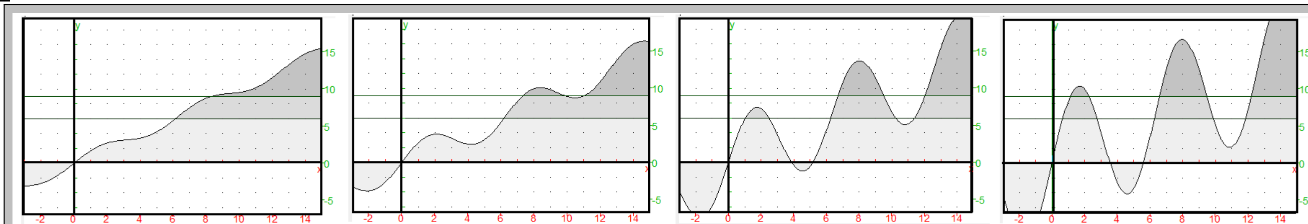
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 29 avril
M.P.S.I.2

2023 2024

TD26

∘0∘



a est un réel positif. Pour quelles valeurs de a l'application $x \longmapsto a.\sin(x) + x$ est elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
Pour quelles valeurs de a l'application $x \longmapsto a.\sin(x) + x$ les équation $f(x) = b$ d'inconnue x ont elles de 1 à 3 solutions ?
Existe-t-il une valeur de a pour laquelle chaque équation $f(x) = b$ d'inconnue x a exactement 3 solutions ?

Pour a égal à 0, on a Id, et elle est évidemment bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Mais en fait, tant que a est plus petit que 1, l'application $x \longmapsto a.\sin(x) + x$ a une dérivée $a.\cos + 1$ qui reste positive (encadrer $a.\cos$ par $-a$ et a et constater que $a.\cos + 1$ reste toujours plus grand que $1 - a$). L'application $x \longmapsto a.\sin(x) + x$ est strictement croissante, elle est alors injective.
Le théorème des valeurs intermédiaires avec les limites aux bornes donne une application bijective de $]-\infty,\ +\infty[$ dans lui même.

Ceci est aussi valable dans le cas $a = 1$. La dérivée s'annule, mais seulement en des points isolés. L'application (classique) $x \longmapsto \sin(x) + x$ est bien une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Dans ce cas néanmoins, le graphe de f_a a une tangente horizontale, et sa réciproque a une « tangente verticale ».

Pour a plus grand que 1, l'application change plusieurs fois de sens de variations, et perd son injectivité.
Rien que sur l'intervalle $[0,\ \pi]$, on dresse un tableau de variations

	0		$Arccos(-1/a)$		π		$2.\pi - Arccos(-1/a)$		$2.\pi$
f_a	$1+a>0$	$\oplus$	0	$\ominus$	$1-a<0$	$\ominus$	0	$\oplus$	$1+a>0$
			maximum local	$\searrow$					$2.\pi$
		$\nearrow$			π	$\searrow$		$\nearrow$	
							minimum local		
	0								

Par exemple, la valeur $f_a(Arccos(-1/a))$ est atteinte une fois en $Arccos(-1/a)$ puis une fois entre $2.\pi - Arccos(-1/a)$ et $2.\pi$ (T.V.I.).

A terminer.

∘1∘

f et g sont deux applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^*$. On suppose $f(x) \sim_{x\to+\infty} g(x)$ *(au fait, pour un demi point déjà, ça veut dire quoi ?)*. Lesquelles de ces affirmations sont alors vraies :

A	si	f est bornée	alors	g est bornée
B	si	f est dérivable en tout point	alors	g est dérivable en tout point
C	si	f est positive en tout point	alors	g est positive en tout point
D	si	f est périodique	alors	g est périodique à partir d'un certain réel
E	si	f est croissante	alors	g est croissante
F	si	f est lipschitzienne	alors	g est lipschitzienne

On définit : $f(x) \sim_{x\to+\infty} g(x)$ signifie $\boxed{\dfrac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow_{x\to+\infty} 1}$ et aussi $\dfrac{g(x)}{f(x)} \longrightarrow_{x\to+\infty} 1$ par symétrie des rôles.

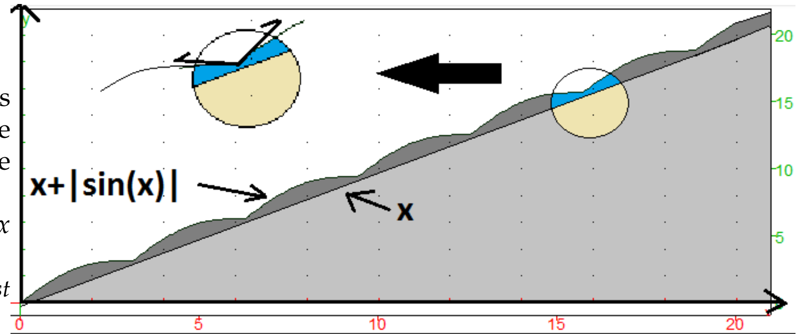
Pour simplifier, on a pris des applications ne s'annulant jamais. Sinon, il faut revenir aux ε et encadrer $f(t).(1-\varepsilon) \leqslant g(t) \leqslant (1+\varepsilon).f(t)$ à partir d'un certain rang...

On en déduit que $\frac{g}{f}$ est bornée par $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ à partit d'un certain réel $A_{1/2}$. Mais avant, sur $[0,\ A_{1/2}]$, le rapport $\frac{g}{f}$ est borné *(continu sur un segment)*. Globalement, $\frac{g}{f}$ est borné sur tout $\mathbb{R}^+$ *(théorème de compacité étendu grâce à une limite à l'infini)*.
Par produit, $f.\frac{g}{f}$ est bornée si f est bornée.

---

f et g sont toutes les deux continues, mais pas forcément dérivables ensemble. Un défaut de dérivabilité sur g ne va pas forcément l'empêcher d'être équivalente à f. Il suffit que le $o(f)$ dans $g(x) = f(x) + o(f(x))$ soit un terme non dérivable.

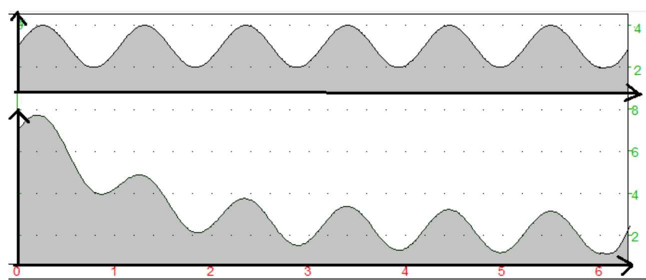
On peut prendre $|\sin|$ qui a des problèmes en tous les multiples de π. Mais c'est une application bornée, « de peu de poids » face à Id par exemple.
On tient un contre-exemple avec $f = x \longmapsto x$ et $g = x \longmapsto x + |\sin(x)|$.
Un dessin fait aussi l'affaire pour convaincre si il est assez explicite.



Pourquoi la positivité de f se transmettrait elle à g ? Vers l'infini, oui, mais avant ? A priori, on pourrait prendre $x \longmapsto x^2 + 1$ et $x \longmapsto x^2 - 1$. La première est positive, et la seconde change de signe entre -1 et 1. Ça ne les empêche pas d'être équivalentes vers $+\infty$.
Mais il y a un détail à regarder. f et g sont continues de $\mathbb{R}^+$ *(intervalle)* dans $\mathbb{R}^*$ *(qui a un trou)*. Ceci force f et g à ne pas s'annuler. Et donc à ne pas changer de signe.
En effet, si g change de signe, par théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule au moins, une fois, ce qui est contradictoire.
f et g sont donc de signe constant. f est positive. Le quotient tend vers 1. g ne peut pas être négative. Elle est donc aussi positive.

La périodicité de f ne se transmet pas forcément à g. Il suffit de perturber f avec un petit terme non périodique, mais s'effaçant devant f.

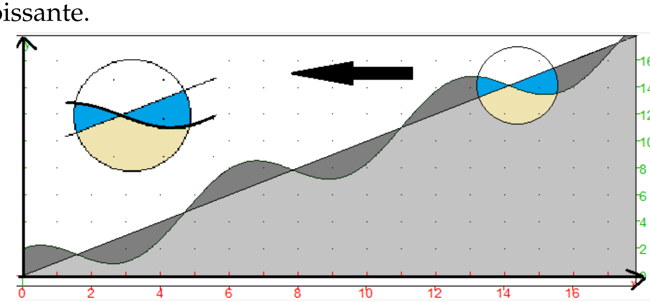
On est obligé de prendre une application continue périodique, donc bornée. On ne prend pas un sinus. Il faut une application qui ne s'annule pas. On prend alors $2 + \sin$. Et la perturbation sera une fonction qui tend vers 0.
Par exemple $x \longmapsto 2 + \sin(x) + \frac{1}{1+x^2} = 2 + \sin(x) + o(1)$.



Le quotient tend vers 1, mais la seconde n'est pas périodique même à partir d'un certain rang. [1]

Pour f croissante, il y a une erreur à ne pas commettre. La négation de g croissante n'est pas « g décroissante ». On ne peut effectivement pas avoir f croissante et g décroissante.

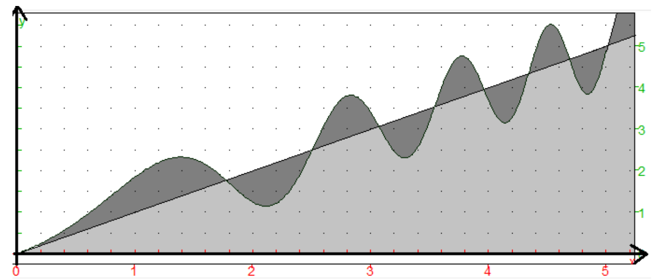
Mais on peut avoir f croissante et g changeant de sens de variations de temps en temps.
Prenons encore $x \longmapsto x$ et perturbons la avec un cosinus. La somme $x \longmapsto x + \cos(x)$ a pour dérivée $1 - \sin$ qui peut s'annuler. Ah, elle ne change pas de signe ? Allez : $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x + 2.\cos(x)$. leur quotient tend bien vers 1. Mais la seconde a un tableau de variations très laid.



---

1. pas si évident si on doit entrer dans les détails, elle pourrait avoir une période « nouvelle ». Mais si elle était périodique, sa dérivée le serait aussi, de même que $g + g''$.

Pour le caractère lipschitzien, restons naïf en parlant de dérivée bornée. Si f a une dérivée bornée, pourquoi celle de g le serait ? Si les variations de f sont « calmes », celles de g peuvent être plus brutales, du moment que f et g partent à la même vitesse.
Perturbons Id (lipschitzienne) par $x \longmapsto \sin(x^2)$ (pas lipschitzienne quand on part vers l'infini). Elles restent quand même équivalentes.



A	f est bornée	g est bornée	oui	produit
B	f est dérivable en tout point	g est dérivable en tout point	non	$x + \lvert\sin(x)\rvert$
C	f est positive en tout point	g est positive en tout point	oui	T.V.I.
D	f est périodique	g est périodique à partir d'un certain réel	non	$2 + \sin(x) + \frac{1}{1+\lvert x\rvert}$
E	f est croissante	g est croissante	non	$x + 2.\cos(x)$
F	f est lipschitzienne	g est lipschitzienne	non	$x + \sin(x^2)$

Les arguments graphiques sont acceptés si ils donnent une bonne compréhension de la chose.
Les pseudos arguments du type « ne se transmet pas forcément » ne sont pas acceptés tant qu'il ne sont pas assortis d'un contre-exemple.
Mes exemples sont nuls en un point alors qu'on voulait des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^*$? On leur ajoute 1.

◦2◦ ♡ Donnez la limite en 0 de $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\ln(1+x)}$, de $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\ln(1-x)}$ et $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\ln(1+x)-\ln(1-x)}$.

Pas de problème d'existence de $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\ln(1+x)}$ tant que x reste entre -1 et 1 et ne prend pas la valeur 0.

Et si on faisait appel aux quantités conjuguées : $\dfrac{(1+x)-(1-x)}{\ln(1+x)}.\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.

On l'écrit même $\dfrac{1}{\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x}}.\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.. Sous cette forme, le passage à la limite ne pose plus de problème (limite d'un taux d'accroissement en 1 du logarithme) : la limite vaut 1.

Pour $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\ln(1-x)}$, peu de changement : $\dfrac{-1}{\dfrac{\ln(1-x)-\ln(1)}{-x}}.\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$. Cette fois la limite vaut -1.

Bricolons de la même façon $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\ln(1+x)-\ln(1-x)} = \dfrac{1}{\dfrac{(\ln(1+x)-\ln(1-x))-(\ln(1)-\ln(1))}{x}}.\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.

Il reste à poser $f = x \longmapsto \ln(1+x)-\ln(1-x)$. On a un taux d'accroissement de cette application en 0.
La limite des taux est alors égale à $\dfrac{1}{1-0}+\dfrac{1}{1-0}$. Cette fois, la limite est $\dfrac{1}{2}$.

Il n'y a pas besoin d'aller chercher ici de gros outils, comme les développements limites.

◦3◦ Un élève écrit : "f est dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f(0) = 1$; on dérive : $f'(0) = 0$". Montrez qu'il a tort.
Un élève écrit : "f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$ et $f(0) = 1$; on dérive : $f'(0) = 0$". Montrez qu'il a raison.

Le premier a totalement tort (et pourtant, on trouve des copies de concours où des élèves dérivent une information qu'on n'a qu'en un point). On rappelle que pour dériver, il faut connaitre l'application au voisinage du point, puisque la dérivée est une histoire de développement limité d'ordre 1.
On sait que $\exp(0)$ est égal à 1, mais quand on dérive, on ne trouve pas 0.
Et visuellement, vous devez voir les deux graphes qui se croisent : exp et $x \longmapsto 1$. Les deux coïncident en 0, mais pas leurs dérivées.
C'est à partir du moment où je l'ai vu ainsi que je me suis dit que c'était vraiment crétin de dériver une relation « en un point ».

Qu'est ce qui change pour le second élève ? Elle est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$ (même pas dérivable, mais à valeurs dans $\mathbb{Q}$).

Et comme $\mathbb{Q}$ est un ensemble où on ne peut jamais relier deux points, f est forcément constante.

Si elle ne l'était pas, elle prendrait une autre valeur a différente de 1 et par théorème des valeurs intermédiaires, elle atteindrait toutes les valeurs entre 1 et a, y compris des irrationnelles (densité de $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Étant constante, elle est dérivable, de dérivée nulle.

Idiotie : j'ai failli proposer comme dernier exercice
Un élève écrit : "f est continu de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$ et $f(0)=1$; on dérive : $f'(0)=0$". Montrez qu'il a tort.
Et la solution est « il n'a pas mis de e à continue ».

∘4∘

♡ Soit f une application continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ ($a<b$). On suppose $\displaystyle\int_a^b f(t).dt=0$. Montrez que f s'annule et change de signe au moins une fois en un point c de $[a,\ b]$ (raisonner par l'absurde, ou par théorème de Rolle).
On suppose de plus $\displaystyle\int_a^b t.f(t).dt=0$. Déduisez que f s'annule en fait au moins deux fois sur $[a,\ b]$ (étudier $\displaystyle\int_a^b (t-c).f(t).dt$).
♡ On suppose $\displaystyle\int_a^b t^k.f(t).dt=0$ pour tout k de 0 à n. Montrez que f s'annule et change de signe au moins $n+1$ fois.

Supposons que f ne s'annule pas. Par contraposée du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[a,\ b]$, elle reste de signe constant.
quitte à remplacer f par $-f$, on va dire qu'elle reste positive.
Mais alors son intégrale est positive.
De plus, comme f est strictement positive, il existe au moins un point où elle est strictement positive. Par continuité, elle le reste sur un intervalle autour de ce point, et l'intégrale est strictement positive.[2]
On tient notre contradiction.

La méthode moins matheuse consiste à introduire l'application $F=x\longmapsto\displaystyle\int_a^x f(t).dt$.
Elle est continue et même dérivable (de dérivée f).
Elle vaut 0 en a (intégrale sur un intervalle réduit à un point) et en b (hypothèse).
L'application dérivable prend la même valeur aux deux extrémités de l'intervalle.
Par théorème de Rolle, sa dérivée s'annule au moins une fois : il existe c vérifiant $F'(c)=0$, c'est à dire $f(c)=0$.

> Pourquoi je ne trouve pas cette preuve si bien en tant que matheux, alors même que tout y est parfaitement rigoureux ?
> Juste, on fait appel à de gros théorèmes (lien entre intégrale et primitive, Rolle), alors qu'il existe une preuve simple reposant juste sur la continuité.
> Si vous avez une âme de physicien, vous dites « oui et alors, du moment qu'on arrive à la réponse, même avec de gros théorèmes, on s'en fout ».
> Et si vous avez une âme d'esthète (et donc de matheux), vous dites « oh, c'est vrai, autant payer le prix minimum, non ? ».

Passons à $\displaystyle\int_a^b f(t).dt=\int_a^b t.f(t).dt=0$. Il faut montrer que f s'annule au moins deux fois.
Avec $\displaystyle\int_a^b f(t).dt=0$, on vient de montrer qu'il existait c vérifiant $f(c)=0$.
Mais est-ce le seul ?
Par l'absurde, si c'est le seul, alors f reste de signe constant sur $[a,\ c]$, puis sur $[c,\ b]$ (contraposée du théorème des valeurs intermédiaires encore).
Et elle change de signe en c puisque sinon $\displaystyle\int_a^b f(t).dt$ serait strictement positive (ou strictement négative).

---

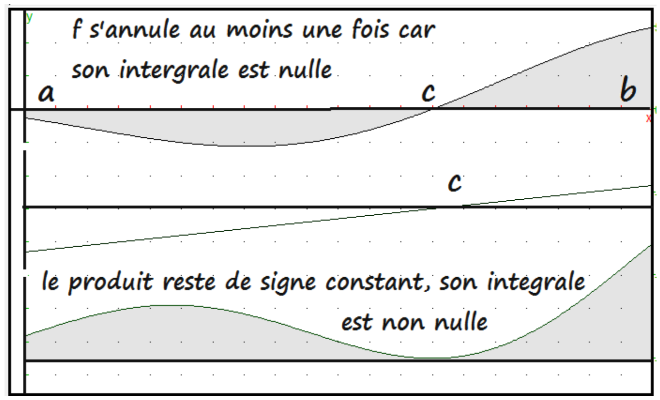
2. rappelons que $x\longmapsto\left\{\begin{array}{ccc}1 & si & x=1\\ 0 & sinon & \end{array}\right|$ est positive, strictement en un point, mais son intégrale est nulle...

Mais alors, f et $x \longmapsto x - c$ changent de signe en même temps en c.

Le produit $t \longmapsto f(t).(t-c)$ reste donc de signe constant sur $[a,\ b]$.

Or, son intégrale est $\int_a^b t.f(t).dt - c.\int_a^b f(t).dt$ par linéarité. Et elle vaut 0.

On tient notre contradiction...



La résultat général se prouve ensuite par récurrence sur n.

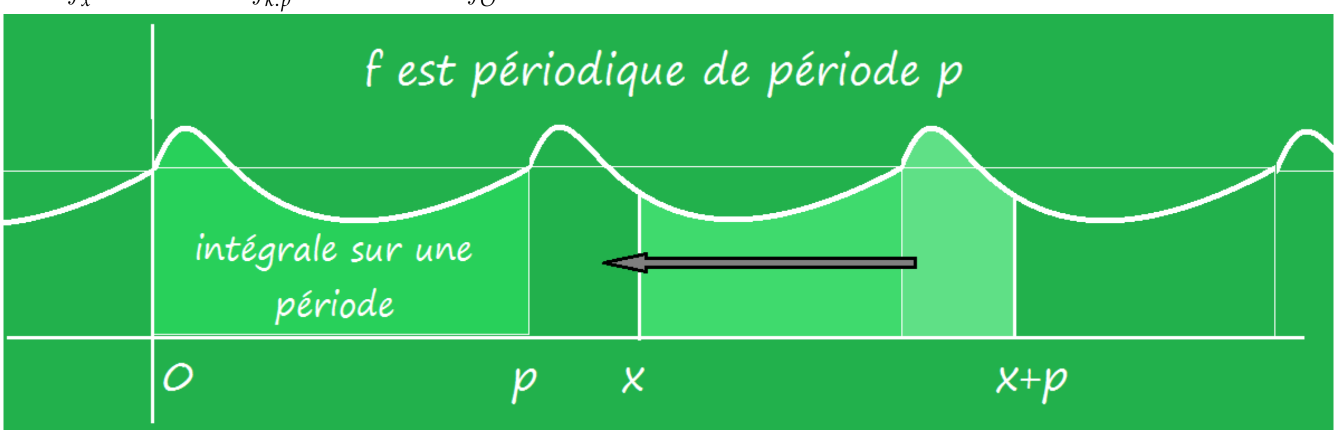
∘5∘ Soit f continue, périodique de période p. Dérivez $x \longmapsto \int_x^{x+p} f(t).dt$. Interprétez.

On note F une primitive de f et on doit dériver $x \longmapsto F(x+p) - F(x)$. On trouve $x \longmapsto f(x+p) - f(x)$.
Par périodicité, cela fait 0.

Par théorème des accroissements finis, on obtient que $x \longmapsto \int_x^{x+p} f(t).dt$ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

La quantité $\int_x^{x+p} f(t).dt$ ne dépend pas du choix de x. C'est la valeur de f sur une période.

Et on peut s'en convaincre par relation de Chasles et changement de variable $t \longmapsto t - p$.
On a $\int_x^{x+p} f(t).dt = \int_{k.p}^{(k+1).p} f(t).dt = \int_O^p f(t).dt$.



∘6∘ ♡ Résolvez l'équation $T_7(x) = \dfrac{e^{10}+1}{2.e^5}$ d'inconnue réelle x *(trouvez une solution et montrez aussi qu'il n'y en a qu'une)*.
Oui, polynômes de Tchebychev.

On résout sans en avoir l'air$T_7(x) = ch(5)$.
Or, on sait : $T_7(ch(\theta)) = ch(7.\theta)$.
Si on change de variable en posant $x = ch(\theta)$ (en cherchant a priori x dans $[1,\ +\infty[$), l'équation devient $ch(7.x) = ch(5)$.
On trouve $7.x = 5$.
On a donc une solution $S_x \cap [1,\ +\infty[= \left\{\dfrac{5}{7}\right\}$

Mais on a aussi $S_x \cap [-1,\ 1] = \emptyset$ car $\forall x \in [-1,\ 1],\ T_7(x) \in [-1,\ 1]$ et donc $\forall x \in [-1,\ 1],\ T_7(x) < \dfrac{e^{10}+1}{2.e^5}$.
De même $S_x \cap]-\infty,\ -1] = \emptyset$ car $\forall x \in]-\infty,\ -1],\ T_7(x) \in]-\infty,\ -1]$ (par imparité) et donc $\forall x \in]-\infty,\ -1],\ T_7(x) < \dfrac{e^{10}+1}{2.e^5}$.

Bilan : $\boxed{S_x = \left\{\dfrac{5}{7}\right\}}$

∘7∘ On se donne u_0 positif. On pose $u_{n+1} = \dfrac{e^{-2.u_n}}{n+1}$ pour tout n. Montrez que la suite u est positive et tend vers 0.
Vérifiez sur un exemple comme $u_0 = 0$ avec votre calculatrice *(ou celle du voisin)* que u n'est pas monotone.
On pose alors $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k.u_k$, $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (u_k)^2$. Lesquelles sont monotones. Que pensez vous de l'affirmation : B_n est croissante si n est impair.
Montrez : $u_k \geqslant \dfrac{1}{e.(k+1)}$. Déduisez que (A_n) diverge.
Montrez : $u_k \leqslant \dfrac{1}{k+1}$. Déduisez que (C_n) converge.
♠ Montrez que $\left(B_n - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1}\right)$ converge.
Déduisez que (B_n) converge.

∘8∘ Donnez les limites quand n tend vers $+\infty$: $(n^{\ln(n)/n})$, $\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)^n$, $\left(1 + \dfrac{\ln(n)}{n}\right)^n$.

Quand on a a^bavec a et b variables, on revient IMPÉRATIVEMENT aux logarithmes. Faut il vous l'écrire dans un formulaire, dans un pense bête, dans un truc à réviser ?
Ou l'avez vous écrit spontanément ?
Ou l'avez vous juste mémorisé ?
Ou l'avez vous anticipé en disant « beh oui, c'est normal... ».

La première a pour logarithme $\dfrac{\ln(n)}{n}.\ln(n)$.
Par croissances comparées, $\dfrac{\ln(n)}{n}$ tend vers 0. Et $\dfrac{\ln(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ aussi.
On sort le facteur 2 : $\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = o(1)_{n\to+\infty}$.
On élève au carré : $\dfrac{(\ln(n))^2}{n} = o(1)_{n\to+\infty}$.
On repasse à l'exponentielle : $(n^{\ln(n)/n})$ converge vers 1.

Passage au logarithme aussi pour la seconde (indéterminée (?) en 0 puissance l'infini).
$n.\ln\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$: n tend vers $+\infty$, et $\ln\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$ tend vers $-\infty$.
Finalement, le produit tend vers $-\infty$ et $\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)^n$ tend vers 0.

$\left(1 + \dfrac{\ln(n)}{n}\right)^n$ a pour logarithme $n.\ln\left(1 + \dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.
On l'écrit $n.\left(\dfrac{\ln(n)}{n} + 0\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right)$ et même $\ln(n) + o(\ln(n))$.
L'ensemble tend vers $+\infty$. Et la troisième limite est infinie aussi.

∘9∘ Montrez que $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}\right)$ sont adjacentes.

On les nomme (a_n) et (b_n).
$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$

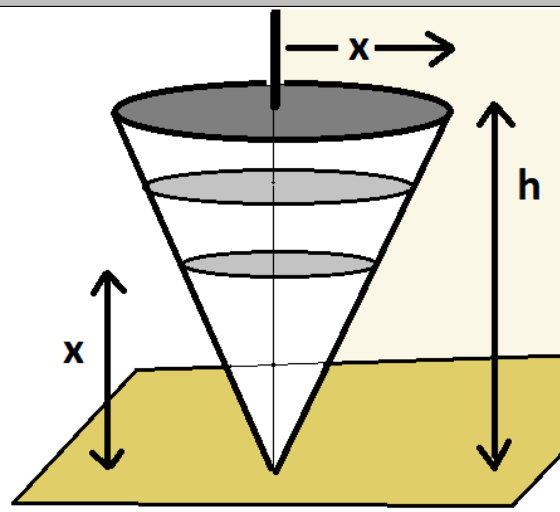
Nom propre : L'argument est relation de Chasles, et non pas télescopage.

$A_{n+1} =$	$\frac{1}{1^2}$	$\dots$	$\frac{1}{(n-1)^2}$	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{(n+1)^2}$
$A_n =$	$\frac{1}{1^2}$	$\dots$	$\frac{1}{(n-1)^2}$	$\frac{1}{n^2}$	

Pour b_n c'est plus lourd : $b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k^2} - \left(\dfrac{1}{n} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}\right) = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n}$
On réduit au dénominateur comme : $(n+1)^2.n$ (et surtout pas $(n+1).(n+1)^2.n$ comme l'écrivent les mauvais élèves).
Le numérateur vaut alors $n.(n+1) + n - (n+1)^2$. Il se simplifie en -1 et il est négatif.

Enfin, la différence $b_n - a_n$ est positive et tend vers 0.
Les deux suites sont adjacentes. Elles convergent et ont la même limite.
Mais rien ne dit ce que cette limite vaut.

◦10◦ On dispose d'un cône à section circulaire (rayon r) de hauteur (verticale) h. On doit le découper en trois parts de volumes égaux par deux découpes horizontales. A quelle hauteur les situez vous ?



Le volume d'un cône est $\frac{1}{3}.(aire\ de\ base\ fois\ hauteur)$.
Pour le cône initial : $\frac{\pi.r^2.h}{3}$. Si on le coupe à hauteur x à parti du sommet, la hauteur devient x, et l'aire de la section devient $\pi.\left(r.\frac{x}{h}\right)^2$. Le volume du petit cône est donc $\frac{\pi.r^2.h}{3}.\left(\frac{x}{h}\right)^3$ (ce cube se comprend : trois dimension).
Pour récupérer un tiers du volume total, on coupe à $x = \sqrt[3]{1/3}$.
Pour qu'il ne reste en bas que un tiers du volume total, on coupe donc pour qu'il reste en haut deux tiers : $\sqrt[3]{2/3}$.
Les découpes sont à 87 pour cent de la hauteur et à 69 pour cent.

◦11◦ Vérifiez $\sqrt{n!} \ll n^{n/2} \ll n! \ll n^n$ quand n tend vers l'infini (utilisez le lemme classique).

On va utiliser le lemme.
On pose $u_n = \frac{n!}{n^n}$. On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
On trouve $\frac{(n+1)!}{(n+1)^n}.\frac{n^n}{n!} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.
ce rapport tend vers $\frac{1}{e}$, plus petit que 1.
Par lemme de comparaison logarithmique, (u_n) tend vers 0. C'est la définition de $n! \ll n^n$.

Mais en passant à la racine, $\sqrt{n!} \ll n^{n/2}$.

On passe cette fois à $v_n = \frac{n^{n/2}}{n!}$.

On calcule $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^{(n+1):/2}}{(n+1)!}.\frac{1}{\frac{n^{n/2}}{n!}} = \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{(n+1)}.\frac{1}{n^{n/2}} = \frac{(n+1)^{(n-1)/2}}{n^{n/2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/2}}{n+1}$.

Le numérateur $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2}$ converge vers $e^{1/2}$.
Le dénominateur expédie tout vers 0.
Le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ tend vers 0, c'est bon, $v_n$tend vers 0.

◦12◦ ♡ a et b sont deux réels strictement positifs donnés. Déterminez la limite quand x tend vers 0 de $\frac{a^x - b^x}{x}$.

Forme indéterminée. Oui.
Comment la lever ?
Avec des développements limités et le retour à la bonne forme :

$$\frac{a^x - b^x}{x} = \frac{e^{x.\ln(a)} - e^{x.\ln(b)}}{x} = \frac{(1 + x.\ln(a) + o(x)) - (1 + x.\ln(b) + o(x)}{x} = \ln(a) - \ln(b) + o(1)$$

La limite vaut $\ln(a) - \ln(b)$.

Avec la règle de l'Hôpital.
On a une forme indéterminée, on convertit le quotient en quotient des dérivées. En fait, pour tout x, il existe c entre 0 et x vérifiant

$$\frac{a^x - b^x}{x} = \frac{\ln(a).a^x - \ln(b).b^x}{1}$$

si si : $x \longmapsto a^x$ c'est $x \longmapsto e^{x.\ln(a)}$ et ça se dérive en $x \longmapsto \ln(a).e^{x.\ln(a)}$.
Quand x tend vers 0, c tend aussi vers 0 et la forme indéterminée ne l'est plus : la limite existe, et elle vaut $\ln(a) - \ln(b)$.

Avec un taux d'accroissement.
On pose $f = x \longmapsto a^x - b^x$. On a $f(0) = 0$.
On a donc $\dfrac{a^x - b^x}{x} = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ et ce quotient tend vers $f'(0)$ c'est à dire... $\boxed{\ln(a) - \ln(b)}$

∘13∘ Le théorème de convergence logarithmique dit « soit (a_n) une suite, on suppose que $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ converge vers une une limite λ dans $[0, 1[$, on déduit que (a_n) converge vers 0 ». Un élève dont je tairai le nom[a] a inventé une réciproque. Montrez qu'il a tort. Et dites moi qui c'est.
Mais si (a_n) est monotone ?

a. à vous d'en inventer un qui fasse un mauvais calembour

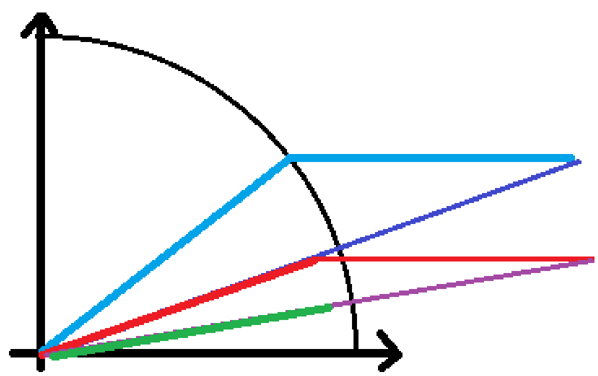
La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge vers 0.
Mais le rapport de deux termes tend vers 1.

Et la suite $(2^{(-1)^n - n})$ converge aussi vers 0 (c'est $(2^0, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^{-4}, 2^{-3}, 2^{-6}, 2^{-5}, \dots)$.
Et le rapport de deux termes consécutifs vaut tantôt 2 tantôt $\dfrac{1}{4}$. Il ne converge pas...

La suite du premier exemple converge vers 0 en étant monotone. Que voulez vous de plus !

∘14∘ z_0 est un complexe donné, on définit $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$. Donnez module et argument de z_n pour tout n (oui, ici, ce n'est surtout pas la forme cartésienne qui va servir).
Montrez que $(|z_n|)$ et $(Arg(z_n))$ convergent.

On pose $z = \rho.e^{i.\theta}$ et on calcule : $\dfrac{|z| + z}{2} = \rho.\dfrac{1 + e^{i.\theta}}{2} = \rho.\dfrac{e^{i.\theta/2} + e^{-i.\theta/2}}{2}..e^{i.\theta/2} = \rho.\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right).e^{i.\theta/2}$.



Si on écrit donc $z_n = \rho_n.e^{i.\theta_n}$ alors on a $\rho_{n+1} = \rho_n.\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$ et $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$.

Par récurrence évidente : $\theta_n = \dfrac{\theta_0}{2^n}$.
On reporte alors :
$\rho_n = \rho_0.\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\dfrac{\theta_k}{2}\right) = \rho_0.\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\dfrac{\theta_0}{2^{k+1}}\right)$.

Peut on faire quelquechose de ce produit ?
Oui. Un classique. On le multiplie par $\sin\left(\dfrac{\theta_0}{2^n}\right)$ « à droite » :

$$\rho_n.\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \rho_0.\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta_0}{4}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n-1}}\right).\cos\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right).\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)$$
$$\rho_n.\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \rho_0.\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta_0}{4}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n-1}}\right).\sin\left(\frac{2.\theta_0}{2^n}\right).\frac{1}{2}$$
$$\rho_n.\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \rho_0.\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta_0}{4}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n-1}}\right).\sin\left(\frac{\theta_0}{2^{n-1}}\right).\frac{1}{2}$$
$$\rho_n.\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \rho_0.\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta_0}{4}\right)\dots\sin\left(\frac{\theta_0}{2^{n-2}}\right).\frac{1}{4}$$

jusqu'à $\rho_n.\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \rho_0.\sin(\theta_0).\frac{1}{2^n}$

Mais le premier membre est équivalent à $\rho_n.\frac{\theta_0}{2^n} = \rho_0.\sin(\theta_0).\frac{1}{2^n}$ quand n tend vers l'infini (équivalent $\sin(\theta) \sim \theta$ en 0.

On simplifie : ρ_n tend vers $\rho.\frac{\sin(\theta)}{\theta}$.

On a donc une limite : $\rho.\frac{\sin(\theta)}{\theta}.e^{i.0}$ c'est à dire $\rho.\frac{\sin(\theta)}{\theta}$.

∘15∘

Faux : si u_n tend vers a quand n tend vers l'infini, alors $u_{n+1}.u_{n+2}\ldots u_{2n}$ tend vers a^n quand n tend vers $+\infty$.
Vrai ou faux : si u_n tend vers $a > 1$ quand n tend vers l'infini, alors $u_{n+1}.u_{n+2}\ldots u_{2n}$ est équivalent à a^n quand n tend vers $+\infty$.

Première partie de la question : on tend vers une limite, et pas vers une autre suite qui bouge !

Deuxième partie de la question : on doit étudier le quotient $\frac{u_{n+1}.u_{n+2}\ldots u_{2n}}{a^n}$.
On regarde son logarithme : $\ln(u_{n+1}) + \ln(u_{n+2}) + \ldots \ln(u_{2.n}) - n.\ln(a)$.
On y lit une moyenne de Cesàro ?

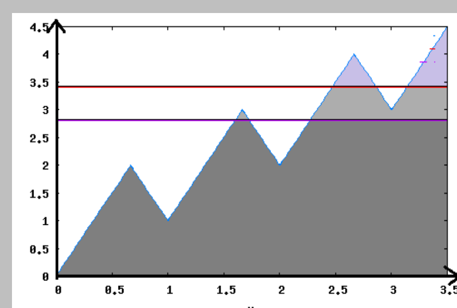
$$n.\frac{(\ln(u_{n+1}) - \ln(a)) + (\ln(u_{n+2}) - \ln(a)) + \ldots + (\ln(u_{n+n}) - \ln(a))}{n}$$

Le quotient tend bien vers 0. mais la forme redevient indéterminée.
Il n'est pas dit que ce produit va tendre vers 0.

Et on peut aller chercher quelquechose de simple : prenons (u_n) qui tend vers 1.

∘16∘

♣ On définit : $f = x \longmapsto 2 - |3.x - 2|$ et $g = x \longmapsto [x] + f(x - [x])$. Représentez f et g. Montrez que g est continue et lipschitzienne.

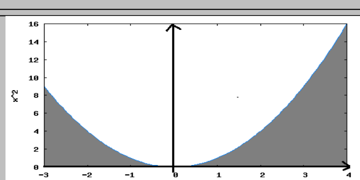
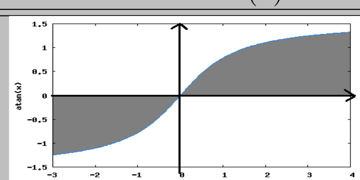
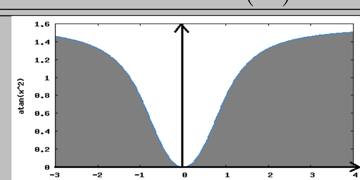


Montrez que pour tout λ réel l'équation $g(x) = \lambda$ d'inconnue x a exactement trois solutions.
Montrez qu'il n'existe pas d'application h continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel λ l'équation $h(x) = \lambda$ ait exactement deux solutions.

A faire.

∘17∘

Parmi ces trois applications, combien sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$	$x \longmapsto Arctan(x)$	$x \longmapsto Arctan(x^2)$
		

$x \longmapsto x^2$	$x \longmapsto Arctan(x)$	$x \longmapsto Arctan(x^2)$
pas lipschitzienne	lipschitzienne	lipschitzienne
dérivée non bornée	dérivée bornée	dérivée bornée

Sinon, « à la main »[3], pour $x \longmapsto x^2$, on écrit la négation :

$$\forall K,\ \exists(a,\ b)\ |a^2 - b^2| > K.|a - b|$$

Pour K donné, il suffit de choisir $a = K + 1$ et $b = 0$.

3. ce qui se traduit par « avec son cerveau »

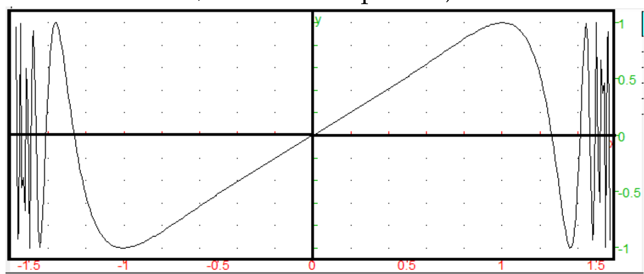
Pour $Arctan$, on borne la dérivée, ou on écrit (ce qui revient au même) :

$$\Big|Arctan(b) - Arctan(a)\Big| = \Big|\int_a^b \frac{dt}{1+t^2}\Big| \leqslant \Big|\int_a^b dt\Big| = |b-a|$$

Pour bornée $x \longmapsto \dfrac{2.x}{1+x^4}$ (dérivée de la dernière), on en dresse le tableau de variations.

◦18◦ **Qui, de $\theta \longmapsto \sin(\tan(\theta))$ et $\theta \longmapsto \tan(\sin(\theta))$ est lipschitzienne sur $]-\pi/2,\ \pi/2[$?** La première ne l'est pas. Certes le sinus reste borné, mais la tangente le fait osciller de plus en plus vite.
On prend $x_n = Arctan(2.n.\pi)$ et $y_n = Arctan\Big(2.n.\pi + \frac{\pi}{2}\Big)$.
Ces deux valeurs sont dans $]-\pi/2,\ \pi/2[$ (très proche de l'extrémité droite, là où tout se passe...).

On calcule $\sin(\tan(x_n)) = 0$ et $\sin(\tan(y_n)) = 1$.
De x_n à y_n la fonction grimpe de 1, alors que x_n et $y_n$sont très proches.
Le taux d'accroissement $\dfrac{|f(y_n) - f(x_n)|}{|y_n - x_n|}$ vaut $\dfrac{1}{|y_n - x_n|}$ et tend vers $+\infty$ (dénominateur tendant vers $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}$).
Quel que soit K donné, il existe donc au moins un n vérifiant $\dfrac{1}{|y_n - x_n|} > K$.
C'est lui qu'on va prendre.



Un logiciel graphique ne peut pas rendre compte du phénomène. Il se perd en pi/2, n'arrivant pas à avoir assez de points pour tracer une sinusoïde accélérée...

La seconde l'est.
sinest lipschitzienne de rapport 1.
$\sin(x)$ reste entre -1 et 1.
Et tan est lipschitzienne sur $[-1,\ 1]$ (dérivée bornée).

◦19◦ **Montrez que $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \cos(\sqrt{2}.x)$ sont périodiques.
On suppose que $x \longmapsto \cos(x) + \cos(\sqrt{2}.x)$ est périodique de période p. Montrez alors $\cos(p) + \cos(\sqrt{2}.p) = 2$.
Déduisez $\cos(p) = 1$ et $\cos(\sqrt{2}.p) = 1$. Concluez.**

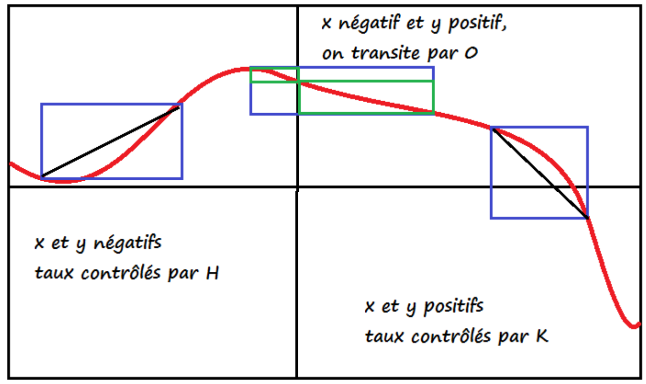
◦20◦ **♡ Montrez que si f est lipschitzienne de $]-\infty,\ 0]$ dans $\mathbb{R}$ (rapport H) et de $[0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ (rapport K) alors elle l'est de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.**
On écrit deux hypothèses et une conclusion cherchée :

H^-	$\forall(x,\ y) \in \mathbb{R}^-,\ |f(y) - f(x)| \leqslant H.|y-x|$
H^+	$\forall(x,\ y) \in \mathbb{R}^+,\ |f(y) - f(x)| \leqslant K.|y-x|$
?	$\forall(x,\ y) \in \mathbb{R},\ |f(y) - f(x)| \leqslant R.|y-x|$

La rapport sera bien $R = Max(H,\ K)$.
Mais il y a quatre cas à traiter pour x et y dans $\mathbb{R}$:

	$x \leqslant 0$	$x \geqslant 0$
$y \leqslant 0$	$|f(y) - f(x)| \leqslant H.|y-x| \leqslant Max(H,K).|y-x|$	ah oui tiens !
$y \geqslant 0$	fallait y penser	$|f(y) - f(x)| \leqslant K.|y-x| \leqslant Max(H,K).|y-x|$

Prenons x négatif et y positif.
On intercale 0 entre x et y.
On écrit $|f(y) - f(x)| = |f(y) - f(0) + f(0) - f(x)| \leqslant |f(y) - f(0)| + |f(0) - f(x)|$.



Comme y et 0 sont positifs, on peut majorer $|f(y)-f(0)| \leqslant K.|y-0| \leqslant Max(H,K).|y| = Max(H,K).y$.
Comme x et 0 sont négatifs, on peut majorer $|f(0)-f(x)| \leqslant H.|x-0| \leqslant Max(H,K).|x| = Max(H,K)(-x)$.

On somme donc : $|f(y)-f(x)| \leqslant Max(H,K).(y-x) = Max(H,K).|y-x|$.
L'autre cas est totalement symétrique...

∘21∘ Montrez que si f est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $|f|$ l'est aussi.
Montrez que $x \longmapsto (-1)^{[x]}$ n'est pas lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais que sa valeur absolue l'est aussi.

On suppose $|f|$ lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (rapport K), et continue.
On se donne a et b. Montrez que si $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe, alors on a $|f(b)-f(a)| \leqslant K.|b-a|$.
On les suppose cette fois de signes opposés. Montrez qu'il existe c entre a et b vérifiant $f(c)=0$. Montrez alors

$$|f(b)-f(a)| \leqslant |f(b)|+|f(a)| \leqslant K.|c-b|+K.|c-a| \leqslant K.|b-a|$$

Concluez : f est à son tour lipschitzienne.

A faire.

∘22∘ ♡ Montrez que $x \longmapsto \tan(x)$ est lipschitzienne de $[-\pi/3,\ \pi/3]$ dans $\mathbb{R}$ mais pas de $[0,\ \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ (on pourra montrer que sinon, elle serait bornée).

$$|\tan(x)-\tan(y)| = \left|\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right|$$

$$|\tan(x)-\tan(y)| = \left|\frac{\sin(x).\cos(y)-\sin(y).\cos(x)}{\cos(x).\cos(y)}\right|$$

$$|\tan(x)-\tan(y)| = \left|\frac{\sin(x-y)}{\cos(x).\cos(y)}\right|$$

$$|\tan(x)-\tan(y)| \leqslant \left|\frac{\sin(x-y)}{\cos(\pi/3).\cos(\pi/3)}\right|$$

$$|\tan(x)-\tan(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{\cos^2(\pi/3)}$$

Du pur raisonnement de maths. Juste de la trigonométrie et des majorations dans le bon sens...
Avez vous cette approche, ou sortez vous de gros théorèmes ? Êtes vous matheux ou...

Si $f$est K lipschitzienne de $[0,\ \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$, alors $|f(x)-f(0)| \leqslant K.|x-0| \leqslant K.\frac{\pi}{2}$.
L'application serait bornée...

∘23∘ Montrez que si f et $[f]$ sont lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors f est bornée (raisonnez, n'écrivez pas plein de formules).

Mais ! La partie entière fait des sauts aux abscisses entières. Elle n'est donc pas continue.
Donc pas lipschitzienne.
Pour que $[f]$ reste lipschitzienne, il faut que f reste bornée entre deux entiers. Donc bornée.

∘24∘ C'est drôle, mais il y a un multiple de 13 dont la somme des chiffres vaut 13 : $13 \times 19 = 247$ et $2+4+7=13$. Et c'est pareil pour 19 : $19 \times 46 = 874$ et $8+7+4=19$. Trouvez une solution pour 10. Une solution pour 20. Trouvez une solution pour 25. Et pour 22. Soit par un programme Python. Soit avec votre cervelle.

On cherche un multiple de 10 dont la somme des chiffres vaut 10 : par exemple $\boxed{190}$

Et un multiple de 20 dont la somme des chiffres vaut 20 ? Son dernier chiffre est 0 et son avant dernier est pair : $\boxed{3980}$ par exemple.

On cherche un multiple de 25 dont la somme des chiffres vaut 25.
Or, les multiples de 25 suivent un schéma assez simple dans leur écriture décimale.

	$n = 4.p$	$n = 4.p + 1$	$n = 4.p + 2$	$n = 4.p + 3$
$n \times 25$	$100.p$	$100.p + 25$	$100.p + 50$	$100.p + 75$
écriture	$\overline{p00}$	$\overline{p25}$	$\overline{p50}$	$\overline{p75}$

Il suffit ensuite de trouver un entier p dont la somme des chiffres vaut 25 et c'est gagné pour la première colonne.
Mais on peut aussi demander « somme des chiffres de p égale à 13 » et prendre $4.p + 3$.
Par exemple $9 + 9 + 7 = 25$ donc avec $(4.997) \times 25$ on a $\boxed{99700}$ dont la somme des chiffres est bonne.
Mais aussi $4 + 9 = 13$ puis $4 + 9 + 7 + 5 = 25$: $(4.49 + 3) \times 25 = 4975$.
On a aussi $\boxed{9925}$

Pour 22, on a $109 \times 22 = 2398$ et $2 + 3 + 9 + 8 = 22$.
Comment les obtenir avec `Python` :

```
def SommeChiffres(N) :
....s = 0
....while n>0 :
........s += n%10
........n = n/10
....return s
```

```
def Test(n) :
....for k in range(10000) :
........if
SommeChiffres(n*k) == n :
............return (k,n*k)
....return('Echec')
```

Et François vient de m'en proposer un : $\boxed{112288}$
Pair, multiple de 11 et avec une somme des chiffres convenable.
.
.
.

Et maintenant, une proposition de Dylan (MPSI2 + MP* + ENS) :
Pour trouver un multiple d'un entier n dont la somme des chiffres en base 10 est n . On fixe un tel n . On peut l'écrire comme produit d'un entier premier avec 10, disons P et d'un entier avec que des facteurs 2 et 5, disons Q .
On a : $\exists k, 10^k = 1(\quad mod \quad P)$ car P est premier avec n (on prend $k = \varphi(n)$ par le théorème de Lagrange).
On construit alors $M = \sum_{i=1}^{n} 10^{k.\varphi(n)}$ qui est une somme de la forme $100 + 10000 + 1000000 \ldots$ avec n termes, le nombre final sera de la forme $1001001001001001001001001 \ldots\ldots$ avec n chiffres 1 dedans, donc la somme de ses chiffres vaut bien n . Et modulo p : $M = \sum_{i=1}^{n} \left(10^{\varphi(n)}\right)^k = \sum_{i=1}^{n} 1^k = n = PQ = 0(\quad mod \quad p)$
On veut le rendre multiple de n , il suffit de le multiplier par un multiple de Q , et on va en prendre un bien choisi : on a $Q = 2^x.5^y$ pour certains entiers naturels x et y, si l'on prend le nombre $L = 10^{\max(x,y)}$, c'est un multiple de Q de la forme $10000 \ldots\ldots$ On prend alors le nombre $L.M$ comme résultat final (c'est M décalé avec plein de zéros en plus à droite), il est divisible par n et sa somme des chiffres vaut n !

∘25∘ Existe-t-il f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de chaque rationnel soit un rationnel ?
Existe-t-il f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de chaque rationnel soit un irrationnel ?
Existe-t-il f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de chaque rationnel soit un irrationnel et l'image de chaque irrationnel soit un rationnel ?

Il suffit de prendre f constante. Égale à 1 dans le premier cas, et à $\sqrt{2}$ dans le second.

En revanche, si on impose « les rationnels ont une image irrationnelle »
et « les irrationnels ont une image rationnelle »,
alors on aura un problème. Le voyez vous ? (T.V.I. et cardinal)

∘26∘ Montrez qu'il existe un x entre 1 et 2 vérifiant $x^5 = 5^x$.
Montrez que pour tout a plus grand que e il existe un x entre 1 et e vérifiant $x^a = a^x$.

∘27∘ ♡ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\sqrt[n]{Arctan(1).Arctan(2)\ldots Arctan(n)}$.

Un produit, une racine ? On va rendre tout ça plus convivial en passant au logarithme.

$$\frac{\ln(Arctan(1)) + \ln(Arctan(2)) + \ldots + \ln(Arctan(n))}{n}$$

On introduit la suite $(\ln(Arctan(n)))$. Elle converge vers $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Sa moyenne de Cesàro fait de même et converge vers $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

On revient à la suite initiale, elle converge vers $\boxed{\frac{\pi}{2}}$

Avec cette forme, il fallait penser au logarithme pour rendre les choses plus basiques.
Et il fallait se dire « soit Cesàro, soit somme de Riemann ». Ici c'était Cesàro.
Et c'était en fait une moyenne géométrique.

∘28∘ Donnez la limite quand n tend vers l'infini de $\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)$. Déduisez que la suite $\left(\sqrt[n]{\frac{(2.n)!}{n^n.n!}}\right)$ converge et donnez sa limite.

Oui, c'est bien une somme de Riemann : $\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)$ est de la forme

$$\frac{(b-a)}{n}.\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right)$$

avec $a=0$, $b=1$ et $f=x\longmapsto \ln(1+x)$ *(ou $a=1$, $b=2$ et $f=\ln$)*. par continuité, cette somme de Riemann converge vers l'intégrale $\int_0^1 \ln(1+t).dt$. Celle ci vaut $[(1+t).\ln(1+t)-t]_{t=0}^{t=1}$. Application numérique : $\boxed{2.\ln(2)-1}$

La quantité $\left(\sqrt[n]{\frac{(2.n)!}{n^n.n!}}\right)$ a pour logarithme

$$\frac{1}{n}.\log\left(\frac{(2.n)!}{n^n.n!}\right)=\frac{1}{n}.\ln\left(\frac{(n+1).(n+2).(n+3)\ldots(n+n)}{n^n}\right)$$

en simplifiant les entiers de 1 à n dans $(2.n)!$.
On fait passer un n dans chacun des n termes du produit :

$$\frac{1}{n}.\log\left(\frac{(2.n)!}{n^n.n!}\right)=\frac{1}{n}.\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right).\left(1+\frac{2}{n}\right).\left(1+\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)$$

C'est notre somme dont la limite vaut $\boxed{2.\ln(2)-1}$

On en déduit que $\boxed{\left(\sqrt[n]{\frac{(2.n)!}{n^n.n!}}\right) \text{ converge vers } \frac{4}{e}}$ par continuité de l'exponentielle.

∘29∘ . ♠ n est un entier naturel ; résolvez l'équation $z^{2.n}+1=0$ *(en passant par $z=r.e^{i.\theta}$)* puis factorisez $(X^{2.n}+1)$ dans $\mathbb{C}$.
On pose $f_x=\theta\longmapsto \ln(x^2-2.x.\cos(\theta)+1)$ *(x est un réel fixé de $]1,\ +\infty[$)*. Montrez que f_x est intégrable sur $[0,\ \pi]$.
Exprimez grâce à la première question la somme de Riemann milieu de f_x pour l'équisubdivision de $[0,\ \pi]$.
Déduisez : $\int_0^{\pi}\ln(x^2-2.x.\cos(\theta)+1).d\theta=2.\pi.\ln(x)$.
Calculez $\int_0^{\pi}\ln(x^2-2.x.\cos(\theta)+1).d\theta$ pour x dans $]-\infty,\ -1[$ (indication : $t=\pi-\theta$).
Calculez $\int_0^{\pi}\ln(x^2-2.x.\cos(\theta)+1).d\theta$ pour x dans $]-1,\ 1[$.
Vérifiez que $x\longmapsto\int_0^{\pi}\ln(x^2-2.x.\cos(\theta)+1).d\theta=2.\pi.\ln(x)$ admet la même limite à droite et à gauche en 1, dont on estimera que c'est la valeur de $\int_0^{\pi}\ln(1^2-2.1.\cos(\theta)+1).d\theta$. Calculez alors $\int_0^{\pi}\ln(\sin(t)).dt$.

Un des plus beaux exercices niveau Sup. Il figure dans tout bon cours parlant des sommes de Riemann.

Justement, grâce à ces sommes, on va calculer une intégrale pour laquelle n n'a pas de primitive...

On résout $z^{2.n}+1=0$ en mettant z sous la forme polaire $\rho.e^{i.\theta}$ (sachant que $z=0$ n'est pas solution).
On obtient $\rho^{2.n}.e^{i.2.n.\theta}=-1=e^{i.\pi}$.
On identifie le module : $\rho=1$ *(et pas $\rho=-1$, puisque ρ est positif)* et $2.n.\theta=\pi\ [2.\pi]$.
On obtient $z=\exp\left(\frac{(2.k+1).i.\pi}{2.n}\right)$ avec k autorisé à décrire $\mathbb{Z}$.

Mais déjà, quand k va de 0 à $2.n-1$, on a $2.n$ racines distinctes. On a les a toutes. De toutes façons, k et $k+2.n$ donnent la même racine.

$\boxed{S = \left\{ \exp\left(\frac{(2.k+1).i.\pi}{2.n}\right) \mid k \in range(2.n) \right\}}$ et on factorise $\boxed{X^{2.n}+1 = \prod_{k=0}^{2.n-1} (X - e^{\frac{(2.k.+1).\pi}{2.n}})}$

On étudie ensuite $f_x = \theta \longmapsto \ln(x^2 - 2.x.\cos(\theta)+1)$ sur $[0,\ \pi]$. Elle est définie et continue.
Il nous suffit de vérifier que le terme dans le logarithme est continu et ne s'annule jamais.
Forme simple : $x^2 - 2.x.\cos(\theta)+1 = (x-\cos(\theta)))^2 + \sin^2(\theta)$. Pour qu'elle s'annule, il faudrait avoir à la fois $\sin(\theta)=0$ et $x-\cos(\theta)=0$.
Mais $\sin(\theta)=0$ conduit à $\cos(\theta)=1$ ou $\cos(\theta)=-1$, alors même que x est strictement plus grand que 1.

Autre approche : $x^2 - 2.x.\cos(\theta)+1$ ne s'annule que pour $x = e^{i.\theta}$ ou $x = e^{-i.\theta}$. Or, x est un réel, et il n'est même pas sur le cercle trigonométrique...

L'intégrale $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2.x.\cos(\theta)+1).d\theta$ existe pour tout x. Mais on ne sait pas la calculer à l'aide de primitives, changements de variables ou par parties.

On découpe $[0,\ \pi]$ en n segments à l'aide des $\frac{k.\pi}{n}$ pour k de 0 à n.
Les milieux des segments sont les $\frac{2.k+1}{2.n}.\pi$.
La somme de Riemann milieu est

$$R_{m,n} = \frac{\pi}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(x^2 - 2.\cos\left(\frac{2.k+1}{2.n}.\pi\right)+1\right)$$

Et si on compactait les logarithmes en un seul ?

$$R_{m,n} = \frac{\pi}{n}.\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2.\cos\left(\frac{2.k+1}{2.n}.\pi\right)+1\right)\right)$$

On factorise notre célèbre noyau :

$$R_{m,n} = \frac{\pi}{n}.\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(x - e^{\frac{2.k+1}{2.n}.i.\pi}\right).\left(x - e^{-\frac{2.k+1}{2.n}.i.\pi}\right)\right)$$

La ressemblance avec notre factorisation initiale se fait vraiment sentir.
De 0 à $n-1$, on a les n premières racines de $X^{2.n}+1$: $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x - e^{\frac{2.k+1}{2.n}.i.\pi}\right)$.

Où sont les suivantes ? Dans la description ci dessus, c'est $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x - e^{-\frac{2.k+1}{2.n}.i.\pi}\right)$. Demi cercle inférieur.

Dans la description « factorisation de $X^{2.n}+1$, c'est $\prod_{p=n}^{2.n-1}\left(x - e^{-\frac{2.p+1}{2.n}.i.\pi}\right)$. C'est finalement le même demi cercle.

$k=0$	$k=1$	$k=2$	...	$k=n-2$	$k=n-1$
$e^{-\frac{1}{2.n}.i.\pi}$	$e^{-\frac{3}{2.n}.i.\pi}$	$e^{-\frac{5}{2.n}.i.\pi}$	...	$e^{-\frac{2.n-3}{2.n}.i.\pi}$	$e^{-\frac{2.n-1}{2.n}.i.\pi}$

et

$p=n$	$p=n+1$	$p=n+2$	...	$p=2.n-2$	$p=2.n-1$
$e^{\frac{2.n+1}{2.n}.i.\pi}$	$e^{\frac{2.n+3}{2.n}.i.\pi}$	$e^{\frac{2.n+5}{2.n}.i.\pi}$	...	$e^{\frac{4.n-3}{2.n}.i.\pi}$	$e^{\frac{4.n-1}{2.n}.i.\pi}$

Ajoutez $2.\pi$ aux arguments de la première (ça ne change rien), et renversez le sens de lecture de la deuxième :

$k=0$	$k=1$	$k=2$	...	$k=n-2$	$k=n-1$
$e^{\frac{4.n-1}{2.n}i..\pi}$	$e^{\frac{4.n-3}{2.n}.i.\pi}$	$e^{\frac{4.n-5}{2.n}.i.\pi}$	...	$e^{\frac{2.n+3}{2.n}.i.\pi}$	$e^{\frac{2.n+1}{2.n}.i.\pi}$

et

$p=2.n-1$	$p=2.n-2$	...	$p=n+1$	$p=n$
$e^{\frac{4.n-1.}{2.n}.i.\pi}$	$e^{\frac{4.n-3}{2.n}.i.\pi}$	...	$e^{\frac{2.n+3}{2.n}.i.\pi}$	$e^{\frac{2.n+1}{2.n}.i.\pi}$

Finalement : $\boxed{\prod_{k=0}^{n-1}\left(x - e^{-\frac{2.k+1}{2.n}.i.\pi}\right) = \prod_{p=n}^{2.n-1}\left(x - e^{-\frac{2.p+1}{2.n}.i.\pi}\right)}$

On recolle :

$$R_{m,n} = \frac{\pi}{n}.\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(x - e^{\frac{2.k+1}{2.n}.\pi}\right).\left(x - e^{-\frac{2.k+1}{2.n}.\pi}\right)\right) = \frac{\pi}{n}.\ln\left(\prod_{k=0}^{2.n-1}\left(x - e^{\frac{(2.k+1).i.\pi}{2.n}}\right)\right) = \frac{\pi}{n}.\ln(x^{2.n}+1)$$

On n'a pas de primitive, mais on a une formule pour la somme de Riemann milieu... $\boxed{R_{m,n} = \frac{\pi}{n}.\ln(1+x^{2.n})}$

Elle dépend de x (paramètre de la fonction) et aussi de n , nombre de pas de la subdivision.

Mais que font les sommes de Riemann quand n tend vers l'infini ? Elles tendent vers l'intégrale. On va donc pouvoir calculer celle ci en passant à la limite sur n (comme dans le cours on avait calculé $\int_a^b e^t.dt$ en passant par

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} e^a.\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^k$$

Mais que fait $\frac{\pi}{n}.\ln(1+x^{2.n})$ quand n tend vers l'infini ?
Forme indéterminée ? Si on le traite vite : $1+x^{2.n}$ est équivalent à $x^{2.n}$, donc on va étudier $\frac{\pi}{n}.\ln(x^{2.n})$ qui vaut $2.\pi.\ln(x)$ et tend vers $2.\pi.\ln(x)$.
Est ce rigoureux ? Pas tant que ça.
Alors on va en faire quelquechose de rigoureux :

$$\frac{\pi}{n}.\ln(1+x^{2.n}) = \frac{\pi}{n}.\Big(\ln(x^{2.n})+\ln(x^{-2.n}+1)\Big) = 2.\pi.\ln(x) + \frac{\pi.\ln(1+e^{-2.n})}{n}$$

Quand n tend vers l'infini, $dsp\frac{\pi.\ln(1+e^{-2.n})}{n}$ tend tranquillement vers 0 et la somme de Riemann tend vers $2.\pi.\ln(x)$.
Trop fort : $\boxed{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2-2.x.\cos(\theta)+1).d\theta = 2.\pi.\ln(x)}$

Et pour x dans $]-\infty, -1[$? Il me semble que le calcul ne change pas. Simplement, on va garder x^2 car il est positif.
$\boxed{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2-2.x.\cos(\theta)+1).d\theta = \pi.\ln(x^2)}$

Mais on peut aussi suivre l'indication de l'énoncé. Pour x négatif, l'intégrale $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2-2.x.\cos(\theta)+1).d\theta$, ça c'est sûr.
On y fait un changement de variable $\alpha = \pi - \theta$. l'intégrale devient $\int_{\alpha=\pi}^{0} \ln(x^2-2.x.\cos(\alpha+\pi)+1).(-d\alpha)$ et même

$$\int_{\alpha=0}^{\pi} \ln(x^2+2.x.\cos(\alpha)+1).d\alpha$$

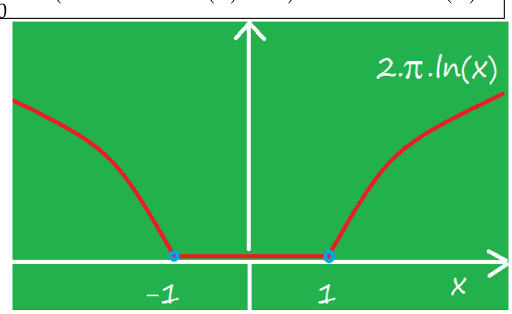
On reconnaît l'intégrale de la question précédente, mais avec $-x$ à la place de x. Et justement, $-x$ est positif ! On est exactement dans le cadre de la première série de questions, et l'intégrale vaut $2.\pi.\ln(-x)$ avec $-x$ positif. Soit encore $2.\pi.\ln(|x|)$.

Notre intégrale à paramètre x est paire.

Si x est entre -1 et 1, pas de grand changement dans l'existence, ni le calcul de la somme de Riemann.
On a encore $R_{m,n} = \frac{\pi}{n}.\ln(1+x^{2.n})$.
Sauf que maintenant, quand n tend vers l'infini, $\ln(1+x^{2.n})$ tend vers 0 et le dénominateur tend vers l'infini. La somme de Riemann tend vers 0 (il y a des logarithmes de réels plus grands que 1 et des logarithmes négatifs, tout se compense.

On résume :

$x \in]-\infty, -1[$	$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2-2.x.\cos(\theta)+1).d\theta = 2.\pi.\ln(\lvert x\rvert)$
$x \in]-1, 1[$	$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2-2.x.\cos(\theta)+1).d\theta = 0$
$x \in]1, +\infty[$	$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2-2.x.\cos(\theta)+1).d\theta = 2.\pi.\ln(x)$



Il nous en manque ?

$x \in]-\infty, -1[$	$x=-1$	$x \in]-1, 1[$	$x=1$	$x \in]1, +\infty[$
$2.\pi.\ln(\lvert x\rvert)$	?	0	?	$2.\pi.\ln(x)$

Ayant la même limite à droite et à gauche en 1 et -1, on a envie de compléter :

$x \in]-\infty,\ -1[$	$x = -1$	$x \in]-1,\ 1[$	$x = 1$	$x \in]1,\ +\infty[$
$2.\pi.\ln(\lvert x\rvert)$	0	0	0	$2.\pi.\ln(x)$

Et là, ça continue à être joli, avec un peu de trigonométrie.
La valeur en 1, c'est $\displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi} \ln(1^2 - 2.1.\cos(\theta) + 1).d\theta$.
On l'écrit $\displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi} \ln(2 - 2.\cos(\theta)).d\theta$ et même $\displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi} \ln\left(4.\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).d\theta$.
On sait que cette intégrale est nulle. Et par propriété du logarithme, cela nous donne

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \left(\ln(4) + 2.\ln\left(.\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right).d\theta = 0$$

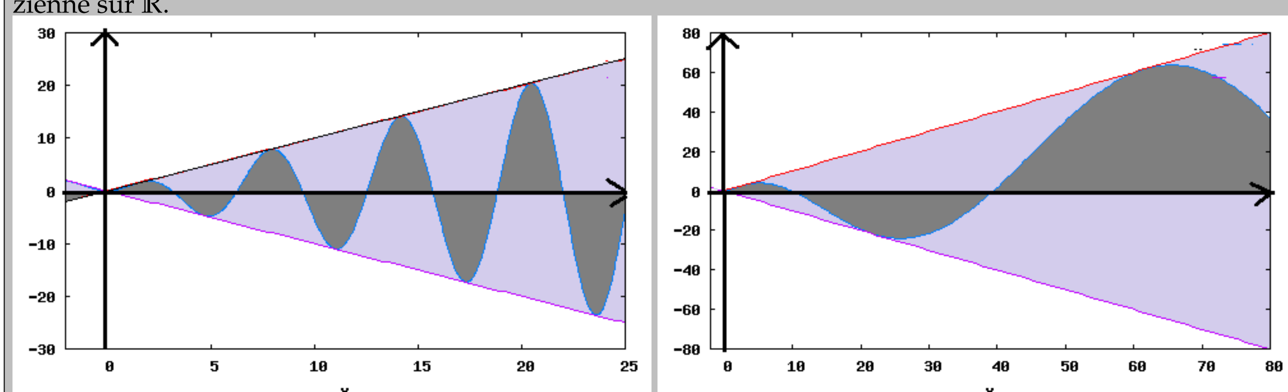
On intègre la constate et bascule de l'autre côté : $\displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi} \ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).d\theta = -\pi.\ln(2)$.

Attention, il y a comme un problème en 0 et en π pour ce logarithme quand même. On commence à faire des choses louches.

On change même de variable avec $\theta = 2.\alpha$: $\displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi/2} 2.\ln(\sin(\alpha)).d\theta = -\pi.\ln(2)$
On divise : $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\alpha)).d\alpha = \frac{\pi.\ln(2)}{2}}$ (avec un signe moins, car ces logarithmes de sinus sont négatifs).

Mais on voulait une intégrale de 0 à π ?
Or, que fait le sinus de $\pi/2$ à π . Exactement ce qu'il a fait de 0 à π. mais en sens inverse. On repasse par les mêmes valeurs, et l'intégrale se dédouble.
Proprement en posant $\beta = \pi - \alpha$: $\displaystyle\int_{\alpha=0}^{\pi/2} \ln(\sin(\alpha)).d\alpha = \int_{\beta=\pi}^{\pi/2} \ln(\sin(\beta)).(-d\beta) = \int_{\beta=\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\beta)).d\beta$.
En additionnant les deux et en recollant par relation de Chasles (variables muettes, on somme de 0 à π) c'est tout : $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\alpha)).d\alpha = \pi.\ln(2)}$

◦30◦ Montrez que $x \longmapsto x.\sin(x)$ est lipschitzienne sur chaque segment $[-a,\ a]$. Montrez qu'elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.



Et pour $x \longmapsto x.\sin(\sqrt{x})$?

Pour lipschitzienne, on peut dire que c'est le produit de deux applications lipschitziennes bornées.
On peut aussi sortir les gros moyens : $f' = x \longmapsto \sin(x) + x.\cos(x)$.
Sur $[-a,\ a]$, f' est bornée par $a+1$.[4]
Et si f' est bornée, f est lipschitzienne.[5]

Ensuite, on a une implication « lipschitzienne implique uniformément continue » en prenant $\eta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{K}$ avec des notations que tout le monde comprend.

4. quand je dis « bornée », je me contente de majorée en valeur absolue
5. l'équivalence « lipschitzienne » et « dérivée bornée » ne s »applique que si on sait que f est déjà bel et bien dérivable

Passons à $\mathbb{R}$ tout entier.
Attention, il y a des propriétés qui ne passent pas de « sur tout segment » à « donc sur tout $\mathbb{R}$ ».

Si f est continue sur chaque $[-a,\ a]$ alors elle est continue sur $\mathbb{R}$: oui.
Si f est lipschitzienne de rapport 1 sur chaque $[-a,\ a]$, alors elle est lipschitzienne de rapport 1 sur $\mathbb{R}$: oui.
Si f est lipschitzienne sur chaque $[-a,\ a]$, alors elle est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$: non.
Si f est bornée sur chaque $[-a,\ a]$, alors elle est bornée sur $\mathbb{R}$: non.
Si f est positive sur chaque $[-a,\ a]$, alors elle est positive sur $\mathbb{R}$: oui.
Si f est uniformément continue sur chaque $[-a,\ a]$, alors elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$: non.

La dérivée n'est plus bornée. calculez la en $2.k.\pi$, vous voyez $f'(2.k.\pi)$ filer vers l'infini.
Elle ne peut donc plus être lipschitzienne (car « lipschitzienne et dérivable implique dérivée bornée »).

Pourrait elle être quand même uniformément continue sans être lipschitzienne.
L'implication est en effet « lipschitzienne implique uniformément continue en passant par $\dfrac{\varepsilon}{K}$.
Mais peut être qu'avec un η d'une autre forme, on peut s'en sortir.

La seule façon de nier uniformément continue, c'est de revenir à la définition et à sa négation.

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \eta,\ \exists (x, y),\ |x-y| \leqslant \eta \ et\ |f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$$

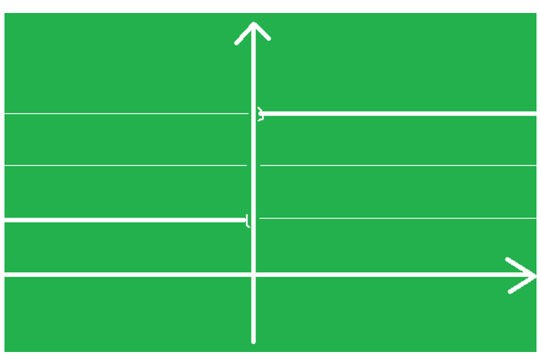
On va prendre $\varepsilon_0 = 1$ car sinon on n'a pas trop d'idée pour commencer.
Pour η petit, on va aller chercher x et y proches l'un de l'autre à η près, mais avec des images éloignées.
On va prendre $x = 2.k.\pi$ et $y = 2.k.\pi + \eta$. On se place là où le graphe coupe l'axe.
On a bien $|y - x| \leqslant \eta$, que k soit « grand » ou « petit ».
On a ensuite $f(y) - f(x) = (2.k.\pi + \eta).\sin(2.k.\pi + \eta) - 0 = (2.k.\pi + \eta).\sin(\eta) \geqslant 2.k.\pi.\sin(\eta)$.
Jouons à présent sur k en le prenant « grand ».
Le physicien dira même « si k est grand, $2.k.\pi.\sin(\eta)$ est grand et c'est plus grand que 1 ».
Le matheux se sent obligé de dire « je prends $k = \left[\dfrac{1}{2.\pi.\sin(\eta)}\right] + 1$ ». Et ceci n'est ni petit ni grand. Ceci est juste « bien choisi ».

Bref, elle n'est pas uniformément continue, à cause de ses taux d'accroissement trop grands.

Et $x \longmapsto x.\sin(\sqrt{x})$?
Sur les segments, même argument.
Et sur $\mathbb{R}$: $g' = x \longmapsto \sin(\sqrt{x}) + \dfrac{\sqrt{x}}{2}.\cos(x)$ et $g'(0) = 0$ par limite des taux d'accroissement.
On a les mêmes problèmes.

◦31◦ ♡ Combien y a-t-il d'applications continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$?
Combien y a-t-il d'applications uniformément continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ (attention, à $x < 0 < y$ avec $|y - x| \leqslant \mu_\varepsilon$).

♡ Combien il y a d'applications continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$?
Comment peut on compter ça ? facilement !
Une application continue sur un intervalle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Elle ne peut donc pas sauter d'un entier à un autre.



Toute application continue de $]-\infty,\ 0[$ dans $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ est constante.
Il n'y a donc que quatre applications possibles.
Toute application continue de $]0,\ +\infty[$ dans $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ est constante.
Il n'y a donc que quatre applications possibles.
Et ensuite, on recolle. Et l'exigence de continuité sur $\mathbb{R}^*$ n'impose rien.

L'exemple ci contre est bien une application continue de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$.

Ne me dites pas « mais en 0 ». E, 0 elle n'est pas définie, on ne parlera pas de continuité.
Certes, on ne peut pas la prolonger par continuité en 0, mais la question n'est pas là.

Il y a donc seize (16) applications qui conviennent.

Mais l'uniforme continuité fait retomber sur la même constante des deux côtés.
En effet, il suffit de prendre la quantification de l'uniforme continuité avec $\varepsilon = 1/4$ par exemple ici :

$$\exists \eta_{1/4},\ \forall (x,\ y) \in (\mathbb{R}^*)^2,\ |y - x| \leqslant \eta_{1/4} \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant 1/4$$

On prend alors $x = -\dfrac{\eta_{1/4}}{2}$ et $y = \dfrac{\eta_{1/4}}{2}$.
$f(x)$ est la constante sur $]-\infty,\ 0[$ et $f(y)$ celle sur $]0,\ +\infty[$.
ce sont deux entiers de $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, distants de moins de $\dfrac{1}{4}$.
Ils sont égaux.

Il n'y a donc cette fois que quatre applications uniformément continues.

∘32∘

♡ Montrez que si f est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ alors $x \longmapsto \sqrt{1 + f(x)}$ l'est aussi.

$t \longmapsto \sqrt{1+t}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.
On vérifie :

$$|\sqrt{1+a} - \sqrt{1+b}| = \frac{|b-a|}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b}} \leqslant \frac{|b-a|}{1+1}$$

On parle ensuite de composée d'applications lipschitziennes.

Des fois, c'est tout bête...

∘33∘

La liste L est faite des stations de métro, sous la forme pour chacune

0	nom	string
1	code	string longueur 4
2	adresse	string
3	lignes	liste d'entiers
4	abscisse sur le graphe	integer
5	ordonnée sur le graphe	integer
6	liste des successeurs	liste de codes

Écrivez un script qui prend en entrée un numéro de ligne et retourne une liste de toutes ses stations.
Écrivez un script qui va trouver le numéro de la ligne la plus longue (en nombre de stations).
Écrivez un script qui va trouver le numéro de la ligne qui coupe le plus d'autres lignes.

```
def ListeStations(k) : #int -> list of list
....Ligne = [ ]
....for Station in L :
........if k in Station[3] :
............Liste.append(Station)
....return(Ligne)
```

```
def CompteStations(k) : #int -> list of
list
....c = 0 #compteur
....for Station in L : #du classique
........if k in Station[3] :
............c += 1
....return(c)
```

```
maxi, memo = 0, 0 #initialisation
for Index in range(20) : #sait on jamais,
il ya peut être 20 lignes
....Valeur = CompteStations(Index) :
........if Valeur > Maxi :
............Maxi = Valeur
............Memo = Index
print(Memo, Maxi)
```

```
Maxi, Memos = 0, [ ]
for Index in range(20) : #sait on jamais,
il ya peut être 20 lignes
....Valeur = CompteStations(Index) :
........if Valeur > Maxi :
............Maxi = Valeur
............Memos = [ ]
........if Valeur == Maxi :
............Memos.append(Index)
print(Memo, Maxi)
```

C'est la ligne 7 (et la 8) avec 38 stations dont voici la liste.

['Aubervilliers Pantin Quatre Chemins', 'Cadet', 'Censier Daubenton', 'Chaussée d'Antin La Fayette', 'Château-Landon', 'Châtelet', 'Corentin Cariou', 'Crimée', 'Fort d'Aubervilliers', 'Gare de l'Est - Verdun', 'Jussieu', 'La Courneuve 8 Mai 1945', 'Le Kremlin-Bicêtre', 'Le Peletier', 'Les Gobelins', 'Louis Blanc', 'Mairie d'Ivry', 'Maison Blanche', 'Opéra', 'Palais Royal Musée du Louvre', 'Pierre et Marie Curie', 'Place Monge - Jardin des Plantes Arènes de Lutèce', 'Place d'Italie', 'Poissonnière', 'Pont Neuf', 'Pont-Marie - Cité des Arts', 'Porte de Choisy', 'Porte de la Villette - Cité des Sciences', 'Porte d'Italie', 'Porte d'Ivry', 'Pyramides', 'Riquet', 'Stalingrad', 'Sully-Morland', 'Tolbiac', 'Villejuif Louis Aragon', 'Villejuif Léo Lagrange', 'Villejuif Paul Vaillant-Couturier - Hôpital Paul Brousse']

Comme on a un ex-aequo, on devrait proposer

On crée déjà un tableau qui va indiquer si deux lignes se coupent ou non.
On part de l'apriori qu'aucune ligne ne coupe une autre au début.
On parcourt les stations une à une.
Chaque fois que dans la liste des lignes d'une station il y a deux indices i et k distincts, c'est qu'il y a une correspondance. On met donc T[i][k] à True.

```
#table des correspondances entre lignes
NbL = 20
T = [[False for k in range(NbL)] for i in range(NbL)]
for Station in L :
....Lignes = Station[3]
....for i in Lignes :
........for k in Lignes :
............if i != k :
................T[i][k] = True
```

La condition `i != k`, c'est pour ne pas dire « il y a une correspondances à saint-Paul entre la ligne 1 et la ligne 1 », ce qui n'est las faux, mais manque quand même de pertinence.

On déchiffre ensuite ce tableau ligne par ligne :

```
NbC = [0 for i in range(NbL)]
for i in range(NbL) :
....for k in range(NbL) :
........if T[i][k] :
............NbC[i] += 1
```

Moi j'ai ça : [0, 11, 11, 11, 13, 11, 11, 12, 12, 11, 8, 11, 9, 10, 9] et les ligne bis.
Les lignes 10 et 12 ont peu de correspondances...
Et comme je ne sais pas lire tout seul :

```
Maxi, Memo = 0, [ ]
for Index in range(NbL) :
....if NbC[Index] > Maxi :
........Memo = [ ]
....if NbC[Index] == Maxi :
........Memo.append(Index)
```

C'est la ligne 4 (Nord-Sud, que j'appelle encore Clignancourt -Orléans, car ce sont mes vieux terminus) qui en coupe le plus : elle en coupe 13. Elle ne rate que les deux lignes 3bis et 7bis.

Quant aux lignes 3bis et 7bis, c'est tout le contraire.

∘34∘ On définit $f = X \longmapsto M.X$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & & 1 & \\ & -3 & & 3 \end{pmatrix}$ et $P = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Donnez la dimension de P et une équation cartésienne de P.

Ajustez les coefficients de M pour avoir $Im(f) \subset P$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \in Ker(f)$. A-ton $Im(f) = P$? Donnez une base et la dimension de $Ker(f)$ (rappelle : $Ker(f)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs dont l'image est nulle).

L'application $X \longmapsto M.X$ va bien de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ (formats compatibles). Et c'est la seule possibilité.
Elle est linéaire, puisque $M.(\lambda.X + \mu.Y) = \lambda.M.X + \mu.M.Y$ par distributivité.

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont indépendants. Ils engendrent donc un plan de $(\mathbb{R}^3, +,)$. On en trouve une équation par condition de coplanarité :
$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. On peut aussi proposer $2.x - .y + .z = 0$. C'est l'équation d'un plan (dimension). il contient les deux vecteurs, c'est lui le plan cherché.

Chaque image $\begin{pmatrix} x & +2.y & +a.z & +t \\ 3.x & +c.y & +z & +d.t \\ e.x & -3.y & +f.z & +3.t \end{pmatrix}$ doit vérifier ce jeu d'équations.
Mais sous cette forme, on s'y perd un peu pour savoir qui on cherche,
sachant

$$2.(x + 2.y + a.z + t) - (3.x + c.y + z + d.t) + (e.x - 3.y + f.z + 3.t) = 0$$

Mais quel est le rôle de x , de y et ainsi de suite...

La bonne approche de matheux, c'est de dire qu'on va regarder pour une base, ou pour l'image d'une base.
Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est l'image du premier vecteur de $\mathbb{R}^4$. Elle doit être dans P. On a donc $2.1 - 3 + e = 0$.
On recommence avec $\begin{pmatrix} 2 \\ c \\ -3 \end{pmatrix}$, image du second vecteur. Cette fois : $2.2 - c - 3 = 0$.
Et ainsi de suite.

On notera que par exemple la dernière équation $2.1 - d + 3 = 0$ correspond à avoir pris $x = y = z = 0$ et $t = 1$ dans une condition qui doit être vraie pour tout quadruplet (x, y, z, t).
Sinon, la condition qui semble n'être que nécessaire est aussi suffisante.
L'image de chaque vecteur $x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+x_3\overrightarrow{e_3}+x_4\overrightarrow{e_4}$ est x_1.f($\overrightarrow{e_1}$)+$x_2.\overrightarrow{f(e_2)}$+$x_3$.f($\overrightarrow{e_3}$)+$x_4$.f($\overrightarrow{e_4}$), et la voilà dans P par stabilité.

A ce stade : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & & 3 \end{pmatrix}$ avec une relation entre les deux coefficients qui manquent.

On notera qu'on a en fait $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ou en transposant : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ & 1 & \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ce serait ça, transposer une matrice .

Mais il nous reste une information : le noyau : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On tient la matrice : $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$

On vérifie quand même que le troisième vecteur est dans P.

Pour le noyau, on doit juste résoudre : $\begin{array}{ccccccc} x & +2.y & & +t & = & 0 \\ 3.x & +y & +z & +5.t & = & 0 \\ x & -3.y & +z & +3.t & = & 0 \end{array}$.

Trois équations pour quatre inconnues. On va avoir un espace de dimension $4-3$ ce qui fait 1.

On connaît déjà un vecteur dedans ! On a donc $Ker(f) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix})$. De dimension 1.

Sauf que...

Une des équations ne sert à rien. C'est par exemple $L_3 = -2.L_1 + L_2$.

Le noyau est de dimension 2 : $\begin{array}{cccccc} x & +2.y & & +t & = & 0 \\ 3.x & +y & +z & +5.t & = & 0 \end{array}$

On se donne x et y, et on trouve t et z.

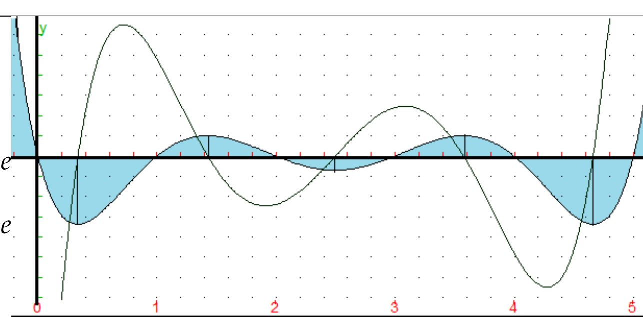
Les vecteurs du noyau sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.x+9.y \\ -x-2.y \end{pmatrix}$. Plus propre : $\begin{pmatrix} x & \\ & y \\ 2.x & +9.y \\ -x & -2.y \end{pmatrix}$.

Le noyau est de dimension 2, et c'est $\boxed{Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix})}$

∘35∘

Ce qui suit vient d'un sujet de Mines-Ponts, d'il y a une bonne dizaine d'années.

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 donné. On note P_n le polynôme $\prod_{k=0}^{n}(X-k)$.



I∼0) Montrez que P'_n admet exactement une racine $x_{n,k}$ dans chacun des intervalles $[k,\ k+1]$ pour k de 0 à $n-1$.

I∼1) On note $\alpha_{n,k} = x_{n,k} - k$ pour tout k. Prouvez que tous les $\alpha_{n,k}$ sont entre 0 et 1. Calculez $\sum_{k=0}^{n} x_{n,k}$ et prouvez $\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k} = \frac{n}{2}$.

I∼2) Exprimez $x_{n,n-1-k}$ en fonction de $x_{n,k}$ *(indication : $P_n(X)$ et $P_n(n-X)$)*.
I∼3) Calculez $\alpha_{n,k}+\alpha_{n,n-1-k}$.

II∼0) *Le but des questions suivantes est de montrer que pour n fixé, $\alpha_{n,k}$ croît lorsque k croît de 0 à $n-1$.* Dressez en fonction de la parité de n le tableau de variations de P_n.
II∼1) Déduisez le signe de $(-1)^{n-k}.P_n(x_{n,k})$ pour k dans `range(n)`.
II∼2) En utilisant la relation $P_n(X)=(X-n).P_{n-1}(X)$ *(que vous démontrerez)* déterminez le signe de $(-1)^{n-k}.P'_n(x_{n-1,k})$ *(k dans `range(n-1)`)*.
II∼3) Déduisez $x_{n-1,k}>x_{n,k}$.
II∼4) En utilisant $P_n(X)=X.P_{n-1}(X-1)$ *(que vous démontrerez)*, déterminez en fonction de k et n le signe de $(-1)^{n-k}.P'_n(1+x_{n-1,k-1})$.
II∼5) Déduisez : $x_{n,k}>1+x_{n-1,k-1}$.
II∼6) Concluez.

III∼0) Ajouté par mes soins par rapport à la version de 2006 : écrivez un script `Python` qui prend en entrée `n`, `k` et `epsilon`, et détermine $\alpha_{n,k}$ à `epsilon` près (et retourne `False` si `n` ou `k` n'est pas entier, si `epsilon` est négatif ou nul, et si `k` n'est pas entre `0` et `n`).
Voici la liste des racines obtenue pour n égal à 10

0.2854	1.3511	2.3998	3.4418	4.4809	5.5191	6.5582	7.6002	8.6488	9.7146

Pour information, j'ai écrit un algorithme sans dichotomie n'utilisant que $P_n$et pas P'_n, c'est faisable ici, réfléchissez un peu.

IV∼0) *On va utiliser la fonction Gamma d'Euler* (partiellement au programme de Prépas) *pour obtenir le comportement fin des $\alpha_{n,k}$. Pour tout réel x strictement positif, on pose $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}.e^{-t}.dt$ (son existence est offerte par le cours de Spé).* Montrez : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$, $\Gamma(x+1)$=x.Γ(x) . Calculez $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel n.
IV∼1) On admet $\Gamma'(x)=\int_0^{+\infty}\ln(t).t^{x-1}.e^{-t}.dt$ et $\Gamma''(x)=\int_0^{+\infty}(\ln(t))^2.t^{x-1}.e^{-t}.dt$. Montrez : $\Gamma'(x)\leqslant\sqrt{\Gamma(x).\Gamma''(x)}$ pour tout x.
IV∼2) Montrez que $x\longmapsto\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ (notée ψ) est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
IV∼3) Montrez : $\psi(x+1)=\psi(x)+\dfrac{1}{x}$ pour tout x de $]0,\ +\infty[$.
IV∼4) On pose ensuite $\phi(x)=\psi(x)-\ln(x)$. Montrez que la série de terme général $\phi(n+1)-\phi(n)$ converge.
IV∼5) Montrez que la suite $(\phi(n))$ converge quand n tend vers l'infini. On note C sa limite.
IV∼6) Établissez que l'on a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=C$.
IV∼7) Montrez que si on a $C\neq 0$, alors $\int_1^x\phi(t).dt\sim_{x\to+\infty}C.x$.
IV∼8) Montrez aussi : $\int_1^n\phi(t).dt=\ln\left(\dfrac{n!}{e.n^{n+1}}.e^n\right)\sim_{n\to+\infty}-\dfrac{\ln(n)}{2}$.
IV∼9) Déduisez finalement $C=0$.
IV∼10) Montrez $\psi(x+m+1)=\psi(x)+\sum\limits_{j=0}^{m}\dfrac{1}{x+j}$.
IV∼11) Déduisez $\psi(x)+\sum\limits_{j=0}^{m}\dfrac{1}{x+j}-\ln(m)\longrightarrow_{m\to+\infty}0$.

V∼0) Montrez $\dfrac{P'_n(X)}{P_n(X)}=\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{1}{X-i}$ et pour tout k : $\sum\limits_{j=0}^{k}\dfrac{1}{\alpha_{n,k}+j}=\sum\limits_{j=0}^{n-k-1}\dfrac{1}{(1-\alpha_{n,k})+j}$.
V∼1) Déduisez avec tout ce que vous avez fait avant et même plus :
$\forall t\in]0,\ 1[,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_{n,[n.t]}=\dfrac{1}{\pi}.Arccotan\Big(\dfrac{1}{\pi.}\ln\Big(\dfrac{1-t}{t}\Big)\Big).$ $\boxed{\text{200 pts}}$
Extrait du rapport du jury : on ne saurait trop recommander aux candidats de lire en entier le sujet avant de commencer : une vision plus claire des buts poursuivis peut donner de précieuses indications pour certaines questions.

◦36◦

E est un ensemble dénombrable (c'est à dire dont le cardinal ne dépasse pas celui de $\mathbb{N}$, ce peut être $\mathbb{Z}$ et même $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ rappelons le).
Une loi de probabilité est une application $p\ :\ E\longrightarrow[0,\ 1]$ telle que la somme $\sum_{x\in E}p(x)$ soit égale à 1.
La probabilité d'une partie A de E est alors $\sum_{x\in A}p(x)$ (existence ?).
Montrez qu'il y a une loi de probabilité constante (« uniforme ») sur range(N) (N fixe) mais qu'il n'y en a pas sur $\mathbb{N}$.

La probabilité uniforme sur range(N) est définie par $n\longmapsto\dfrac{1}{N}$ pour n de 0 (inclus) à N (exclu).

élément	0	1	2	...	N-1
proba	1/N	1/N	1/N		1/N

Si on voulait une loi de probabilité constante sur $\mathbb{N}$, chaque entier aurait une image α non nulle, et la somme $\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha$ serait infinie (divergence grossière).

Montrez que $n\longmapsto 2^{-n-1}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
Calculez alors la probabilité de l'ensemble des entiers pairs.
Calculez alors la probabilité de l'ensemble des entiers impairs.

Cette fois, chaque 2^{-n-1} est positif.
La somme $\sum_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{1}{2^{n+1}}$ est même la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}$ et elle vaut $\dfrac{1}{1}.\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}$ ce qui fait 1.

Il suffit de sommer à horizon fini $\sum_{n=0}^{N}\dfrac{1}{2^{n+1}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^{N+2}}}{1-\dfrac{1}{2}}$ et de faire tendre N vers l'infini.

Pour les entiers pairs, on calcule

$$\sum_{n\ pair}\frac{1}{2^{n+1}}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2.p+1}}=\lim_{P\to+\infty}\sum_{p=0}^{P}\frac{1}{2^{2.p+1}}=\frac{1}{2}.\lim_{P\to+\infty}\frac{1-\dfrac{1}{2^{2.P+3}}}{1-\dfrac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

Et pour les entiers impairs, on trouve $\dfrac{1}{3}$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	...
	1/2		1/8		1/32		1/128		
		1/4		1/16		1/64		1/256	

a est un réel fixé dans $]0,\ 1[$, ajustez λ pour que $n\longmapsto\lambda.a^n$ soit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
a est un réel fixé dans $]0,\ 1[$, ajustez λ pour que $n\longmapsto\lambda.a^{|n|}$ soit une loi de probabilité sur $\mathbb{Z}$.

Chaque $\lambda.a^n$ existe, et la somme infinie $\lambda.\sum_{n=0}^{+\infty}a^n$ vaut $\dfrac{\lambda}{1-a}$. On va donc imposer $\lambda=1-a$.

	0	1	2	3	4	5	6	
	$1-a$	$a-a^2$	a^2-a^3	a^3-a^4	a^4-a^5	a^5-a^6	a^6-a^7	

Sous la forme télescopique, le fait que la somme vaille 1 saute aux yeux.

On sépare ensuite la somme $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda.a^{|n|}$ en trois : $\lambda.a^0+\lambda.\sum_{n=1}^{+\infty}a^n+\lambda.\sum_{n=1}^{+\infty}a^{|-n|}$ et on trouve

$$\lambda.\Big(1+\frac{a}{1-a}+\frac{a}{1-a}\Big)$$

On va donc imposer $\lambda=\dfrac{1-a}{1+a}$.

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	
	a^4	a^3	a^2	a	1	a	a^2	a^3	
$\dfrac{a}{1-a}$					1	$\dfrac{a}{1-a}$			

On notera que tout tombe à l'eau si a est plus grand que 1. Ou négatif.

Montrez que si $n \longmapsto p_n$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$, alors $n \longmapsto \frac{p_{|n|}}{2}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{Z}$.

La somme $\sum_{-\infty}^{-1} \frac{p_{|n|}}{2} + 0 + \sum_{1}^{+\infty} \frac{p_{|n|}}{2}$ vaut bien 1.

Montrez que si $n \longmapsto p_n$est une loi de probabilité sur $\mathbb{Z}$ alors $n \longmapsto p_n + p_{-n}$ est (presque) une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$(que fait il modifier dans cette définition ?).

On replie sur $\mathbb{N}$ce qu'on avait sur $\mathbb{Z}$.Mais avec cette formule, on a $0 \longmapsto p_0 + p_0$. C'est ce terme qu'il faut refuser de dédoubler.

Montrez que $\gamma = (a,\ b) \longmapsto 2^{-a-b}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
Calculez la probabilité de la diagonale $\{(a,\ a) \mid a \in \mathbb{N}\}$.
r est un rationnel strictement positif fixé. Calculez la probabilité de $\left\{(a,\ b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid \frac{a}{b} = r\right\}$ qu'on va noter $\mu(r)$.
Ceci définit une loi de probabilité sur $\mathbb{Q}^{+*}$. Calculez $\mu(1)$, $\mu(2)$, $\mu(3/4)$.
Montrez $\mu(r) = \mu(1/r)$.
Calculez $\mu(n)$ si n est un entier. Calculez $\mu(\mathbb{N})$ (« probabilité qu'un rationnel tiré au hasard selon la loi μ soit un entier) à 10^{-3} près.

On a cette fois une somme double :

$$\sum_{(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} 2^{-a-b} = \sum_{a=1}^{+\infty}\left(2^{-a}.\sum_{b=1}^{+\infty} 2^{-b}\right) = \sum_{a=1}^{+\infty}\left(2^{-a}.1\right) = 1$$

et les termes sont bien positifs.

Pour la diagonale, on somme

$$\sum_{a=1}^{+\infty} 2^{-2.a} = \frac{1}{4}.\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

	1	2	3	4	5	
1	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	
2	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	
3	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	
4	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512	
5	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024	

On vient de sommer en diagonale, on peut sommer en colonne aussi.

On se donne un rationnel qu'on écrit $\frac{p}{q}$ (forme irréductible).

Il existe une infinité de couple $(a,\ b)$ vérifiant $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$.

Ce sont les écritures réductibles $\frac{k.p}{k.q}$ avec k décrivant $\mathbb{N}^*$.

On a donc une somme infinie :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{(p.k)(q.k)}} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{p+q}}\right)^k = \frac{1}{2^{p+q}}.\frac{1}{1-\frac{1}{2^{p+q}}} = \frac{1}{2^{p+q}-1}$$

On constate que pour $\frac{1}{r}$ il faut inverser les rôles de p et q. la probabilité ne change pas.

r = 1 / 1					
	1	2	3	4	5
1	**1/4**	1/8	1/16	1/32	1/64
2	1/8	**1/16**	1/32	1/64	1/128
3	1/16	1/32	**1/64**	1/128	1/256
4	1/32	1/64	1/128	**1/256**	1/512
5	1/64	1/128	1/256	1/512	**1/1024**
proba = 1/3					

r = 2					
	1	2	3	4	5
1	1/4	**1/8**	1/16	1/32	1/64
2	1/8	1/16	1/32	**1/64**	1/128
3	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256
4	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
5	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
proba = 1 / (8-1)					

	1	2	3	4	5
1	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64
2	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128
3	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256
4	1/32	1/64	**1/128**	1/256	1/512
5	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
proba = 1 / (128-1)					

Pour tout entier naturel n, l'écriture irréductible est $\dfrac{n}{1}$ et la proba est donc $\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$

On n'a pas de formulé géniale pour calculer ceci.
Alors que fait on ?
On somme jusqu'à un rang N assez grand.
Si on le joue physicien, on prend $n = 10$ et on dit que ça doit suffire.

Si on est un peu plus matheux, on dit qu'en s'arrêtant au rang 10, on a oublié d'ajouter $\displaystyle\sum_{n=11}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}-1}$.

On veut que cette erreur soit plus petite que 10^{-3}. Et c'est à peu près $\displaystyle\sum_{n=11}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$. Et ceci vaut $\dfrac{1}{2^{12}}.\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2^{12}}}$. C'est bon, on a le résultat à 10^{-3} près.

calcul numérique : $0,607$. Mais c'est vrai que déjà $p(1) + p(2) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7}$.

Montrez que $(a,\ b) \longmapsto \dfrac{1}{(a+b+1).2^{a+b+1}}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Calculez la probabilité de la diagonale $\{(a,\ a) \mid a \in \mathbb{N}\}$.

	0	1	2	3	4	5
0	1/2	1/(2x4)	1/(3x8)	1/(4x16)	1/(5x32)	1/(6x64)
1	1/(2x4)	1/(3x8)	1/(4x16)	1/(5x32)	1/(6x64)	1/(7x128)
2	1/(3x8)	1/(4x16)	1/(5x32)	1/(6x64)	1/(7x128)	1/(8x256)
3	1/(4x16)	1/(5x32)	1/(6x64)	1/(7x128)	1/(8x256)	1/(9x512)
4	1/(5x32)	1/(6x64)	1/(7x128)	1/(8x256)	1/(9x512)	1/(10x1024)
5	1/(6x64)	1/(7x128)	1/(8x256)	1/(9x512)	1/(10x1024)	1/(11x2048)

Il faut vérifier que la grande somme $\displaystyle\sum_{a,b} \frac{1}{a+b+1}.\frac{1}{2^{a+b+1}}$ vaut 1.

Avec le dessin au dessus, on comprend : il suffit de sommer « en diagonales ».

	0	1	2	3	4	5
0	**1/2**	**1/(2x4)**	**1/(3x8)**	**1/(4x16)**	**1/(5x32)**	**1/(6x64)**
1	**1/(2x4)**	**1/(3x8)**	**1/(4x16)**	**1/(5x32)**	**1/(6x64)**	**1/(7x128)**
2	**1/(3x8)**	**1/(4x16)**	**1/(5x32)**	**1/(6x64)**	**1/(7x128)**	**1/(8x256)**
3	**1/(4x16)**	**1/(5x32)**	**1/(6x64)**	**1/(7x128)**	**1/(8x256)**	**1/(9x512)**
4	**1/(5x32)**	**1/(6x64)**	**1/(7x128)**	**1/(8x256)**	**1/(9x512)**	**1/(10x1024)**
5	**1/(6x64)**	**1/(7x128)**	**1/(8x256)**	**1/(9x512)**	**1/(10x1024)**	**1/(11x2048)**

	0	1	2	3	4	5
0	**1/2**					
1						
2						
3						
4						
5						

	0	1	2	3	4	5
0		1/(2x4)				
1	1/(2x4)					
2						
3						
4						
5						

	0	1	2	3	4	5
0			1/(3x8)			
1		1/(3x8)				
2	1/(3x8)					
3						
4						
5						

	0	1	2	3	4	5
0				1/(4x16)		
1			1/(4x16)			
2		1/(4x16)				
3	1/(4x16)					
4						
5						

	0	1	2	3	4	5
0					1/(5x32)	
1				1/(5x32)		
2			1/(5x32)			
3		1/(5x32)				
4	1/(5x32)					
5						

A quelle loi de probabilité correspond ce tableau ?

	0	1	2	3	4	5
0	1/2	1/(3x4)	1/(5x8)	1/(7x16)	1/(9x32)	1/(11x64)
1	1/(3x4)	1/(3x4)	1/(5x8)	1/(7x16)	1/(9x32)	1/(11x64)
2	1/(5x8)	1/(5x8)	1/(5x8)	1/(7x16)	1/(9x32)	1/(11x64)
3	1/(7x16)	1/(7x16)	1/(7x16)	1/(7x16)	1/(9x32)	1/(11x64)
4	1/(9x32)	1/(9x32)	1/(9x32)	1/(9x32)	1/(9x32)	1/(11x64)
5	1/(11x64)	1/(11x64)	1/(11x64)	1/(11x64)	1/(11x64)	1/(11x64)

◦37◦

Existe-t-il un intervalle du type $[0,\ a]$ sur lequel la valeur moyenne du sinus vaut $1/3$?

On veut $\frac{1}{a}.\int_0^a \sin(t).dt = \frac{1}{3}$.
Ceci revient à demander $3.a - 3.a.\cos(a) - 1 = 0$.
On définit cette application continue : $a \longmapsto 3.a - 3.a.\cos(a) - 1$.
Elle vaut -1 en 0 et $\frac{3.\pi}{2} - 1$ en $\frac{\pi}{2}$.
Par théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule au moins une fois.

Mais on n'a pas de valeur explicite...

◦38◦

Pour f intégrable de $[0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on appelle valeur moyenne l'application $x \longmapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(u).du$ (notée ϕ) ; c'est en fait la valeur moyenne sur $[0,\ x]$ de f.
Montrez que si f est positive, ϕ l'est aussi.
Montrez que si f est croissante, ϕ l'est aussi. Preuve de physicien(ne) naïf : dérivez, en estimant que dans votre monde idéalisé tout est dérivable. Preuve de mathématicien(ne) : $\int_0^1 f(t.x).dt$.
Tracez l'application "valeur moyenne de la partie entière".

A faire.

◦39◦ La valeur moyenne de f (intégrable) sur $[a,\ b]$ est $\dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b f(t).dt$. Montrez que si f est continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ alors on a
$Sup(f(t)\mid t\in[a,\ b])\leqslant\dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b f(t).dt\leqslant Sup(f(t)\mid t\in[a,\ b])$ (même si $a>b$?)
Déduisez : $\exists c\in[a,\ b],\ \frac{1}{b-a}.\int_a^b f(t).dt=f(c)$.
Montrez que ce résultat tombe en défaut si f est juste intégrable, et pas continue.

◦40◦ Trouvez toutes les applications f continues telles que la valeur moyenne de f sur chaque intervalle $[a,\ b]$ soit $a+b$?
Trouvez toutes les applications f continues telles que la valeur moyenne de f sur chaque intervalle $[a,\ b]$ soit la longueur $b-a$ du segment ?
Trouvez toutes les applications f continues telles que la valeur moyenne de f sur chaque intervalle $[a,\ b]$ soit $f\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)$?
Trouvez toutes les applications f continues telles que la valeur moyenne de f sur chaque intervalle $[a,\ b]$ soit $f\Big(\dfrac{2.a+b}{3}\Big)$?

◦41◦ ♡ Pour tout n, on pose $a_n=n^{\ln(n)}$. Donnez sa limite en $+\infty$.
La série de terme général $1/a_n$ converge-t-elle ?
Donnez la limite de $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ quand n tend vers l'infini *(indication :* $\ln(n^2+n).\ln\Big(dsp1+\frac{1}{n}\Big)$*)*.

$n^{\ln(n)}$ c'est juste $\exp((\ln(n))^2)$. Et $(\ln(n))^2$ ne se simplifie pas.
a_n va donc filer vers l'infini positif.

D'ailleurs, pour n plus grand que e, on a $a_n\geqslant n$.

Et pour n plus grand que e^2, on a même $a_n\geqslant n^2$.
Par passage à l'inverse positif : $\dfrac{1}{a_n}\leqslant\dfrac{1}{n^2}$.
Par domination par une série de Riemann de référence, la série de terme général positif $\Big(\dfrac{1}{a_n}\Big)_{n\geqslant 10}$ converge.[6]
Par ajout d'une constante, la série de terme général $\Big(\dfrac{1}{a_n}\Big)_{n\geqslant 1}$ converge.

Pour ce qui est de $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$,on l'écrit $\exp\Big((\ln(n+1))^2-(\ln(n))^2\Big)$
et même $\exp\Big(\big(\ln(n+1)-\ln(n)\big).\big(\ln(n+1)+\ln(n)\big)\Big)$.
Le contenu de la parenthèse est évidemment une forme indéterminée.
Mais on l'écrit $\ln\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big).\ln(n^2+n)$.
Le terme $\ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)$ est équivalent à $\dfrac{1}{n}$.
Le terme $\ln(n^2+n)$ (ou $\ln(n)+\ln(n+1)$) est équivalent à $2.\ln(n)$.
Le produit est équivalent à $\dfrac{2.\ln(n)}{n}$.
Cet équivalent tend vers 0 (croissances comparées).
Si vous êtes équivalent à une suite de limite nulle, vous tendez vous même vers 0.
Bref, $\big(\ln(n+1)-\ln(n)\big).\big(\ln(n+1)+\ln(n)\big)$ tend vers 0.
Et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$tend vers 1 (ce qu'on ne devinait pas tout de suite).

Beau petit exercice d'oral de concours que je posais à traiter en dix minutes à l'ESIM (devenue Centrale Marseille).

6. il n'y a pas un mot de trop, et tous les mots servent... des maths de concours

∘42∘

Montrez que la suite $(\sqrt{n^2+2.n+2}-\sqrt{n^2+n+1})$ converge quand n tend vers l'infini.
Montrez que la série de terme général $((\sqrt{n^2+2.n+2}-\sqrt{n^2+n+1})^n)$ converge.
Qu'en est il de la série de terme général $((\sqrt{n^2+3.n+2}-\sqrt{n^2+3.n+1})^n)$.

Je conjugue, tu conjugues, il conjugue : $\sqrt{n^2+2.n+2}-\sqrt{n^2+n+1}=\dfrac{(n^2+2.n+2)-(n^2+2.n+1)}{\sqrt{n^2+2.n+2}+\sqrt{n^2+2.n+1}}$.
Le numérateur vaut 1 et le dénominateur tend vers l'infini, le quotient tend vers 0.
Plus précisément, même, $\sqrt{n^2+2.n+2}-\sqrt{n^2+n+1}\sim_{n\to+\infty}\frac{1}{2.n}$.

Le terme général tend vers 0.
Mais la série de terme général $\sqrt{n^2+2.n+2}-\sqrt{n^2+n+1}$ va diverger par les théorèmes sur les séries à terme général positif équivalents en $+\infty$.

Ah, mais ce n'est pas elle qu'on regarde ! On doit élever à la puissance n.
Les équivalents passent à la puissance n ? Soyons prudent.
Contentons nous de majorer.

$$0\leqslant\sqrt{n^2+2.n+2}-\sqrt{n^2+n+1}=\frac{1}{\sqrt{n^2+2.n+2}+\sqrt{n^2+2.n+1}}\leqslant\frac{1}{n}$$

et donc $0\leqslant(\sqrt{n^2+2.n+2}-\sqrt{n^2+n+1})^n\leqslant\dfrac{1}{n^2}$ pour $n\geqslant 2$.

∘43∘

* On se donne u_0 strictement positif et on définit la suite récurrente (u_n) par $u_{n+1}=u_n+(u_n)^2$ pour tout n.
Montrez que cette suite est croissante et ne peut pas converger. Déduisez que la série de terme général $\dfrac{1}{1+u_n}$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{u_0}$.

Chaque terme de la suite $u_{n+1}=u_n+(u_n)^2$ existe *(récurrence évidente)*.
Chaque terme est positif *(idem)*.
u_{n+1} est toujours plus grand que u_n *(on ajoute un carré de réel)*.
La suite est croissante, elle n'a que deux possibilités : converger ou tend vers $+\infty$.
Mais si elle converge, sa limite réelle λ vérifie $\lambda=\lambda+\lambda^2$. Or, une suite croissante de premier terme u_0 ne peut pas tendre vers 0 qui est strictement plus petit que u_0.
Par élimination, elle diverge vers $+\infty$.

Certes, le terme général $\left(\dfrac{1}{1+u_n}\right)$ est toujours défini et tend vers 0. mais la condition nécessaire n'est pas suffisante.
Pour prouver la convergence de cette série à termes positifs *(la suite des sommes partielles croit)*, on est tenté de dire « je vais la majorer ». mais la question demande aussi la somme de a série.
On va donc calculer explicitement les sommes partielles et leur trouver une limite.
Essayez pour les premiers termes, ça doit bien marcher. Vous faites alors une conjecture, puis une récurrence.

Mais je vous donne même le truc magique : $\dfrac{1}{1+u_n}=\dfrac{u_n}{u_n.(1+u_n)}=\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{u_n.(1+u_n)}=\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{u_{n+1}}$.
. *Que pouvait on essayer d'avoir d'autre que cette série télescopique, en regardant le résultat attendu ?*

Il ne reste plus qu'à sommer et télescoper : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{1+u_n}=\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_{N+1}}$.

On fait tendre N vers $+\infty$ et on a à la fois la convergence et la limite : $\dfrac{1}{u_0}$.

∘44∘

La famille de réels positifs (u_n) est sommable. Pour tout n, on pose $v_n=\dfrac{1}{2^n}.\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k.u_k$.
Montrez que (v_n) est sommable de somme double de celle de (u_n).

Comme on a des sommes de réels positifs, on n'a que deux possibilités : la famille est sommable ou non.
On additionne tout, et si on trouve un réel[7], c'est qu'elle est sommable !

7. j'ai juste repris votre expression « si on trouve un réel fini » et j'ai viré le pléonasme qui dit deux fois la même chose : un réel c'est fini, et dans $[0,\ +\infty]$, $+\infty$ n'est pas un réel !

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} 2^{-n+k}.u_k \Big)$$

somme de sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} 2^{k-n}.u_k$$

somme triangulaire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n=k}^{+\infty} 2^{k-n}.u_k \Big)$$

somme de sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n=k}^{+\infty} 2^{k-n} \Big).u_k$$

factorisation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-p} \Big).u_k$$

changement d'indice $p = n - k$

Mais chaque somme $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} 2^{-p}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, poussée jusqu'à l'infini, de valeur 2 (le classique $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$).

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} 2.u_k$$

On sort le 2 et c'est fini.

◦45◦

Soit (u_n) une famille sommable de réels positifs, de somme 1. Montrez qu'il n'y a pas plus de cent termes plus grands que $\frac{1}{100}$.
Montrez qu'il peut y avoir un nombre infini de termes non nuls, mais qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de termes non nuls (dénombrable = en bijection avec $\mathbb{N}$).

S'il y a avait plus de cent termes plus grands que 10^{-2}, on en prendrait 101 (partie finie notée J_2) et la somme $\sum\limits_{n\in J_2} u_n$ vaudrait au moins 101.10^{-2}, ce qui contredit « la borne supérieure des sommes finies est 1 ».

Ceci est vrai pour tout 10^{-p} : il n'y a pas plus de 10^p termes plus grands que 10^{-p}.
On note J_p l'ensemble des termes plus grands que 10^{-p}.

L'ensemble des termes non nuls est la réunions des J_p pour p décrivant $\mathbb{N}$.
C'est donc une réunion dénombrable de parties finies.
C'est un ensemble dénombrable (mettre bout à bout les ensembles finis pour créer la bijection avec $\mathbb{N}$, en veillant même à ne pas prendre deux fois le même).

Si tous ces jeux avec l'infini, le dénombrable vous plaisent, vous êtes mûr pour la MP∗.
Si vous comprenez, avec quelques difficultés, c'est bon pour la MP.
Si vous ne comprenez pas en quoi il y a une différence entre « très très grand » et « infini », vous pouvez faire des « sciences », mais pas des maths (ou alors juste comme outil pour des calculs).

∘46∘ Montrez pour tout p : $\displaystyle\sum_{1\leqslant n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{3}{4.p^2}$ (la somme s'entendant à « tous les n strictement positifs, différents de p).
Calculez $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\Big(\sum_{1\leqslant n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}\Big)$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{1\leqslant p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}\Big)$.
Est-ce contradictoire ?

$\displaystyle\sum_{1\leqslant n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}$ est une somme où p est fixé, et c'est n qui varie.
On la coupe en deux : une vraie somme et la somme d'une série (convergente) :

$$\sum_{1\leqslant n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}=\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n^2-p^2}+\sum_{n=p+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}$$

La série est à termes positifs, et le terme général $\dfrac{1}{n^2-p^2}$est équivalent à $\dfrac{1}{n^2}$. La convergence est assurée.

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2.p}.\Big(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\Big)$$

On somme à horizon fini pour commencer

$$\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n^2-p^2}+\sum_{n=p+1}^{N}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2.p}.\Big(\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}+\sum_{n=p+1}^{N}\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\Big)$$

On translate les indices :

$$\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n^2-p^2}+\sum_{n=p+1}^{N}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2.p}.\Big(\sum_{k=1}^{p-1}\frac{-1}{k}-\sum_{k=p+1}^{2.p-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{N-p}\frac{1}{k}-\sum_{k=2.p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\Big)$$

On simplifie ce qu'on peut (en supposant a priori N assez grand) :

$$\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n^2-p^2}+\sum_{n=p+1}^{N}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2.p}.\Big(\sum_{k=p}^{N-p}\frac{1}{k}-\sum_{k=p+1}^{2.p-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=2.p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\Big)$$

On voit qu'il reste un pauvre terme $\dfrac{1}{p}$ tout seul :

$$\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n^2-p^2}+\sum_{n=p+1}^{N}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2.p}.\Big(\frac{1}{p}+\sum_{k=2.p}^{N-p}\frac{1}{k}-\sum_{k=2.p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\Big)$$

Puis un terme $\dfrac{1}{2.p}$:

$$\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n^2-p^2}+\sum_{n=p+1}^{N}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2.p}.\Big(\frac{1}{p}+\frac{1}{2.p}-\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\Big)$$

On voit déjà venir ce qu'on voulait :

$$\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n^2-p^2}+\sum_{n=p+1}^{N}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{3}{4.p^2}-\frac{1}{2.p}.\Big(\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\Big)$$

Dans la somme, il reste $2.p$ termes. Tous plus petits que le premier :

$$0\leqslant\frac{1}{2.p}.\Big(\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\Big)\leqslant\frac{1}{2.p}.2.p.\frac{1}{N-p+1}$$

Par encadrement, ce terme tend vers 0.

Attention, une somme de terme tendant vers 0 peut faire autre chose que tendre vers 0 si le nombre de termes grandit. rappelons que $\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{p}$ ne tend pas vers 0 quand p tend vers l'infini.

Il reste bien
$$\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n^2-p^2}+\sum_{n=p+1}^{N}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{3}{4.p^2}+o(1)_{N\to+\infty}$$

puis
$$\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n^2-p^2}+\sum_{n=p+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{3}{4.p^2}$$

On somme sur p de 1 à l'infini :
$$\sum_{p=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}\Big)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{3}{4.p^2}=\frac{3}{4}.\zeta(2)$$

	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$\ldots$	somme
$n=1$		$\frac{1}{4-1}$	$\frac{1}{9-1}$	$\frac{1}{16-1}$	$\frac{1}{25-1}$	$\frac{1}{36-1}$	$\to$	$\frac{3}{4.1}$
$n=2$	$\frac{1}{1-4}$		$\frac{1}{9-4}$	$\frac{1}{16-4}$	$\frac{1}{25-4}$	$\frac{1}{36-4}$	$\to$	$\frac{3}{4.4}$
$n=3$	$\frac{1}{1-9}$	$\frac{1}{4-9}$		$\frac{1}{16-9}$	$\frac{1}{25-9}$	$\frac{1}{36-9}$	$\to$	$\frac{3}{4.9}$
$n=4$	$\frac{1}{1-16}$	$\frac{1}{4-16}$	$\frac{1}{9-16}$		$\frac{1}{25-16}$	$\frac{1}{36-16}$	$\to$	$\frac{3}{4.16}$
$n=5$	$\frac{1}{1-25}$	$\frac{1}{4-25}$	$\frac{1}{9-25}$	$\frac{1}{16-25}$		$\frac{1}{36-25}$	$\to$	$\frac{3}{4.25}$
							total	$\frac{3}{4}.\zeta(2)$

Mais si on somme en colonnes les rôles sont inversés.
Les signes aussi
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}\Big)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-3}{4.n^2}=-\frac{3}{4}.\zeta(2)$$

	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$\ldots$	
$n=1$		$\frac{1}{4-1}$	$\frac{1}{9-1}$	$\frac{1}{16-1}$	$\frac{1}{25-1}$	$\frac{1}{36-1}$		
$n=2$	$\frac{1}{1-4}$		$\frac{1}{9-4}$	$\frac{1}{16-4}$	$\frac{1}{25-4}$	$\frac{1}{36-4}$		
$n=3$	$\frac{1}{1-9}$	$\frac{1}{4-9}$		$\frac{1}{16-9}$	$\frac{1}{25-9}$	$\frac{1}{36-9}$		
$n=4$	$\frac{1}{1-16}$	$\frac{1}{4-16}$	$\frac{1}{9-16}$		$\frac{1}{25-16}$	$\frac{1}{36-16}$		
$n=5$	$\frac{1}{1-25}$	$\frac{1}{4-25}$	$\frac{1}{9-25}$	$\frac{1}{16-25}$		$\frac{1}{36-25}$		
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		
	$\frac{-3}{4.1}$	$\frac{-3}{4.1}$	$\frac{-3}{4.1}$	$\frac{-3}{4.1}$	$\frac{-3}{4.1}$	$\frac{-3}{4.1}$	total	$\frac{-3}{4}.\zeta(2)$

Et pourtant, ces deux sommes effectuent une somme sur « le plan $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ privé de sa diagonale d'équation $n=p$.

Suivant l'ordre dans lequel on somme, on a un nombre et son opposé : $\sum_p\Big(\sum_n\frac{1}{n^2-p^2}\Big)=-\sum_n\Big(\sum_p\frac{1}{n^2-p^2}\Big)$.

Ceci est contraire à ce qu'affirme le théorème de Fubini.

Mais l'honneur est sauf, et le cours aussi.

La famille n'est pas sommable
$$\sum_{\substack{(p,n)\in\mathbb{N}^2\\ p\neq n}}\Big|\frac{1}{n^2-p^2}\Big|=+\infty$$

Le théorème de Fubini ne peut pas être appliqué.

∘47∘

♡ Montrez que la série de terme général $\frac{1}{n.\ln(n)}$ diverge.
Montrez que la suite $\left(\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{1}{n.\ln(n)}\right)\right)_N$ est croissante.
Que pensez vous de l'élève qui dit "*elle n'est pas majorée, donc elle diverge*".
Montrez que sa conclusion est quand même correcte, en étudiant le logarithme de cette suite. Montrez : $\ln\left(1+\frac{1}{\ln(n).n}\right) \leqslant \frac{1}{2.n.\ln(n)}$ pour tout n au moins égal à 2.

Donnez un rang à partir duquel on a assurément
$\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{1}{n.\ln(n)}\right) \geqslant 100$.
On a défini le programme suivant :
Qu'est il chargé de faire ? Le lancez vous pour vérifier ?

```
from math import log
p, n = 1, 2
while p<100 :
....p *= 1+1/(log(n)*n)
....n +=1
print(n, p)
```

La série à termes positifs $\frac{1}{n.\ln(n)}$ est minorée par la série de référence $\frac{1}{n}$. Elle diverge. Même pas besoin de comparaison série intégrale...

La suite $\left(\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{1}{n.\ln(n)}\right)\right)_N$ est faite de termes.

La programme calcule les termes de la suite $\left(\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{1}{n.\ln(n)}\right)\right)_N$, jusqu'à ce que le produit dépasse 100. C'est la boucle while qui fait ça.
Sur le papier, c'est cohérent puisque la suite diverge vers $+\infty$.
Mais dans la pratique, si on estime le temps qu'il faudra pour y parvenir, la convergence est trop lente.
Ce serait idiot de faire tourner un ordinateur pendant tout le prochain confinement juste pour ça.
On peut classiquement faire une comparaison série intégrale très tentante. On compare à $\int_2^n \frac{dt}{t.\ln(t)}$ (ou $\int_2^{n+1} \frac{dt}{t.\ln(t)}$, on s'en moque). On minore donc par quelquechose en $\Big[\ln(\ln(n))\Big]_{n=2}^{N}$ et le tour est joué.

Pour ce qui est du produit $\left(\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{1}{n.\ln(n)}\right)\right)_N$, il est fait de termes positif, et pour passer d'un produit au suivant, on multiplier par un nombre plus grand que 1. La croissance vient de là.

En tant que suite croissante, elle peut converger ou tendre vers $+\infty$. Tout dépend de la vitesse à laquelle elle croît.
L'argument bidon serai de dire « le rapport de deux termes consécutifs tend vers 1, donc elle converge ». rappelons que $\frac{n+1}{n}$ tend vers 1 mais que (n) diverge.

L'argument de l'élève n'est pas mieux. Il ne dit pas pourquoi elle ne serait pas majorée.

Passons quand même au logarithme : $\ln(A_N) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{n.\ln(n)}\right)$.
On a cette fois une série, dont le terme général est positif et tend vers 0. Et alors ?
Ah oui, mais $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$. On a donc $\ln\left(1+\frac{1}{n.\ln(n)}\right) \sim \frac{1}{n.\ln(n)}$.

Le théorème sur les séries à termes positifs équivalents en $+\infty$ dit que $\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{n.\ln(n)}\right)$ et $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n.\ln(n)}$ sont de même nature. Si l'une diverge, l'autre aussi. Et c'est le cas ici.

Allez, si on le fait un peu brutal, on dit que $\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{n.\ln(n)}\right)$ et $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n.\ln(n)}$ et $\int_2^n \frac{dt}{t.\ln(t)}$ sont à peu près égales.
Pour que le produit dépasse 100, il faut et suffit que l'intégrale dépasse $\ln(100)$. Ce qui revient à ce que $\ln(\ln(n))$ dépasse $\ln(100)$.
Si on lance le programme, il va devoir attendre en gros que n dépasse e^{100}.
Il fait bien ce qui est demandé, mais on ne le lance pas.
Sauf là, en confinement où on s'emmerde grave.

pour que p dépasse	5	10	15	25	30	35	
n vaut	19	199	6 213	2 099 046	38 585 670		

∘48∘ ♡ On rappelle que l'on note « sommes de Riemann de f sur $[a,\ b]$ pour la subdivision $a = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n = b$ les trois sommes $\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k).f(a_k)$, $\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k).f\Big(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\Big)$ et $\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k).f(a_{k+1})$ (gauche, milieu et droite) ». On prend la version simplifiée : $a_k = a + k.\frac{b-a}{n} = \frac{(n-k).a+k.b}{n}$.
Calculez la somme de Riemann gauche pour $f = x \longmapsto x^2$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.
Calculez la somme de Riemann gauche pour $f = x \longmapsto x^3$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.
Calculez la somme de Riemann gauche pour $f = x \longmapsto 2^x$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

fonction	somme de Riemann	limite
$x \longmapsto x^2$	$\frac{b-a}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\Big(a+k.\frac{b-a}{n}\Big)^2$	$\frac{b^3-a^3}{3}$
$x \longmapsto x^2$	$\frac{b-a}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\Big(a+k.\frac{b-a}{n}\Big)^3$	$\frac{b^4-a^4}{4}$
$x \longmapsto 2^x$	$\frac{b-a}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}2^a.\Big(2^{\frac{b-a}{n}}\Big)^k$	$\frac{2^b-2^a}{\ln(2)}$

Bon, pour ce qui est des limites, il faut justifier.

$$\frac{b-a}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\Big(a+k.\frac{b-a}{n}\Big)^2 = \frac{b-a}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\Big(a^2+2.k.a.\frac{b-a}{n}+k^2.\frac{(b-a)^2}{n^2}\Big)$$

$$\frac{b-a}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\Big(a+k.\frac{b-a}{n}\Big)^2 = \frac{b-a}{n}.\Big(n.a^2+2.a.\frac{b-a}{n}.\frac{(n-1).n}{2}+\frac{(b-a)^2}{n^2}.\frac{(n-1).n.(2.n-1)}{6}\Big)$$

$$\frac{b-a}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\Big(a+k.\frac{b-a}{n}\Big)^2 = (b-a).\Big(a^2+2.a.(b-a).\frac{(n-1)}{2.n}+(b-a)^2.\frac{(n-1).(2.n-1)}{6.n^2}\Big)$$

Quand n tend vers l'infini, il reste $(b-a).\Big(a^2+a.(b-a)+\frac{(b-a)^2}{3}\Big)$ et ceci donne bien $\frac{(b-a).(a^2+a.b+b^2)}{3}$.
On confirme donc la primitive attendue.

Pour la seconde somme, avec courage, on développe de la même façon et on passe aux équivalents

$$\frac{b-a}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\Big(a+k.\frac{b-a}{n}\Big)^2 = \frac{b-a}{n}.\Big(a^3.n+3.a^2.\frac{b-a}{n}.\frac{(n-1).n}{2}+3.a.\frac{(b-a)^2}{n^2}.\frac{(n-1).n.(2.n+1)}{6}+\frac{(b-a)^3}{n^3}.\frac{(n-1)^2.n^2}{4}\Big)$$

La suite n'est que calcul.

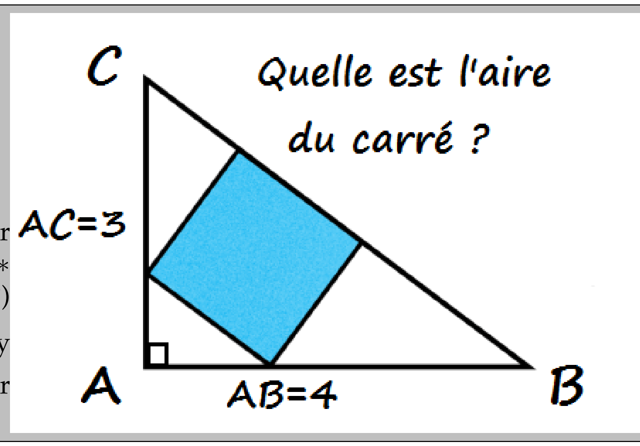
Pour le dernier, on identifie une sérié géométrique de raison $2^{\frac{b-a}{n}}$ avec n termes.

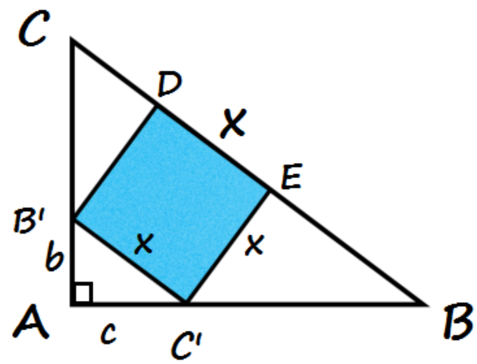
$$\frac{b-a}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}2^a.\Big(2^{\frac{b-a}{n}}\Big)^k = \frac{b-a}{n}.2^a.\frac{1-2^{\frac{b-a}{n}.n}}{1-2^{\frac{b-a}{n}}} = \frac{b-a}{n}.2^a.\frac{1-2^{b-a}}{1-2^{\frac{b-a}{n}}} = (2^a-2^b).\frac{t}{1-2^t}$$

en posant comme par hasard $t = \frac{b-a}{n}$.
On a une forme indéterminée, mais $\frac{2^t-1}{t}$ tend vers la dérivée en 0 de $x \longmapsto 2^x$ c'est à dire vers $\ln(2)$.
On a bien au final $dsp(2^a-2^b).\frac{1}{-\ln(2)}$ et c'est bien ce qu'on espérait pour un calcul de primitive.

◦49◦

Dans une vidéo, (l'excellent) Mickaël Penn passe par une longue récurrence pour calculer $1 * (2 * 4 * (8 * (\dots (2^{2020} * 2^{2021}) \dots)))$ où la loi $*$ (non associative ?) est définie par $a * b = \dfrac{a.b}{a+b}$. Mais quand même, il y a plus simple, non ? C'est l'addition transformée par une bijection bien choisie, non ?





On donne des noms : les sommets s'appellent A, B et C *(donc $BC = 5$ car le triangle est rectangle)*.
On nomme x le côté du carré à trouver.
On note B' et C' les points de contact sur les côtés. On note b et c les longueurs AB' et AC'.
Le triangle $(C'AB')$ est rectangle en A : $x^2 = b^2 + c^2$.
Mais il est aussi homothétique au triangle initial *($B'C'$ est parallèle à BC)*. On a donc $\dfrac{AB'}{AC} = \dfrac{AC'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = r$ rapport d'homothétie pour passer du grand au petit.
Mais plusieurs triangles encore sont homothétiques au triangle initial *(triangles rectangles avec un angle $Arctan(4/3)$)*.
$\dfrac{4-c}{5} = \dfrac{x}{3}$ petit triangle en bas à droite
$\dfrac{3-b}{5} = \dfrac{x}{4}$ petit triangle en haut à gauche
On élimine : $b = \dfrac{12-5.x}{4}$ et $c = \dfrac{12-5.x}{3}$.
On reporte dans le théorème de Pythagore pour le triangle en bas à gauche : $b = \left(\dfrac{12-5.x}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{12-5.x}{3}\right)^2 = x^2$.
x vaut $\dfrac{60}{37}$ *(ou $\dfrac{60}{13}$ qui est absurde, mais je ne vois pas trop pourquoi)*.
L'aire cherchée est le carré de ce x.

Sinon, on va encore plus vite en nommant D et E les points sur l'hypoténuse BC.
Par « triangles semblables » ou en mesurant la tangente des angles aux sommets : $\dfrac{CD}{x} = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{x}{EB} = \dfrac{3}{4}$.
On a donc $CD = \dfrac{3.x}{4}$ et $EB = \dfrac{4.x}{3}$.
On somme $CD + DE + EB = 5$: $\dfrac{3.x}{4} + x + \dfrac{4.x}{3} = 5$. On retrouve le x mentionné plus haut.

◦50◦

Le produit de six entiers positifs consécutifs est un nombre à 12 chiffres de la forme abbcddcddabb où les chiffres a, b, c, d, sont eux-mêmes, dans un certain ordre, quatre nombres consécutifs. Quelle est la valeur de c ?

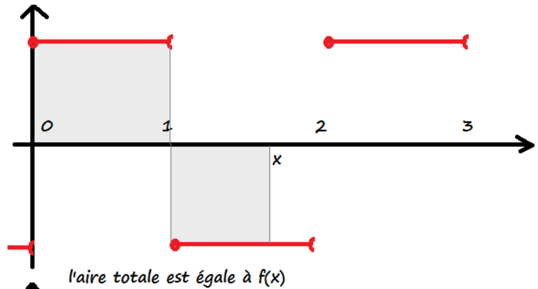
Un produit de six entiers consécutifs, c'est quoi ?
C'est $n.(n+1).(n+2).(n+3).(n+4).(n+5).(n+6)$.
A faire.

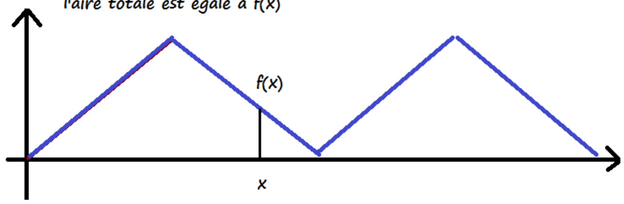
◦51◦

On définit : $f = x \longmapsto |\sin(x)|$ et pour tout entier naturel n : $\boxed{f_n = x \longmapsto |\sin(2^n.x)|/2^n}$ Montrez que chaque f_n est lipschitzienne.

Déterminez proprement
$\boxed{Sup(Inf(f_n(x) \mid x \in [0, \pi]) \mid n \in \mathbb{N})}$
$\boxed{Inf(Sup(f_n(x) \mid x \in [0, \pi]) \mid n \in \mathbb{N})}$
$\boxed{Sup(Inf(f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}) \mid x \in [0, \pi])}$
$\boxed{Inf(Sup(f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}) \mid x \in [0, \pi])}$

∘52∘ Montrez que $x \longmapsto \int_0^x (-1)^{[t]}.dt$ est lipschitzienne mais pas dérivable. Même question avec $x \longmapsto \int_0^x (-1)^{[t]}.\sin(t).dt$.





On peut tracer l'application et vérifier qu'elle n'est pas dérivable en 1 par exemple *(deux demi-tangentes distinctes)*.
Mais pour ce qui est de lipschitzienne, on va le faire sans effort.
Par la relation de Chasles, en encadrant.
Normalement, tout est dit, mais je vous le fais.
On se donne x et y et on calcule $f(y) - f(x)$ en appelant f l'application.
Par relation de Chasles : $f(y) - f(x) = \int_x^y (-1)^{[t]}.dt$ *(sans partie entière, $(-1)^x$ n'aurait pas eu de sens)*.
On passe à la valeur absolue, et on utilise l'inégalité triangulaire sur les intégrales : $\left|\int_a^b \varphi(t).dt\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|.dt$ *(en supposant $a < b$ sans perte de généralité)*.
On a donc $|f(y) - f(x)| \leqslant \int_x^y |(-1)^t|.dt = \int_x^y dt = y - x$ (ça c'est pour $x \leqslant y$ sinon, c'est $|f(y) - f(x)| \leqslant \int_y^x |(-1)^t|.dt = \int_y^x dt = |y - x|$).
L'application est lipschitzienne de rapport 1.

Celle avec un sinus se traite de la même façon, même si on ne sait pas trop comment la représenter...

∘53∘ Montrez que $x \longmapsto \int_x^{2.x} e^{-t^2}.dt$ est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On va revenir aux résultats simples. Comme cette application est dérivable, il suffit de borner sa dérivée.
On dérive proprement (voir feuille de rentrée) : on note F une primitive de $t \longmapsto e^{-t^2}$ (définie sur $\mathbb{R}$). Notre application est alors $x \longmapsto F(2.x) - F(x)$.
Elle se dérive en $x \longmapsto 2.F'(2.x) - F'(x)$.
On obtient donc $x \longmapsto 2.e^{-4.x^2} - e^{-x^2}$.
On encadre par 2 et -1 (ou on majore brutalement en valeur absolue par 3).
La dérivée est bornée, l'application est lipschitzienne. Et nul ne nous demande d'optimiser le rapport de Lipschitz.

∘54∘ ♡ Montrez sans forcément la calculer *(ni même la dériver)* que $x \longmapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2}$ est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Certes, elle se calcule : $\int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_0^x \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.\int_0^x \frac{dt}{\left(\frac{2.t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$.
On trouve au final $\frac{2}{\sqrt{3}}.Arctan\left(\frac{2.t+1}{\sqrt{3}}\right)$ (on a changé de variable en $u = \frac{2.t+1}{\sqrt{3}}$).
On décortique : $t \longmapsto \frac{2.t+1}{\sqrt{3}} \longmapsto Arctan\left(\frac{2.t+1}{\sqrt{3}}\right) \longmapsto \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{2.t+1}{\sqrt{3}}\right)$ et chaque terme est lipschitzien.

On peut aussi la dériver : $x \longmapsto \frac{1}{1+x+x^2}$.
On minore puis majore : $1 + x + x^2 \geqslant \frac{3}{4}$ (minimum d'un trinôme, et même factorisation canonique plus haut) : $\frac{1}{1+x+x^2} \leqslant \frac{4}{3}$.
La dérivée est bornée, c'est fini.

Mais un vrai matheux sait payer le prix minimum. On se donne x et y avec x plus petit que y sans restreindre la généralité.

On calcule la différence : $\displaystyle\int_0^y \frac{dt}{1+t+t^2} - \int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_x^y \frac{dt}{1+t+t^2}$ *(relation de Chasles)*.

Cette différence est positive, mais on la majore aussi : la fonction sous le signe somme est positive, mais aussi plus petite que $\dfrac{4}{3}$ (voir « majoration de la dérivée).

On encadre donc : $\displaystyle\int_x^y 0.dt \leqslant \int_x^y \frac{dt}{1+t+t^2} \leqslant \int_x^y \frac{4}{3}.dt$: $0 \leqslant f(y) - f(x) \leqslant 4.\dfrac{y-x}{3}$.

L'application est bien lipschitzienne, et le rapport est le même que dans les autres preuves.

∘55∘

♡ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrez que f est bornée.
La méthode astucieuse consistera à définition $\varphi = \theta \longmapsto f(\tan(\theta))$ sur $]-\pi/2,\ \pi/2[$ et même si possible $]-\pi/2,\ \pi/2[$.

En notant α la limite de f à l'infini positif, et en quantifiant cette propriété, on a f bornée par $\alpha - 1$ et $\alpha + 1$ sur $[G_1,\ +\infty[$.

En notant β la limite de f à l'infini négatif, et en quantifiant cette propriété avec d'autres variables utiles, on a f bornée par $\beta - 1$ et $\beta + 1$ sur $]-\infty,\ \Gamma_1]$.

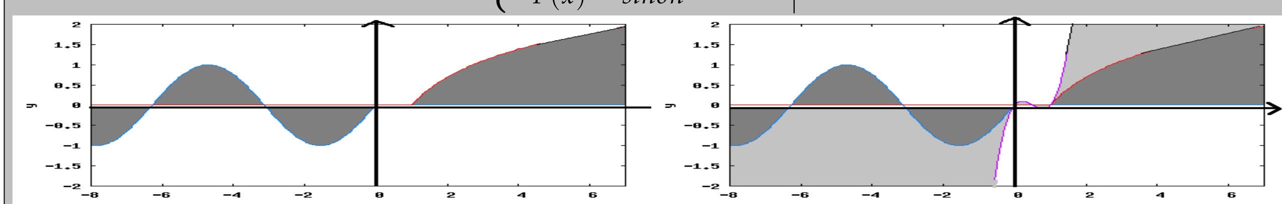
Par compacité et continuité, f est bornée sur le segment $[\Gamma_1,\ G_1]$, on va dire par M et μ.

Globalement, f est majorée sur $\mathbb{R}$ par $Max(\beta+1,\ M,\ \alpha+1)$ et minorée par $Max(\beta-1,\ \mu,\ \alpha-1)$.

La preuve stylée fait appel à $g = \theta \longmapsto f(\tan(\theta))$, continue, comme composée d'applications continues.
On la prolonge par composition de limites : $g(-\pi/2) = \beta$ (limite à droite) et $g(\pi/2) = \alpha$ (limite à gauche seulement).
g est à présent continue sur le segment $\left[\dfrac{-\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. Elle est bornée.
Par restriction, elle est bornée $\left]\dfrac{-\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ en gardant les mêmes bornes.
On a donc $\exists(\mu,\ M),\ \forall \theta \in \left]\dfrac{-\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right[,\ \mu \leqslant f(\tan(\theta)) \leqslant M$.
On change de variable : $\exists(\mu,\ M),\ \forall t \in \mathbb{R},\ \mu \leqslant f(t) \leqslant M$. f est bornée.

∘56∘

Ajustez un polynôme P pour que $x \longmapsto \left\{\begin{array}{lll} \sin(x) & si & x < 0 \\ \ln(x) & si & x > 1 \\ P(x) & sinon & \end{array}\right.$ soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.



On découpe en trois le domaine

	$x<0$	$x=0^-$	$0<x<1$	$x=1^+$	$1<x$
$f(x)$	$\sin(x)$	0	?	0	$\ln(x)$
$f'(x)$	$\cos(x)$	1	?	1	$1/x$

Pour un raccordement continu en 0, on doit donc avoir la même limite à droite qu'à gauche. Ceci va imposer $P(0) = 0$.
Mais la tangente en 0 a pour coefficient directeur à gauche 1. On doit avoir le même à droite : $P'(\grave{a}) = 1$.

On fait de même en 1 à droite : valeur 0 et dérivée 1.
On impose donc aussi $P(1) = 0$ et $P'(1) = 1$.

On cherche donc un polynôme vérifiant quatre condition

$P(0)=0$	$P(1)=0$
$P'(0)=1$	$P'(1)=1$

On aura quatre équations. Il nous faut quatre inconnues.

P est donc dans $\mathbb{R}_3[X]$. On l'écrit $a.X^3 + b.X^2 + c.X + d$ et on résout $\begin{array}{ccccc} & & & d & = 0 \\ & & c & & = 1 \\ a & +b & +c & +d & = 0 \\ 3.a & +2.b & +c & & = 1 \end{array}$

On trouve $x \longmapsto 2.x^3 - 3.x^2 + x$ (ça c'est la fonction polynôme, et le polynôme (formel) c'est $2.X^3 - 3.X^2 + X$).

On l'écrit aussi $X.(X-1).(2.X-1)$.

Le polynôme $X.(X-1).(2.X-1) + (X.(X-1))^2$ convient aussi d'ailleurs.
Et même tout polynôme $X.(X-1).(2.X-1) + (X.(X-1))^2.Q(X)$, voyez vous la structure particulière plus homogènes ?

∘57∘ Soit f continue. Montrez que $x \longmapsto \int_0^\pi \sin(x.t).f(t).dt$ est lipschitzienne.

Attention aux variables.[8]
On pose $F = x \longmapsto \int_0^\pi \sin(x.t).f(t).dt$.

On calcule et on majore pour x et y donnés : $|F(x) - F(y)| = |\int_0^\pi \sin(x.t).f(t).dt - \int_0^\pi \sin(y.t).f(t).dt|$

$$|F(x) - F(y)| = \Big|\int_0^\pi \Big(\sin(x.t) - \sin(y.t)\Big).f(t).dt\Big|$$
$$|F(x) - F(y)| \leqslant \int_0^\pi \Big|\sin(x.t) - \sin(y.t)\Big|.|f(t)|.dt$$
$$|F(x) - F(y)| \leqslant \int_0^\pi \Big|x.t - y.t\Big|.|f(t)|.dt$$
$$|F(x) - F(y)| \leqslant |x-y|.\int_0^\pi |t.f(t)|.dt$$

L'intégrale $\int_0^\pi |t.f(t)|.dt$ est un réel qui ne dépend plus de x et y. C'est bon.

∘58∘ ♡ Montrez que l'application $x \longmapsto x^2$ est lipschitzienne sur tout segment *(en revenant à la définition, et non pas en majorant la dérivée)*.

On doit contrôler les taux d'accroissement (lipschitzienne, c'est ça, et pas tout de suite une formule).
Or, $\dfrac{|x^2 - y^2|}{|x-y|} = |x+y|$. Si x et y sont pris tous deux dans un segment $[a,\ b]$, la somme $|x+y|$ ne peut pas devenir »trop grande ».
On peut dans un premier temps supposer que notre segment est de la forme $[-K,\ K]$. Alors $|x|$ et $|y|$ se majorent par K.
On a donc $\forall (x,\ y) \in [-K,\ K]^2,\ |y^2 - x^2| \leqslant 2.K.|y-x|$.
L'application est lipschitzienne de rapport $2.K$ (je ne dis pas que c'est le meilleur rapport, mais on s'en moque).
Si ensuite, on travaille sur un segment $[a,\ b]$, on l'inclus dans $[-K,\ K]$ avec K bien choisi ($K = Max(|a|,\ |b|)$).

exemple de segment $[a,\ b]$	$[-4,\ -2]$	$[-4,\ 3]$	$[-1,\ 7]$	$[2,\ 5]$
segment centré $[-K,\ K]$	$[-4,\ 4]$	$[-4,\ 4]$	$[-7,\ 7]$	$[-5,\ 5]$

∘59∘ ♡ Une application est dite lilipschitzienne si il existe K vérifiant $\forall (x,y),\ |f(x) - f(y)| \leqslant k.|x-y|^2$. Montrez que les applications lilipschitziennes ont une dérivée nulle. Déduisez que l'ensemble des applications lilipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 1.

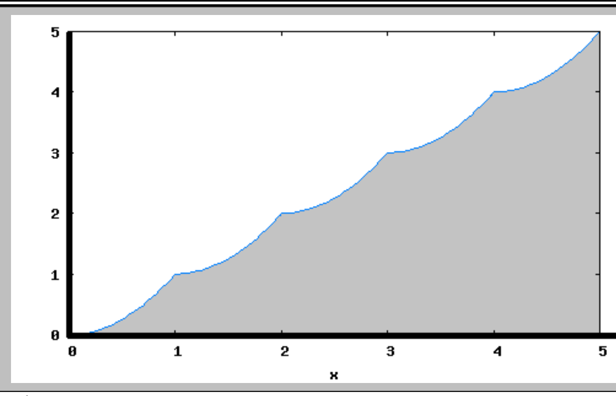
On prend f vérifiant cette propriété, on se donne a et on montre que f est dérivable en a, de dérivée nulle.
On calcule en effet les taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$ et on trouve que leur valeur absolue est majorée par $k.|x-a|$.
Quand x tend vers a, $k.|x-a|$ tend vers 0.
Par encadrement, $\left|\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}\right|$ tend vers 0.[9].
On en déduit $f'(a) = 0$ pour tout a.

8. $x \longmapsto \int_0^\pi \sin(x.t).f(t).dt$ n'est pas f et n'est pas non plus une primitive de f ou d'une fonction de la forme $f \times g$, c'est une intégrale à paramètre contenant f sous le signe somme
9. théorème d'encadrement et pas passage à la limite

Un théorème fin d'analyse permet de dire que f est constante.

Réciproquement, si f est constante, elle est lilipschitzienne, de rapport... ce que vous voulez.

L'ensemble des applications lilipschitziennes est donc l'espace des applications constantes. Il est de dimension 1 et une base en est $(x \longmapsto 1)$.



◦60◦ ♣ On définit : $f = x \longmapsto (x-[x])^2+[x]$. Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$. Est elle dérivable ?
Calculez son intégrale de 0 à 5. Montrez qu'elle est lipschitzienne.

Pour la continuité en tout point a, on va séparer deux types de points a.
Si a n'est pas entier, $[x]$ est une constante sur un voisinage de a (en posant $[a]=n$, n a encore $[x]=n$ pour tout x de $]n,\ n+1[$, et l'application $x \longmapsto (x-n)+n$ est continue car polynômiale.

Si a est un entier, tout est conçu avec la partie entière pour que ça se passe mal.
Il faut séparer droite et gauche :

	$]a-1,\ a[$	a	$[a,\ a+1[$
formule	$(x-(a-1))^2+(a-1)$	$(a-a)^2+a=a$	$(x-a)^2+a$
limite quand x tend vers a	a	a	a

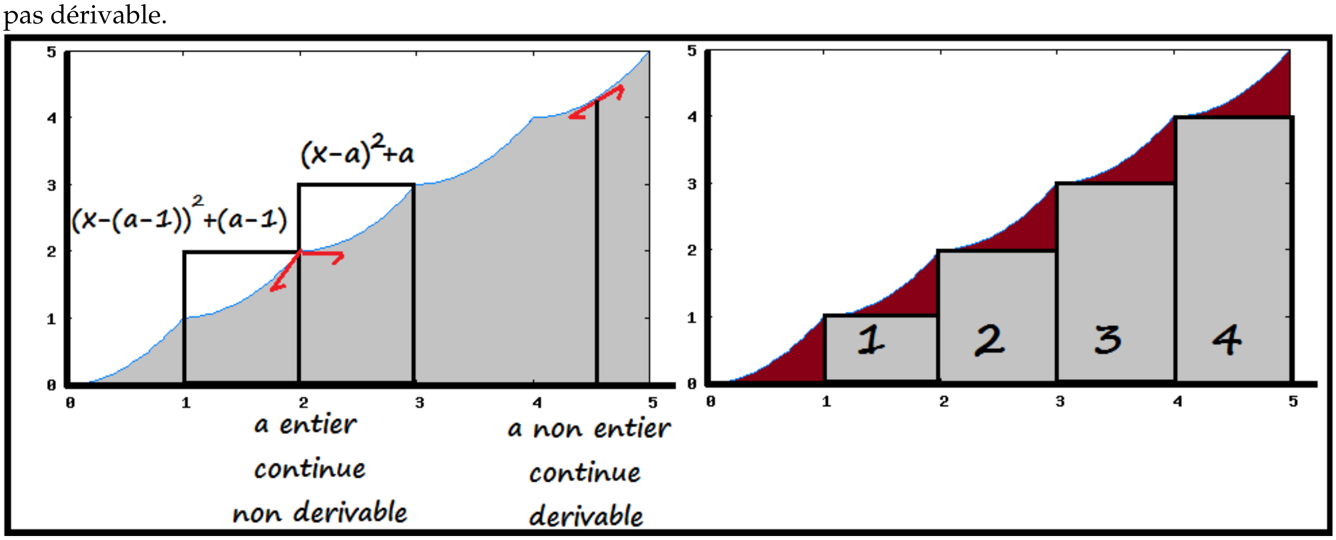
L'application est continue en a.

En tout point, on a la continuité.

En revanche, elle n'est pas dérivable en a entier, avec deux demi-tangentes distinctes.

	$]a-1,\ a[$	a	$[a,\ a+1[$
formule	$(x-(a-1))^2+(a-1)$	$(a-a)^2+a=a$	$(x-a)^2+a$
taux d'accroissement	$\dfrac{(x-a-1)^2+(a-1)-a}{x-a}$		$\dfrac{(x-a)^2+a-a}{x-a}$
limite des taux quand x tend vers a	2		0

Les taux n'ont pas la même limite à droite et à gauche, la fonction a deux demi tangentes non alignées, elle n'est pas dérivable.



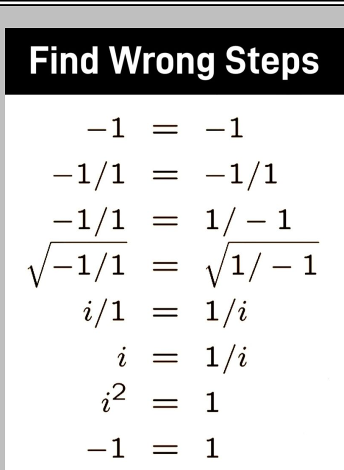
Pour l'intégrale de 0 à 5, on applique la relation de Chasles pour découper en cinq intégrales.

En effet, on a $[x+1] = [x]+1$ pour tout x.
On en déduit $f(x+1) = f(x)+1$ pour tout x .

Chacune des intégrales $\int_k^{k+1} f(t).dt$ est d'ailleurs faite d'un rectangle et d'un morceau qui revient à chaque fois.
Purement géométrique : $\int_0^5 f(t).dt = 1+2+3+4+5.\ \int_0^1 f(t).dt = 10+5.\ \int_0^1 x.dx = \frac{35}{3}$.

Montrons maintenant qu'elle est lipschitzienne de rapport 2 (le maximum de la dérivée croisée).
A faire.

∘61∘



Find Wrong Steps

$$\begin{aligned} -1 &= -1 \\ -1/1 &= -1/1 \\ -1/1 &= 1/-1 \\ \sqrt{-1/1} &= \sqrt{1/-1} \\ i/1 &= 1/i \\ i &= 1/i \\ i^2 &= 1 \\ -1 &= 1 \end{aligned}$$

Ceci est la racine cubique d'un arbre.

Amorce de réponse. Vous avez appris une formule : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ en première.
Mais elle avait des conditions d'utilisation.
déjà, ça se passait dans $\mathbb{R}$. Et il y avait un piège même avec la racine du produit.
Pour avoir le droit d'écrire $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ il fallait quand même que a et b soient positifs.

Prenons directement $a = -1$ et $b = -1$.
Le produit $a.b$ vaut 1 et il a bien une racine carrée : $\sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{1} = 1$.

Mais si je vous dis $\sqrt{-1} = i$, protestez vous ?

Puis si je vous dis $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = i.i$, protestez vous ?

Si je termine avec $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{-1}.\sqrt{-1} = i.i = -1$, vous voyez l'erreur ?

La notation $\sqrt{a}$ est à réserver aux réels positifs. Et ensuite, un complexe (ou même un réel négatif) a deux racines carrées.
Et sans unicité de la racine, la forme $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ ne peut plus être démontrée. Elle n'est plus valable.