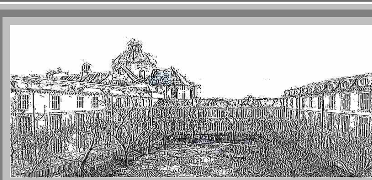
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 8 avril
M.P.S.I.2



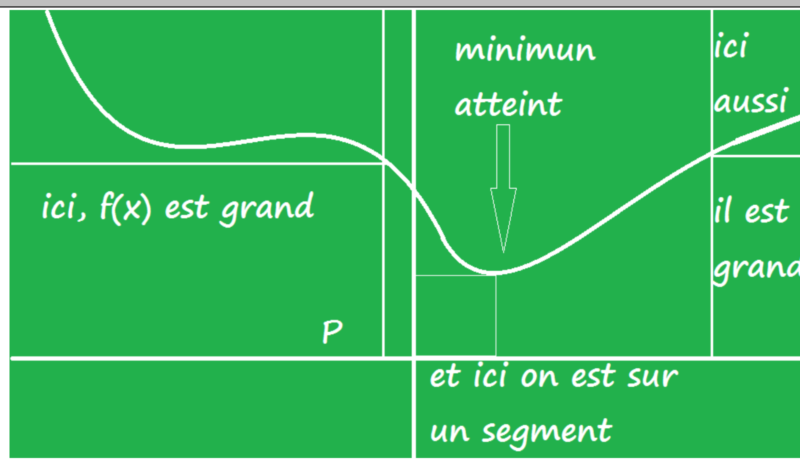
2023 2024

TD25

◦0◦

♡ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) \longrightarrow_{x\to-\infty} +\infty$ et $f(x) \longrightarrow_{x\to+\infty} +\infty$. Montrez que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, atteint en au moins un point.
La méthode astucieuse consistera à définition $\varphi = \theta \longmapsto Arctan(f(\tan(\theta)))$ sur $]-\pi/2,\ \pi/2[$ et même si possible $[-\pi/2,\ \pi/2]$.

Un classique. Certes f est continue, mais $]-\infty,\ +\infty[$ n'est pas un segment. Le théorème de compacité ne s'applique pas.
Sauf que vers l'infini, f se sauve vers $+\infty$, et donc elle reste « haute ». Finalement, elle ne pourra pas descendre trop bas.
Un dessin permet de s'en convaincre.
On a ensuite trois preuves.



Une par « beh oui, c'est évident, elle doit décroitre, puis recroitre, donc elle a un minimum.
Trop naïf. Une application continue peut changer de sens sans arrêt.

Une où on se ramène à un segment grâce à la divergence de chaque côté.
On regarde déjà par exemple $f(0)$ histoire d'avoir un point de référence.
On applique ensuite les deux hypopothèses

$\forall A,\ \exists G_A,\ \forall x,\ (x \geqslant G_A \Rightarrow f(x) \geqslant A)$	limite en $+\infty$
$\forall A,\ \exists P_A,\ \forall x,\ (x \leqslant P_A \Rightarrow f(x) \geqslant A)$	limite en $-\infty$

avec $A = f(0)$. Il s'ensuit que sur $]-\infty,\ P_A]$ et sur $[G_A,\ +\infty[$, f est minorée par $f(0)$.
Il ne reste que $[P_A,\ G_A]$. Et ça, c'est n segment. f y est donc minorée.
Globalement, sur les trois ensembles bout à bout, f est minorée.
Et elle atteint son minorant sur $[P_A,\ G_A]$ car on sait $\exists c \in [P_A,\ G_A],\ \forall x \in [P_A,\ G_A],\ f(c) \leqslant f(x)$.
Et ensuite $\forall x \in [G_A,\ +\infty[,\ f(x) \geqslant f(0) \geqslant f(c)$. C'est à ça que servait ce choix de $A = f(0)$ plutôt qu'un A non déterminé.

Une dernière est du domaine de « l'astuce mathématique » qui me fait dire « putain c'est joli ».
Et qui fait dire à Solène « dans tous les exercices en maths, il faut une nouvelle astuce à chaque fois ». Mais ici, c'est une astuce qui sert souvent. Une de ces belles idées, comme je vous demande d'en retenir chaque semaine.
On ramène l'infini à distance finie avec une tangente ou une arctangente.
On définit donc comme suggéré $\varphi = \theta \longmapsto Arctan(f(\tan(\theta)))$ sur $]-\pi/2,\ \pi/2[$. Elle est continue sur $]-\pi/2,\ \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ en tant que composée d'applications continues. Quand θ va de $-\pi/2$ à $\pi/2$, $\tan(\theta)$ va de $-\infty$ à $+\infty$ (on va utiliser pleinement f) et donc $f(\tan(\theta))$ décrit l'ensemble image de f, inclus dans $\mathbb{R}$. On compose par $Arctan$, on arrive entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ à nouveau.
Mais il y a a mieux. Que se passe-t-il quand θ tend vers $\pi/2$ (par valeur inférieure). $\tan(\theta)$ tend vers $+\infty$ et par composition, $f(\tan(\theta))$ tend aussi vers l'infini. On recompose par $Arctan$: $Arctan(f(\tan(\theta)))$ tend vers $\pi/2$. B
Bilan : $\varphi(\theta)$ tend vers $\pi/2$ quand θ tend vers $\pi/2$.
De même, $\varphi(\theta)$ tend vers $\pi/2$ quand θ tend vers $-\pi/2$.

Que fait on alors ? On prolonge par continuité φ sous le nom de $\overline{\varphi}$:

$\overline{\varphi}(-\pi/2) = \pi/2$	$\overline{\varphi}(-\pi/2) = Arctan(f(\tan(\theta)))$ sur $]-\pi/2,\ \pi/2[$	$\overline{\varphi}(\pi/2) = \pi/2$

La voilà continue sur un segment, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$.
Elle est donc bornée et atteint ses bornes.
Son maximum $\pi/2$ est atteint en $-\pi/2$ et $\pi/2$, on le sait.
Son minimum est atteint en un certain θ_0, qui ne peut pas être le point où elle atteint déjà son maximum.

On a donc $\exists \theta_0 \in]-\pi/2,\ \pi/2[,\ \forall \theta,\ Arctan(f(\tan(\theta_0))) \leqslant Arctan(f(\tan(\theta)))$.
On efface $Arctan$ car on est sur les bons domaines : $\exists \theta_0,\ \forall \theta,\ f(\tan(\theta_0)) \leqslant f(\tan(\theta))$.
On change les variables : $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(c) \leqslant f(x)$. Et c'était notre objectif...

∘1∘

On rappelle la définition de A est un ouvert de $\mathbb{R}$: $\forall \alpha \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\ [\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon] \subset A$.
Montrez que si A et B sont ouverts, alors $A \cap B$ et $A \cup B$ sont ouverts.
Montrez que chaque $]-2^{-n},\ 2^{-n}[$ est ouvert. Montrez que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}}]-2^{-n},\ 2^{-n}[$ n'est plus un ouvert.
Montrez que si chaque A_i est un ouvert, alors $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ est encore un ouvert.
Soit A un ouvert et (b_n) une suite à valeurs dans A^c (complémentaire). On suppose que (b_n) converge vers β.
Montrez (par l'absurde) que β est aussi dans A^c.

$\boxed{H}$	$\forall \alpha \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\ [\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon] \subset A$
$\boxed{H}$	$\forall \beta \in B,\ \exists \varepsilon > 0,\ [\beta - \varepsilon,\ \beta + \varepsilon] \subset B$
$\boxed{?}$	$\forall x \in A \cup B,\ \exists \varepsilon > 0,\ [x - \varepsilon,\ x + \varepsilon] \subset A \cup B$ prenons x dans $A \cup B$ deux possibilités :x est dans A ou x est dans B • si x est dans A : $\exists \varepsilon > 0,\ [x - \varepsilon,\ x + \varepsilon] \subset A \subset A \cup B$ • si x est dans B : $\exists \varepsilon > 0,\ [x - \varepsilon,\ x + \varepsilon] \subset B \subset A \cup B$
$\boxed{?}$	$\forall x \in A \cap B,\ \exists \varepsilon > 0,\ [x - \varepsilon,\ x + \varepsilon] \subset A \cap B$
	prenons x dans $A \cap B$ deux possibilités :x est dans A et x est dans B • puisque x est dans A : $\exists \varepsilon_1 > 0,\ [x - \varepsilon_1,\ x + \varepsilon_1] \subset A$ • puisque x est dans B : $\exists \varepsilon_2 > 0,\ [x - \varepsilon_2,\ x + \varepsilon_2] \subset B$ considérons $\varepsilon = Min(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$: $[x - \varepsilon,\ x + \varepsilon] \subset [x - \varepsilon_1,\ x + \varepsilon_1] \subset A$ $[x - \varepsilon,\ x + \varepsilon] \subset [x - \varepsilon_2,\ x + \varepsilon_2] \subset B$ on reconnaît $[x - \varepsilon,\ x + \varepsilon] \subset A \cap B$.

$]-2^{-n},\ 2^{-n}[$ est un intervalle ouvert, il a intérêt à être ouvert.
Prenons x dans $]-2^{-n},\ 2^{-n}[$. On a alors $-2^{-n} < x < 2^{-n}$.
On mesure $2^{-n} - x$ et $x + 2^{-n}$ *(distance au « bord du segment)*.
On prend le plus petit des deux : $Min(2^{-n} - x,\ x + 2^{-n})$. Il est strictement positif.
On le divise par 2, il est toujours strictement positif. On l'appelle ε.
On a alors $-2^{-n} < x - \varepsilon < x + \varepsilon < 2^{-n}$. L'intervalle $]-x-\varepsilon,\ x + \varepsilon[$ est inclus dans $]-2^{-n},\ 2^{-n}[$.

Plus généralement, pour x dans $]a,\ b[$, prendre $\varepsilon = \dfrac{Min(a - x,\ x - b)}{2}$.

L'intersection généralisée se réduit à 0 : $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}}]-2^{-n},\ 2^{-n}[= \{0\}$.

Si tu m'écris $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}}]-2^{-n},\ 2^{-n}[= 0$, je te fais bouffer toutes les feuilles de papier millimétré des labos de physique.

Ce n'est plus un ouvert.
0 est dedans, mais aucun intervalle $]0 - \varepsilon,\ 0 + \varepsilon[$ ne peut être inclus dans $\{0\}$.

Soient A_i des ouverts. On prend x dans la réunion. Il est donc dans l'un des A_i. Disons A_{i_0}.
Alors, comme A_{i_0}est ouvert, il existe un ε_{i_0}strictement positif vérifiant $]x - \varepsilon_{i_0},\ x + \varepsilon_{i_\text{à}}[\subset A_{i_0}$.
Mais alors, par définition de la réunion *(plus petit ensemble contenant tous les A_i)* : $]x - \varepsilon_{i_0},\ x + \varepsilon_{i_\text{à}}[\subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.
C'est ce qu'on voulait.

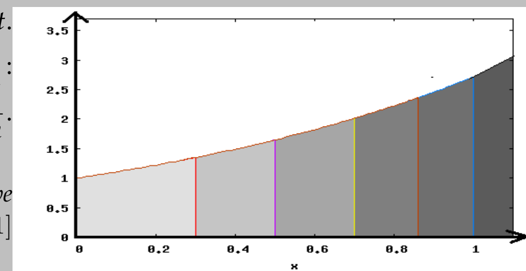
A est un ouvert, chaque b_n est dans A^c. Et on suppose que la suite des (b_n) converge *(après tout, une suite croisée au hasard dans le cours de maths n'a aucune raison de converger, sauf dans le cours de maths de Terminale)*.

On note b la limite de la suite. Il faut montrer qu'elle n'est pas dans A.
Si elle était dans A, alors il existerait un ε vérifiant $]b - \varepsilon,\ b + \varepsilon[\subset A$.
Mais on sait aussi qu'à partir d'un certain rang $N_{\varepsilon/2}$ (pour la tendre moitié cet ε là en particulier), on a $|b_n - b| \leqslant \varepsilon/2$.
Ce qui se traduit par $b_n \in]b - \varepsilon,\ b + \varepsilon[\subset]b - \varepsilon,\ b + \varepsilon[\subset A$.
certains des b_n sont dans A, c'est contradictoire.
Dès lors, forcément, la limite b est dans A^c.

On peut résumer en disant que le complémentaire d'un ouvert est « stable par passage à la limite ».

Rappel : Les inégalité strictes se conservent par passage à la limite. Les fermés comme $[a,\ b]$ sont stables par passage à la limite.
Les inégalités strictes ne se conservent pas par passage à la limite. Les ouverts $]a,\ b[$ ne sont pas stables par passage à la limite.

◦2◦ ♠ Soit f une application de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. On pose $I = \int_0^1 f(t).dt$.
Montrez que pour tout n, il existe une subdivision de $[0,\ 1]$: $0 = x_{n,0} < x_{n,1} < x_{n,2} < \dots x_{n,n} = 1$ vérifiant $\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(t).dt = \frac{I}{n}$.
Interprétez géométriquement.
Pour rédiger cette question, on aura intérêt à définir F *(la primitive de f nulle en 0)* et à faire intervenir F^{-1} *(sa réciproque de $[0,\ I]$ dans $[0,\ 1]$ après en avoir prouvé l'existence)*.



Au fait, pourquoi les note-t-on $(x_{n,0}, \dots x_{n,n})$ et pas juste $(x_0, \dots x_n)$?
g est continue. Montrez que $\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} g(x_{n,k})$ converge vers $\dfrac{\int_0^1 f(t).g(t).dt}{\int_0^1 f(t).dt}$ quand n tend vers l'infini.

On ne fait pas une équisubdivision sur l'axe des abscisses, mais une subdivision adaptée à l'intégrale de f.
Il faut découper pour que $\int_0^{x_{n,1}} f(t).dt$ soit égale à $\frac{I}{n}$, puis on redécoupe le point suivant pour que l'on ait encore $\frac{I}{n}$ et ainsi de suite.

A la main, c'est simple à voir et raconter.
Et en pratique, c'est très facile à rendre mathématiquement rigoureux.

Il suffit de définit $F = x \longmapsto \int_0^x f(t).dt$.
C'est un C^1 difféomorphisme de $[0,\ 1]$ dans $[0,\ I]$ (pour $x = 0$ l'intégrale est nulle, et en 1 on a intégré sur tout le segment).
Quant à difféomorphisme, c'est que la dérivée F' de f est f strictement positive.

Il suffit alors de dire que F^{-1} existe de $[0,\ I]$ dans $[0,\ 1]$ et on pose $\boxed{x_{n,k} = F^{-1}\Big(\frac{k.I}{n}\Big)}$

On a défini ainsi $n+1$ points (donc 0 et &), ordonnés en croissant, et la relation $\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(t).dt = \frac{I}{n}$ c'est juste $F(x_{n,k+1}) - F(x_{n,k}) = \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(t).dt$ couplé à

$$F\Big(F^{-1}\Big(\frac{(k+1).I}{n}\Big)\Big) - F\Big(F^{-1}\Big(\frac{k.I}{n}\Big)\Big) = \frac{(k+1).I}{n} - \frac{k.I}{n} = \frac{I}{n}$$

On notera la nécessite d'un double indice, car la subdivision dépend de n, et chaque terme de la subdivision dépend de son propre indice k.

$\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} g(x_{n,k})$ s'écrit en fait $\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} g\Big(F^{-1}\Big(\frac{k.I}{n}\Big)\Big)$.
On reconnaît une somme de Riemann, non pas pour g mais pour $x \longmapsto g(F^{-1}(x))$ sur $[0,\ I]$.
Elle converge vers $\int_0^1 g(F^{-1}(x)).dx$.

Ah non, pas tout à fait. L'intervalle étant $[0,\ I]$, celle qui converge vers $\int_0^1 g(F^{-1}(x)).dx$, c'est $\frac{I}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} g(x_{n,k})$.

La somme de l'énoncé converge donc vers $\boxed{\frac{1}{I}.\int_{x=0}^{I} g(F^{-1}(x)).dx}$

On a fait un changement d'échelle le long de l'axe des abscisses.

Et si on faisait un changement de variable ? $F^{-1}(x) = t$. Si ça ce n'est pas un C^1 difféomorphisme !
On change d'élément différentiel : $x = F(t)$ donc $dx = F'(t).dt = f(t).dt$.

Les bornes deviennent 0 et 1.

L'intégrale devient $\int_{t=0}^{1} g(t).f(t).dt$. Et il reste le $\dfrac{1}{I}$ devant, d'où comme demandé $\dfrac{\int_0^1 f(t).g(t).dt}{\int_0^1 f(t).dt}$.

◦3◦ Soit f continue ; donnez la limite de la valeur moyenne de f sur $[a,\ b]$ lorsque b tend vers a.

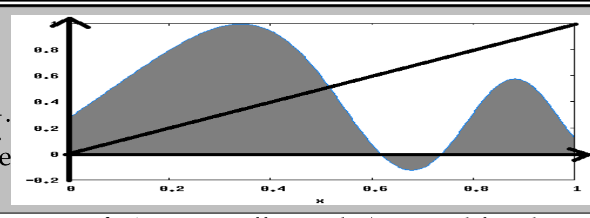
La valeur moyenne sur $[a,\ b]$ est atteinte en un point c de $[a,\ b]$.
On écrit donc $\dfrac{1}{b-a}.\int_a^b f(t).dt = f(c)$ pour un c bien choisi.
Quand b tend vers a, par encadrement, c tend vers a aussi, et par continuité, $f(c)$ tend vers $f(a)$.
Oui, logique, la valeur moyenne tend vers la valeur au points en question...

◦4◦ ♡ Soit f une application continue et périodique de période 1. Montrez que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

On la regarde sur une période. Par continuité sur un segment, elle est bornée.
Et c'est cette borne qui sert sur tout $\mathbb{R}$ par périodicité.
Ici, il n'y a qu'un x dans $\exists K,\ \forall x,\ |f(x)| \leqslant K$, on n'a donc pas besoin de jouer sur du recouvrement d'intervalles comme dans la démonstration pour la continuité uniforme.

Attention, la tangente est continue, périodique, mais elle n'est pas bornée. Elle n'est pas « continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ » mais, d'un « ensemble à trous dans $\mathbb{R}$ ».

◦5◦ ♡ Soit f continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\int_0^1 f(t).dt = \dfrac{1}{2}$.
Montrez que f admet au moins un point fixe (en étudiant le signe de $f - Id$ et son intégrale).



Un classique. Un point fixe, c'est une solution de $f(x) = x$ (« fixe » car f n'a aucun effet sur lui). Mais il faut le voir comme une intersection du graphe avec la bissectrice (encore un dessin, encore un dessin !).
On va donc tout naturellement étudier $f - Id$. Ou ce que vous appelez $f(x) - x$. A tort, puisque $f(x) - x$ est un pauvre nombre et pas un graphe ni une fonction.

On pose $g = f - Id$ et on calcule

$$\int_0^1 g(t).dt = \int_0^1 f(t).dt - \int_0^1 t.dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Cette intégrale est nulle. La fonction g ne peut pas être toujours positive (son intégrale serait positive) ni toujours négative (son intégrale serait négative).

Elle change donc de signe.

Et en tant que fonction continue qui change de signe sur un intervalle, elle s'annule au moins une fois. Et toc ! Zéro calcul, juste de l'intuition et un dessin.
Si si, un dessin. Si le graphe de f était toujours sous la bissectrice, son intégrale ne pourrait pas valoir $1/2$. De même si il était toujours au dessus. Donc, g est vraiment la bonne fonction...

◦6◦ Montrez qu'il y a à tout instant deux points de l'équateur diamétralement opposés où la température est la même. Est-ce encore vrai pour deux points de l'Équateur ?
C'est une application du théorème des valeurs intermédiaires.

L'équateur va être assimilé à un grand cercle *(le grand cercle de Sucri)*, sur lequel on se repère par un angle θ entre 0 et $2.\pi$ (latitude ou longitude ?).
On définit la fonction $\theta \longmapsto T(\theta)$ qui mesure la température au point de longitude θ.
On crée alors la fonction $f = \theta \longmapsto T(\theta) - T(\theta + \pi)$ *(différence de température entre le point et son antipodal)*.

Cette application est continue *(on va supposer en effet que T est continue, non ?)*.
Sa valeur en 0 est $T(0) - T(\pi)$ dont je n'ai pas grand chose à dire.
Et sa valeur en π est $T(\pi) - T(2.\pi)$. Mais $T(2.\pi)$ a fait un tour complet, c'est $T(0)$.

On a donc $f(0\pi) - f(0)$.

L'application continue f prend des valeurs opposées en 0 et en π. Elle s'annule au moins une fois en un θ_0 entre 0 et π. On a donc $T(\theta_0) = T(\theta_0 + \pi)$. C'était notre objectif.

En revanche, pour l'Équateur, qui est un pays et non plus le grand cercle, le résultat n'est plus forcément valable...

∘7∘ Montrez que si f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $Arctan \circ f$ et $f \circ Arctan$ sont bornées.

Prenons f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout t on a déjà $|Arctan(f(t))| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ *(comme tout arctangente)*, ce qui prouve que $Arctan \circ f$ est bornée.

Et pour $f(Arctan(t))$? A priori f n'a aucune raison d'être bornée sur $\mathbb{R}$. Mais $Arctan(t)$ reste entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.
Et par premier théorème de compacité, sur $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, f est borné et atteint ses bornes :
$\exists(\mu, M), \forall a \in [-\pi/2, \pi/2], \mu \leqslant f(a) \leqslant M$, on change de variable : $\forall t \in \mathbb{R}, \mu \leqslant f(Arctan(t)) \leqslant M$.
C'est au tour de $f \circ Arctan$ d'être bornée. Mais pas forcément par $f\Big(-\dfrac{\pi}{2}\Big)$ et $f\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big)$ comme risquent de l'écrire ceux qui font passer f sur des encadrements, sans que f ne soit suppose monotone.

Je vous le re-rédige, parce que par erreur je l'avais tapé deux fois :
On ne peut en revanche pas appliquer le théorème de compacité pour dire qu'elle est bornée, puisque $\mathbb{R}$ n'est pas un segment.

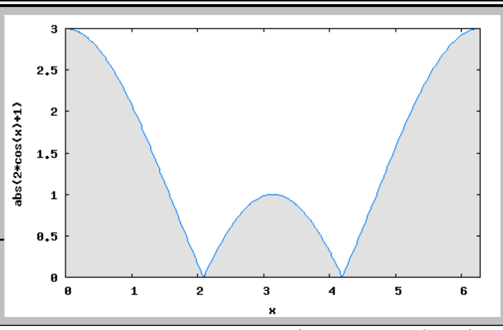
Mais $Arctan$ est à valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$. C'est à dire qu'elle reste bornée.
On n'a pas besoin de f sur tout $\mathbb{R}$ mais juste sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Et sur cet intervalle, f est bornée.
Soyons clair, $]-\pi/2, \pi/2[$ n'est pas un segment. Mais $[-\pi/2, \pi/2]$, si.
On a donc l'existence de K vérifiant $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2], |f(x)| \leqslant K$.
On déduit par composition : $\forall t \in \mathbb{R}, |f(Arctan(t))| \leqslant K$.

∘8∘ Soit f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que pour tout n de $\mathbb{N}$ il existe c_n dans $[0, 1]$ vérifiant $f(0) + n.f(1) = (n+1).f(c_n)$.

C'est directement le théorème des valeurs intermédiaires.
Le réel $\dfrac{f(0) + n.f(1)}{n+1}$ est entre $f(0)$ et $f(1)$ (moyenne pondérée de coefficients 1 et n.
Il est atteint au moins une fois entre 0 et 1.

∘9∘ ♡ Montrez que $|sin|$ n'est pas une primitive de $|\cos|$. Calculez $\displaystyle\int_0^{2.\pi} |1 + 2.\cos(t)|.dt$.



La fonction $|\sin|$ n'est même pas dérivable en 0. Or, dans la phrase « est une primitive de... » , on doit lire « se dérive et a pour dérivée... ».

De plus, $|\cos|$ est positive.
Si elle était une primitive de $|\cos|$, on aurait $|\sin|' = |\cos|$, positive.
L'application $|\sin|$ serait croissante, et ne pourrait pas s'annuler tant de fois de suite...

$$\int_0^{2.\pi} |1 + 2.\cos(t)|.dt = \int_0^{2.\pi/3} |1 + 2.\cos(t)|.dt + \int_{2.\pi/3}^{4\pi/3} |1 + 2.\cos(t)|.dt + \int_{4.\pi/3}^{2.\pi} |1 + 2.\cos(t)|.dt$$
par relation de Chasles. On a donc
$$\int_0^{2.\pi} |1 + 2.\cos(t)|.dt = \int_0^{2.\pi/3} f(t).dt - \int_{4.\pi/3}^{2.\pi/3} f(t).dt + \int_{4.\pi/3}^{2.\pi} f(t).dt$$

en posant $f = 1+2.\cos$. On a donc :

$$\int_0^{2.\pi} |1+2.\cos(t)|.dt = \Big[F(t)\Big]_0^{2.\pi/3} - \Big[F(t)\Big]_{4.\pi/3}^{2.\pi/3} + \Big[F(t)\Big]_{4.\pi/3}^{2.\pi}$$

On somme :

$$\int_0^{2.\pi} |1+2.\cos(t)|.dt = F(2.\pi) - F(0) - 2.F\Big(\frac{4.\pi}{3}\Big) + 2.F\Big(\frac{2.\pi}{3}\Big)$$

Sous cette forme primitive, on voit comment la primitive se met à compter deux fois quand on a un rebond sur l'axe des abscisses.
Tous calculs faits, avec $F = t \longmapsto t + 2.\sin(t)$, il vient
$\boxed{\int_0^{2.\pi} |1+2.\cos(t)|.dt = \frac{2.\pi}{3} + 4.\sqrt{3}}$ (fort heureusement positif).
Les logiciels de calcul formel trouvent la bonne réponse sans se tromper.

∘10∘ ♡ f est croissante de classe C^1. Montrez que $\int_0^{\pi} f(t).\cos(t).dt$ est négative.

L'intégrale existe, et peut même se calculer, par parties avec hypothèse C^1 :

$f(t)$	$\hookrightarrow$	$f'(t)$
$\cos(t)$	$\hookleftarrow$	$\sin(t)$

L'intégrale vaut $\sin(t).f(t)\Big]_{t=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} f(t).\sin(t).dt$.
Le crochet est nul. Et sur $[0,\ \pi]$, f' est positive et le sinus aussi.
C'est fini.

∘11∘ ♡ Un élève donne les théorèmes suivants pour les applications D^1 :

	Vrai	Faux
si f est bornée sur $\mathbb{R}$ alors f' l'est aussi		
si f' est bornée sur $\mathbb{R}$ alors f l'est aussi		
si f est bornée sur $[a,\ b]$ alors f' l'est aussi		
si f' est bornée sur $[a,\ b]$ alors f l'est aussi		

	Vrai	Faux
si f est bornée sur $\mathbb{R}$ alors f' l'est aussi		$x \longmapsto \sin(x^2)$
si f' est bornée sur $\mathbb{R}$ alors f l'est aussi		$x \longmapsto x$
si f est bornée sur $[a,\ b]$ alors f' l'est aussi		
si f' est bornée sur $[a,\ b]$ alors f l'est aussi	théorème de compacité	

L'application $x \longmapsto \sin(x^2)$ est bornée, mais sa dérivée ne l'est pas à cause d'oscillations de plus en plus rapides.
Si f' est bornée sur $[a,\ b]$, f est bornée sur $[a,\ b]$ car elle est juste continue sur un segment.

Pour la ligne 3, c'est plus vicieux, mais j'ai un contre-exemple.

$$x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} x^2.\sin(1/x^2) & si & x>0 \\ 0 & si & x=0 \end{array} \right|$$

On peut montrer que cette application est dérivable, même en 0, mais que sa dérivée n'est pas bornée. Même pas continue ! Oui ! Mais elle ne saute pas. Elle a une discontinuité de première espèce.

∘12∘ ♡ Montrez que si f est lipschitzienne de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ alors $1/f$ l'est aussi *(il faudra penser à introduire $Inf(f(x) \mid x \in [0,\ 1])$).*

Un exercice de colle classique, vous risquez de l'avoir la semaine prochaine.[1].
Calculons

$$\Big|\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)}\Big| = \frac{|f(a)-f(b)|}{|f(a).f(b)|} \leqslant \frac{K.|b-a|}{|f(a).f(b)|}$$

On a le droit, f ne s'annule jamais.
Mais il y a un problème : $\dfrac{K}{|f(a).f(b)|}$ dépend encore de a et b.
Il faut donc majorer ce majorant. Pour le majorer, il faut minorer $|f(a)|$ et $|f(b)|$.

1. tiens, je ne pensais pas pouvoir la dire en plein confinement, cette phrase classique ; et pourtant...merci les colleurs !

Et c'est là qu'on fait intervenir le segment $[0,\ 1]$. Sur ce segment, $|f|$ est bornée et atteint ses bornes :

$\exists c \in [0,\ 1],\ \forall x \in [0,\ 1],\ \lvert f(c)\rvert \leqslant \lvert f(x)\rvert$	$\exists d \in [0,\ 1],\ \forall x \in [0,\ 1],\ \lvert f(x)\rvert \leqslant \lvert f(d)\rvert$
minorant	majorant

On peut donc passer aux inverses positifs, et on obtient $\left|\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)}\right| \leqslant \frac{K}{|f(c)|^2}.|b-a|$. Le rapport $\frac{K}{(f(c))^2}$ convient.

On note que $\frac{K}{f(c)^2}$ peut faire penser à $-\frac{f'(c)}{f(c)^2}$ dans la dérivation de $x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$.

On note que si f avait eu une borne inférieure et non un minimum atteint, on ne pouvait plus majorer ainsi. La borne inférieure aurait pû être 0, certes non atteinte, mais dont on pouvait s'approcher à loisirs..

∘13∘

Construire une suite qui admet une sous-suite strictement croissante de limite 1 et une sous-suite strictement décroissante de limite 0.

Ce serait avoir $1 - \frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n+1}$ comme sous suites.
On peut jouer sur $(-1)^n$ avec $\frac{(-1)^n}{n+1}$ qui va donner une part de ce qu'on attend.
Mais il y a aussi le 1 ou 0 devant.
Et lui, on l'a avec $\frac{1-(-1)^n}{2}$.
On propose donc $u_n = \frac{1-(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

∘14∘

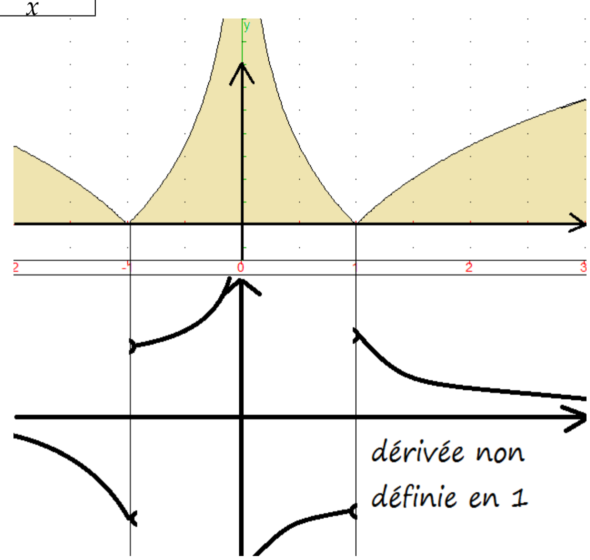
En quels point la dérivée de $x \longmapsto |\ln(|x|)|$ est elle discontinue ?

Attention, la question est précise[2]. Et la réponse le sera aussi : nulle part.

Déjà, le domaine de définition : $]-\infty,\ 0[\cup]0,\ +\infty[$.

Mais quel est ensuite le domaine de définition de la dérivée ? : $]-\infty,\ -1[\cup]-1,\ 0[\cup]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[$.
Et sur tout ce domaine, la dérivée est continue.

	$]-\infty,\ -1[$	-1	$]-1,\ 0[$		$]0,\ 1[$	1	$]1,\ +\infty[$
$f(x)$	$\lvert\ln(-x)\rvert$			$\lvert\lvert$	$\lvert\ln(x)\rvert$		
	$\ln(-x)$	0	$-\ln(-x)$	$\lvert\lvert$	$-\ln(x)$	0	$\ln(x)$
$f'(x)$	$\frac{1}{x}$	$\lvert\lvert$	$\frac{-1}{x}$	$\lvert\lvert$	$-\frac{1}{x}$	$\lvert\lvert$	$\frac{1}{x}$



Vous avez été tentés de proposer -1 et 1 ?
Mais en ces points, f' n'est même pas définie, commet pourriez vous parler de continuité ?

Certes, la dérivée saute en ces points, et admet une limite à droite et une limite à gauche distinctes.
Mais ne lui faites pas dire ce qu'elle ne dit pas.
.
.
.

∘15∘

Soit f de classe C^1 de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout n, on pose $I_n = \int_0^1 t^n.f(t).dt$. Montrez par encadrement que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Déterminez la limite de $((n+1).I_n)$. Déterminez la limite de $(n.I_n)$.

2. mais contient une faute de grammaire

L'existence de chaque $I_n$repose sur le mot « continuité ».
Pour faire tendre une intégrale vers 0, on l'encadre : f est positive, donc chaque I_n est positive.
f est continue sur un segment, donc bornée et atteint ses bornes.
Il existe un certain c vérifiant $0 \leqslant f(t) \leqslant f(c)$ pour tout t.
On multiplie par t^n positif : $0 \leqslant t^n.f(t) \leqslant t^n.f(c)$.
On intègre de 0 à 1 :

$$0 \leqslant I_n \leqslant f(c).\int_0^1 t^n.dt = \frac{f(c)}{n+1}$$

Par encadrement ($f(c)$ est une « constante »), I_n converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

Comme f est C^1 il est tentant d'intégrer par parties : $I_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}.f(t)\right] - \frac{1}{n+1}.\int_0^1 t^{n+1}.f'(t).dt$.

$f(t)$	$\hookrightarrow$	$f'(t)$
t^n	$\hookleftarrow$	$\frac{t^{n+1}}{n+1}$

On récupère :

$$I_{n+1}.(n+1) = f(1) - \int_0^1 t^{n+1}.f'(t).dt$$

Comme f' est continue, elle est bornée et atteint ses bornes. Il existe d et δ vérifiant $\forall t,\ f'(d) \leqslant f't) \leqslant f'(\delta)$.
On multiplie par t^n positif, on intègre de 0 à 1 : $\frac{f'(d)}{n+2} \leqslant \int_0^1 t^{n+1}.f'(t).dt \leqslant \frac{f'(\delta)}{n+2}$.
par encadrement, ce terme tend vers 0. Par somme ; $(n+1).I_n$converge vers $f(1)$.

On soustrait $I_n$qui tend vers 0 : $(n+1).I_n$ converge vers $f(1)$.

On peut reformuler (sauf si$f(1)$ est nul) : $\boxed{I_n \sim_{n\to+\infty} \frac{f(1)}{n}}$
Comme si f avait été constate sur $[0,\ 1]$ et partout égale à $f(1)$.

∘16∘

♣ On suppose qu'il existe une application f continue injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Montrez que $t \longmapsto f(e^{i.t})$ va de $[0,\ \pi]$ dans $\mathbb{R}$ et a pour image un intervalle $[\alpha,\ \beta]$.
Montrez que $t \longmapsto f(e^{-i.t})$ de $[0,\ \pi]$ dans $\mathbb{R}$ a pour image le même intervalle. Déduisez que f n'est finalement pas injective.
Montrez qu'en revanche que l'application qui à $x + i.y$ associe le réel formé en intercalant les deux développements décimaux de x et y va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sans être continue. Est elle injective ?

$t \longmapsto e^{i.t}$ est continue, comme combinaison de deux applications continues célèbres.
On compose avec f, on retrouve une application continue.

L'image continue d'un intervalle est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires).
C'est même un segment (continue sur un segment implique bornée et atteint ses bornes).
Donc, sans tableau de variations (surtout si on transite sur $\mathbb{C}$), on sait que $t \longmapsto f(e^{i.t})$ va de $[0,\ \pi]$ dans $\mathbb{R}$ et a pour image un intervalle $[\alpha,\ \beta]$ qui continent $f(e^{i.0})$ et $f(e^{i.\pi})$.
Il serait naïf de prétendre $t \longmapsto f(e^{i.t})$ va de $[0,\ \pi]$ dans $[f(1),\ f(-1)]$.
L'intervalle image peut être plus grand, tout va dépendre de « où cette application atteint son maximum et son minimum ».

De la même façon, $t \longmapsto f(e^{-i.t})$ de $[0,\ \pi]$ dans $\mathbb{R}$ a pour image un intervalle $[\gamma,\ \delta]$ contenant aussi $f(1)$ et $f(-1)$.

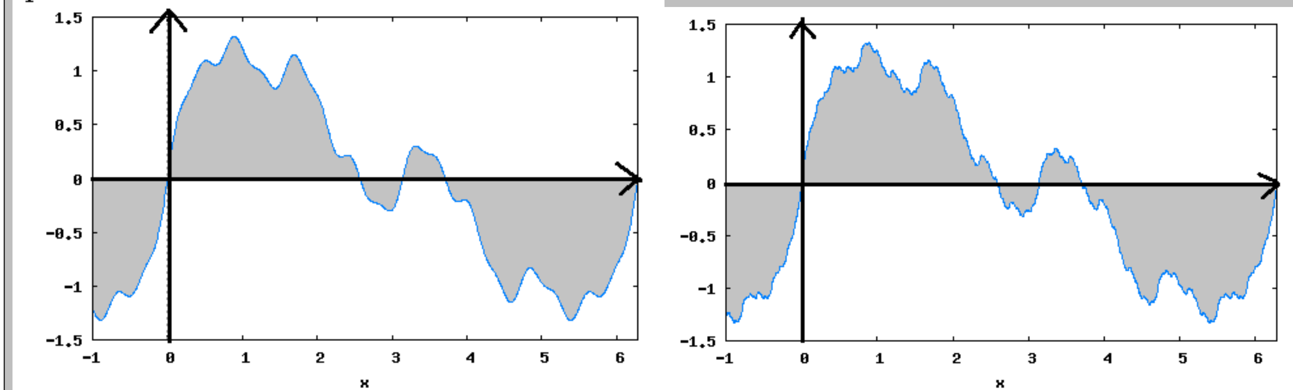
Mais alors, le réel $\frac{f(1)+f(-1)}{2}$ est atteint au moins une fois par la première application.
$\exists r \in [0,\ \pi],\ f(e^{i.r}) = \frac{f(1)+f(-1)}{2}$.

Le même théorème des valeurs intermédiaires sur la seconde donne $\exists s \in [0,\ \pi],\ f(e^{-i.s}) = \frac{f(1)+f(-1)}{2}$.

Les deux complexes $e^{i.r}$ et $e^{-i.s}$ ont la même image. Mais ils ne peuvent pas être égaux...

En fait, on a tourné de deux façons autour de l'origine pour passer aux mêmes endroits.

◦17◦ Pour tout n, on définit $f_N = x \longmapsto \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin(2^n.x)}{2^n}$. Montrez que chaque f_N est continue et lipschitzienne de rapport N.
Montrez que pour tout x, la suite $(f_N(x))$ est de Cauchy et converge. Sa limite sera notée f_∞.



On se donne x et y. Montrez : $|f_\infty(x) - f_\infty(y)| \leqslant |f_\infty(x) - f_N(x)| + |f_\infty(y) - f_N(y)| + |f_N(x) - f_N(y)| \leqslant 2^{1-N} + (N+1).|y-x|$.
On se donne ε, montrez qu'il existe N et η vérifiant $\forall(y,\ y),\ |y-x| \leqslant \eta \Rightarrow |f_\infty(x) - f_\infty(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.
Déduisez que f_∞ est continue en tout point.

◦18◦ u_0 est donné et pour tout n, on pose $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{4.u_n + 2}$ (on posera $f = x \longmapsto \frac{x+3}{4.x+2}$). Montrez que la liste des valeurs interdites pour u_0 est (i_n) où l'on pose $i_n = \frac{4.5^n + 3.(-2)^n}{4.(-2)^n - 4.5^n}$ (calculez $f(i_n)$).
Montrez que cette suite converge vers -1 mais que -1 n'est pas une valeur interdite pour u_0.

◦19◦ ♡ Montrez que toute application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ est de signe constant *(mots clefs : valeurs intermédiaires, absurde)*.

C'est du cours. On le fait ici par l'absurde.
Si f n'est pas de signe constant, il existe au moins un point a où elle est positive (car elle n'est pas partout négative), et au moins un point b où elle est négative (car elle n'est pas partout positive).
Elle change de signe sur l'intervalle $[a,\ b]$, inclus dans $\mathbb{R}$, domaine sur lequel elle est continue.
Par théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule au moins une fois, d'où contradiction.

◦20◦ Soit f continue de I (intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point), dans $\mathbb{R}$, injective.
On se donne u et v dans I vérifiant $u < v$. Montrez alors $f(u) < f(v)$ ou $f(v) < f(u)$.

Comme f est injective, $f(u)$ et $f(v)$ sont distincts.
Et comme l'ordre sur $\mathbb{R}$est total, il y en a un qui est le plus petit et un le plus grand.

On suppose ici $f(u) < f(v)$. On se donne t entre u et v. Montrez par l'absurde et en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires sur $[u,\ t]$ ou sur $[t,\ v]$: $f(u) < f(t) < f(v)$.

Si $f(t)$ n'est pas entre $f(u)$ et $f(v)$ il est alors dans l'un des cas suivants *(on a éliminé la case du milieu)*

$f(t) < f(u) < f(v)$	$f(t) = f(u) < f(v)$		$f(u) < f(v) = f(t)$	$f(u) < f(v) < f(t)$

On élimine encore deux cases par injectivité.
Que donne alors le cas $f(t) < f(u) < f(v)$? Que $f(u)$ est un réel entre $f(t)$ et $f(v)$. Il est donc atteint au moins une fois en un z de $[t,\ v]$.
Mais alors on a $f(z) = f(u)$ avec $u < t < z$. La valeur $f(u)$ est atteinte deux fois.
Faites un dessin, c'est en fait hyper simple.

Et si on suppose $f(u) < f(v) < f(t)$, alors le réel $f(v)$ est atteint au moins une fois en u point z entre u et t. On a alors $f(z) = f(v)$ avec z différent de v. C'est impossible.

Montrez que si en revanche on a $f(u) > f(v)$ alors on a $\forall t \in]u,\ v[,\ f(u) > f(t) > f(v)$.
Que répondez vous à l'élève qui prétend avoir démontré alors : f est donc décroissante sur tout $[u\ v]$?

La démonstration est la même, je ne la refais pas.

L'élève s'est trompé. il n'a pas démontré la croissance de f. Il a prouvé que $f(t)$ restait entre $f(u)$ et $f(v)$.

Pour la monotonie, il aurait fallu prendre deux réels t et t' entre u et v, supposer $t \leqslant t'$ et comparer $f(t)$ et $ft')$. Les variables....

On se donne a et b avec $a < b$. On suppose pour cette étape $f(a) < f(b)$.
On se donne x et y vérifiant $a < x < y < b$. Montrez alors $f(a) < f(x) < f(b)$ puis $f(a) < f(x) < f(y)$ en faisant jouer à a, x, y et b les rôles de u, v et t de la question précédente.
Que répondez vous à l'élève qui dit avoir démontré alors : f est donc décroissante sur tout $[u\ v]$?

On a donc établi un lemme : pour tout triplet u, t et v, si $u < t < v$ alors on a $f(u) < f(t) < f(v)$ ou $f(u) > f(t) > f(v)$.
On a maintenant quatre réels

	a	$< x$	$< y$	$< b$			
choix de triplet	u	t	v		$f(a) < f(x) < f(y)$	ou	$f(a) > f(x) > f(y)$
choix de triplet		u	t	v	$f(x) < f(y) < f(b)$	ou	$f(x) > f(y) > f(b)$

A cause des *ou*, on a quatre cas. Mais on va en exclure trois grâce à l'hypothèse $f(a) < f(b)$

	$f(a) < f(x) < f(y)$	$f(a) > f(x) > f(y)$
$f(x) < f(y) < f(b)$	oui	$f(x) > f(y) > f(x)$ contradiction
$f(x) > f(y) > f(b)$	$f(x) < f(y) < f(x)$ contradiction	$f(a) > f(x) > f(y) > f(b)$ contradiction

Ayant éliminé Toul, Toulouse et Nice, il ne reste que le coin de Dunkerque qui donne$f(a) < f(x) < f(y) < f(b)$.

Cette fois, on a bien prouvé que f est croissante sur $[a,\ b]$ si on a $f(a) < f(b)$.

Rappelons que l'hypothèse $f(a) < f(b)$ ne dit pas que f croît sur $[a,\ b]$, juste entre les deux bornes. Mais dans l'intervalle, elle pourrait faire des bosses. Soyez précis...
Une fois encore, les variables.
La croissance c'est $\forall(a, b),\ a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$ et pas juste $a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$. Vous avez de la chance d'être confinés, sinon, j'irais parfois vous botter les fesses...

Que pouvez vous déduire dans le cas $f(a) > f(b)$.

Mais si on a $f(a) > f(b)$, on renverse le raisonnement.
Et on trouve que f est décroissante sur $[a,\ b]$.

En fait, on a montré que f est monotone sur tout segment qu'on regarde.
Il faut se convaincre que c'est le même sens de variation sur tous les segments.

Déduisez que f est monotone sur l'intervalle I (même si I est de la forme $[a,\ +\infty[$ ou $]-\infty,\ +\infty[$ ou $]\alpha,\ \beta[$).

Le sens de variation va être donné par deux éléments quelconques choisis arbitrairement dans l'intervalle.
Disons qu'ici, l'intervalle de définition est $\mathbb{R}$.
On calcule $f(0)$ et $f(1)$.
On va supposer qu'on a par exemple $f(0) < f(1)$.
Il reste à prouver que f est alors croissante sur tout $\mathbb{R}$.
Entre 0 et 1, c'est acquis par le résultat précédent.
On prend a et b quelconques, on se ramène à $[0,\ 1]$ par changement de variable en $t \longmapsto (1-t).a + t.b$ ou $x \longmapsto \dfrac{x-a}{b-a}$.

◦21◦ ♡ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$ vérifiant $f(0) = 2$. Résolvez l'équation intégrale d'inconnue x : $\int_0^x f(t).dt = 9$.

On n'a pas assez d'hypothèses ! On ne connait f qu'en un point !

Mais ça, c'est ce qui dit l'élève qui lit mal. On a dit continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$.
C'est loche, f n'a le droit qu'aux images rationnelles.
En fait, f n'a d'autre choix que d'être constante.
Si elle ne l'est pas, elle prend une valeur image $f(x_0)$ autre que 2.
Mais alors tout rationnel entre $f(0)$ et $f(x_0)$ devrait être atteint au moins une fois, par continuité de$f$ de $[0,\ x_0]$ dans $\mathbb{R}$.
Ceci contredit la requête de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$.

f est constante. L'équation $\int_0^x f(t).dt = 9$ se ramène à la longueur du rectangle d'aire 9 et de hauteur 2.

L'unique solution est donc $\boxed{x = 9/2}$

∘22∘ Pour tout n , on pose $f_n = x \longmapsto \dfrac{\sin(3^n.x)}{2^n}$ et $F_N = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Montrez que pour tout x, $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1+\sin(3^k.x)}{2^k}$ et $F_n(x)$ convergent. La somme $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ sera notée $F(x)$.

Notre but est ici de construire un monstre. Ou une jolie bestiole suivant le point de vue :

une application continue en tout point, mais dérivable nulle part.

Un graphe qu'on eut tracer sans lever le crayon (continu), mais où il va y avoir partout des points anguleux (un toboggan où on ne se casse pas la figure mais dont on revient avec les fesses en sang).
Pour cela, on va additionner des applications continues. En quantité infinie, ce qui fait qu'on risque de perdre la continuité, mais on va s'arranger pour la garder. Mais c'est à la dérivation que ça va planter.
Et tout va se faire à coups de séries géométriques de raison plus petite ou plus grande que 1.

Chaque f_n est une application continue. Chaque somme F_N est aussi continue.
Pour l'instant, x est fixé. On se place en un point. Et on regarde N tendre vers l'infini.
On pose donc $G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1+\sin(3^k.x)}{2^k}$, car nommer les objets permet de mieux en parler.

On calcule : $G_{n+1}(x) - G_n(x) = \dfrac{1+\sin(3^{n+1}.x)}{2^{n+1}}$. Comme un sinus reste entre -1 et 1, c'est positif. $(G_n(x))_n$ (en tant que suite) est croissante.
Mais en utilisant l'autre moitié d'encadrement du sinus :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1+\sin(3^k.x)}{2^k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1+1}{2^k}$$

On identifie une série géométrique que l'on calcule et même majore

$$G_n(x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2^k} = \frac{2 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leqslant 4$$

Je rappelle qu'il est important que le majorant ne doit pas dépendre de n.
Et je rappelle qu'on ne joue pas encore à faire tendre n vers l'infini, on cherche justement à savoir si tout converge.

La suite $(G_n(x))$ est croissante majorée, elle converge.

En Sup, on fera souvent des trucs de ce genre là pour prouver une convergence de série, surtout pour une série à termes positifs.

Maintenant, et seulement maintenant, on sépare par linéarité de la somme : $G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1+\sin(3^k.x)}{2^k} = F_n(x) + \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k}$.

La série géométrique $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k}$ converge vers 2. Par soustraction, $(F_n(x))$ converge (quand n tend vers l'infini).

On pose donc : $F_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \dfrac{\sin(3^n.x)}{2^n}$ (continue) et $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(3^n.x)}{2^n}$, dont seule pour l'instant l'existence est acquise.

Montrez que F_n est lipschitzienne de rapport $\dfrac{3^{n+1}}{2^n}$.

L'application sinus est lipschitzienne, c'est du cours.
$f_k = x \longmapsto \dfrac{\sin(3^k.x)}{2^k}$ est donc aussi lipschitzienne, comme composées.
Calculons lui un rapport de Lipschitz, soit en dérivant, soit en disant qu'une composée d'applications lipschitziennes a pour rapport le produit des rapports :

$(f_k)' = x \longmapsto \dfrac{3^k}{2^k}\cos(3^k.x)$ ou

$$x \underset{3^k}{\longrightarrow} 3^k.x \underset{1}{\longrightarrow} \sin(3^k.x) \underset{2^{-k}}{\longrightarrow} 2^{-k}.\sin(3^k.x)$$

Bref, chaque f_k est lipschitzienne, donc la somme des f_k de 0 à N l'est aussi.

On somme les rapports de chaque f_k : F_n est lipschitzienne de rapport $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{2^k}$.

Tiens, encore une série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{2^k} = \frac{1-\dfrac{3^{n+1}}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{3}{2}} = \frac{\dfrac{3^{n+1}}{2^{n+1}}-1}{\dfrac{3}{2}-1} = \frac{3^{n+1}}{2^n}-2$$

ce n'est pas le -2 qui va nous embêter (surtout face à un $\dfrac{3^{n+1}}{2^n}$, on majore encore (si f est lipschitzienne de rapport K elle l'est aussi de rapport $K+2$) :

F_n est lipschitzienne de rapport $\dfrac{3^{n+1}}{2^n}$.

Ceci ne permettra pas de dire que F est encore lipschitzienne par passage à la limite. Les rapports tendent vers l'infini.

On se donne une suite (a_p) qui converge vers α (quantifiez). On veut montrer que $(F(a_p))$ converge vers $F(\alpha)$ (ce qui traduira la continuité de F).

Montrez : $|F(a_p)-F(\alpha)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3} + |F_n(a_p)-F_n(\alpha)| + \dfrac{\varepsilon}{3}$ pour n égal à $\Big[-\dfrac{\ln(\varepsilon/3)}{\ln(2)}\Big]+1$.

La continuité de chaque F_n va se transmettre à la limite F, mais seulement « point par point » et pas uniformément. On va devoir revenir ici aux ε. On a déjà

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall n,\ (n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |a_n-\alpha| \leqslant \varepsilon$$

On sent venir la caractérisation séquentielle de la continuité en tout α.

On veut passer de $|F(a_p)-F(\alpha)|$ à $|F_n(a_p)-F_n(\alpha)|$ avec des $\varepsilon/3$ de chaque côté .
Il est naturel d'écrire

$$|F(a_p)-F(\alpha)| = |F(a_p)-F_n(a_p)+F_n(a_p)-F_n(\alpha)+F_n(\alpha)-F(\alpha)|$$

puis $|F(a_p)-F(\alpha)| \leqslant |F(a_p)-F_n(a_p)| + |F_n(a_p)-F_n(\alpha)| + |F_n(\alpha)-F(\alpha)|$, en approximant $F(a_p)$ par $F_n(a_p)$.

Mais pour quelle valeur de n ? Ah ça, on ne le dit pas encore. Mais ça va être à nous de le choisir.
Le mauvais élève dirait « pour n infini ».
Le physicien dirait « pour n très grand, comme ça, $F_n(\alpha) \simeq F(\alpha)$ et $F_n(a_p) \simeq F(a_p)$ ».
On va rendre rigoureuse l'idée du physicien.

La différence $|F(a_p)-F_n(a_p)|$ doit pouvoir être rendue plus petit que ε et même que $\dfrac{\varepsilon}{3}$ pour n assez grand.
Et aussi pour $|F(\alpha)-F_n(\alpha)|$. Tout l'intérêt est que n soit le même pour tout le monde.
En l'occurrence, pour tout x,

$$|F(\alpha)-F_n(\alpha)| = \Big|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(3^k.x)}{2^k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(3^k.x)}{2^k}\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\sin(3^k.x)}{2^k}\Big| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\Big|\frac{\sin(3^k.x)}{2^k}\Big|$$

et même

$$|F(\alpha)-F_n(\alpha)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \lim_{N\to+\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^N}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

On va demander à n d'être assez grand pour avoir $\dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ (comme toujours, un truc en $\Big[-\dfrac{\ln(\varepsilon/3)}{\ln(2)}\Big]+1$).

On a alors pour tout p : $|F(a_p)-F_n(a_p)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ et $|F(\alpha)-F_n(\alpha)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$. On reporte

$$|F(a_p)-F(\alpha)| \leqslant |F(a_p)-F_n(a_p)| + |F_n(a_p)-F_n(\alpha)| + |F_n(\alpha)-F(\alpha)| \leqslant 2.\frac{\varepsilon}{3} + |F_n(a_p)-F_n(\alpha)|$$

Le travail sur n vient d'être fait.

Déduisez $\|F(a_p) - F(\alpha)\| \leqslant \varepsilon$ pour p plus grand qu'une valeur à préciser.

On passe au travail sur p (indice de la suite (a_p) qui converge vers α).
Il nous reste à rendre $|F_n(a_p) - F_n(\alpha)|$ plus petit que $\frac{\varepsilon}{3}$, avec n fixé, en jouant sur p.
Or, $F_n$est lipschitzienne (certes de grand rapport, mais elle l'est) :

$|F_n(a_p) - F_n(\alpha)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ dès lors qu'on a $|x_p - \alpha| \leqslant \frac{\varepsilon}{3.(3^{n+1}/2^n)}$.

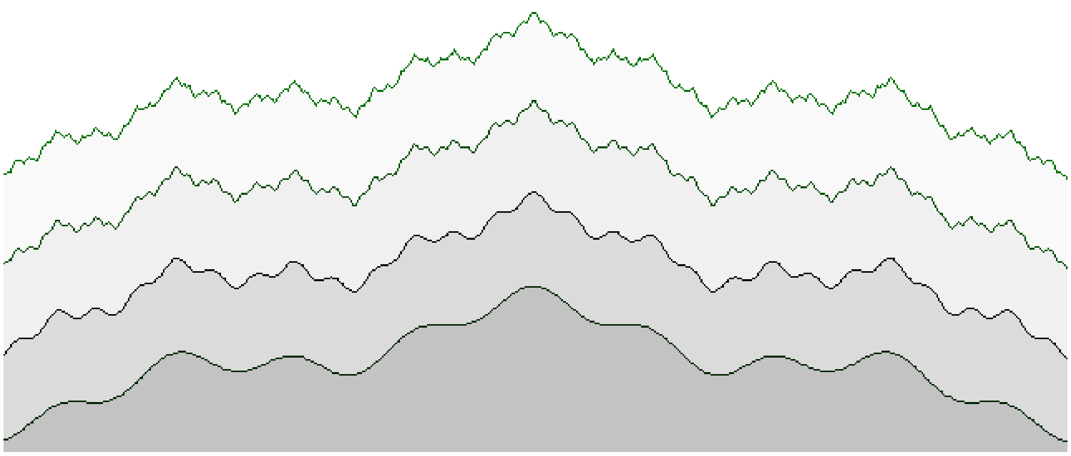
Donc, à partir du rang $N_{(2^n.\varepsilon/3^{n+2})}$ on a $|F(a_p) - F(\alpha)| \leqslant \varepsilon$.
On reconnaît : la suite $(F(a_p))$ converge vers $F(\alpha)$.

On a établi la continuité de F en α.

> *Attention, il faut bien séparer les rôles de n et p. Choisir n pour avoir des* $|F(x) - F_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$*, puis choisir p pour avoir (pour ce n)* $|F_n(x) - F_n(\alpha)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$*. Les variables se posent des conditions les unes au autres, dans un certain ordre. Vous le referez l'an prochain. Vous parlez de convergence uniforme. Ou de convergence au sens de la norme* $||.||_\infty$.

F est continue. la continuité s'est conservé par passage à la limite.

Utilisez Python et ses modules tout prêts : votre procédure prend en entrée n, a et b et représente sur le même graphe F_0 à F_n sur le segment $[a,\ b]$.



Python avec **munpy**, **scipy**, **pyplot** et autres, ce n'est pas pour moi. C'est trop lourd par rapport à des logiciels comme XCas, Maple, Mathematica.
J'ai l'impression de dévoyer **Python**, de lui demander de faire lourdement des choses que d'autres font facilement, et de ne pas l'utiliser à ce qu'il sait faire de mieux : des simulations, du Big-Data, des serveurs...

Montrez que la série de terme général $f'_k(0)$, de même que la série de terme général $f_k(\pi/9)$, de même que toute série de terme général $f'_k(\theta)$ avec θ de la forme $p.\pi.2^{-q}$. Ceci ne prouve pas encore que F n'est dérivable nulle part, mais ça peut en donner une idée.

On a envie de dériver F en écrivant $F'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k(x)$. Mais cette série converge-t-elle ?

On regarde par exemple en 0 : $f'_k = x \longmapsto \frac{3^k}{2^k}.\cos(3^k.x)$. On a donc $\sum_{k=0}^{N} f'_k(0) = \sum_{k=0}^{N} \frac{3^k}{2^k}$.
On a une série géométrique de raison plus grande que 1. Cette série diverge.

Et en $\frac{\pi}{9}$?

$$\sum_{k=0}^{N} f'_k(0) = \sum_{k=0}^{N} \frac{3^k}{2^k}.\cos\left(3^k.\frac{\pi}{9}\right)$$

Dans cette somme, les premiers termes sont à part. Mais à partir de $k = 2$, on a des multiples de π. Et on a donc

une somme $truc + \sum_{k=2}^{N} \frac{3^k}{2^k}.\cos(entier.\pi)$. la série diverge.
On sent venir la fonction trop pointue en plein de points.

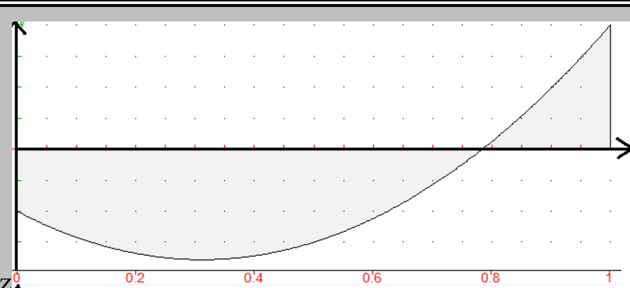
◦23◦

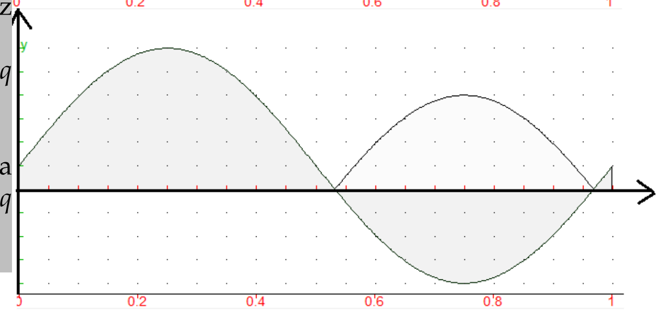
Pour f continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$, on pose
$|f|_\infty = Sup\{|f(t)| \mid t \in [0,\ 1]\}$.

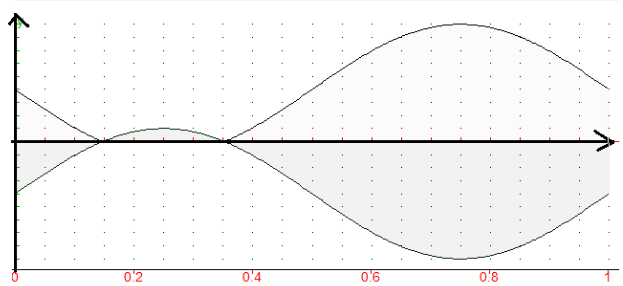
Calculez $|x \longmapsto x + a|_\infty$ en fonction du réel a.
Calculez $|t \longmapsto \sin(2.\pi.t) + a|_\infty$ en fonction de a.
Calculez $|t \longmapsto 8.t^2 - 5.t - 1|_\infty$.
Pour quelles valeurs de a a-t-on $|t \longmapsto e^t - a|_\infty = 2$.

Pour tout n, on pose $g_n = t \longmapsto t^n$. Calculez $|g_p - g_q|_\infty$ pour p et q entiers naturels donnés.
La norme $|g_p - g_q|_\infty$ tend elle vers 0 quand p et q tendent vers l'infini ?

Calculez $|\cos^p - \cos^q|_\infty$ pour tout couple $(p,\ q)$. La norme $|\cos^p - \cos^q|_\infty$ tend elle vers 0 quand p et q tendent vers l'infini ?







L'application $x \longmapsto x + a$ est affine. Son maximum est en 1 et il vaut $1 + a$.
Mais sa valeur absolue n'est peut être plus affine...
On a trois cas de figure :

	$a < -1$	$-1 \leqslant a \leqslant 0$	$0 \leqslant a$
sur $[0,\ 1]$	$\lvert x+a\rvert = -x-a$	$\lvert x+a\rvert = -a-x$ puis $\lvert x+a\rvert = x+a$	$\lvert x+a\rvert = x+a$
	$\searrow$	$\searrow\nearrow$	$\nearrow$
le maximum est atteint en	0	0 ou en 1	1
le maximum vaut	$-a$	$Max(-a,\ 1+a)$	$1+a$

Le graphe de $t \longmapsto 8.t^2 - 5.t - 1$ est une parabole de sommet $\left(\frac{5}{16},\ \frac{-57}{32}\right)$. Négatif.
C'est un minimum pour $t \longmapsto 8.t^2 - 5.t - 1$, mais un maximum local pour $t \longmapsto |8.t^2 - 5.t - 1|$.
Le maximum de $t \longmapsto |8.t^2 - 5.t - 1|$ est donc peut être atteint en 0, en $\frac{5}{16}$ ou en 1.
On va noter r_1 la racine positive de $8.X^2 - 5.X - 1$.

	$\left[0,\ \frac{5}{16}\right]$	$\left[\frac{5}{16},\ r_1\right]\right]$	$[r_1,\ 1]$
$\lvert 8.t^2 - 5.t - 1\rvert$	$-8.t^2 + 5.t + 1$	$-8.t^2 + 5.t + 1$	$8.t^2 - 5.t - 1$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	de 1 à $\frac{57}{32}$	de $\frac{57}{32}$ à 0	de 0 à 2

Le maximum est 2, atteint en 1.

L'application $t \longmapsto e^t - a$ peut rester positive sur $[0,\ 1]$, ou négative, ou changer de signe. Regardez pour a égal à 1.
Tout dépend de a.

valeur de a	$]-\infty,\ 1]$	$[1,\ e]$	$[e,\ +\infty[$
signe de $e^t - a$	positif	négatif puis positif	négatif
variations de $t \longmapsto \lvert e^t - a\rvert$	croissant	décroissant puis croissant	décroissant
maximum de $t \longmapsto \lvert e^t - a\rvert$	$e - a$	$Max(a-1,\ e-a)$	$a - 1$
maximum atteint en	1	0 ou 1	0

∘24∘

Soit f continue de I (intervalle réel) dans $\mathbb{R}$. On suppose f non monotone.
Montrez alors qu'il existe a, b et c vérifiant $a < b < c$ et $(f(c) - f(b)).(f(b) - f(a)) < 0$.
On définit alors $\varphi = t \longrightarrow \Big(f(c)-f(b)\Big).\Big(f\big(b+t.(c-b)\big)-f\big(a+t.(b-a)\big)\Big)$.
Donnez le signe de $\varphi(0)$ et de $\varphi(1)$. Déduisez $\exists t \in [0,\ 1],\ f\big(b+t.(c-b)\big) = f\big(a+t.(b-a)\big)$.
Que venez vous de redémontrer ?

On écrit la négation de la monotonie : non $\begin{array}{c} f \text{ croissante} \\ \text{ou } f \text{ décroissante}\end{array}$

C'est à dire $\begin{array}{rc} & f \text{ non croissante} \\ \text{et} & f \text{ non décroissante}\end{array}$

On transcrit $\begin{array}{rc} & \exists(a,\ b),\ a < b \text{ et } f(a) > f(b) \\ \text{et} & \exists(\alpha,\ \beta),\ \alpha < \beta \text{ et } f(\alpha) < f(\beta)\end{array}$

On se rend compte que ce n'est pas évident.

Il faut une autre approche. f est monotone, c'est « les taux d'accroissement sont tous de même signe ».

Avec $a < b < c$ et $(f(c) - f(b)).(f(b) - f(a)) < 0$, on a bien deux taux de signes différents.
Rien ne nous dit si c'est $(f(c) - f(b)) < 0$ et $.(f(b) - f(a)) > 0$
ou si c'est $(f(c) - f(b)) > 0$ et $.(f(b) - f(a)) < 0$.
Mais c'est un des deux.

Pourquoi ne pas définir alors en effet $\varphi = t \longrightarrow \Big(f(c)-f(b)\Big).\Big(f\big(b+t.(c-b)\big)-f\big(a+t.(b-a)\big)\Big)$ dans laquelle a, b et c ont été définis à la question précédente, et dans laquelle seul t varie.
On calcule en 0 : $\varphi(0) = \Big(f(c)-f(b)\Big).\Big(f(b)-f(a)\Big)$. Négatif par hypothèse.
On calcule en 1 : $\varphi(1) = \Big(f(c)-f(b)\Big).\Big(f(c)-f(b)\Big)$. Positif, car carré de réel.

L'application φ est continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ et change de signe.
Elle s'annule donc en au moins un point qu'on va appeler t.

En ce point, on a $\Big(f\big(b+t.(c-b)\big)-f\big(a+t.(b-a)\big)\Big) = 0$ car $f(c) - f(b)$ est non nul.

Mais on a alors $f\big(b+t.(c-b)\big)=f\big(a+t.(b-a)\big)$.
Ça fait deux points où f prend la même valeur. Ça veut dire que f n'est pas injective.
Sauf qu'on ne sait pas si ce n'est pas deux fois le même point (réflexe de matheux que de se dire « eh, si c'est deux fois le même, on n'a rien prouvé ! »).

Peut on avoir $b + t.(c-b) = a + t.(b-a)$?
L'élève qui bluffe sans preuve dit « non ! » et passe à la suite.
Le physicien calcule t et arrive à une incohérence avec t entre 0 et 1.
Le géomètre dit « comme t est entre 0 et 1, on a $b + t.(c-b) \in]b,\ c[$ et $a + t.(b-a) \in]a,\ b[$; il y a donc b entre les deux, ils ne peuvent pas être égaux.
Il n'est pas allé plus vite que le physicien, et a prouvé la même chose, avec les mêmes arguments. Mais il a compris ce qu'il faisait...

On a établi que f n'était pas injective.
Mais à partir d'hypothèses. Il ne faut pas se focaliser sur « f non injective ». On n'y est parvenu que sous certaines hypothèses. Combien de fois vous ruez vous sur « on a montré f non injective » sans voir que ce n'était que pour des f particulières. Ce n'est pas parce qu'un résultat Q est encadré qu'il est vrai. Ce qui est vrai c'est $H \Rightarrow Q$.

Bon, donc ici, on a prouvé $\begin{array}{c} f \text{ continue de } I \text{ dans } \mathbb{R} \\ \boxed{f \text{ non monotone} \ \Rightarrow\ f \text{ non injective}}\end{array}$

On contrapose : $\begin{array}{c} f \text{ continue de } I \text{ dans } \mathbb{R} \\ \boxed{f \text{ injective} \ \Rightarrow\ f \text{ monotone}}\end{array}$

C'est le résultat du cours, par une méthode alternative.

∘25∘

> Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \circ f$ admet un unique point fixe α.
> Montrez que $f - Id$ ne peut pas rester de signe constant. Concluez que f admet un point fixe., et montrez que c'est α.

On crée donc l'application $f - Id$. Elle est continue.
Supposons qu'elle ne s'annule jamais. Par contraposée du théorème des valeurs intermédiaires, elle reste alors de signe constant.

Traitons le cas où $f - Id$ est de signe positif.
On a alors pour tout x : $f(x) > x$.
On applique ce résultat non pas seulement à x mais aussi à $f(x)$ (mais oui !) : $f(f(x)) > f(x)$. et toujours $f(x) > x$.
Par transitivité : $f(f(x)) > x$ pour tout x.
$f \circ f$ ne peut pas avoir de point fixe.

Traitons le cas où $f - Id$ est de signe négatif.
On a alors pour tout x : $\forall x,\ f(x) < x$.
On refait le même coup :
$f(f(x)) < f(x)$. et toujours $f(x) < x$.
Cette fois : $f(f(x)) < x$ pour tout x.
$f \circ f$ ne peut pas avoir de point fixe.
.

On a prouvé $f - Id$ ne s'annule pas implique $f \circ f$ n'a pas de point fixe.
Par contraposée : $f \circ f$ a un point fixe implique f a un point fixe.

Il reste à prouver que c'est celui de $f \circ f$? On note α le point fixe débusqué pour f. il vérifie $f(\alpha)\alpha$ puis $f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$. Il est aussi point fixe de $f \circ f$. Il est donc aussi le point fixe de $f \circ f$.

Attention, si $f \circ f$ a plusieurs points fixes, le point fixe de f est l'un d'entre eux, mais on ne sait pas lequel.
Par exemple $f = -Id$: $f \circ f$ a beaucoup de points fixes, et f n'en a qu'un.

∘26∘

> Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f n'a pas de point fixe et vérifie $f(0) > 0$. Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > x$. Déduisez $\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) > x$. Déduisez le résultat suivant : si $g \circ g$ admet au moins un point fixe, alors g admet au moins un point fixe.

Pour l'autre sens, on suppose donc $f(0) > 0$ et f sans point fixe. On définit l'application $f - Id$. Elle est continue. Si il existait un point a où elle serait négative, on appliquerait le théorème des valeurs intermédiaires sur $[0,\ a]$ et on aurait un point où elle s'annulerait, ce qui contredirait « f n'a pas de point fixe ».

On vient de montrer par l'absurde ou par contraposée : $\forall a \in \mathbb{R},\ f(a) > a$.

On applique alors, pour a donné, ce résultat à a mais aussi à $f(a)$: $f(a) > a$ et $f(f(a)) > f(a)$.
On met bout à bout : $f \circ f(a) > a$. Comme l'inégalité est stricte, $f \circ f$ n'a pas de point fixe.

On a montré : $\begin{array}{c} f \text{ n'a pas de point fixe} \\ f \text{ continue} \\ f(0) > 0 \end{array} \Rightarrow f \circ f \text{ n'a pas de point fixe}$

Prouvons la même conclusion dans le cas $f(0) < 0$, et on aura obtenu si f n'a pas de point fixe, alors $f \circ f$ n'en a pas non plus.
En contra-posant, on a le résultat : si $f \circ f$ a un point fixe, alors f en a un.

Supposons donc $f(0) < 0$. L'application $f - Id$ est continue. Elle ne peut jamais être positive, sinon elle s'annulerait sur l'intervalle $\mathbb{R}$. On a donc $\forall a,\ f(a) < a$. Mais alors on a aussi (pour $f(a)$) : $f(f(a)) < f(a)$, et par transitivité : $f(f(a)) < a$. $f \circ f$ n'a pas de point fixe.

Les deux cas ayant été traités, si f continue n'a pas de point fixe, alors $f \circ f$ n'en a pas.

> *Sans la continuité, on peut créer des contre-exemples.*
> *L'élève qui a conclus sans étudier le cas $f(0) < 0$ sait peut être mener des calculs mais ne sait pas mener un raisonnement. estimez les risques encourus par son employeur si il devient ingénieur.*

∘27∘

> Pour tout n, on note a_n la solution dans $]0,\ +\infty[$ de l'équation $\ln(x) = n.\pi + Arctan(x)$ (existence ? unicité ?).
> Montrez que la suite (a_n) est croissante et tend vers $+\infty$.
> Montrez que la série de terme général $(a_n)_{n\geqslant 0}$ diverge.

On introduit très simplement l'application $x \longmapsto \ln(x) - Arctan(x)$ sur $]0,\ +\infty[$.[3]
La question devient : résoudre $f(x) = n.\pi$.

3. donnez un nom aux objets, vous ferez déjà un bon bout du chemin

f est continue. En 0^+ elle tend vers $-\infty$ (c'est le logarithme qui fait le travail, *Arctan* reste bornée).
En $+\infty$ elle tend vers l'infini (même argument).
Déjà par le théorème des valeurs intermédiaires, l'ensemble image de $]0,\ +\infty[$ est un intervalle allant de $-\infty$ à $+\infty$. C'est $\mathbb{R}$.
Pour chaque n, l'équation $f(x) = n.\pi$ admet au moins une solution.
C'est le T.V.I., c'est de l'analyse fine, et ça garantit l'existence.

Passons à l'incité en étudiant la monotonie de f : $f' = x \longmapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x^2}$ [4].
Pour tout x, $f'(x)$ est égal à $\dfrac{x^2-x+1}{x.(1+x^2)}$ et le numérateur est un trinôme de signe constant. f' reste positive (on le voyait aussi en écrivant $1+x^2 \geqslant x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Par théorème fin d'analyse, f est strictement croissante.
Par théorème bidon sur la monotonie, f est injective.
L'équation n'a qu'une racine.

Graphiquement, tout tient en une ligne. Certes courbe, mais une ligne.
Par le calcul de malade, on a l'air idiot, car on ne sait pas résoudre l'équation. Mais il est loin le temps où tout se résout explicitement. Ça s'appelle le D.N.B.

Aisément, le théorème de l'homéomorphisme dit que f continue strictement croissante, surjective de $]0,\ +\infty[$ dans $]-\infty,\ +\infty[$ admet une réciproque continue strictement croissante de $]-\infty,\ +\infty[$ dans $]0,\ +\infty[$.
le plus facile là dedans, c'est la croissance stricte.
Et donc $f^{-1}((n+1).\pi)$ est plus grand que $f^{-1}(n.\pi)$.
La suite (a_n) est croissante.

Elle n'a que deux possibilités : converger ou filer vers l'infini.
Mais comme f^{-1} tend vers l'infini en $+\infty$, la suite (a_n) diverge vers $+\infty$.
On peut aussi montrer : $f(e^{n.\pi}) = n.\pi - Arctan(e^{n.\pi}) < n.\pi$ et $f(e^{(n+1).\pi}) = (n+1).\pi - Arctan(e^{n.\pi}) > (n+1).\pi - \frac{\pi}{2} < n.\pi$.
Ceci permet d'encadrer a_n par $e^{n.\pi}$ et $e^{(n+1).\pi}$. Le théorème d'encadrement permet de conclure.

Le terme général ne tend même pas vers 0. Pire encore, il tend vers $+\infty$.
Quand on additionne tout ça, on fait sauter la banque !
Il serait plus intressant de regarder $\sum\limits_n \dfrac{1}{a_n}$.

◦28◦

♡ Résolvez $z + \overline{z} = |z|$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.

On pose $z = x + i.x$ avec x et y réels.
L'équation devient $2.x = \sqrt{x^2+y^2}$.
Elle équivaut à $\begin{array}{ccc} x & \geqslant & 0 \\ 4.x^2 & = & x^2+y^2 \end{array}$ [5].
L'équation $3.x^2 = y^2$ donne deux droites : $y = \sqrt{3}.x$ et $y = -\sqrt{3}.x$. Dont on ne garde que les deux demi-droites avec x positif.

Autre approche : en polaires. On écrit $z = \rho.e^{i.\theta}$. On aboutit à $2.\rho.\cos(\theta) = \rho$.
Soit que ρ est nul (origine), soit que $\cos(\theta)$ vaut $\dfrac{1}{2}$. Deux demi droites issues de l'origine faisant un angle $\dfrac{\pi}{3}$ ou $\frac{-\pi}{3}$ avec l'axe des abscisses.

◦29◦

La suite (u_n) est définie par $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{2.\sqrt{n+u_n}}$. Donnez sa limite quand n tend vers l'infini.

On ne peut pas dire « je passe à la limite », car rien ne nous dit déjà que u_n a bien une limite. Et les formes sont indéterminées.

On va extraire explicitement u_n de la formule : $2.\sqrt{n+u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$, puis $u_n = \dfrac{1}{4.(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2} - n$.

4. oui, j'ai bien écrit $f' = x \longmapsto \ldots$ et pas $f'(x) = \ldots$, je suis matheux, pas étudiant en hiéroglyphes, les maths sont des objets qui bougent, pas des formules mortes

5. si vous marquez juste $(x = \sqrt{x^2+y^2}) \Leftrightarrow (4.x^2 = x^2+y^2)$, je déduis que vous avez fait six heures de maths hebdomadaires en Terminale pour rien ou juste pour faire des calculs en physique, mais pas pour cultiver votre intelligence

Sous cette forme, rien n'est évident, le dénominateur tend vers 0, la fraction tend vers l'infini, la forme est indéterminée.
Avant de réduire au dénominateur commun, utilisons la quantité conjugués :

$$u_n = \frac{1}{4.\left(\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^2} - n = \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}{4} - n = \frac{n+1+n+2.\sqrt{n^2+n}-4.n}{4}$$

On simplifie : $u_n = \dfrac{2.\sqrt{n^2+n}-(2.n-1)}{4}$ et on va encore utiliser la quantité conjuguées :

$$u_n = \frac{4.n^2+4.n-(4.n^2-4.n+1)}{4.(\sqrt{4.n^2+4.n}+(2.n+1))} = \frac{8.n-1}{4.(\sqrt{4.n^2+4.n}+(2.n+1))}$$

L'heure est venue pour nous de passer aux équivalents : $u_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{8.n}{4.(2.n+2.n)}$.

La suite est équivalente à une constate non nulle, elle converge vers celle ci : $u_n \longrightarrow_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}$.

On notera que c'est ici une formule qui peut évoquer à la fois une notion de dérivée :
$\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}$ *est un taux d'accroissement de la fonction racine carrée, tandis que* $\dfrac{1}{2.\sqrt{n+u_n}}$ *est la dérivée quelquepart entre n et* $n+1$.

On peut aussi y voir du calcul intégral :

$$\int_{t=0}^{1} \frac{dt}{2.\sqrt{n+t}} = \int_{x=n}^{n+1} \frac{dx}{2.\sqrt{x}} = \left[\sqrt{x}\right]_n^{n+1} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

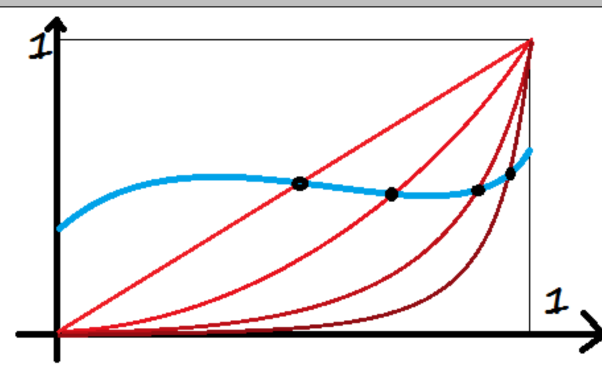
◦30◦ Soit f continue de $[0,\ 1]$ dans lui même. Montrez que pour tout n l'équation $f(x) = x^n$ admet au moins une solution (appliquez le théorème des valeurs intermédiaires).

Pour n donné, on définit $g_n = x \longmapsto f(x) - x^n$.

En 0, elle vaut $f(0)$, donc elle est positive.

En 1, elle vaut $f(1) - 1$, donc elle est négative.

Elle est continue et change de signe sur l'intervalle. Elle s'annule au moins une fois.



◦31◦ $\sqrt{10},\ \sqrt{10.\sqrt{10}},\ \sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10}}},\ \sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10}}}},\ \sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10..\sqrt{10}}}}}.$
Mettez cette suite sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrez qu'elle est croissante, majorée et donnez sa limite.

$u_0 = \sqrt{10}$ et $u_{n+1} = \sqrt{10.u_n}$ c'est tout.
La suite est croissante. En effet, $u_1 = \sqrt{10;\sqrt{10}} \geqslant \sqrt{10} = u_0$
si à un rang n on a $u_{n+1} \geqslant u_n$
alors $10.u_{n+1} \geqslant 10.u_n$ (multiplicateur positif)
puis $\sqrt{10.u_{n+1}} \geqslant \sqrt{10.u_n}$ (application croissante)
et donc $u_{n+2} \geqslant u_n$

Remarque : Ici, on a utilisé « f croissante implique (u_n) monotone ».
Méfiez vous, ce n'est pas « f croissante implique (u_n) croissante ».
Tout dépend de u_1 par rapport à u_0.
Par exemple $x \longmapsto x-1$ est croissante, mais la suite « $u_{n+1} = u_n - 1$ » est décroissante...

On doit majorer la suite. On va la majorer par ce qui doit bien être sa limite : le point fixe.
On résout au passage $x = \sqrt{10.x}$ et on trouve $x = 10$ (ou $x = 0$, mais ça, on laisse de côté).

On a $u_0 \leqslant 10$.
On suppose pour un n donné : $u_n \leqslant 10$
$10.u_n \leqslant 100$
$u_{n+1} = \sqrt{10.u_n} \leqslant \sqrt{100} = 10$

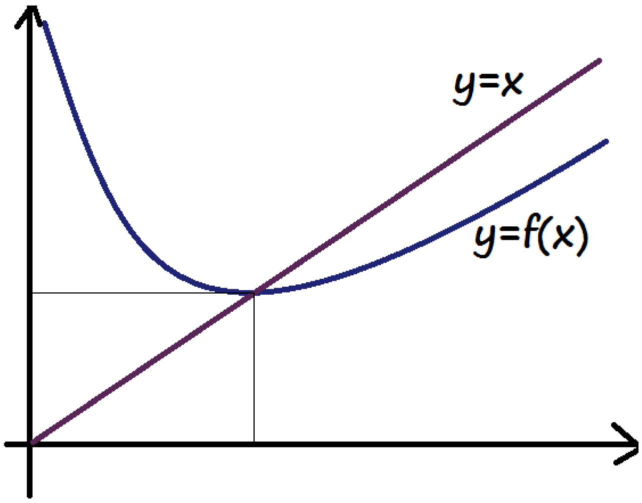
La suite est croissante, majorée. Elle converge.
Et sa limite ne peut être que 10.

∘32∘ $\heartsuit^2$ a est un réel strictement positif donné. On définit la suite u par $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \dfrac{a}{u_n}}{2}$ pour tout n (et $u_0 = a$ par exemple).
Montrez que la suite u converge.
On pose alors $r_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$. Exprimez r_{n+1} à l'aide de r_n. Montrez : $|u_n - \sqrt{a}| = O(r_0^{(2^n)})$ *(la convergence est très très rapide !)*.

Un grand classique de la convergence très très rapide. Vers $\sqrt{a}$.
Déjà, par récurrence sur n, tous les termes de la suite sont strictement positifs.

On va montrer qu'elle est monotone, bornée.
Mais bornée par quoi ? Par 0, certes mais aussi ?

Le mieux est de voir le point fixe : on résout $x = \dfrac{x + \dfrac{a}{x}}{2}$ on passe par $2.x^2 = x^2 + a$ et on trouve $x = \sqrt{a}$.



On étudie les variations de $x \longmapsto \dfrac{x^2 + a}{2.x}$ sur $]0, +\infty[$, domaine sur lequel on est sûr de rester.

On constate que f (si tel est le nom de $x \longmapsto \dfrac{x^2 + a}{2.x}$) est décroissante puis croissante, avec un minimum en $\sqrt{a}$, égal à $\sqrt{a}$ (dérivation, tableau de variations, tout du niveau Terminale, adjugé).
On a donc, à partir du rang 1, quoi qu'on fasse : $u_n \geqslant \sqrt{a}$ (puisque $u_n = f(u_{n--1}) \geqslant \sqrt{a}$).
On a donc pour tout n plus grand que 1, $u_n \geqslant \sqrt{a}$. Mais ça ne majore pas la suite.
Mais qu'importe, puisqu'elle décroit.
Comment on sait ça ?

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2 + a}{2.u_n} - u_n = \frac{a - (u_n)^2}{2.u_n}$$

Et comment on a le signe de ce truc ? En rappelant : $u_n > \sqrt{a}$.

Conseil :
Ne vous ruez pas tout de suite sur la monotonie des suites $u_{n+1} = f(u_n)$.
Vos profs de Terminale ont dû vous le dire.
Sinon, ils ont failli à leur devoir.
On commence par encadrer la suite, PUIS on étudie sa monotonie, souvent en utilisant l'encadrement.
Et pour deviner l'encadrement, un tableau de variations, une recherche de points fixes. Et d'intervalles stables.

La suite est décroissante *(à partir du rang* 1*)*,
minorée par $\sqrt{a}$ *(à partir du rang* 1*)*
Elle converge.

Et maintenant qu'on sait qu'elle converge, on sait que c'est vers un point fixe.
C'est donc vers $\sqrt{a}$.

Remarque :
L'existence de la limite repose souvent sur « monotone bornée ».
Et on trouve la valeur de la limite par « point fixe ».

Mais ici, on va faire mieux, on va prouver que la convergence est très rapide.

Par positivité de la suite, chaque $\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$ existe. Par définition

$$r_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{\frac{(u_n)^2 + a}{2.u_n} - \sqrt{a}}{\frac{(u_n)^2 + a}{2.u_n} + \sqrt{a}} = \frac{(u_n)^2 + a - 2.\sqrt{a}.u_n}{(u_n)^2 + a + 2.\sqrt{a}.u_n}$$

en multipliant haut et bas par $2.u_n$.

On identifie remarquablement : $r_{n+1} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2} = (r_n)^2$. Trop fort !

On a alors par récurrence *(presque)* immédiate sur n : $r_n = (r_0)^{2^n}$. Et c'est bien $(r_0)^{(2^n)}$ avec un gros exposant.
Attention, ce n'est pas une série géométrique ! C'est pire.
Mais il y a bien une suite géométrique dans l'histoire : $(\ln(r_n))$. De raison 2.

On a donc $r_n = \left(\frac{a - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a}}\right)^{2^n}$ ou aussi $\frac{u_n - \sqrt{a}}{u + \sqrt{a}} = \left(\frac{a - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a}}\right)^{2^n}$.

On encadre : $\frac{|u_n - \sqrt{a}|}{u_0 + \sqrt{a}} \leqslant \frac{|u_n - \sqrt{a}|}{u_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{|a - \sqrt{a}|}{a + \sqrt{a}}\right)^{2^n}$

En gros, à chaque étape, le nombre de chiffres exacts double.
Un exemple avec $a = 3$.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	3	2	$\frac{7}{4}$	$\frac{97}{56}$	$\frac{18817}{10864}$	$\frac{708158977}{408855776}$	
approchée	3	2	1.75	1.73214285	1.732050810	1.732050807568877295254353	
« vraie valeur »	1.73205080756887729352744634151 à 10^{-30} près						

$u_7 \simeq \sqrt{3}$ à 10^{-72} près !
$u_8 \simeq \sqrt{3}$ à 10^{-145} près !

◦33◦ Montrez que si f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie $\int_{-1}^{1} f(t).dt = 0$ alors elle admet au moins un point fixe *(on pourra étudier $f - Id$ sur $[-1, 1]$ et montrer qu'elle ne peut pas rester de signe constant).*

Un classique. Un point fixe, c'est une solution de $f(x) = x$ (« fixe » car f n'a aucun effet sur lui). Mais il faut le voir comme une intersection du graphe avec la bissectrice (encore un dessin, encore un dessin !).
On va donc tout naturellement étudier $f - Id$. Ou ce que vous appelez $f(x) - x$. A tort, puisque $f(x) - x$ est un pauvre nombre et pas un graphe ni une fonction.

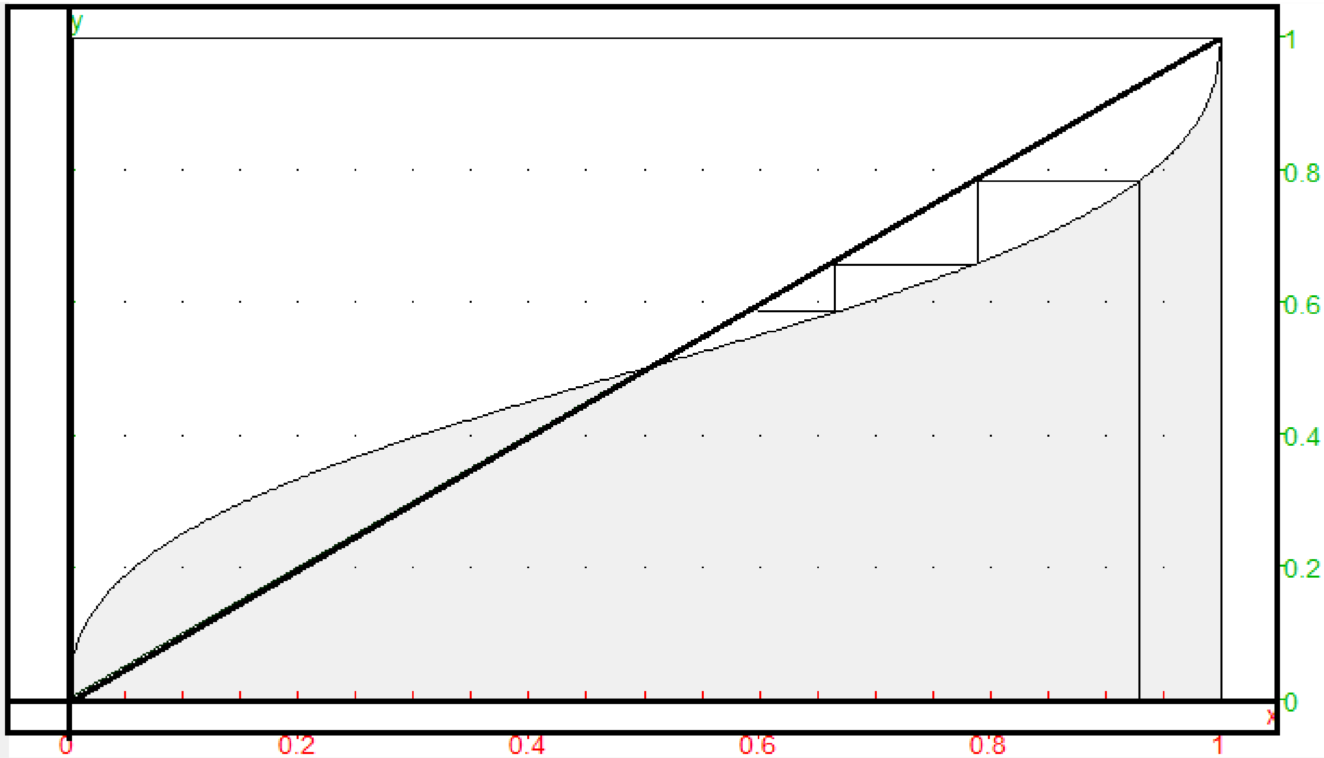
On pose $g = f - Id$ et on calcule

$$\int_0^1 g(t).dt = \int_0^1 f(t).dt - \int_0^1 t.dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Cette intégrale est nulle. La fonction g ne peut pas être toujours positive (son intégrale serait positive) ni toujours négative (son intégrale serait négative).
Elle change donc de signe.
Et en tant que fonction continue qui change de signe sur un intervalle, elle s'annule au moins une fois.

Et toc ! Zéro calcul, juste de l'intuition et un dessin.
Si si, un dessin. Si le graphe de f était toujours sous la bissectrice, son intégrale ne pourrait pas valoir $1/2$. De même si il était toujours au dessus. Donc, g est vraiment la bonne fonction...

◦34◦ u_0 est entre 0 et 1, et $u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{1 - u_n}}$. Étudiez la suite.



Tout est dit.

initialisation	$u_0 = 0$	$1/2 < u_0 < 1$	$u_0 = 1/2$	$1/2 < u_0 < 1$	$u_0 = 1$
encadrement	point fixe	reste entre $1/2$ et 1	point fixe	reste entre $1/2$ et 1	point fixe
monotonie	constante	décroit	constante	décroit	constante
convergence	converge vers 0	converge vers $1/2$			converge vers 1

∘35∘ Soit (a_n) une suite bornée. Montrez que $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{a_n}{2^n}\right)$ est alors une suite de Cauchy.

On dit A est un majorant de (a_n) (en valeur absolue même.

On se donne ε. On doit rendre $\left|\sum\limits_{n=0}^{p} \dfrac{a_n}{2^n} - \sum\limits_{n=0}^{q} \dfrac{a_n}{2^n}\right|$ plus petit que ε juste en jouant sur p et q assez grands.

Par symétrie des rôles, prenons $p \leqslant q$.

La différence vaut $\left|\sum\limits_{n=p+1}^{q} \dfrac{a_n}{2^n}\right|$ (relation de Chasles).

Elle se majore par $\sum\limits_{n=p+1}^{q} \left|\dfrac{a_n}{2^n}\right|$ puis $A.\sum\limits_{n=p+1}^{q} \left|\dfrac{1}{2^n}\right|$.

Ce majorant (qu'on peut espérer rendre petit, c'est quand même ça la règle jeu) vaut $A.\dfrac{\dfrac{1}{2^{p+1}} - \dfrac{1}{2^{q+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}}$ ce qui fait $\dfrac{A}{2^p} - \dfrac{A}{2^q}$.

Comme on ne sait pas si q sera « grand ou pas » (plus grand que p en tout cas), on continue à majorer : par $\dfrac{A}{2^p}$.

On a donc

$$\exists K_\varepsilon,\ \forall (p,q),\ K_\varepsilon \leqslant p \leqslant q \Rightarrow \left|\sum_{n=0}^{p} \frac{a_n}{2^n} - \sum_{n=0}^{q} \frac{a_n}{2^n}\right| \leqslant \frac{A}{2^p} \leqslant \varepsilon$$

Explicitement : $K_\varepsilon = \left[\dfrac{\ln(A/\varepsilon)}{\ln(2)}\right] + 1$ convient.

Remarque : Au fait, dans $C_\varepsilon = \dfrac{\ln(K) - \ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$ il y a un signe moins, mais il ne faut pas être surpris, ε est « petit », il va se rapprocher de 0, et donc $-\ln(\varepsilon)$ va pousser C_ε vers l'infini sur l'axe des abscisses.

Quelques remarques en plus :

Comme on ignore le signe des a_n on ne peut rien dire sur la monotonie de la suite (A_N). En fait, elle peut varier dans les deux sens.

Certes, on peut écrire des choses (intéressantes) sans rien comprendre :

$$|A_N| = \Big|\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{2^n}\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{N}\frac{|a_n|}{2^k} \leqslant K.\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n} = K.\frac{1-\dfrac{1}{2^{N+1}}}{1-\dfrac{1}{2}} \leqslant K.\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2.K$$

La suite (A_N) est bornée.

Jusque là, je ne proteste pas, et je suis même content de voir la majoration $K.\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{N+1}}}{1-\dfrac{1}{2}} \leqslant K.\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2.K$ *plutôt qu'un réflexe idiot* $K.\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{N+1}}}{1-\dfrac{1}{2}} \longrightarrow \dfrac{K}{1-\dfrac{1}{2}}$ *qui n'apporte rien ou presque. On veut « majorer », et pas « calculer la limite d'un majorant ».*

De même, la simple formule $|A_N| = \Big|\sum_{n=0}^{N}\dfrac{a_n}{2^n}\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{N}\dfrac{|a_n|}{2^k} \leqslant K.\sum_{n=0}^{N}\dfrac{1}{2^n} = K.\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{N+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}$ *n'est pas appelée une majoration de la suite* (A_N) *puisque le « majorant » dépend encore de* N.

On calcule ensuite : $A_{N+1} - A_N = \dfrac{a_{N+1}}{2^{N+1}}$.
« On » distingue alors deux cas :
• $a_{N+1} \geqslant 0$, alors la suite (A_N) est croissante. Comme on l'a majorée, elle converge.
• $a_{N+1} \leqslant 0$, alors la suite (A_N) est croissante. Comme on l'a minorée, elle converge.

J'ose espérer que vous avez compris que ce « raisonnement » est du méga-foutage de gueule, de l'arnaque pur jus.

En effet, on travaille à N fixé dans la discussion.
Et la croissance ou la décroissance nécessiteraient $\forall N,\ a_{N+1} \geqslant 0$ ou $\forall N,\ a_{N+1} \leqslant 0$. Avec un capital $\forall N$. On en est loin quand on ne regarde ici qu'un indice à la fois.

Je rappelle que la définition de la croissance n'a jamais été et ne sera jamais $a_{n+1} \geqslant a_n$.
C'est $\forall n,\ a_{n+1} \geqslant a_n$. *Et j'insiste pour la dix mille ième fois face à des élèves qui confondent raisonnements mathématiques et formules magiques qu'on apprend par cœur.*

La formule au bout d'une ligne de maths, c'est juste la couleur de la peau, pour faire joli. Mais l'essentiel est dans le squelette, dans le début, dans les $\forall \varepsilon,\ \exists \ldots$.

◦36◦ **Montrez que l'image d'une suite de Cauchy par une application lipschitzienne est une suite de Cauchy.**

On écrit les deux hypothèses, et la conclusion, comme toujours. Et normalement, tout vient en une fois

H	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists C_\varepsilon,\ \forall (p,q),\ \begin{matrix} p \geqslant C_\varepsilon \\ q \geqslant C_\varepsilon \end{matrix} \Rightarrow |a_p - a_q| \leqslant \varepsilon$
H	$\exists K,\ \forall (x,y),\ |f(x) - f(y)| \leqslant K.|x-y|$
?	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists H_\varepsilon,\ \forall (p,q),\ \begin{matrix} p \geqslant H_\varepsilon \\ q \geqslant H_\varepsilon \end{matrix} \Rightarrow |f(a_p) - f(a_q)| \leqslant \varepsilon$

On se donne ε et on prend $H_\varepsilon = C_{\varepsilon/K}$ et tout passe $\begin{matrix} p \geqslant H_\varepsilon \\ q \geqslant H_\varepsilon \end{matrix} \Rightarrow |a_p - a_q| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{K} \Rightarrow |f(a_p) - f(a_q)| \leqslant K.\dfrac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$.

◦37◦ **Montrez que si la suite (a_n) vérifie : $\forall n,\ |a_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ alors elle est de Cauchy. Réciproque ?**

Montrez que si la suite (a_n) vérifie $\forall n,\ |a_{n+1} - a_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ alors elle est de Cauchy.

Elle converge vers 0. Donc elle est de Cauchy.

La réciproque est fausse.
La suite $\frac{1}{n+1}$ converge vers 0. Elle est donc de Cauchy. D'ailleurs, on a

$$\left|\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right| \leqslant \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \leqslant \varepsilon$$

dès qu'on a p et q plus grands que $\frac{2}{\varepsilon}$.

Mais on n'a pas $\frac{1}{2^n}$.

L'exercice plus intéressant : $\forall n,\ |a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ implique « de Cauchy ».
On se donne ε et on veut $|a_p - a_q| \leqslant \varepsilon$, juste en jouant sur p et q sont assez grands.
Sans perte de généralité, on suppose $q > p$.

On écrit la différence comme somme des accroissements : $a_q - a_p = \sum_{k=p}^{q-1}(a_{k+1} - a_k)$.

On utilise l'inégalité triangulaire : $|a_q - a_p| \leqslant \sum_{k=p}^{q-1} |a_{k+1} - a_k|$.

On utlise l'hypothèse : $|a_q - a_p| \leqslant \sum_{k=p}^{q-1} 2^{-k}$.

On utlise nos connaissances :

$$|a_q - a_p| \leqslant \frac{\frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^q}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{2^{q-1}}$$

Comme on ignore où si situe q par rapport à p (le plus petit) : $|a_q - a_p| \leqslant \frac{1}{2^{p-1}}$

(c'est comme si on y allait « au pire » avec q très très grand dirait le physicien).

La majoration n'est pas mauvaise, puisque $\frac{1}{2^{p-1}}$tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

Explicitement, on peut imposer $\frac{1}{2^{p-1}} = \varepsilon$ ou plutôt $\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant \varepsilon$ car en analyse, on regarde des inégalités.

On peut tout remettre dans l'ordre : pour p et q plus grands que $-\log_2(\varepsilon) + 1$, on a $|a_q - a_p| \leqslant \varepsilon$.
La suite est de Cauchy.

Et comme on est dans $\mathbb{R}$ elle converge.

Sinon, on peut aussi écritre

$$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)$$

La famille des $a_{k+1} - a_k$est dominée (majorée en valeur absolue) par $\frac{1}{2^k}$.

La famille des $\frac{1}{2^k}$est sommable (somme explicite égale à a série géométrique, de somme 2).

Par convergence en valeur absolue, $\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)$ converge.

I∼0) On note E l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel.

L'espace des applications lipschitziennes de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications continues de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour les stabilités, on rappelle que si f et g sont lipschitziennes des rapports K_f et K_g alors $f + g$ est lipschitzienne de rapport $K_f + K_g$ *(pas forcement le meilleur, mais qu'importe)*. Et $\lambda.f$ est lipschitzienne de rapport $|\lambda|.K_f$. Enfin, l'application nulle est lipschitzienne de rapport 0 *(par exemple)*.

I∼1) Montrez que $f \longmapsto ||f||$ est une norme sur m(E,+,.) , sachant que l'on pose $||f|| = Sup(|f(t)| \mid t \in [0,\ 1])$.

N est une norme sur $(F, +, .)$ où F est un espace vectoriel

Le mnémotechnique pour retenir cette liste, c'est "Sophie a perdu son haut" si vous reprenez l'idée de François-Xavier il y a déjà dix huit ans de ça, et si vous voulez j'ai des photos de la Sophie en question.

E	Existence	pour tout $\overrightarrow{u}$ de E, $N(\overrightarrow{u})$ existe
P	Positivité	$\forall \overrightarrow{u} \in E,\ N(\overrightarrow{u}) \geqslant 0$
S	Séparation	$\forall \overrightarrow{u} \in E,\ \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \Rightarrow N(\overrightarrow{u}) > 0$ $\forall \overrightarrow{u} \in E,\ N(\overrightarrow{u}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
H	Homogénéité	$\forall (\lambda,\ \overrightarrow{u}) \in \mathbb{R} \times E,\ N(\lambda.\overrightarrow{u}) = \lvert\lambda\rvert.N(\overrightarrow{u})$
I	Inégalité triangulaire	$\forall (\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \in E^2,\ N(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \leqslant N(\overrightarrow{u}) + N(\overrightarrow{v})$

Je vous donne quand même le début d'une des preuves pour que vous ne vous contentiez pas d'affirmations péremptoires "il est évident que" :
on se donne f et g ; pour tout x, on a : $|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant ||f|| + ||g||$ et ensuite, à vous de rédiger avec des mots et pas avec des trucs dont vous dites que c'est des maths...

On montre que $||.||$ est une norme.

Existence Chaque application lipschitzienne est continue sur le segment $[0,\ 1]$ donc bornée et atteint ses bornes. Mais c'est plutôt à $|f|$ qu'il faut appliquer le théorème de compacité.

Positivité La borne supérieure $||f||$ majore au moins $|f(0)|$. par transitivité, elle est positive.

Séparation Supposons $||f||$ nulle. Alors pour tout t de $[0,\ 1]$, on a $|f - t)| \leqslant ||f||$ par définition de la borne supérieure. Par antisymétrie, chaque $f(t)$ est nul. C'est la définition de f est nulle de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On peut montrer $((\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}) \Rightarrow (||\overrightarrow{u}|| > 0))$ *ou* $((||\overrightarrow{u}|| = 0) \Rightarrow (\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}))$. *Par contraposée.*

Inégalité triangulaire On prend f et g. Pour tout t de $[0,\ 1]$, on a $|f(t) + g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)|$ par inégalité triangulaire. Par définition de « la borne supérieure est un majorant » : $|f(t) + g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)| \leqslant ||f|| + ||g||$. Le réel $||f|| + ||g||$ est un majorant de $\{|f(t) + g(t)| \mid t \in [0,\ 1]\}$. Par définition du plus petit majorant de cet ensemble, on a $||f + g|| \leqslant ||f|| + ||g||$.

C'est le type de question classique sur lequel on pourra vous tester aux oraux de concours. Un passage aux bornes supérieures à savoir mener proprement, sans se contenter de dire « il est évident que ». savoir rendre propre et rigoureux ce qui semble évident, c'est des maths. Et du travail d'ingénieur.

Homogénéité Là aussi, ça se fait proprement. Pour tout t de $[0,\ 1]$, on a $|\lambda.f(t)| = |\lambda|.|f(t)| \leqslant |\lambda|.||f||$. Le réel $|\lambda|.||f||$ majore l'ensemble $\{|\lambda.f(t)| \mid t \in [0,\ 1]\}$. Par définition du plus petit majorant : $||\lambda.f|| \leqslant |\lambda|.||f||$. Zut, il en manque la moitié. Mais si on l'applique à $\dfrac{1}{\lambda}$ et $\lambda.f$, on a $\left|\left|\frac{1}{\lambda}.\lambda.f\right|\right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}.||\lambda.f||$. On a donc $||f|| \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|}.||\lambda.f||$. On a l'autre inégalité.

Celle là, elle est vraiment particulière, et il faut avoir le profil « étoile » pour en goûter la saveur, plutôt que d'affirmer $Sup(|\lambda|.y \mid y \in E\} = |\lambda|.Sup(y \mid y \in E)$.

I∼2) Pour f dans E, on pose $L(f) = Sup\left\{\dfrac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} \mid 0 \leqslant a < b \leqslant 1\right\}$. Montrez que L est une semi norme sur $(E, +, .)$ *(semi-norme, c'est EPHI)*.

Existence Pour définit $L(f) = Sup\left(\dfrac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} \mid 0 \leqslant a < b \leqslant 1\right)$, il faut prouver que l'on a affaire à une partie de $\mathbb{R}$ non vide, majorée. On y trouve au moins $\dfrac{|f(1) - f(0)|}{1 - 0}$. Cette partie est majorée par K puisqu'on a dit $\exists K,\ \forall (x, y),\ |f(x) - f(y)| \leqslant K.|y - x|$.
On a donc une borne supérieure qui est « *le plus petit rapport de Lipschitz* ».

Positivité Cette quantité est toujours positive, puisque c'est le plus petit majorant d'un ensemble de réels positifs.

Homogénéité Si on passe de f à $\lambda.f$, tous les taux d'accroissement sont multipliés par $|\lambda|$, leur borne supérieure aussi *(il faudrait normalement le traiter en deux majorations comme à la question « norme »)*.

Inégalité triangulaire On se donne f et g. Pour tout couple $(a,\ b)$, on a

$$\frac{f((b) + g(b) - f(a) - g(a)|}{|b - a|} \leqslant \frac{|f((b) - f(a)|}{|b - a|} + \frac{|g(b) - g(a)|}{|b - a|} \leqslant L(f) + F(g)$$

par définition de « majorant »

Le réel $L(f)+L(g)$ majore tous les taux d'accroissements de $f+g$. par définition, $L(f+g)$ est le plus petit majorant de ces taux, donc $L(f+g)\leqslant L(f)+L(g)$.

Pour ce qui est de la séparation, on ne l'a pas. Si $L(f)$ est nulle, cela veut juste dire que tous les taux d'accroissement sont nuls, f est juste constante et pas forcément identiquement nulle.

I∼3) Montrez pour f de classe C^1 : $L(f)=||f'||$. *Et si vous préférez des photos de François-Xavier, j'ai aussi.*

Supposons f de classe C_1. L'application f' est donc continue. On peut donc définir sa norme $||f'||$ (maximum de $|f'|$ sur $[0,\ 1]$).
Pour tout couple $(a,\ b)$, on a $|f(b)-f(a)|\leqslant ||f'||.|b-a|$. C'est le résultat du cours qui dit que pour montrer qu'une application est lipschitzienne, il suffit de borner sa dérivée.
En effet,

$$|f(b)-f(a)|=\left|\int_a^b f'(t).dt\right|\leqslant \int_a^b |f't)|.dt\leqslant \int_a^b ||f'||.dt=(b-a).||f'||$$

Il ne reste qu'à diviser.
Le réel $||f'||$ est un majorant de l'ensemble des $\dfrac{|f-(b)-f(a)|}{b-a}$. Par définition du plus petit majorant, $L(f)$ est plus petit que $||f'||$.
Ensuite, pour tout a, $f'(a)$ est la limite des $\dfrac{|f(x)-f(a)|}{|x-a|}$ quand x tend vers a. Chacun de ces taux est majoré par $L(f)$. La limite de ces taux (qui existe par dérivabilité) est encore plus petite que $L(f)$.
Le réel $L(f)$ est un majorant de $\{|f'(a)|\ |\ a\in[0,\ 1]\}$. Par définition du plus petit majorant : $||f'||\leqslant L(f)$.
On a deux inégalités qui se transforment en une égalité par antisymétrie de l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$.

I∼4) Calculez la norme $||f||$ et la semi-norme pour les applications suivantes :

$s_n=\theta\longmapsto\sin(n.\theta)$	$c_n=\theta\longmapsto\cos(n.\theta)$	$x\longmapsto x^n$	$x\longmapsto\|2.x-1\|$	$x\longmapsto\ln(1+x)$

Quand les applications offertes sont de classe C^1, pour trouver leur rapport de Lipschitz $L(f)$, il suffit de chercher le maximum de leur dérivée en valeur absolue.

fonction	$s_n=\theta\longmapsto\sin(n.\theta)$	$c_n=\theta\longmapsto\cos(n.\theta)$	$x\longmapsto x^n$	$x\longmapsto\|2.x-1\|$	$x\longmapsto\ln(1+x)$
dérivée	$\theta\longmapsto n.\cos(n.\theta)$	$c_n=\theta\longmapsto -n.\sin(n.\theta)$	$x\longmapsto n.x^{n-1}$	pas dérivable	$x\longmapsto\dfrac{1}{x+1}$
maximum	n en $\theta=0$	n en $\theta=\pi/(2.n)$	n en $x=1$		1 en $x=0$

On mettra de côté le cas de $x\longmapsto x^0$, constante sur $[0,\ 1]$, dont le rapport de Lipschitz est nul.
L'application $x\longmapsto|2.x-1|$ n'est pas dérivable en $\dfrac{1}{2}$. Le graphe « en V » a un point anguleux.
Sur le premier segment, f est lipschitzienne de rapport 2 car affine de la forme $t\longmapsto 1-2.t$.
Sur le segment suivant, elle est encore lipschitzienne de rapport 2 car de la forme $t\longmapsto 2.t-1$.
Mais de là à conclure... Dans la quantification $\forall(a,\ b)\in[0\ 1]^2,\ |f(b)-f(a)|\leqslant 2.|b-a|$, il faut étudier tous les cas :

a et b dans $[0,\ 1/2]$	a dans $[0,\ 1/2]$ et b dans $[1/2,\ 1]$
b dans $[0,\ 1/2]$ et a dans $[1/2,\ 1]$	a et b dans $[1/2,\ 1]$

Si a est dans $[0,\ 1/2]$ et b dans $[1/2,\ 1]$, on a quand même $\Big||2.a-1|-|2.b-1|\Big|\leqslant 2.|a-1|$ par la seconde inégalité triangulaire.
L'application $x\longmapsto|2.x-1|$ (variante de $t\longmapsto|t|$) est bien lipschitzienne, de rapport 2, atteint pour des couples du même « demi-intervalle ».

I∼5) Montrez que $f\longmapsto|f(0)|+L(f)$ est une norme *(notée Λ)*. Montrez pour tout f de $||f||\leqslant\Lambda(f)$.
Existe-t-il K vérifiant $\forall f\in E,\ L(f)\leqslant K.||f||$.

Maintenant, on prend $f\longmapsto|f(0)|+L(f)$.
Existence $L(f)$ existe, de même que $|f(0)|$.

Positivité C'est une somme de deux réels positifs.

Homogénéité Pour f et λ donnés, on a bien $|\lambda.f(0)|+L(\lambda.f)=|\lambda|.|f(0)|+|\lambda|.L(f)$.

Inégalité triangulaire On se donne f et g, on somme deux formules déjà connues (l'inégalité triangulaire usuelle et inégalité triangulaire pour L) :

$$|(f+g)(0)|\leqslant|f(0)|+|g(0)|\ \textit{et}\ L(f+g)\leqslant L(f)+L(g)$$

Séparation Le seul point intéressant de la question. On se donne f. On suppose $|f(0)|+L(f)=0$. Comme ce sont deux réels positifs, chaque des deux est nul. L'égalité $L(f) = 0$ force f à être constante, par exemple égale à sa valeur en 0. L'autre égalité dit « mais $f(0)$ est nul ». C'est fini, f est nulle. Par contraposée, si f n'est pas identiquement nulle, elle a une norme strictement positive.

Si on se donne f dans E et x dans $[0,\ 1]$, on a $f(x) = f(x) - f(0) + f(0)$ donc

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leqslant L(f).|x - 0| + |f(0)|$$

par caractère lipschitzien ($L(f)$ est le plus petit rapport de Lipschitz, c'en est bien un).
On majore x par 1 : $|f(x)| \leqslant L(f) + |f(0)| = \Lambda(f)$.
Le réel $\Lambda(f)$ est un majorant de $(|f(t)| \mid t \in [0,\ 1])$. par définition de plus petit des majorants, on a $||f|| \leqslant \Lambda(f)$.

En revanche, les s_n définies plus haut (c'est $\theta \longmapsto \sin(n.\theta)$) ont toutes pour norme 1 : $||s_n|| = 1$.
En revanche leur norme de Lipschitz vaut n.
On ne peut donc pas avoir pour tout f de E : $\Lambda(f) \leqslant K.||f||$. Il suffirait, pour un K proposé, de donner s_n avec n plus grand que K.

II∼0) Une suite (f_n) d'éléments de E vérifie $\forall \varepsilon,\ \exists K_\varepsilon,\ \forall (p, q),\ K_{\varepsilon \leqslant} p \leqslant q \Rightarrow L(f_p - f_q) \leqslant \varepsilon$. Montrez que pour tout x de $[0,\ 1]$, la suite $(f_n(x))$ converge vers un réel que l'on va noter $f(x)$.

L'hypothèse $\forall \varepsilon > 0,\ \exists K_\varepsilon,\ \forall (p, q),\ K_{\varepsilon \leqslant} p \leqslant q \Rightarrow L(f_p - f_q) \leqslant \varepsilon$ dit que (f_n) est une suite de Cauchy pour la norme Λ.
On se donne x dans $[0,\ 1]$ (lui il ne bouge pas, c'est n qui va bouger).
La majoration $|f_p(x) - f_q(x)| \leqslant ||f_p - f_q|| \leqslant \Lambda(f_p - f_q)$ (définition de la borne supérieure et question précédente) permet de dire que $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy.
Comme on est dans $\mathbb{R}$, elle converge.

Si vous oubliez de préciser qu'on est dans $\mathbb{R}$, vous avez perdu !
Sinon, la valeur de la limite de la suite n'est pas connue.

II∼1) Montrez que f ainsi définie (limite des f_n) est dans E.

Il reste à prouver que f est à son tour lipschitzienne.
Pour x et y donnés, ainsi d'ailleurs que n, on a $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant L(f_n).|x - y| \leqslant \Lambda(f_n).|x - y|$.
Mais le rapport $\Lambda(f_n)$ dépend encore de n.
Mais la suite $\Lambda(f_n)$ vérifie $\Big|\Lambda(f_p) - \Lambda(f_p)\Big| \leqslant \Lambda(f_p - f_q) \leqslant \varepsilon$ pour p et q plus grands que K_ε. Elle est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle converge donc dans $\mathbb{R}$ vers une limite qu'on va noter μ. Oh, et puis on n'a pas besoin de tant. Elle est majorée par un réel qu'on va appeler M.
Mais alors on a donc $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant L(f_n).|x - y| \leqslant \Lambda(f_n).|x - y| \leqslant M.|x - y|$.
On ne garde que le début et la fin, et on fait tendre n vers l'infini (on sait que $f_n(x)$ et $f_n(y)$ convergent.
On a finalement $|f(x) - f(y)| \leqslant M.|x - y|$. L'application f est à son tour lipschitzienne.

III∼0) Pour tout x de $[0,\ 1]$ et tout n on pose $F_{n+1}(x) = F_n(x) + \dfrac{x - (F_n(x))^2}{2}$ et $F_0(x) = 0$. Montrez que chaque F_n est un polynôme et donnez son degré. Chaque P_n est il dans E ?

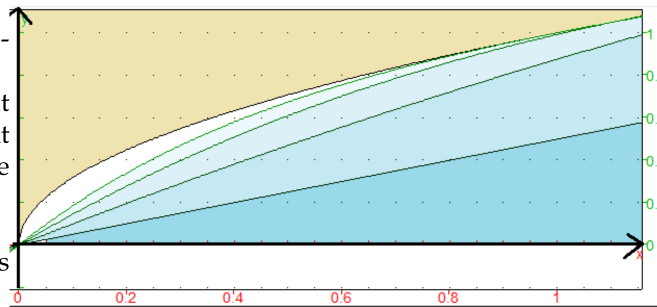
On se donne x. On pose donc $F_{n+1}(x) = F_n(x) + \dfrac{x - (F_n(x))^2}{2}$ et $F_0(x) = 0$. Par récurrence immédiate, tous les termes de la suite existent.
Étudions l'application $t \longmapsto t + \dfrac{x - t^2}{2}$ *(x est fixé, on peut la nommer φ_x).*
Elle va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle a pour dérivée $1 - t$. Elle est croissante puis décroissante.
Elle coupe la bissectrice en $-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}$, ce qui est avant 1.
On a donc : $\forall t \in [-\sqrt{x},\ \sqrt{x}],\ -\sqrt{x} = \varphi_x(\sqrt{x}) \leqslant \varphi_x(t) \leqslant \varphi_x(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$.
Par récurrence immédiate, comme $P_0(x)$ est entre $-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}$, tous les termes de la suite sont entre $-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}$.

Si vous ne me faites pas cette récurrence qui prouve que tous les termes sont dans le bon intervalle, n'espérez pas avoir plus du tiers des points. Cela signifie en effet que vous confondez un résultat sur le premier terme de la suite avec un résultat sur tous les termes :
si, sur l'intervalle I le graphe de f est au dessus de la bissectrice, alors il y a trois conclusions, dont une totalement débile (celle que vous me balancez parce que vous avez des réflexes de « formules par cœur » et pas une vision des objets et des variables) :
- *si u_0 est dans I alors $u_1 \geqslant u_0$ (passionnant, la suite est croisssante... pour un rang)*
- *tous les $u_n$sont dans I donc pour tout n, alors pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$*
- *si u_0 est dans I alors la suite est croissante (crétnisme pur)*

III$\sim$1) Montrez que la suite $(F_n(x))$ est croissante majorée et converge (étudiez $t \longmapsto t + \dfrac{x - t^2}{2}$ sur $[0,\ 1]$).

III$\sim$2) La limite des P_n est elle dans E ?

Maintenant, directement, si $F_n(x)$ est entre $-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}$ alors $x - (F_n(x))^2$ est positif. On a donc $F_n(x) + \dfrac{x - (F_n(x))^2}{2} \geqslant F_n(x)$.



La suite est croissante. Comme elle est croissante majorée, elle converge, vers son plus petit majorant.
Ce majorant est forcément un point fixe. Ce ne peut être que $\sqrt{x}$ ou $-\sqrt{x}$ Comme les termes de la suite sont positif (croissante, de premier terme 1), la seule limite possible est donc $\sqrt{x}$.

Pour tout x la suite $(F_n(x))$ converge en croissant vers $\sqrt{x}$.

L'application obtenue à la limite a perdu son caractère lipschitzien.

Par récurrence sur n, chaque F_n est un polynôme. C'est d'abord le polynôme nul, puis le polynôme $x \longmapsto \dfrac{x}{2}$. Au rang suivant, on trouve $x \longmapsto x - \dfrac{x^2}{8}$. Ensuite, on a $x \longmapsto \dfrac{192.x - 80.x^2 + 16.x^3 - x^4}{128}$ *(je ne vous ai pas demandé de le calculer)*.
Si F_n est un polynôme en x *(à coefficients rationnels)*, de degré 2^{n-1}, alors $(F_n)^2$ est de un polynôme de degré $(2^{n-1}).2$.
Par addition est soustraction, F_{n+1} est encore un polynôme et son terme dominant ne peut venir que de $\dfrac{-(F_n)^2}{2}$.

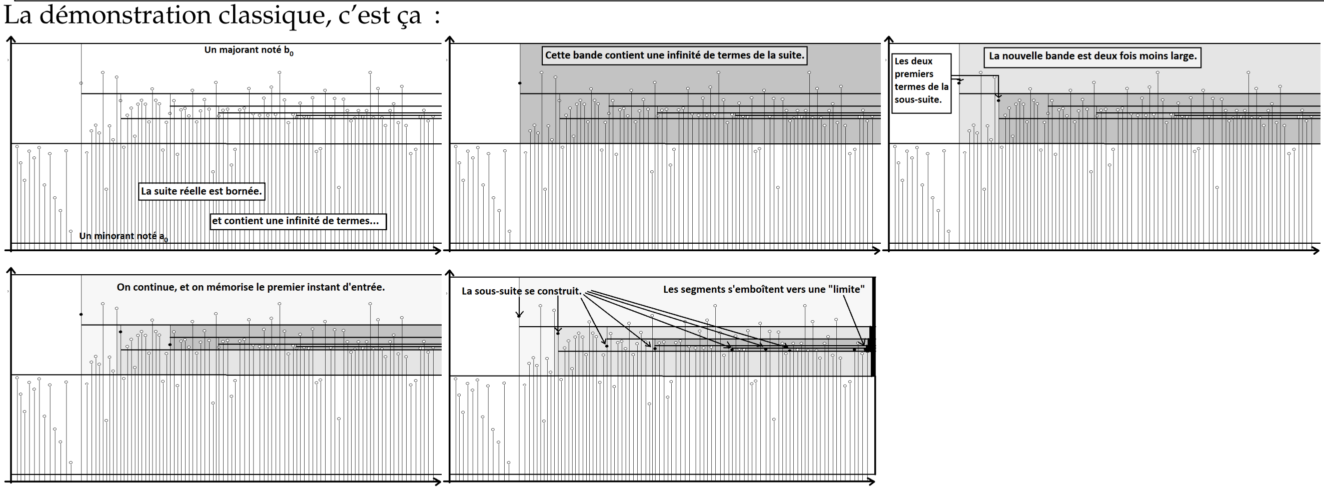
Notre récurrence prouve que $\boxed{P_n \text{ est de degré } 2^{n-1}}$ *(pour n non nul)*.

Chaque P_na pour dérivée un polynôme. Cette dérivée est alors bornée sur le segment $[0,\ 1]$. Ayant une dérivée bornée, chaque $P_n$est dans E.

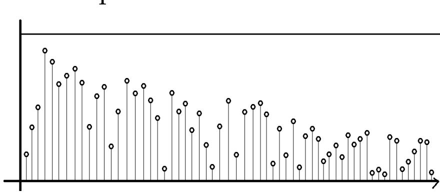
En revanche, la limite des P_n n'est pas dans E.

◦38◦ Théorème de Bolzano Weierstrass, l'autre démonstration.

La démonstration classique, c'est ça :



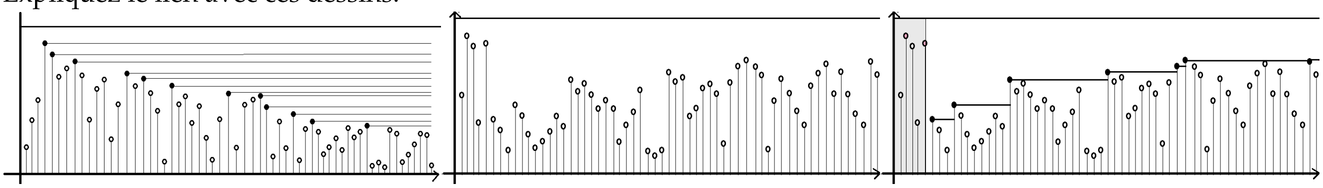
Partons pour la nouvelle.



On prend une suite réelle bornée (u_n) à valeurs dans $[a,\ b]$. Pour montrer qu'elle admet une sous-suite convergente, on construit une sous-suite monotone.
On pose $A = \{n \mid \forall p \geqslant n,\ u_p \leqslant u_n\}$.
Explicitez A pour chacune des suites suivantes : $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$, $((-1)^n)$, $\left(\frac{(-1)^n}{2^n}\right)$,

Montrez que si A est infini, alors en indexant les éléments de A dans l'ordre croissant $A = \{n_0,\ n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots\}$ alors la suite (u_{n_k}) est monotone.

On suppose que A est fini. Montrez qu'il existe alors n_0 tel que tous les entiers à partir de n_0 sont hors de A.
Déduisez alors $\exists n_1 > n_0,\ u_{n_1} > u_{n_0}$.
Puis $\exists n_2 > n_1,\ u_{n_2} > u_{n_1}$. Montrez qu'il existe une sous-suite de (u_n) strictement croissante.
Expliquez le lien avec ces dessins.



La suite $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ est décroissante. Pour tout , donné, on a $\forall p \geqslant n,\ u_p \leqslant u_n$. Tous les n sont dans A.
L'ensemble A est égal à $\mathbb{N}$ et la suite (u_n) converge.

La suite $((-1)^n)$ n'a vraiment aucune monotonie. Si on se donne n pair, on a $u_n = 1$ et pour tout p (pair ou impair) plus grand que n, on a $u_p \leqslant u_n = 1$. Chaque n pair est dans A.
En revanche, si n est impair, on a $u_n = -1$, et déjà, u_{n+1} ne vérifie pas $u_{n+1} \leqslant u_n$. Au moins un p est en défaut.
Aucun n impair n'est dans A.
A est l'ensemble des entiers pairs.
Et il nous offre une sous-suite $(u_{2.p})$ qui converge.

$\left(\frac{(-1)^n}{2^n}\right)$ c'est

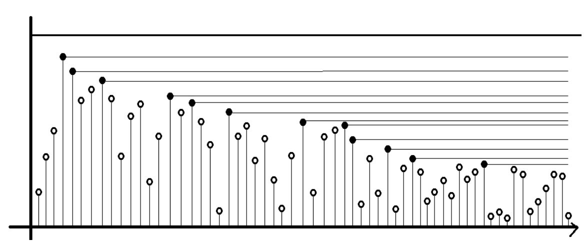
1		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{64}$
	$\frac{-1}{2}$		$\frac{-1}{8}$		$\frac{-1}{32}$	

Il faut vraiment voir ça.
Prenons un n pair. Alors $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ majore tous les termes suivants (les u_p avec p pair sont en $\dfrac{1}{2^p}$ avec p plus grand, et les u_p avec p impair sont négatifs).
n pair est dans A (et la suite des $u_{indice\ pair}$ va être monotone, convergente).

Prenons un n impair. Lui, il est vraiment mal barré. Il est plus bas que tout ce qui suit. Il n'est pas dans A.

Montrez que si A est infini, alors en indexant les éléments de A dans l'ordre croissant $A = \{n_0,\ n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots\}$ alors la suite (u_{n_k}) est monotone.

Comment indexer les éléments dans l'ordre : $n_0 = ppe(A)$ (toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément), puis $n_1 = ppe(A - \{n_0\})$ et cet ensemble est non vide, sinon A serait de cardinal fini), puis $n_2 = ppe(A - \{n_0, n_1\})$ et ainsi de suite.
La suite n_k est croissante pas construction, et elle a bien une infinité de termes car A est infini.
Pour tout n, on a $u_{n_{k+1}} \leqslant u_{n_k}$ car n_k est dans A : $\forall p \geqslant n_k,\ u_p \leqslant u_{n_k}$, en particulier pour n_{k+1}.
La suite (u_{n_k}) (indexée par k) est extraite de (u_n) (elles est donc bornée) et est décroissante. Elle converge.



On a réussi à extraire une sous-suite décroissante.
Reste à montrer que si on n'arrive pas à extraire ainsi une sous suite décroissante, on peut extraire une sous-suite croissante.

On suppose que A est fini. Montrez qu'il existe alors n_0 tel que tous les entiers à partir de n_0 sont hors de A.

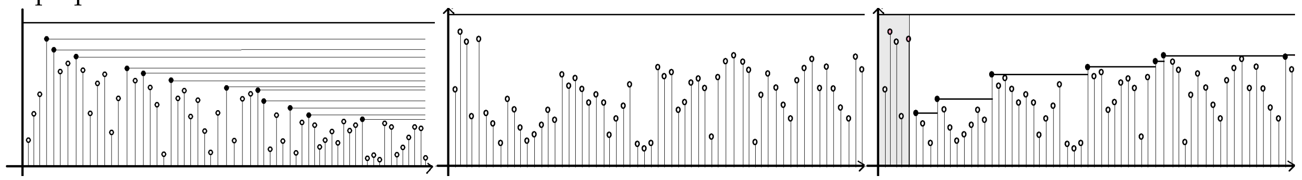
Si un ensemble est fini, il suffit d'en prendre le plus grand élément, et d'ajouter 1. On est alors définitivement sorti.
Et si il est vide, on prend $n_0 = 0$!

Déduisez alors $\exists n_1 > n_0,\ u_{n_1} > u_{n_0}$.

Que dire de n_0 ? Il n'est pas dans A. Donc, $\exists p \geqslant n_0,\ u_p > u_{n_0}$ (négation de $\forall p \geqslant n_0,\ u_p \leqslant u_{n_0}$).
On prend le premier d'entre eux, et on le note n_1 (il ne peut pas être égal à n_0, à cause de $u_p > u_{n_0}$.

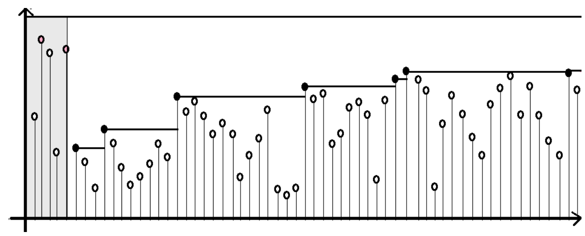
A ce stade $n_0 < n_1$ et $u_{n_1} > u_{n_0}$. Et surtout, n_1 n'est pas dans A puisqu'on est plus loin que n_0.

Puis $\exists n_2 > n_1,\ u_{n_2} > u_{n_1}$. Montrez qu'il existe une sous-suite de (u_n) strictement croissante.
Expliquez le lien avec ces dessins.



Cette fois, on se place en n_1 et on traduit $n_1 \notin A\ : \exists p \geqslant n_1,\ u_p > u_{n_1}$.
On en prend un qu'on appelle n_2 et on a progressé.

A la k^{ieme} étape, on a construit



n_0	$< n_1$	$< n_2$	$\dots$	$< n_{k-1}$	$< n_k$
u_{n_0}	$> u_{n_1}$	$> u_{n_2}$	$\dots$	$> u_{n_{k-1}}$	$> u_{n_k}$

Comme n_k est plus grand que n_0 il est hors de A. Il existe donc au moins un indice p vérifiant $u_p > u_{n_k}$ (un autre immeuble qui lui bouche la vue sur la mer dans le troisième schéma). On prend le premier, on le nomme n_{k+1} (différent de $n_k$par inégalité stricte).

n_0	$< n_1$	$< n_2$	$\dots$	$< n_{k-1}$	$< n_k$	$< n_{k+1}$
u_{n_0}	$> u_{n_1}$	$> u_{n_2}$	$\dots$	$> u_{n_{k-1}}$	$> u_{n_k}$	$> u_{n_{k+1}}$

Et la suite croissante est construite.

Dans les deux cas *(A fini ou non)* on a construit une sous-suite monotone, bornée. Elle converge... Bolzano è felice et Weierstrass ist glad.

Ce qui suit est un gros morceau de Centrale PSI 2020. Les parties sont donc liées entre elles...

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

. Lambert. .

IV∼0) *On note f l'application $x \longmapsto x.e^x$ définie sur* $\mathbb{R}$. Montrez que f réalise une bijection de $[-1\ +\infty[$ sur $[-e^{-1},\ +\infty[$ dont la réciproque (de $[-e^{-1},\ +\infty[$ sur $[-1,\ +\infty[$) sera notée W en hommage à Lambert[a]. Justifiez que W est continue et même C^∞de $]-1,\ +\infty[$ dans $]-1,\ +\infty[$.

a. Jean-Henri Lambert ; né à Mulhouse (à l'époque « cité état » indépendante) en 1728, il écrivit en allemand, en français et en latin des textes mathématiques et philosophies, il était expert en cartographie et en astronomie, ce fut lui qui en premier prouva l'irrationalité de π : il n'y a aucun W dans cette présentation, donc la lettre W s'impose

f a pour dérivée $x \longmapsto (x+1).e^x$.
Elle est strictement croissante sur $[-1,\ +\infty[$ et continue.
Le cours ,nous assure qu'elle réalise un homéomorphisme de l'intervalle $[-1,\ +\infty[$ sur l'intervalle image. celui ci est $[-e^{-1},\ +\infty[$ *(limites aux bornes et T.V.I.)*.
Mieux encore, comme f' ne s'annule jamais sur $]-1,\ +\infty[$, elle réalise un C^1 difféomorphisme entre cet intervalle et son intervalle image.
En mettant en boucle $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ on obtient que f^{-1} est aussi C^∞*(résultat technique du cours, par mise en boucle)*.
On a donc un C^∞difféomorphisme si on se place entre les deux intervalles ouverts.

$W(a)$ est la solution plus grande que -1 (si il y en a) de l'équation $f(x) = a$ d'inconnue réelle x.

Pour $t.e^t = 0$ d'inconnue t, on n'a qu'une solution, et c'est 0. On a bien $W(0) = 0$.

Pour la dérivation, on a $W'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$ sachant $f(a) = b$. On a donc $W'(0) = \dfrac{1}{f'(0)}$ =1 .

IV∼1) Calculez $W(0)$ et $W'(0)$. Justifiez $W(x) \sim_{x\to 0} x$. Montrez : $W''(0) = -2$.

Le développement limité de W en 0 (elle y est C^∞) donne $W(0+x) = W(0) + h.W'(0) + o(h)$.

Avec les valeurs $W(h) = h + o(h)$ et donc bien $W(h) \sim_{h\to 0} h$.

Les deux graphes (f et W) ont pour tangente à l'origine la première bissectrice.

On repart de $W(f(x)) = x$ pour tout x de $]-1,\ +\infty[$.
On dérive, et pas qu'une fois, puisqu'on sait que toute est C^∞ :
$W'(f(x)).f'(x) = 1$ et $W''(f(x)).(f'(x))^2 + W'(f(x)).f''(x) = 0 = x$ pour tout x.
En particulier en 0 : $W''(0).(1)^2 + W'(0).2 = 0$.
On isole : $W''(0)$ vaut -2 *(alors que $f''(0)$ valait 2)*.

L'une est convexe au voisinage de 0 (c'est f) et l'autre est concave (c'est W).

IV∼2) Montrez $W(x) \sim_{x\to+\infty} \ln(x)$.

Par composition, on peut écrire $W(x).e^{W(x)} = x$ pour x plus grand que $-e^{-1}$ (c'est $f(W(x)) = x$).
On passe au logarithme :

$$\ln(W(x)) + W(x) = \ln(x)$$

Mais comme $W(x)$ tend vers l'infini, on a $\ln(W(x)) = o(W(x))$ (c'est $\ln(t) = o(t)$).
Il reste : $W(x) + o(W(x)) = \ln(x)$ quand x tend vers l'infini.
On reconnaît $W(x) \sim \ln(x)$.

IV∼3) Calculez $W(e)$ et justifiez $\int_0^e W(t).dt = e - 1$.

Pour calculer $W(e)$, on doit résoudre l'équation $x.e^x = e$ d'inconnue réelle x plus grande que -1.
On devine une solution *(évidente ?)* : $x = 1$. C'est LA solution : $W(e) = 1$.

Le graphe de W est symétrique du graphe de f.
Prenons le rectangle $x \in [0,\ 1]$ et $y \in [0,\ e]$. Son aire est de e.
On le découpe en graphe de $x \longmapsto f(x)$ pour x de 0 à 1
et graphe de $y \longmapsto W(y)$ pour y de 0 à e.
L'association des deux donne le rectangle :

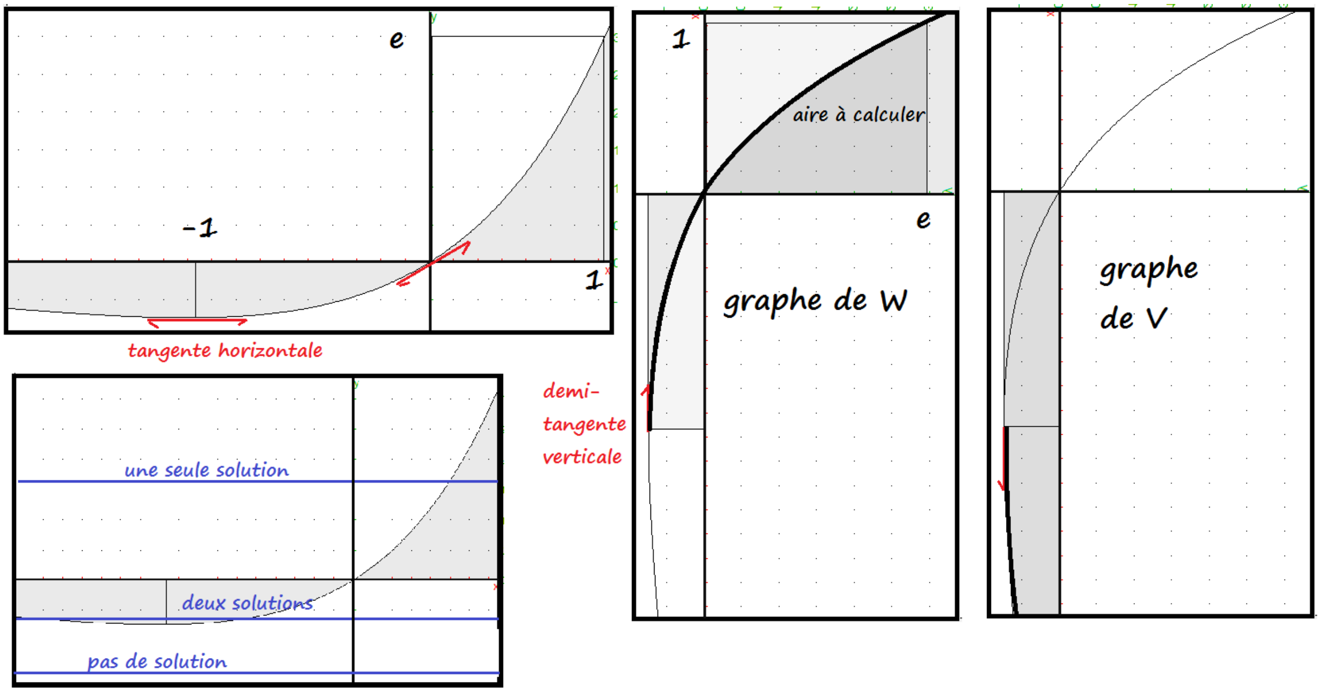
$$\int_{x=0}^{1} f(x).dx + \int_{y=0}^{e} W(y).dy = 1.e$$

On calcule $\int_{x=0}^{1} x.e^x.dx$ par parties : $[(x-1).e^x]_{x=0}^{1} = 1$.
Par soustraction $\int_{y=0}^{e} W(y).dy = e - 1$.

On pouvait aussi changer de variable : $\int_{y=0}^{y=e} W(y).dy = \int_{x=0}^{1} W(f(x)).f'(x).dx$ *en posant* $y = f(x)$.
On a donc $\int_0^1 x.(x+1)..e^x.dx = [(x^2 - x + 1).e^x]_{x=0}^{1} = e - 1$.

IV∼4) Montrez que f réalise un homéomorphisme de $]-\infty,\ -1]$ sur $[-e^{-1},\ 0[$ dont la réciproque sera notée V.

On peut prendre aussi l'autre branche de f : de $]-\infty,\ -1]$ vers son intervalle image.
f est strictement croissante continue, dérivable. On lui trouve une réciproque.
Celle ci s'appelle V.



Rapport du jury :
En Q1 et Q8 entre continuité, stricte monotonie (justifiée) et limite en l'infini il y a souvent au moins un argument manquant.
Le résultat concernant la dérivabilité de la réciproque n'est pas connu.

IV~5) Donnez en fonction de m le nombre de solutions de l'équation $x.e^x = m$ d'inconnue réelle x (nombre noté n_x). Calculez $\int_{-3}^{3} n_x.dx$.

L'équation $f(x) = m$ d'inconnue x peut avoir deux solutions si m est entre $-e^{-1}$ et 0.

m	$m < -e^{-1}$	$m = -e^{-1}$	$-e^{-1} < m < 0$	$0 \leqslant m$
		$W(-e^{-1}) = V(-e^{-1}) = -1$	$V(m) < -1 < W(m)$	$W(m)$
nombre de solutions	0	1	2	1

La fonction $m \longmapsto n(m)$ est donc en escalier.
Son intégrale de -3 à 3 est une somme d'aires de rectangles.

	de -3 à $-e^{-1}$	en $-e^{-1}$	de $-e^{-1}$ à 0	de 0 à 3
valeur	$n(x) = 0$	$n(x) = 1$	$n(x) = 2$	$n(x) = 1$
intégrale	0	rien	$2.e^{-1}$	3

La valeur 1 en un point isolé ne compte pas. la non continuité en 0 ne pose pas de problème.
l'intégrale vaut donc $3 + 2.e^{-1}$.

IV~6) En utilisant V et W, donnez suivant m les solutions de $x.e^x \leqslant m$ d'inconnue réelle x, et illustrez graphiquement les différents cas.

Pour l'inéquation, on a des intervalles :

m	$m < -e^{-1}$	$m = -e^{-1}$	$-e^{-1} < m < 0$	$0 \leqslant m$
solutions	$\emptyset$	$\{1\}$	$[V(m), W(m)]$	$]-\infty, W(m)]$

Rappel : ne pas écrire $\{\emptyset\}$, puisque $\emptyset$ est déjà un ensemble...

IV~7) Pour a et b réels non nuls, donnez le nombre de solutions de l'équation d'inconnue réelle x : $e^{a.x} + b.x = 0$. Exprimez ces solutions à l'aide de W et V.

Comme on suppose b non nul, $e^{a.x} + b.x = 0$ est équivalent à $b.x.e^{-a.x} = -1$.
Comme on suppose a non nul, $e^{a.x} + b.x = 0$ est équivalent à $(-a.x).e^{(-a.x)} = \dfrac{a}{b}$.

a/b	$a/b < -e^{-1}$	$a/b = -e^{-1}$	$-e^{-1} < a/b < 0$	$0 \leqslant a/b$
solutions pour $-a.x$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{V(a/b),\ W(a/b)\}$	$\{W(a/b)\}$
solution pour x	$\emptyset$	$\left\{-\dfrac{1}{a}\right\}$	$\left\{-\dfrac{V(a/b)}{a},\ -\dfrac{W(a/b)}{a}\right\}$	$\left\{-\dfrac{V(a/b)}{a}\right\}$

Rapport du jury :
En Q11 les paramètres a et b sont non nuls, inutile de discuter ces cas particuliers ; le sujet demande explicitement d'utiliser les fonctions V et W.

Une formule d'Abel.

V∼0) *n est un entier naturel donné et a un complexe donné. On pose $A_0 = 1$ et $A_k = \dfrac{X.(X-k.a)^{k-1}}{k!}$ pour tout k de 1 à n.* Montrez que $(A_0,\ A_1, \dots A_n)$ est une base de $(\mathbb{C}_n[X], +, .)$.

Chaque polynôme $A_k$est exactement de degré k. Il appartient donc à $(\mathbb{C}_n[C], +, .)$.
Comme la famille est échelonnée en degré, elle est libre.
Comme elle a le bon cardinal, elle forme une base de $(\mathbb{C}_n[X], +, .)$.

On peut exprimer la famille $(A_0,\ A_1, \dots A_n)$ sur la base canonique.
La matrice est triangulaire supérieure, donc inversible. C'est fini.

V∼1) Démontrez pour k entre 1 et n : $A'_k(X) = A_{k-1}(X-a)$.

On se donne k entre 1 et n. On dérive le produit A_k :

$$A'_k(X) = \frac{(X-k.a)^{k-1} + (k-1).X.(X-k.a)^{k-2}}{k!}$$

Regroupons : $A'_k(X) = \dfrac{(X-k.a)^{k-2}.(X-a.k+(k-1).X)}{k!} = \dfrac{(X-k.a)^{k-2}.(k.X-a.k)}{k!}$.

Simplifions : $A'_k(X) = \dfrac{(X-k.a)^{k-2}.(X-a)}{(k-1)!}$ *(k est non nul, tout va bien).*

Comparons : $A_{k-1}(X-a) = \dfrac{(X-a).\Big((X-a)-(k-1).a\Big)^{k-2}}{(k-1)!} = \dfrac{(X-a).\Big(X-k.a\Big)^{k-2}}{(k-1)!}$. Il y a bien coïncidence.

Rapport du jury :
En Q22 la formule $A'_k(X) = A_{k-1}(X-a)$ a souvent été mal comprise, le membre de droite étant vu comme un produit au lieu d'une composition.
Un argument de degré rendait cette interprétation impossible.

J'allais le dire !

V∼2) Déduisez pour j et k entre 0 et n la valeur de $A_k^{(j)}(j.a)$ (séparer suivant la position de j par rapport à k).

Redérivons : $A_k''(X) = A'_{k-1}(X-a) = A_{k-2}(X-a-a)$.
En tout cas, pour k au moins égal à 2.

On recommence et on effectue une récurrence sur l'indice j de dérivation.
Tant que j est plus petit que k, on a $A_k^{(j)}(X) = A_{k-j}(X-j.a)$.

Il n'est pas obligatoire de faire vraiment la récurrence.
Mais il est impossible de ses contenter du vocable « par récurrence », car on ne sait pas si elle porte sur j ou sur k (voire sur n fixé par l'énoncé et bornant à son tour j et k.

Parvenu à $j = k$ (légitime), on a $A_k^{(k)}(X) = 1_0(X-k.a) = 1$.

Au dejà, il ne reste plus rien, puisqu'on dérive un polynôme constant.

On va pouvoir ensuite estimer en $j.a$. Comme par hasard : $A_{k-j}(X)$ contient un facteur X.
$A_{k-j}(j.a - j.a)$ est donc nul.

	$j < k$	$j = k$	$j > k$
$A_k^{(j)}(X)$	$A_{k-j}(X - j.a)$	$A_0(X - k.a) = 1$	0 (trop dérivé)
$A_k^{(j)}(j.a)$	0	1	0

V∼3) *Soit P un polynôme d'écriture $\sum_{k=0}^{n} a_k.A_k$ sur la base déjà citée.* Montrez $P^{(j)}(j.a) = a_j$ pour tout j de 0 à n.

Tout polynôme P se décompose d'une façon unique sur la base, c'est le mot base qui le dit *(mais il ne se fatigue pas à développer explicitement !)*.

On écrit donc $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k.A_k(X)$. On se fixe un entier j entre 0 et n.

On dérive j fois (par linéarité) : $P^{(j)}(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k.A_k^{(j)}(X)$.

On calcule en $j.a$: $P^{(j)}(j.a) = \sum_{k=0}^{n} a_k.A_k^{(j)}(j.a)$.

Chaque $A_k^{(j)}(j.a)$ est nul, sauf quand justement k et j sont égaux $P^{(j)}(j.a) = a_j.A_j^{(j)}(j.a) + \sum_{k \neq j} a_k.A_k^{(j)}(j.a)$.

Il reste bien $P^{(j)}(j.a) = a_k$.

A lire dans le sens : $a_k = P^{(j)}(j.a)$ qui donne les valeurs des coefficients de P sur la base.
$P(X) = \sum_{j=0}^{n} P^{(j)}(j.a).\frac{X.(X - j.a)^{j-1}}{j!} = P(0) + \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(k.a).\frac{X.(X - k.a)^{k-1}}{k!}$ *en isolant un terme et en changeant le nom de l'indice.*

V∼4) Déduisez : $(x + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.x.(x - k.a)^{k-1}.(y + k.a)^{n-k}$ pour tout triplet (x, y, n) de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{N}$.

On se donne x, y et a (n est déjà donné).

On se dit qu'on doit pouvoir relier $(x + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.x.(x - k.a)^{k-1}.(y + k.a)^{n-k}$ à ce qu'on vient de faire.

y fixé, on pose $P(X) = (X + y)^n$, et on se dit que le premier membre sera $(X + y)^n$.
Le début du second sera $P(0) = y^n$.

La somme du second membre se calcule : $\sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(k.a).\frac{X.(X - k.a)^{k-1}}{k!}$.

On sait dériver X^n k fois, on trouve $n.(n-1)\dots(n-k+1).X^{n-k}$ *(récurrence inutile, c'est du cours)*.

Proprement même : $(X^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}.X^{n-k}$.

On translate : $P^{(k)}(X) = \frac{n!}{(n-k)!}.(X + y)^{n-k}$.

On calcule en $k.a$: $P^{(k)}(k.a) = \frac{n!}{(n-k)!}.(k.a + y)^{n-k}$.

On reporte dans la somme

$$\sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(k.a).\frac{X.(X - k.a)^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}.(y + k.a)^{n-k}.\frac{X.(X - k.a)^{k-1}}{k!}$$

Si on pense à regrouper les factorielles en un binomial, il reste bien $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.(y + k.a)^{n-k}.X.(X - k.a)^{k-1}$.

Il ne reste plus qu'à passer de l'égalité entre polynômes à l'égalité entre fonctions : $\forall x$.

Le terme y^n peut il être ré-inséré à la somme en y voyant $\binom{n}{k}.(y + k.a)^{n-k}.x.(x - k.a)^{k-1}$ pour k égal à 0 ?

V∼5) Déduisez $n.y^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.(-k.a)^{k-1}.(y+k.a)^{n-k}$.

On va passer de $(x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.x.(x-k.a)^{k-1}.(y+k.a)^{n-k}$ à $n.y^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.(-k.a)^{k-1}.(y+k.a)^{n-k}$.
Il n'y a plus de x dans le seconde, c'est que x a pris une valeur. Peut être 0, non ?
Et il y a des exposants plus petits ? N'aurait on pas dérivé ?
On part de $(x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.x.(x-k.a)^{k-1}.(y+k.a)^{n-k}$.
On dérive par rapport à x :

$$n.(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.\Big((x-k.a)^{k-1} + x.(x-k.a)^{k-2}\Big).(y+k.a)^{n-k}$$

Et quand x est nul, c'est parfait.

Rapport du jury :
Le jury a été agréablement surpris par la gestion de certains calculs, par le nombre de candidats ayant su obtenir l'identité d'Abel et son corolaire.
.

Pour ma part, j'espère ne pas croiser de copies où à chaque question vous reprenez tout à zéro, sans profiter de ce qui précède.
De même, je banirai ceux qui tenteront de mener des récurrences brut de décoffrage sans profiter des idées d'Abel...

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24

Dévelolopement limité.

VI∼0) Justifiez : $W(t) = t.(1+W(t)).W'(t)$ pour tout t.

On veut prouver $W(t) = t.(1+W(t)).W'(t)$ alors qu'on ne connaît ni W ni W'.
Partons quand même de $W(t).e^{W(t)} = t$ qui caractérise $W(t)$.
Dérivons : $W'(t).e^{W(t)} + W(t).W'(t).e^{W(t)} = 1$.[6]
Ca prend forme. Factorisons : $W'(t).(1+W(t)).e^{W(t)} = 1$.
Mais que faire de $e^{W(t)}$? Reprenons $Wt(t).e^{W(t)} = t$ qui va servir à nouveau !
On multiplie $W'(t)(1+W(t)).e^{W(t)} = 1$ par t et on remplace : $W'(t).t.(1+W(t)).e^{W(t)} = t = W(t).e^{W(t)}$.
On simplifie par $e^{W(t)}$ jamais nul. Et on a l'équation différentielle vérifiée par W : $t.y'_t.(1+y_t) = y_t$.

En Terminale : on résout des équations différentielles (simples).
En physique : on résout les mêmes, et on tombe sur d'autres qu'on résout de manière approchée car on n'a pas de solutions explicite.
En S.I.I. : on a des équations différentielles, on fait des trucs magiques dessus, et les voilà résolues.
En maths : on part d'une fonction qu'on ne connaît pas et on crée une équation qu'on ne sait pas résoudre.
En info : c'est quoi une équation différentielle ?

VI∼1) Déduisez pour tout n : $W^{(n)}(0) = (-n)^{n-1}$.

Profitons de notre équation différentielle en 0, même si elles laide.
Et dérivons la n fois. C'est classique comme idée.
On écrit à l'étage des fonctions : $Id.(1+W).W' = W$.
On la dérive n fois : $(Id.(1+W).W')^{(n)} = W^{(n)}$.
Le premier membre est la dérivée d'un produit.
On va utiliser la formule de Leibniz. Mais avec trois fonctions : $\boxed{Id \mid (1+W) \mid W'}$
On recopie la formule du multinôme : $(u.v.w)^{(n)} = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!.j!.k!}.u^{(i)}.v^{(j)}.w^{(k)}$.
Mais u est juste $t \longmapsto t$. Ses dérivées vont vite s'en aller :

6. différence entre le cours de maths et le cours de physique : on dit dans les deux cas par rapport à qui on dérive, dans un cas en prcéisant qui était la variable dans la fonction, dans l'autre en écrivant $\frac{d}{dt}$; mais surtout, en maths, avant de dériver, on dit « car on a prouvé par théorème du difféomorphisme que W est dérivable »

dans notre formule il ne restera que $i = 0$ et $i = 1$.

Mieux encore, comme on va calculer en 0, il ne restera que $Id^{(1)}(0) = 1$.
Donc, on ne va conserver que le terme $i = 1$.

$$(Id.(1+W).W')^{(n)}(0) = \sum_{1+j+k=n} \frac{n!}{1!.j!.k!}.Id'(0).(1+W)^{(j)}(0).(W')^{(k)}(0)$$

A présent j et k sont juste liées par la relation $j + k = n - 1$. On peut en faire varier une et suivre l'autre :

$$(Id.(1+W).W')^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{.j!.(n-1-j)!}(1+W)^{(j)}(0).(W')^{(n-1-j)}(0)$$

On profite de la réindexation : $(Id.(1+W).W')^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j}.(n-j).(1+W)^{(j)}(0).W^{(n-j)}(0)$.

On isole un terme (car dériver 1 c'est un peu nul) :

$$(Id.(1+W).W')^{(n)}(0) = \binom{n}{0}.(n-0).(1+W)(0).W^{(n)}(0) + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j}.(n-j).W^{(j)}(0).W^{(n-j)}(0)$$

(vous avez bien joué au jeu des sept différences ?)

En reportant dans l'équation différentielle :

$$W^{(n)}(0) = n.2.W^{(n)}(0) + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j}.(n-j).W^{(j)}(0).W^{(n-j)}(0)$$

On n'est pas peu fier de cette formule, mais en quoi permet elle de calculer chaque $W^{(n)}(0)$?

En tout cas, elle permet de les calculer de proche en proche.

Et on nous donne une autre suite : $((-n)^{n-1})$.

Si on montre qu'elle démarre pareil (c'est le cas) et qu'elle vérifie la même relation de récurrence, on aura gagné.
Et là, il me semble que justement, c'est par la relation d'Abel qu'on démontre qu'en remplaçant $W^{(k)}(0)$ par $(-k)^{k-1}$ ça marce.

Le sujet de Centrale attaquait cette question dans une démarche plus seconde année.
Il définissait $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!}.x^n$, *sous le nom d'une fonction S (existence à prouver au moins sur un intervalle par théorie des séries entières).*
Il demandait de la dériver, et de montrer : $x.(1+S(x)).S'(x) = S(x)$ *en développant les sommes de sommes et en simplifiant par la formule d'Abel.*
Ensuite, il demandait de montrer que W vérifiait la même équation différentielle (ça, je vous l'ai demandé).
Il ne restait qu'à utiliser le bon théorème de seconde année pour garantir l'unicité de la solution de l'équation différentielle.
On avait donc finalement $W(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-k)^{k-1}}{k!}.x^k$ *(somme infinie), ce qui est mieux que* $W(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-k)^{k-1}}{k!}.x^k + o(x^n)$.
Patience, vous serez en Spé bien plus tôt que vous ne le pensez..

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24

Approximation de W.

VII∼0) *Pour tout réel positif x, on définit* $\phi_x = t \longmapsto x.e^{-x.e^{-t}}$ *(plus lisible :* $x.\exp(-x.\exp(-t))$*).* Montrez que $W(x)$ est point fixe de ϕ_x.

Attention aux variables. x est fixé, et on définit une fonction de variable t.
On doit montrer $\phi_x(W(x)) = W(x)$.
On commence par le côté compliqué : $\phi_x(W(x)) = x.e^{-x.e^{-W(w)}}$ et remplaçons $x.e^{-W(x)}$ par $W(x)$ puisque $W(w).e^{W(x)} = x$.

On a donc $\phi_x(W(x)) = x.e^{-W(x)}$.
Remplaçons à nouveau : $\phi_i(W(x)) = W(x)$.

Une fois de plus : savoir utiliser un objet (ici $W(x)$) non pour ce qu'il vaut (on ne le sait pas) mais pour ce qu'il vérifie : $f(W(x)) = x$). C'est la preuve de la présence dans votre crâne d'un cerveau avec des vrais neurones dedans. savoir raisonner par rapport à savoir calculer...

VII∼1) Montrez : $0 \leqslant \phi'_x(t) \leqslant \dfrac{x}{e}$ pour tout réel t (retrouvez $f(\ldots)$ dans ϕ'_x).

ϕ_x est une fonction où la variable est dans une exponentielle d'exponentielle.
On dérive $\phi_x = t \longmapsto x.e^{-x.e^{-t}}$ donc $\phi'_x = t \longmapsto x^2.e^{-t}.e^{-x.e^{-t}}$.
Déjà, $\phi'_x(t)$ est positif ou nul.

Mais on retrouve $f(-x.e^t)$ là dedans ! $\phi'_x(t) = -x.(-x.e^{-t}.e^{-x.e^{-t}}) = -x.f(-x.e^{-t})$.
Or, x est positif et e^{-t}est négatif. le produit est négatif.
Que peut on dire de f sur $\mathbb{R}^-$? Elle est bornée par 0 et $f(-1)$.
On a donc $-e^{-1} \leqslant (-x.e^{-t}.e^{-x.e^{-t}}) \leqslant 0$. On redresse le signe $0 \leqslant x.e^{-t}.e^{-x.e^{-t}} \leqslant e^{-1}$.
On multiplie par x positif : $0 \leqslant \phi'_x(t) \leqslant x.e^{-1}$.

Le sujet proposait de dériver deux fois.
J'ai préféré vous donner l'indice « retrouvez f dans ϕ'_x ».

VII∼2) *On pose $w_0(x) = 1$ et $w_{n+1}(x) = \phi_x(w_n(x))$ pour tout n.* Montrez pour tout x de $[0,\ e]$ et tout n de $\mathbb{N}$: $|w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\dfrac{x}{e}\right)^n.|1 - W(x)|$. Déduisez que la suite $(w_n(x))$ converge vers $W(x)$.

On contrôle la dérivée de ϕ_x ? On contrôle donc les accroissements de ϕ_x.
Pour tout couple $(t,\ u)$: $|\phi_x(t) - \phi_x(u)| \leqslant \dfrac{x}{e}.|t - u|$.

En Terminale : si on connaît la dérivée, on connaît les variations de la fonction.
En Sup : si on connaît la dérivée, on connaît les accroissements de la fonction (et pas juste leur signe)...
...grâce au théorème des accroissments finis.

Vous voyez venir le théorème du point fixe ?
On applique la formule à $t = w_n(x)$ et $u = W(x)$ (point fixe).
On a donc $|\phi_x(w_n(x)) - \phi_x(W(x))| \leqslant \dfrac{x}{e.}.|w_n(x) - W(x)|$ c'est à dire $|w_{n+1}(x) - W(x)| \leqslant \dfrac{x}{e.}.|w_n(x) - W(x)|$.

En mettant en boucle cette propriété (récurrence avec des inégalités entre réels positifs) :

$$|w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{x}{e.}\right)^n.|w_0(x) - W(x)|$$

C'est l'inégalité demandée, sachant $w_0(x) = 1$.

Si on a pris x plus petit que e, le rapport x/e est entre 0 et 1. La suite $\left(\left(\dfrac{x}{e}\right)^n\right)$ converge vers 0, et par encadrement, $(w_n(x))$ converge vers $W(x)$.

Le sujet de concours parlait ensuite de convergence uniforme sur le segmenet $[0,\ a]$, c'est une définition et des théorèmes de Spé. En gros, il faut quae dans la quantification de la convergence de $w_n(x)$ vers $W(x)$, le rang N_ε ne dépende pas de x pris dans $[0,\ a]$.

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24

. Application aux probabilités. .

Un message constitué d'une suite de bits est transmis sur un canal. Cependant, ce canal n'est pas fiable : chaque bit risque d'être inversé, indépendamment des autres, avec la probabilité $1-p$ *(dans* $]0,\ 1[$. *Pour fiabiliser la transmission, on découpe le message et on transmet des blocs de r bits. Chaque bloc comprend à la fois des bits du message d'origine et des bits supplémentaires qui permettent de détecter et corriger une erreur. On note X le nombre d'inversions survenues lors de la transmission d'un bloc de r bits et on admet que X est une variable aléatoire. Pour que la transmission soit suffisamment fiable, on souhaite que la probabilité qu'il y ait au moins deux erreurs dans un même paquet soit faible. Plus précisément, on considère α dans* $]0,\ 1[$ *et on veut réaliser la condition* $P(X \geqslant 2) \leqslant 1-\alpha$. Montrez : $P(X=k) = \binom{r}{k}.(1-p)^k.p^{r-k}$.

On réalise n expriences indépendantes, avec succès ou échec (probabilités p et $1-p$).
C'est ce que l'on appelle « modèle de Bernoulli ». Avec un arbre, on comprend tout.
Sinon, pour avoir k erreurs parmi r expériences, il faut déjà choisir ces k erreurs : k parmi r
que les k cases choisies soient des échecs : $(1-p)$ pour chacune, et donc $(1-p)^k$ pour les k cases « indépendantes »
que les $r-k$ autres cases soient des succès : p pour chacune, donc p^{r-k} pour leur « produit ».
Finalement, on a bien ce $\binom{r}{k}.(1-p)^k.p^{r-k}$.

Vérifiez $\sum_{k=0}^{r} P(X=k) = 1$ et $\sum_{k=0}^{r} k.P(X=k) = r.(1-p)$ *(espérance)*

La somme des probabilités vaut $\sum_{k=0}^{r} P(X=k)$ car il n'y a pas d'autre valeur possible que ce range(k+1).
La formule du binôme valide : cette somme vaut $((1-p)+p)^n$ ce qui fait 1.

L'espérance est la somme $\sum_{k=0}^{r} k.P(X=k)$.

Même sans avoir compris on peut appliquer la formule $\sum_{k=0}^{r} k.\binom{r}{k}.(1-p)^k.p^{r-k}$.

On peut sommer à partir de 1 et remplacer : $k.\binom{r}{k} = k.\dfrac{r!}{k!.(r-k)!} = \dfrac{r.(r-1)!}{(k-1)!}.(r-k)! = r.\binom{r-1}{k-1}$.

On remplace : $E(X) = r.\sum_{k=1}^{r}\binom{r-1}{k-1}.(1-p)^k.p^{r-k} = r.\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}.(1-p)^{j+1}.p^{r-1-j}$.

On sort encore $(1-p)$, et la somme $\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}.(1-p)^j.p^{r-1-j}$ vaut $((1-p)+p)^{r-1}$ce qui fait 1.

Sinon, sans effort. Comme X est une somme de r expériences du même type, l'espérance de la somme est la somme de n espérances égales.
Or, chaque transmission a pour espérance $1-p$ *justement.*

puis $\sum_{k=0}^{n} k^2.P(X=k) - \Big(\sum_{k=0}^{n} k^2.P(X=k)\Big)^2 = r.p.(1-p)$ *(variance).*

Pour la variance, on sort un résultat du cours du même type : la variance de la somme de variables aléatoires indépendantes est la somme des variances.
Sinon, c'est encore du calcul sur les coefficients binomiaux.
Je vous invite à penser à cette astuce : on définit $(p,\ q) \longmapsto \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}.q^k.p^{r-k}$.
C'est l(application $(p,\ q) \longmapsto (q+p)^r$, facile à dériver par rapport à q ou par rapport à p.
On dérive par rapport à q et on applique ensuite en $q = 1-p$.

L'espérance et la variance du modèle de Bernoulli (r lancers de pile ou face) sont des résultats du cours.
Aux concours vous pouviez les sortir directement sanspreuve de votre cerveau.
Mais ils n'étaient pas offerts...

Justifiez : $\sum_{k=2}^{r} P(X=k) \leqslant \sum_{k=2}^{r}\dfrac{k}{2}.P(X=k) \leqslant \dfrac{r.(1-p)}{2}$.

La formule $\sum_{k=2}^{r} P(X=k) \leqslant \sum_{k=2}^{r}\dfrac{k}{2}.P(X=k)$ est un cadeau.

Il suffit de majorer terme à terme : $\dfrac{k}{2}$ est plus grand que 1 quand k dépasse justement 2, et $P(X=k)$ est positif.

La majoration $\displaystyle\sum_{k=2}^{r}\frac{k}{2}.P(X=k)\leqslant\frac{r.(1-p)}{2}$ vient de

- l'égalité $\displaystyle\sum_{k=2}^{r}\frac{k}{2}.P(X=k)=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{r}k.P(X=k)$
- la majoration $\displaystyle\sum_{k=2}^{r}k.P(X=k)\leqslant\sum_{k=0}^{r}k.P(X=k)$ (on ajoute un terme)
- le calcul explicite $\displaystyle\sum_{k=0}^{r}k.P(X=k)=r.(1-p)$ déjà effectué.

Cette formule $P(X\geqslant a)\leqslant\dfrac{E(X)}{a}$ pour une variable aléatoire postivie est dans le cours et s'appelle « inégalité de markov ». D'ailleurs, le sujet de Centrale disait juste pour cette question : en utilisant l'inégalité de Markov, démontrez que si $r\leqslant 2.\dfrac{1-\alpha}{1-p}$ alors la condition $P(X\geqslant 2)\leqslant 1-\alpha$ est vérifiée ».

Montrez que la condition $P(X\geqslant 2)\leqslant 1-\alpha$ est satisfaite pour $r\leqslant 2.\dfrac{1-\alpha}{1-p}$. Montrez que ceci équivaut à $x.e^{x}\leqslant -\alpha.a.e^{-a}$ si on a posé $a=\dfrac{p.\ln(p)}{1-p}$ et $x=r.\ln(p)-a$. *C'est là qu'intervient la fonction de Lambert !*

Rapport du jury :

Ce problème s'intéresse à des fonctions ne s'exprimant pas à l'aide des fonctions usuelles, définies comme réciproques sur certains intervalles de la fonction $x\longmapsto x.e^{x}$.
On établit diverses propriétés de ces fonctions, en particulier le fait que l'une d'elle est développable en série entière au voisinage de zéro.
Deux applications en probabilité sont mises en avant (une seule pour nous).
Ce sujet, d'une longueur très raisonnable, comporte plusieurs parties assez indépendantes et permet de contrôler les connaissances des candidats dans des domaines variés d'analyse et de probabilité de première et seconde année.
Il n'encourage cependant pas le grappillage, chaque question nécessitant soit une bonne compréhension du contexte soit une vraie connaissance du cours. Quelques questions plus difficiles n'ont été comprises que par les meilleurs candidats.
Analyse globale des résultats Les candidats ont su exploiter le sujet pour montrer leurs compétences en choisissant les parties les plus à leurs convenances et ne sont jamais restés bloqués sur un point. La plupart des questions est assez simple et a permis de bien classer les candidats en fonction de leur compréhension de la question, de la précision des connaissances et de la rigueur de la réponse.

Par ailleurs le jury a moins apprécié la présentation des copies, l'écriture et l'abus d'abréviations mystérieuses et, bien pire encore, les contre vérités flagrantes, surtout accompagnées de « d'après le cours », et les escroqueries.
Les meilleurs candidats sont ceux qui prennent le temps de comprendre chaque question et d'argumenter chaque réponse.
.

∘39∘

♯♡ La liste `L` contient tous les "anagrammes" de `123456789`, c'est à dire les nombres formés de ces neuf chiffres, dans un ordre quelconque, de `123456789` à `987654321` en passant par `354289761`.
On tape le script suivant

```
N, P, T, C, S = 0, 0, 0, 0, 0
for nombre in L :
....N += 1
....P += ((nombre %2)==0)
....T += ((nombre %3)==0)
....C += ((nombre %5)==0)
....S += nombre
....O += ((nombre %11)==0)
print(N, P, T, C, S, O)
```

Que lirez vous ?

♯♠ Écrivez un script qui engendre la liste `L`.

On parcourt la liste des anagrammes, et N est un compteur, initialisé à 0.
Pour chaque anagramme lu, le compteur augmente d'une unité. A la fin, il vaut 9! (nombre de termes de la liste).

Quant à P, il augmente de la valeur du booléen « nombre%2==0 ».
Ce booléen réagit suivant que Nombre est multiple de 2 ou pas.
Il vaut False pour un impair (et False, c'est 0).

Il vaut True pour un pair (et True, c'est 1).
L'accumulateur P compte le nombre d'entiers pairs dans la liste L.
Et il y a en a à peu près la moitié.
Comment distinguer les multiples de 2 ? A leur chiffres des unités : 2, 4, 6, 8 (par opposition aux impairs, un peu plus nombreux).
Il y a 8! entiers finissant par *é* dans notre liste (autant que d'entiers finissant par 3, par 4 et ainsi de suite).
Le compteur P va donc donner $4 \times 8!$.

C est plus simple à lire. Il compte les multiples de 5.
Mais les seuls multiples de 5 sont ceux qui se terminent par 0 (impossible ici) ou 5.
Ce sont donc des nombres de la forme $abcdefgh5$ où les lettres de a à h désignent les entiers de 1 à 8 dans un ordre quelconque.
Il y a donc 8! possibilités.
Le compteur$C$ affichera 8! (en fait 40320, car il calcule vraiment).

Pour T, ce sont les multiples de 3.
Et quel est le critère : la somme des chiffres doit être multiple de 3.
Mais la somme des chiffres est toujours la même : $1+2+3+\ldots+9$. Et ceci vaut 45.
Tous les anagrammes sont multiples de 3. La réponse sera 9!.

La somme S est la somme de tous nos entiers.

Aurez vous le courage de poser une grand addition généralisant $\begin{array}{rrr} & 1 & 2 \\ + & 2 & 1 \end{array}$, $\begin{array}{rrrr} & 1 & 2 & 3 \\ + & 3 & 2 & 1 \\ + & 1 & 3 & 2 \\ + & 3 & 1 & 2 \\ + & 2 & 1 & 3 \\ + & 2 & 3 & 1 \end{array}$ et même la somme $\begin{array}{rrrrr} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ + & 4 & 3 & 2 & 1 \\ + & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ + & 4 & 2 & 3 & 1 \\ + & 1 & 3 & 2 & 4 \\ + & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$ avec ses 24 termes.

Toute l'astuce consiste à dire que dès qu'il y a un nombre dans la liste, il y a son « complément ».

Additionnez les deux à deux dans les deux premières : $\begin{array}{rrr} & 1 & 2 \\ + & 2 & 1 \\ - & - & - \\ & 3 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{rrrrrrrr} & 1 & 2 & 3 & & & & \\ + & 3 & 2 & 1 & \rightarrow & 4 & 4 & 4 \\ + & 1 & 3 & 2 & & & & \\ + & 3 & 1 & 2 & \rightarrow & 4 & 4 & 4 \\ + & 2 & 1 & 3 & & & & \\ + & 2 & 3 & 1 & \rightarrow & 4 & 4 & 4 \end{array}$.

Dans la troisième, chaque somme de deux termes vaut 5555. Et il y a 12 sommes.
Dans notre problème à 9 chiffres, on regroupe des 9! éléments deux à deux

123456789	123456798	...	143 597 682	...
987654321	987654312	...	967 513 418	...

A chaque fois, la somme vaut 1111111110 (cette fois, on a un paquet de retenues à propager).
La somme vaut donc $\dfrac{9!}{2} \times 1111111110$.
La valeur est 201599999798400

Avec O, on chasse les multiples de 11.
Le critère : $abcdefg$ est un multiple de 11 si et seulement si la somme alternée $a-b+c-d+e-f+g$ est multiple de 11.

Les scripts qui engendrent les permutations d'une liste sont des classiques... de l'option informatique.

Mais ils ne sont pas simples.

Ici, on va y aller à la force brute.
On veut des nombres à 9 chiffres, donc des nombres entre 10^8 et 10^9. On va utiliser un range.
Mais on est loin de les vouloir tous. On en veut que ceux dont les neuf chiffres sont tous distincts.
La solution : tester si chaque chiffre de 1 à 9 (un `range(1, 10)`) est présent dans l'écriture de l'entier.

```
L = [ ]
for n in range(10**8, 10**9) :
....if Test(n) :
........L.append(n)
```

```
def Test(n) :
....Mot = str(n) #conversion enchaine de caractères
....for k in range(1, 10) : #test de 1 à 9 inclus
........if not(str(k) in Mot) :
............return False
....return True
```

Horriblement long.

Ou alors des boucles for avec des exclusions :

```
for i in range(10) :
....for j in range(10) :
........if j != i :
............for k in range(10) :
................if k != i and k != j :
....................for l in range(10) :
........................if l !=....
```

C'est long aussi.

Le plus court (pour construire la liste des permutations au rang n, on prend celle au rang $n-1$ et à chaque permutation de $[1, \ldots n-1]$, on vient insérer n dedans, à chacun des n emplacements possibles :

```
def permutation(n) :
....if n == 0 :
........return [[]]
....L = permutation(n-1)
....LL = []
....for k in range(n) :
........Lk = [lis[:] for lis in L]
........for lis in Lk :
............lis.insert(k,n)
............LL.append(lis)
....return LL
```

```
for Perm in permutation(5) :
....print(Perm)
```

#création des permutations d'une liste par méthode de Lehmer
#on crée la pyramide [0]x[0,1]x[0,1,2]...[0,1,..n-1]
#qui représente les suites de Lehmer
#pour chaque suite de Lehmer, on crée la permutation associée
#on choisit ici de travailler sur des listes de lettres, afin de pouvoir créer tous les anagrammes d'un mot
#de plus, même si il y a des lettres doubles dans le mot, on s'arrange pour ne pas citer plusieurs fois le même anagramme

```
def Pyramide(n) :
....if n == 1 :
........return [[0]]
....L = []
....for k in range(n) :
........for element in Pyramide(n-1) :
............L.append(element+[k])
....return L

def decode(Lehmer, Liste) :
....L = ""
....Cop = Liste[ : ]
....Lehmer.reverse()
....for index in Lehmer :
........L+=Cop.pop(index)
....return L
```

```
Permut = list(input('Tapez un mot (sans guillemets) : '))
ListePerm=[]
for Lehm in Pyramide(len(Permut)) :
....nouv = decode(Lehm,Permut)
....if not(nouv in ListePerm) :
........ListePerm.append(nouv)

print(len(ListePerm),ListePerm)
```

```
#generateur de permutations par methode de Steinhaus
from tkinter import *
from time import sleep
```

```
def Refresh(L) :#rafraichit les autorisations de deplacements
....for k in range(len(L)) :
........if k==0 :
............if L[0][1]==+1 :
................L[0][2]=L[0][0]>L[1][0]
........elif k==n-1 :
............if L[n-1][1]==-1 :
................L[n-1][2]=L[n-1][0]>L[n-2][0]
........else :
............L[k][2]=L[k][0]>L[k+L[k][1]][0]
....return L
```

```
def CanMove(L) : #indique qui peut bouger vraiment et le plus grand indice autorise
....kmax=-1
....indexk=-1
....for k in range(len(L)) :
........if k==0 :
............if L[0][1]==+1 :
................L[0][2]=L[0][0]>L[1][0]
........elif k==n-1 :
............if L[n-1][1]==-1 :
................L[n-1][2]=L[n-1][0]>L[n-2][0]
........else :
............L[k][2]=L[k][0]>L[k+L[k][1]][0]
........if L[k][2] :
............if L[k][0]>kmax :
................kmax=L[k][0]
................indexk=k
....return(L, kmax !=-1, indexk)
```

```
#initialisation des variables
n = 6 #ne jamais depasser 8 ou 9
etat = [[k, -1, k !=0] for k in range(n)]
Tout=[[k for k in range(n)]] #la permutation identite
WeMove = True
index=0
```

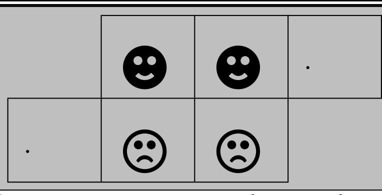
```
#initialisation graphique
Fen=Tk()
Can=Canvas(Fen,width=450,height=300,bg='blue')
Can.pack()
couleur=['red','green','grey','yellow','cyan','lightblue','black','white']
dessin=[None for k in range(n)]
texte=Can.create_text(200,100,text='Steinhaus',font='Arial 30')
compteur=Can.create_text(250,150,text='generateur de permutations',font='Arial 30')
for k in range(n) :
....dessin[k]=Can.create_oval(50+50*k-5*k,30-5*k,50+50*k+5*k,40+5*k,fill='cyan')
Can.update()
sleep(1.7)
```

```
def swap(i,j) : #echange deux elements et memorise la permutation
....etat[i], etat[j] = etat[j], etat[i]
....memoire=[etat[k][0] for k in range(n)]
....Tout.append(memoire) for k in range(n) :
........kk=n-memoire[k]
........Can.coords(dessin[k],50+50*k-5*kk,30-5*kk,55+50*k+5*kk,40+5*kk)
....Can.itemconfig(texte,text=str(memoire))
....Can.itemconfig(compteur,text=str(len(Tout)))
....Can.update()
....sleep(0.1)
```

```
#programme proprement dit
while WeMove : #tant qu'on peut permuter
....etat, WeMove, index = CanMove(etat)
....if WeMove :
........WhoMoves=etat[index][:] #copie de la liste
........sens=WhoMoves[1]
........voisin=index+sens
........swap(index,voisin)
........index=voisin
....ContinueMouvement=True
....for individu in etat :
........if individu[0]>WhoMoves[0] :
............individu[1]=-individu[1]
............ContinueMouvement=False
....etat=Refresh(etat)
....if ContinueMouvement :
........while index in range(1,n-1) and etat[index][0]>etat[index+sens][0] :
............voisin=index+sens
............swap(index,voisin)
............index=voisin
........etat[voisin][2]=False
```

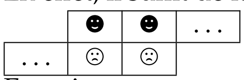
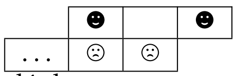
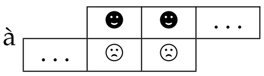
```
for memo in Tout :
....if Tout.count(memo)>1 :
........print('Bug')
....print(memo)
print(len(Tout))
Fen.mainloop()
```

◦40◦



Chaque jeton peut se déplacer d'une case horizontalement ou verticalement. Deux jetons ne peuvent pas occuper la même case. Trois non plus. Il faut échanger les les noirs et les blancs. Pour quelles valeurs de n existe-t-il une solution en n déplacements ?

Comme quatre pions doivent bouger, le nombre de déplacements est forcément au moins égal à 4.
Si on a une solution en n mouvements, alors on a une solution en $n+2$ mouvements.
En effet, il suffit de faire faire un aller retour à un pion avant de commencer

 puis  puis retour à  et là on y va.

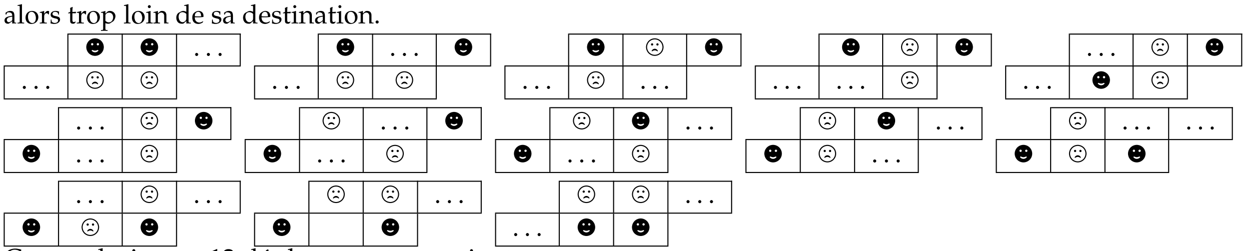
Et ceci compte pour deux déplacements.
Si on trouve une solution en N coups, alors tous les entiers de la forme $N+2.p$ sont aussi solutions.
On notera que si on trouve deux solutions de parité différente, alors on aura tous les entiers à partir d'un certain rang.
Mais les solutions ont forcément un nombre pair de déplacements.

En effet, si on numérote les cases ainsi :

	0	1	0
0	1	0	

- au départ, les deux cases libres ont pour total 0
- à la fin, les deux cases libres ont pour même total 0
- à chaque déplacement, on libère une case d'une parité, et on comble une case de la parité opposée (un pion de case 1 va sur une case 0, ou alors un pion de case 0 va sur une case 1).
- il s'ensuit que si on a déplace $2.p+1$ pions, la somme des deux cases libres est impaire, on ne peut pas avoir gagné.

On élimine donc tous les entiers impairs, ainsi que 0, 2 et 4. sauf à être daltonien et affirmer : c'est bon pour $n=0$.
On montre qu'en six coups, ce n'est pas possible : un pion doit quitter une place pour aller dans un coin, et il est alors trop loin de sa destination.



Cette solution en 12 déplacements convient.
Tous les entiers pairs plus grands que 12 conviennent.
Reste à trouver un argument pour éliminer 8 et 10.

◦41◦

Soient f et g continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $f^2 = g^2$. Montrez qu'on a $\forall x,\ f(x) = g(x)\ ou\ f(x) = -g(x)$.
Montrez qu'on n'a pas forcément $(\forall x,\ f(x) = g(x))\ ou\ (\forall x,\ \ f(x) = -g(x))$.
Montrez que si f et g continues vérifient $\forall x,\ f^2(x) = g^2(x) \neq 0$ alors on a $f = g$ ou $f = -g$.

Pour chaque x on a $(f(x))^2 = (g(x))^2$ et ceci conduit bien par intégrité à $f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$.

Mais le choix du signe dépend de chaque x.

Ce n'est pas forcément le même choix pour tous.

Par exemple : $\forall x,\ (x)^2 = (|x|)^2$, et on sait bien qu'on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = x\ ou\ |x| = -x$$

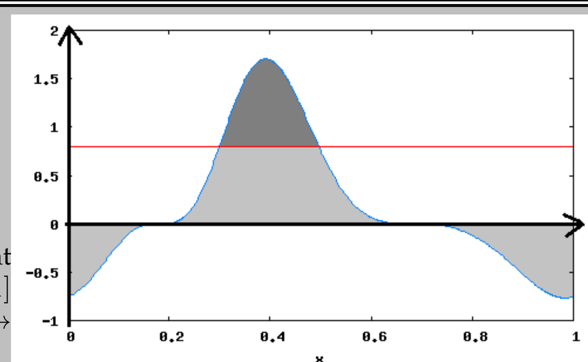
Mais on n'a pas $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = x$ (contre-exemple $x = -1$),
ni $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = -x$ (contre-exemple $x = 1$).

Mais si on ajoute l'hypothèse que f et g ne s'annulent jamais, on ne peutpas passer de $f(x) = g(x)$ pour un x à $f(y) = -g(y)$
pour d'autres y.

La solution ? On va considérer l'application $\frac{f}{g}$ (définie partout).

Elle vérifie $\left(\frac{f}{g}\right)^2 = 1$ et donc $\frac{f(x)}{g(x)}$ vaut 1 ou -1 pour tout x.
Si elle prenait changeait de signe, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle devait s'annuler au moins une fois, ce qui est impossible.
Elle est donc de signe constant, c'est donc qu'elle vaut soit toujours 1, soit toujours -1.
Un des cas condit à $f = g$ et l'autre à $f = -g$.

◦42◦



♡ Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrez qu'il existe au moins un x de $[0, 1]$ vérifiant $f(x) = f(x + 1/5)$ *(supposez par l'absurde que $x \longmapsto f(x+1/5) - f(x)$ est de signe constant sur $[0, 4/5]$).*
♣ Construisez une application continue vérifiant $f(0) = f(1)$ mais telle qu'il n'existe aucun x vérifiant $f(x) = f(x + \sqrt{2}/2)$.

C'est le théorème de la corde. On va montrer le résultat général : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x \in [0, 1],\ f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ qu'on appliquera ensuite à $n = 5$.

On se donne donc n et on définit $x \longmapsto f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$.

C'est une application continue de $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ dans $\mathbb{R}$ (composition, différence).
Si elle ne s'annule pas, elle reste de signe constant, strictement positif ou strictement négatif (contraposée du théorème des valeurs intermédiaires).
La somme $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$ est alors soit strictement positive, soit strictement négative. Si on la met sous forme télescopique, elle vaut $f(1) - f(0)$, c'est à dire 0.
C'est donc contradictoire.
Quelle est la seule hypothèse faite à tort sur laquelle on peut revenir : g ne s'annule pas. C'est donc que g s'annule.
Il existe une corde reliant $(x_0, f(x_0))$ et $\left(x_0 + \frac{1}{n}, f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)\right)$ qui est horizontale.[7].

Attention, ce qui est vrai pour les cordes de longueur 1 (ça c'est $f(0) = f(1)$), $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ et ainsi de suite n'est pas forcément vrai pour des cordes irrationnelles comme $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Mais comment construire un contre-exemple ?

◦43◦ Montrez qu'il ne peut pas exister f continue et bijective de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ (utiliser le T.V.I.).

Supposons qu'une telle application f existe.
Elle est donc continue et injective de $]-\infty, 0[$ dans $\mathbb{R}$. Elle est donc strictement monotone (théorème du cours, corollaire du T.V.I.).

Elle est donc continue et injective de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Elle est donc strictement monotone aussi.

$f(]-\infty, 0[)$ est donc un intervalle non vide.
$f(]0, +\infty[)$ est aussi un intervalle non vide.

7. oui, le résultat n'est pas une égalité en l'air, c'est une histoire géométrique de corde horizontale

Quitte à remplacer f par $-f$ qui serait aussi bijective et continue, on va supposer que f est strictement croissante sur $]0,\ +\infty[$.
On ne sait pas alors si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur l'autre intervalle (et on ne peut pas changer à nouveau le signe, elle changerait de sens de variations sur $]0,\ +\infty[$).

A terminer.