rapidement (sommer les unités par colonne et les dizaines par lignes).

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	

L'espérance de s est donc $\frac{900}{100}$ ce qui fait 9.
On peut aussi regrouper les nombres deux à deux avec somme des chiffres égale à 18 (exemple : 12 avec 87, 43 avec 56, et ainsi de suite).

Suite récurrente. IS24

On a supposé $u_0 > 0$. Par récurrence immédiate sur n, on a $u_n > 0$.

On calcule alors pour n donné quelconque

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{1+(u_n)^2}-u_n=\frac{-(u_n)^2}{1+(u_n)^2}<0$$

Ceci étant vrai pour tout n, la suite u décroit.

Étant décroissante et minorée, elle converge vers son plus grand minorant qu'on note un court instant λ.

Par passage à la limite dans la relation de récurrence (maintenant qu'on a la convergence) : $\lambda=\dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$. La seule valeur possible est $\lambda=0$.

La suite (u_n) converge vers 0.

On calcule le quotient (défini pour tout n non n nul)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{u_n}{1+(u_n)^2}.\frac{1}{u_n}=\frac{1}{1+(u_n)^2}$$

il converge vers 1 quand n tend vers $+\infty$. On reconnaît $u_{n+1}\sim_{n\to+\infty}u_n$.

On effectue la différence (toujours pour n quelconque donné)

$$v_n=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+(u_n)^2}{u_n}-\frac{1}{u_n}=\frac{(u_n)^2}{u_n}=u_n$$

On sait donc déjà que v_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Le théorème du cours garantit que sa moyenne de Cesàro tend aussi vers 0.

Mais sa moyenne de Cesàro se calcule

$$c_n=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}v_k}{n+1}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{u_{k+1}}-\dfrac{1}{u_k}}{n+1}=\frac{1}{(n+1).u_{n+1}}-\frac{1}{(n+1).u_0}$$

Comme déjà $\dfrac{1}{(n+1).u_0}$ converge vers 0, on déduit par soustraction que $\dfrac{1}{(n+1).u_{n+1}}$ converge vers 0.

Et on nous demande si on a bien $\dfrac{\frac{1}{n}}{u_n}$qui tend vers 0. C'est exactement ce qu'on vient d'obtenir par cette astuce césarienne.

On recommence avec un double v et des carrés

$$w_n=\frac{1}{(u_{n+1})^2}-\frac{1}{(u_n)^2}=\frac{(1+(u_n)^2)^2}{(u_n)^2}-\frac{1}{(u_n)^2}=\frac{2.(u_n)^2+(u_n)^4}{(u_n)^2}=2+(u_n)^2$$

Par théorème algébrique, w_n converge vers 2 quand n tend vers l'infini.

Par théorème de Cesàro, sa moyenne de Cesàro tend aussi vers 2 (et cette fois je vais l'arrêter au rang $n-1$)

$$C_{n-1}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}w_k}{n}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{(u_{k+1})^2}-\dfrac{1}{(u_k)^2}}{n}=\frac{1}{n..(u_n)^2}-\frac{1}{n.(u_0)^2}$$

Toujours en mettant de côté le terme de limite nulle, il vient $\dfrac{1}{n.(u_n)^2}$ converge vers 2.

On passe à l'inverse et à la racine : $\sqrt{n}.u_n$ converge vers $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

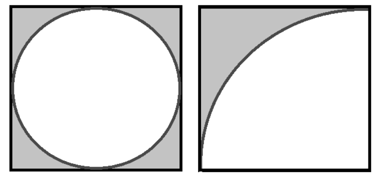
On arrange les choses : $\dfrac{u_n}{\dfrac{\sqrt{2}}{2.\sqrt{n}}}$ converge vers 1. On reconnaît : $\boxed{u_n\sim_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{2}.n^{-1/2}}$

On a obtenu une approximation de u_n sans calculer tous les termes intermédiaires. Elle ne dépend pas de u_0.
Je confirme avec les calculs dits exacts (en mettant en boucle u = f(u)

	$u_0 = 1$			$u_0 = 20$		
	$n = 10$	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10$	$n = 100$	$n = 1000$
vrai u_n	0.2088245	0.070008	0.0223317	0.0487935	0.0408179	0.0204086
$\frac{\sqrt{2}}{2.\sqrt{n}}$	0.223606	0.070710	0.022360	0.223606	0.070710	0.022360

Deux aires à comparer. IS24

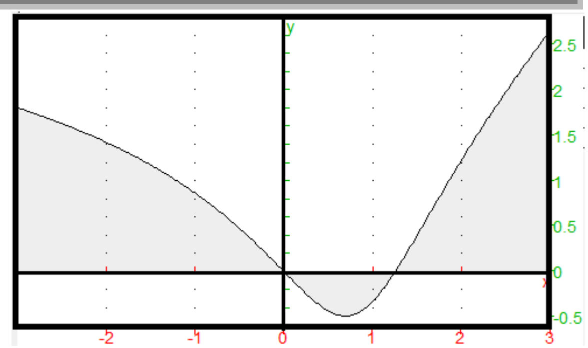
On note a le côté du carré. C'est aussi le diamètre d'un des disques, et le rayon de l'autre.


Laquelle des deux aires grises est la plus grande ?

	petit disque	grand quart de disque
aire carré	a^2	a^2
disque	$\pi.(a/2)^2$	$\pi.a^2/4$
reste	$a^2.\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$	$a^2.\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

Les deux aires grisées sont les mêmes, puisque les aires « circulaires » sont les mêmes.

Une fonction. IS24



La question est $e^t - 2.t$ reste bien toujours strictement positif ?
On définit $\varphi = t \longmapsto e^t - 2.t$ et on dérive.
φ est décroissante puis croissante, elle change de variations en $\ln(2)$.
Mais $\varphi(\ln(2))$ vaut $2 - 2.\ln(2)$, et ça ,c'est positif.
φ reste plus grande que $2 - 2.\ln(2)$, et f est définie partout.

On sait même que f admet un minimum en $\ln(2)$ égal à $\ln(2 - 2.\ln(2))$ dont on se contentera.

On dérive deux fois tout de suite

$\varphi(x)$	$\varphi'(x)$	$\varphi''(x)$
$\ln(e^x - 2.x)$	$\dfrac{e^x - 2}{(e^x - 2.x)}$	$\dfrac{4.e^x - 2.x.e^x - 4}{(e^x - 2.x)^2}$

La tangente en 0 a pour équation $y = -x$.

La tangente est la seconde bissectrice.

Enfin, $f''(0)$ est nul.

La courbe frôle la bissectrice et ne rebondit pas ; on a un point d'inflexion.