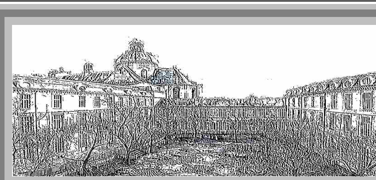
LYCEE CHARLEMAGNE

Lundi 29 avril

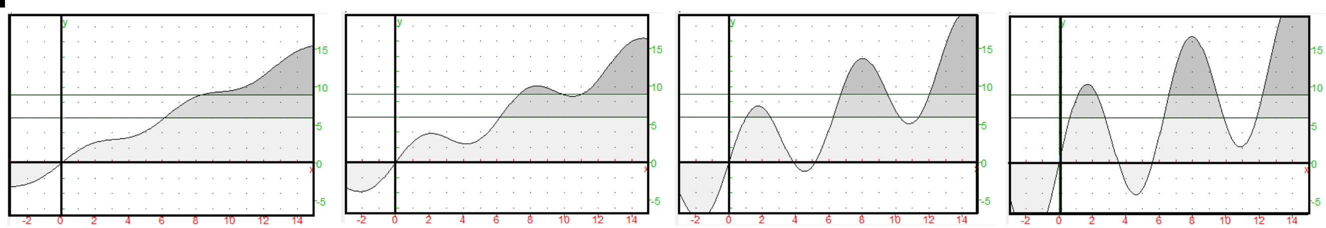
M.P.S.I.2



2023 2024

TD26

∘0∘



a est un réel positif. Pour quelles valeurs de a l'application $x \longmapsto a.\sin(x) + x$ est elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
Pour quelles valeurs de a l'application $x \longmapsto a.\sin(x) + x$ les équation $f(x) = b$ d'inconnue x ont elles de 1 à 3 solutions ?
Existe-t-il une valeur de a pour laquelle chaque équation $f(x) = b$ d'inconnue x a exactement 3 solutions ?

∘1∘ f et g sont deux applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $f(x) \sim_{x \to +\infty} g(x)$ *(au fait, pour un demi point déjà, ça veut dire quoi ?)*. Lesquelles de ces affirmations sont alors vraies :

A	si	f est bornée	alors	g est bornée
B	si	f est dérivable en tout point	alors	g est dérivable en tout point
C	si	f est positive en tout point	alors	g est positive en tout point
D	si	f est périodique	alors	g est périodique à partir d'un certain réel
E	si	f est croissante	alors	g est croissante
F	si	f est lipschitzienne	alors	g est lipschitzienne

∘2∘ ♡ Donnez la limite en 0 de $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\ln(1+x)}$, de $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\ln(1-x)}$ et $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\ln(1+x)-\ln(1-x)}$.

∘3∘ Un élève écrit : "f est dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f(0) = 1$; on dérive : $f'(0) = 0$". Montrez qu'il a tort.
Un élève écrit : "f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$ et $f(0) = 1$; on dérive : $f'(0) = 0$". Montrez qu'il a raison.

∘4∘ ♡ Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ ($a < b$). On suppose $\int_a^b f(t).dt = 0$. Montrez que f s'annule et change de signe au moins une fois en un point c de $[a, b]$ (raisonner par l'absurde, ou par théorème de Rolle).
On suppose de plus $\int_a^b t.f(t).dt = 0$. Déduisez que f s'annule en fait au moins deux fois sur $[a, b]$ (étudier $\int_a^b (t-c).f(t).dt$).
♡ On suppose $\int_a^b t^k.f(t).dt = 0$ pour tout k de 0 à n. Montrez que f s'annule et change de signe au moins $n+1$ fois.

∘5∘ Soit f continue, périodique de période p. Dérivez $x \longmapsto \int_x^{x+p} f(t).dt$. Interprétez.

∘6∘ ♡ Résolvez l'équation $T_7(x) = \dfrac{e^{10}+1}{2.e^5}$ d'inconnue réelle x *(trouvez une solution et montrez aussi qu'il n'y en a qu'une)*.
Oui, polynômes de Tchebychev.

∘7∘ On se donne u_0 positif. On pose $u_{n+1} = \dfrac{e^{-2.u_n}}{n+1}$ pour tout n. Montrez que la suite u est positive et tend vers 0.
Vérifiez sur un exemple comme $u_0 = 0$ avec votre calculatrice *(ou celle du voisin)* que u n'est pas monotone.
On pose alors $A_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k.u_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k)^2$. Lesquelles sont monotones. Que pensez vous de l'affirmation : B_n est croissante si n est impair.
Montrez : $u_k \geqslant \dfrac{1}{e.(k+1)}$. Déduisez que (A_n) diverge.

Montrez : $u_k \leqslant \dfrac{1}{k+1}$. Déduisez que (C_n) converge.

♠ Montrez que $\left(B_n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right)$ converge.

Déduisez que (B_n) converge.

◦8◦ Donnez les limites quand n tend vers $+\infty$: $(n^{\ln(n)/n})$, $\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)^n$, $\left(1+\dfrac{\ln(n)}{n}\right)^n$.

◦9◦ Montrez que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)$ sont adjacentes.

◦10◦ On dispose d'un cône à section circulaire (rayon r) de hauteur (verticale) h. On doit le découper en trois parts de volumes égaux par deux découpes horizontales. A quelle hauteur les situez vous ?

◦11◦ Vérifiez $\sqrt{n!} \ll n^{n/2} \ll n! \ll n^n$ quand n tend vers l'infini (utilisez le lemme classique).

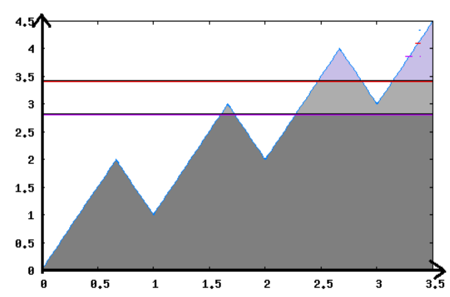
◦12◦ ♡ a et b sont deux réels strictement positifs donnés. Déterminez la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{a^x - b^x}{x}$.

◦13◦ Le théorème de convergence logarithmique dit « soit (a_n) une suite, on suppose que $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ converge vers une une limite λ dans $[0,\ 1[$, on déduit que (a_n) converge vers 0 ». Un élève dont je tairai le nom[1] a inventé une réciproque. Montrez qu'il a tort. Et dites moi qui c'est.
Mais si (a_n) est monotone ?

◦14◦ z_0 est un complexe donné, on définit $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$. Donnez module et argument de z_n pour tout n (oui, ici, ce n'est surtout pas la forme cartésienne qui va servir).
Montrez que $(|z_n|)$ et $(Arg(z_n))$ convergent.

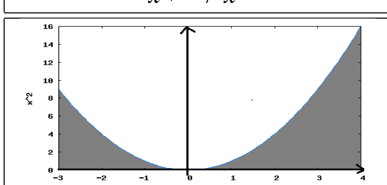
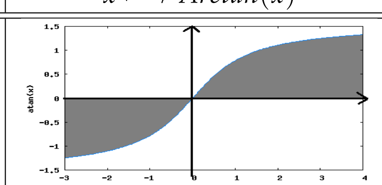
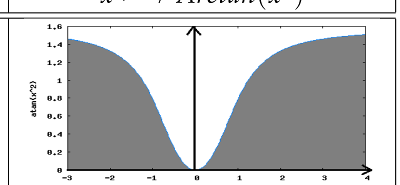
◦15◦ Faux : si u_n tend vers a quand n tend vers l'infini, alors $u_{n+1}.u_{n+2}\dots u_{2n}$ tend vers a^n quand n tend vers $+\infty$.
Vrai ou faux : si u_n tend vers $a > 1$ quand n tend vers l'infini, alors $u_{n+1}.u_{n+2}\dots u_{2n}$ est équivalent à a^n quand n tend vers $+\infty$.

◦16◦ ♣ On définit : $f = x \longmapsto 2 - |3.x - 2|$ et $g = x \longmapsto [x] + f(x - [x])$. Représentez f et g. Montrez que g est continue et lipschitzienne.



Montrez que pour tout λ réel l'équation $g(x) = \lambda$ d'inconnue x a exactement trois solutions.
Montrez qu'il n'existe pas d'application h continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel λ l'équation $h(x) = \lambda$ ait exactement deux solutions.

◦17◦ Parmi ces trois applications, combien sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$	$x \longmapsto Arctan(x)$	$x \longmapsto Arctan(x^2)$
		

◦18◦ Qui, de $\theta \longmapsto \sin(\tan(\theta))$ et $\theta \longmapsto \tan(\sin(\theta))$ est lipschitzienne sur $]-\pi/2,\ \pi/2[$?

---

1. à vous d'en inventer un qui fasse un mauvais calembour

∘19∘ Montrez que $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \cos(\sqrt{2}.x)$ sont périodiques.
On suppose que $x \longmapsto \cos(x) + \cos(\sqrt{2}.x)$ est périodique de période p. Montrez alors $\cos(p) + \cos(\sqrt{2}.p) = 2$. Déduisez $\cos(p) = 1$ et $\cos(\sqrt{2}.p) = 1$. Concluez.

∘20∘ ♡ Montrez que si f est lipschitzienne de $]-\infty,\ 0]$ dans $\mathbb{R}$ (rapport H) et de $[0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ (rapport K) alors elle l'est de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

∘21∘ Montrez que si f est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $|f|$ l'est aussi.
Montrez que $x \longmapsto (-1)^{[x]}$ n'est pas lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais que sa valeur absolue l'est aussi.

On suppose $|f|$ lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (rapport K), et continue.
On se donne a et b. Montrez que si $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe, alors on a $|f(b) - f(a)| \leqslant K.|b-a|$.
On les suppose cette fois de signes opposés. Montrez qu'il existe c entre a et b vérifiant $f(c) = 0$. Montrez alors

$$|f(b) - f(a)| \leqslant |f(b)| + |f(a)| \leqslant K.|c-b| + K.|c-a| \leqslant K.|b-a|$$

Concluez : f est à son tour lipschitzienne.

∘22∘ ♡ Montrez que $x \longmapsto \tan(x)$ est lipschitzienne de $[-\pi/3,\ \pi/3]$ dans $\mathbb{R}$ mais pas de $[0,\ \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ (on pourra montrer que sinon, elle serait bornée).

∘23∘ Montrez que si f et $[f]$ sont lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors f est bornée (raisonnez, n'écrivez pas plein de formules).

∘24∘ C'est drôle, mais il y a un multiple de 13 dont la somme des chiffres vaut 13 : $13 \times 19 = 247$ et $2+4+7 = 13$. Et c'est pareil pour 19 : $19 \times 46 = 874$ et $8+7+4 = 19$. Trouvez une solution pour 10. Une solution pour 20. Trouvez une solution pour 25. Et pour 22. Soit par un programme Python. Soit avec votre cervelle.

∘25∘ Existe-t-il f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de chaque rationnel soit un rationnel ?
Existe-t-il f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de chaque rationnel soit un irrationnel ?
Existe-t-il f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de chaque rationnel soit un irrationnel et l'image de chaque irrationnel soit un rationnel ?

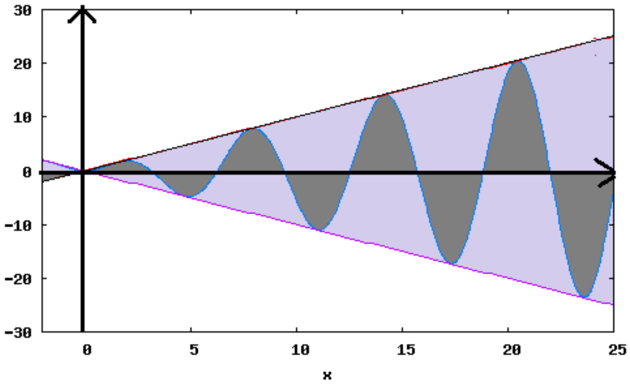
∘26∘ Montrez qu'il existe un x entre 1 et 2 vérifiant $x^5 = 5^x$.
Montrez que pour tout a plus grand que e il existe un x entre 1 et e vérifiant $x^a = a^x$.

∘27∘ ♡ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\sqrt[n]{Arctan(1).Arctan(2)\ldots Arctan(n)}$.

∘28∘ Donnez la limite quand n tend vers l'infini de $\dfrac{1}{n}.\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{n+k}{n}\right)$. Déduisez que la suite $\left(\sqrt[n]{\dfrac{(2.n)!}{n^n.n!}}\right)$ converge et donnez sa limite.

∘29∘ ♠$_{mais\ superbe}$ n est un entier naturel ; résolvez l'équation $z^{2.n} + 1 = 0$ *(en passant par $z = r.e^{i.\theta}$)* puis factorisez $(X^{2.n} + 1)$ dans $\mathbb{C}$.
On pose $f_x = \theta \longmapsto \ln(x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1)$ *(x est un réel fixé de $]1,\ +\infty[$)*. Montrez que f_x est intégrable sur $[0,\ \pi]$.
Exprimez grâce à la première question la somme de Riemann milieu de f_x pour l'équisubdivision de $[0,\ \pi]$.
Déduisez : $\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1).d\theta = 2.\pi.\ln(x)$.
Calculez $\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1).d\theta$ pour x dans $]-\infty,\ -1[$ (indication : $t = \pi - \theta$).
Calculez $\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1).d\theta$ pour x dans $]-1,\ 1[$.
Vérifiez que $x \longmapsto \int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1).d\theta = 2.\pi.\ln(x)$ admet la même limite à droite et à gauche en 1, dont on estimera que c'est la valeur de $\int_0^{\pi} \ln(1^2 - 2.1.\cos(\theta) + 1).d\theta$. Calculez alors $\int_0^{\pi} \ln(\sin(t)).dt$.

∘30∘ Montrez que $x \longmapsto x.\sin(x)$ est lipschitzienne sur chaque segment $[-a,\ a]$. Montrez qu'elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.



Et pour $x \longmapsto x.\sin(\sqrt{x})$?

∘31∘ ♡ Combien y a-t-il d'applications continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$?
Combien y a-t-il d'applications uniformément continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ (attention, à $x < 0 < y$ avec $|y - x| \leqslant \mu_\varepsilon$).

∘32∘ ♡ Montrez que si f est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ alors $x \longmapsto \sqrt{1 + f(x)}$ l'est aussi.

∘33∘ La liste L est faite des stations de métro, sous la forme pour chacune

0	nom	string
1	code	string longueur 4
2	adresse	string
3	lignes	liste d'entiers
4	abscisse sur le graphe	integer
5	ordonnée sur le graphe	integer
6	liste des successeurs	liste de codes

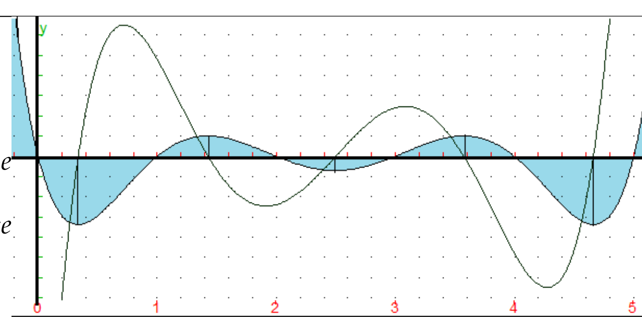
Écrivez un script qui prend en entrée un numéro de ligne et retourne une liste de toutes ses stations. 1 pt.
Écrivez un script qui va trouver le numéro de la ligne la plus longue (en nombre de stations). 2 pt.
Écrivez un script qui va trouver le numero de la ligne qui coupe le plus d'autres lignes. 4 pt.

∘34∘ On définit $f = X \longmapsto M.X$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & & 1 & \\ & -3 & & 3 \end{pmatrix}$ et $P = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Donnez la dimension de P et une équation cartésienne de P.

Ajustez les coefficients de M pour avoir $Im(f) \subset P$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \in Ker(f)$. A-ton $Im(f) = P$? Donnez une base et la dimension de $Ker(f)$ (rappelle : $Ker(f)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs dont l'image est nulle).

∘35∘

Ce qui suit vient d'un sujet de Mines-Ponts, d'il y a une bonne dizaine d'années.
n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 donné. On note P_n le polynôme $\prod_{k=0}^{n}(X - k)$.



I∼0) Montrez que P'_n admet exactement une racine $x_{n,k}$ dans chacun des intervalles $[k,\ k+1]$ pour k de 0 à $n-1$.

I∼1) On note $\alpha_{n,k} = x_{n,k} - k$ pour tout k. Prouvez que tous les $\alpha_{n,k}$ sont entre 0 et 1. Calculez $\sum_{k=0}^{n} x_{n,k}$ et prouvez

$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k} = \frac{n}{2}$.
I∼2) Exprimez $x_{n,n-1-k}$ en fonction de $x_{n,k}$ *(indication : $P_n(X)$ et $P_n(n-X)$).*
I∼3) Calculez $\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-1-k}$.

II∼0) *Le but des questions suivantes est de montrer que pour n fixé, $\alpha_{n,k}$ croît lorsque k croît de 0 à $n-1$.* Dressez en fonction de la parité de n le tableau de variations de P_n.
II∼1) Déduisez le signe de $(-1)^{n-k}.P_n(x_{n,k})$ pour k dans `range(n)`.
II∼2) En utilisant la relation $P_n(X) = (X-n).P_{n-1}(X)$ *(que vous démontrerez)* déterminez le signe de $(-1)^{n-k}.P'_n(x_{n-1,k})$ *(k dans `range(n-1)`).*
II∼3) Déduisez $x_{n-1,k} > x_{n,k}$.
II∼4) En utilisant $P_n(X) = X.P_{n-1}(X-1)$ *(que vous démontrerez)*, déterminez en fonction de k et n le signe de $(-1)^{n-k}.P'_n(1+x_{n-1,k-1})$.
II∼5) Déduisez : $x_{n,k} > 1 + x_{n-1,k-1}$.
II∼6) Concluez.

III∼0) Ajouté par mes soins par rapport à la version de 2006 : écrivez un script **Python** qui prend en entrée `n`, `k` et `epsilon`, et détermine $\alpha_{n,k}$ à `epsilon` près (et retourne `False` si `n` ou `k` n'est pas entier, si `epsilon` est négatif ou nul, et si `k` n'est pas entre `0` et `n`).
Voici la liste des racines obtenue pour n égal à 10

0.2854	1.3511	2.3998	3.4418	4.4809	5.5191	6.5582	7.6002	8.6488	9.7146

Pour information, j'ai écrit un algorithme sans dichotomie n'utilisant que $P_n$et pas P'_n, c'est faisable ici, réfléchissez un peu.

IV∼0) *On va utiliser la fonction Gamma d'Euler* (partiellement au programme de Prépas) *pour obtenir le comportement fin des $\alpha_{n,k}$. Pour tout réel x strictement positif, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t}.dt$ (son existence est offerte par le cours de Spé).* Montrez : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\Gamma(x+1)$=x.Γ(x) . Calculez $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel n.
IV∼1) On admet $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t).t^{x-1}.e^{-t}.dt$ et $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^2.t^{x-1}.e^{-t}.dt$. Montrez : $\Gamma'(x) \leqslant \sqrt{\Gamma(x).\Gamma''(x)}$ pour tout x.
IV∼2) Montrez que $x \longmapsto \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ (notée ψ) est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
IV∼3) Montrez : $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$.
IV∼4) On pose ensuite $\phi(x) = \psi(x) - \ln(x)$. Montrez que la série de terme général $\phi(n+1) - \phi(n)$ converge.
IV∼5) Montrez que la suite $(\phi(n))$ converge quand n tend vers l'infini. On note C sa limite.
IV∼6) Établissez que l'on a aussi $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = C$.
IV∼7) Montrez que si on a $C \neq 0$, alors $\int_1^x \phi(t).dt \sim_{x\to+\infty} C.x$.
IV∼8) Montrez aussi : $\int_1^n \phi(t).dt = \ln\left(\frac{n!}{e.n^{n+1}}.e^n\right) \sim_{n\to+\infty} -\frac{\ln(n)}{2}$.
IV∼9) Déduisez finalement $C = 0$.
IV∼10) Montrez $\psi(x+m+1) = \psi(x) + \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{x+j}$.
IV∼11) Déduisez $\psi(x) + \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{x+j} - \ln(m) \longrightarrow_{m\to+\infty} 0$.

V∼0) Montrez $\frac{P'_n(X)}{P_n(X)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{X-i}$ et pour tout k : $\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\alpha_{n,k}+j} = \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{1}{(1-\alpha_{n,k})+j}$.
V∼1) Déduisez avec tout ce que vous avez fait avant et même plus :
$\forall t \in]0, 1[$, $\lim_{n\to+\infty} \alpha_{n,[n.t]} = \frac{1}{\pi}.Arccotan\left(\frac{1}{\pi.}\ln\left(\frac{1-t}{t}\right)\right)$. 200 pts
Extrait du rapport du jury : on ne saurait trop recommander aux candidats de lire en entier le sujet avant de commencer : une vision plus claire des buts poursuivis peut donner de précieuses indications pour certaines questions.

∘36∘ E est un ensemble dénombrable (c'est à dire dont le cardinal ne dépasse pas celui de $\mathbb{N}$, ce peut être $\mathbb{Z}$ et même $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ rappelons le).
Une loi de probabilité est une application $p : E \longrightarrow [0, 1]$ telle que la somme $\sum_{x\in E} p(x)$ soit égale à 1.

La probabilité d'une partie A de E est alors $\sum_{x\in A} p(x)$ (existence ?).
Montrez qu'il y a une loi de probabilité constante (« uniforme ») sur range(N) (N fixe) mais qu'il n'y en a pas sur $\mathbb{N}$.

♣ 0 ♣ Montrez que $n \longmapsto 2^{-n-1}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
Calculez alors la probabilité de l'ensemble des entiers pairs.
Calculez alors la probabilité de l'ensemble des entiers impairs.

♣ 1 ♣ a est un réel fixé dans $]0,\ 1[$, ajustez λ pour que $n \longmapsto \lambda.a^n$ soit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
a est un réel fixé dans $]0,\ 1[$, ajustez λ pour que $n \longmapsto \lambda.a^{|n|}$ soit une loi de probabilité sur $\mathbb{Z}$.

♣ 2 ♣ Montrez que si $n \longmapsto p_n$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$, alors $n \longmapsto \dfrac{p_{|n|}}{2}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{Z}$.

♣ 3 ♣ Montrez que si $n \longmapsto p_n$est une loi de probabilité sur $\mathbb{Z}$ alors $n \longmapsto p_n + p_{-n}$ est (presque) une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$(que fait il modifier dans cette définition ?).

♣ 4 ♣ Montrez que $\gamma = (a,\ b) \longmapsto 2^{-a-b}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
Calculez la probabilité de la diagonale $\{(a,\ a) \mid a \in \mathbb{N}\}$.
r est un rationnel strictement positif fixé. Calculez la probabilité de $\left\{(a,\ b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid \dfrac{a}{b} = r\right\}$ qu'on va noter $\mu(r)$.
Ceci définit une loi de probabilité sur $\mathbb{Q}^{+*}$. Calculez $\mu(1)$, $\mu(2)$, $\mu(3/4)$.
Montrez $\mu(r) = \mu(1/r)$.
Calculez $\mu(n)$ si n est un entier. Calculez $\mu(\mathbb{N})$ (« probabilité qu'un rationnel tiré au hasard selon la loi μ soit un entier ») à 10^{-3} près.

♣ 5 ♣ Montrez que $(a,\ b) \longmapsto \dfrac{1}{(a+b+1).2^{a+b+1}}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Calculez la probabilité de la diagonale $\{(a,\ a) \mid a \in \mathbb{N}\}$.

♣ 6 ♣ A quelle loi de probabilité correspond ce teableau ?

	0	1	2	3	4	5
0	1/2	1/(3x4)	1/(5x8)	1/(7x16)	1/(9x32)	1/(11x64)
1	1/(3x4)	1/(3x4)	1/(5x8)	1/(7x16)	1/(9x32)	1/(11x64)
2	1/(5x8)	1/(5x8)	1/(5x8)	1/(7x16)	1/(9x32)	1/(11x64)
3	1/(7x16)	1/(7x16)	1/(7x16)	1/(7x16)	1/(9x32)	1/(11x64)
4	1/(9x32)	1/(9x32)	1/(9x32)	1/(9x32)	1/(9x32)	1/(11x64)
5	1/(11x64)	1/(11x64)	1/(11x64)	1/(11x64)	1/(11x64)	1/(11x64)

◦37◦ Existe-t-il un intervalle du type $[0,\ a]$ sur lequel la valeur moyenne du sinus vaut $1/3$?

◦38◦ Pour f intégrable de $[0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on appelle valeur moyenne l'application $x \longmapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(u).du$ (notée ϕ) ; c'est en fait la valeur moyenne sur $[0,\ x]$ de f.
Montrez que si f est positive, ϕ l'est aussi.
Montrez que si f est croissante, ϕ l'est aussi. Preuve de physicien(ne) naïf : dérivez, en estimant que dans votre monde idéalisé tout est dérivable. Preuve de mathématicien(ne) : $\displaystyle\int_0^1 f(t.x).dt$.
Tracez l'application "valeur moyenne de la partie entière".

◦39◦ La valeur moyenne de f (intégrable) sur $[a,\ b]$ est $\dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b f(t).dt$. Montrez que si f est continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ alors on a
$Sup(f(t) \mid t \in [a,\ b]) \leqslant \dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b f(t).dt \leqslant Sup(f(t) \mid t \in [a,\ b])$ (même si $a > b$?)
Déduisez : $\exists c \in [a,\ b],\ \dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b f(t).dt = f(c)$.
Montrez que ce résultat tombe en défaut si f est juste intégrable, et pas continue.

◦40◦ Trouvez toutes les applications f continues telles que la valeur moyenne de f sur chaque intervalle $[a,\ b]$ soit

$a+b$?
Trouvez toutes les applications f continues telles que la valeur moyenne de f sur chaque intervalle $[a,\ b]$ soit la longueur $b-a$ du segment ?
Trouvez toutes les applications f continues telles que la valeur moyenne de f sur chaque intervalle $[a,\ b]$ soit $f\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)$?
Trouvez toutes les applications f continues telles que la valeur moyenne de f sur chaque intervalle $[a,\ b]$ soit $f\Big(\dfrac{2.a+b}{3}\Big)$?

∘41∘ ♡ Pour tout n, on pose $a_n = n^{\ln(n)}$. Donnez sa limite en $+\infty$.
La série de terme général $1/a_n$ converge-t-elle ?
Donnez la limite de $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ quand n tend vers l'infini *(indication :* $\ln(n^2+n).\ln\Big(dsp1+\frac{1}{n}\Big)$*)*.

∘42∘ Montrez que la suite $(\sqrt{n^2+2.n+2}-\sqrt{n^2+n+1})$ converge quand n tend vers l'infini.
Montrez que la série de terme général $((\sqrt{n^2+2.n+2}-\sqrt{n^2+n+1})^n)$ converge.
Qu'en est il de la série de terme général $((\sqrt{n^2+3.n+2}-\sqrt{n^2+3.n+1})^n)$.

∘43∘ On se donne u_0 strictement positif et on définit la suite récurrente (u_n) par $u_{n+1}=u_n+(u_n)^2$ pour tout n. Montrez que cette suite est croissante et ne peut pas converger. Déduisez que la série de terme général $\dfrac{1}{1+u_n}$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{u_0}$.

∘44∘ La famille de réels positifs (u_n) est sommable. Pour tout n, on pose $v_n=\dfrac{1}{2^n}.\sum\limits_{k=0}^{n}2^k.u_k$.
Montrez que (v_n) est sommable de somme double de celle de (u_n).

∘45∘ Soit (u_n) une famille sommable de réels positifs, de somme 1. Montrez qu'il n'y a pas plus de cent termes plus grands que $\dfrac{1}{100}$.
Montrez qu'il peut y avoir un nombre infini de termes non nuls, mais qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de termes non nuls (dénombrable = en bijection avec $\mathbb{N}$).

∘46∘ Montrez pour tout p : $\sum\limits_{1\leqslant n\neq p}\dfrac{1}{n^2-p^2}=\dfrac{3}{4.p^2}$ (la somme s'entendant à « tous les n strictement positifs, différents de p). Calculez $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{1\leqslant n\neq p}\dfrac{1}{n^2-p^2}\Big)$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{1\leqslant p\neq n}\dfrac{1}{n^2-p^2}\Big)$. Est-ce contradictoire ?

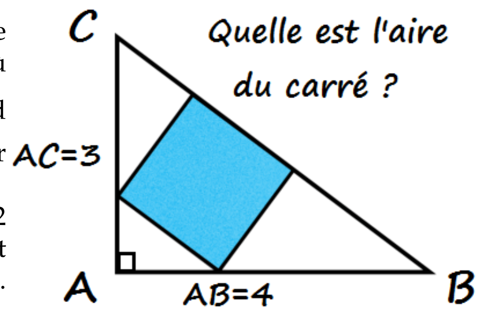
∘47∘ ♡ Montrez que la série de terme général $\dfrac{1}{n.\ln(n)}$ diverge.
Montrez que la suite $\Big(\prod\limits_{n=2}^{N}\Big(1+\dfrac{1}{n.\ln(n)}\Big)\Big)_N$ est croissante.
Que pensez vous de l'élève qui dit "*elle n'est pas majorée, donc elle diverge*".
Montrez que sa conclusion est quand même correcte, en étudiant le logarithme de cette suite. Montrez : $\ln\Big(1+\dfrac{1}{\ln(n).n}\Big)\leqslant\dfrac{1}{2.n.\ln(n)}$ pour tout n au moins égal à 2.
Donnez un rang à partir duquel on a assurément $\prod\limits_{n=2}^{N}\Big(1+\dfrac{1}{n.\ln(n)}\Big)\geqslant 100$.
On a défini le programme suivant :
Qu'est il chargé de faire ? Le lancez vous pour vérifier ?

```
from math import log
p, n = 1, 2
while p<100 :
....p *= 1+1/(log(n)*n)
....n +=1
print(n, p)
```

∘48∘ ♡ On rappelle que l'on note « sommes de Riemann de f sur $[a,\ b]$ pour la subdivision $a=a_0\leqslant a_1\leqslant\ldots\leqslant a_n=b$ les trois sommes $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k).f(a_k)$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k).f\Big(\dfrac{a_k+a_{k+1}}{2}\Big)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k).f(a_{k+1})$ (gauche, milieu et droite) ». On prend la version simplifiée : $a_k=a+k.\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{(n-k).a+k.b}{n}$.

Calculez la somme de Riemann gauche pour $f = x \longmapsto x^2$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.
Calculez la somme de Riemann gauche pour $f = x \longmapsto x^3$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.
Calculez la somme de Riemann gauche pour $f = x \longmapsto 2^x$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Dans une vidéo, (l'excellent) Mickaël Penn passe par une longue récurrence pour calculer $1 * (2 * 4 * (8 * (\dots (2^{2020} * 2^{2021}) \dots)))$ où la loi $*$ (non associative ?) est définie par $a * b = \dfrac{a.b}{a+b}$. Mais quand même, il y a plus simple, non ? C'est l'addition transformée par une bijection bien choisie, non ?
Le produit de six entiers positifs consécutifs est un nombre à 12 chiffres de la forme abbcddcddabb où les chiffres a, b, c, d, sont eux-mêmes, dans un certain ordre, quatre nombres consécutifs.
∘49∘ Quelle est la valeur de c ?



∘50∘ On définit : $f = x \longmapsto |\sin(x)|$ et pour tout entier naturel n : $\boxed{f_n = x \longmapsto |\sin(2^n.x)|/2^n}$ Montrez que chaque f_n est lipschitzienne. Déterminez proprement

$Sup(Inf(f_n(x) \mid x \in [0, \pi]) \mid n \in \mathbb{N})$	$Inf(Sup(f_n(x) \mid x \in [0, \pi]) \mid n \in \mathbb{N})$
$Sup(Inf(f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}) \mid x \in [0, \pi])$	$Inf(Sup(f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}) \mid x \in [0, \pi])$

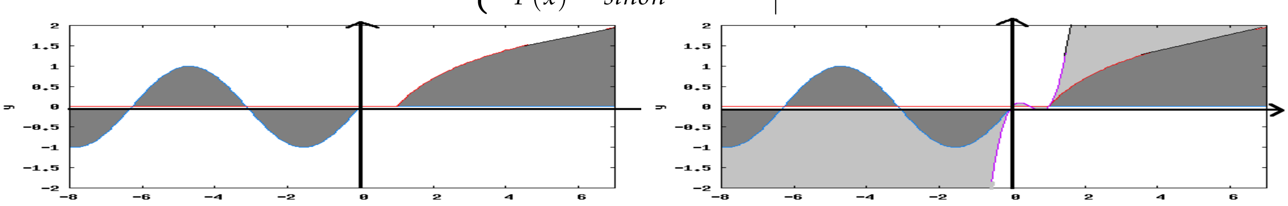
∘51∘ Montrez que $x \longmapsto \int_0^x (-1)^{[t]}.dt$ est lipschitzienne mais pas dérivable. Même question avec $x \longmapsto \int_0^x (-1)^{[t]}.\sin(t).dt$.

∘52∘ Montrez que $x \longmapsto \int_x^{2.x} e^{-t^2}.dt$ est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

∘53∘ ♡ Montrez sans forcément la calculer *(ni même la dériver)* que $x \longmapsto \int_0^x \dfrac{dt}{1+t+t^2}$ est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

∘54∘ ♡ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrez que f est bornée.
La méthode astucieuse consistera à définition $\varphi = \theta \longmapsto f(\tan(\theta))$ sur $]-\pi/2,\ \pi/2[$ et même si possible $]-\pi/2,\ \pi/2[$.

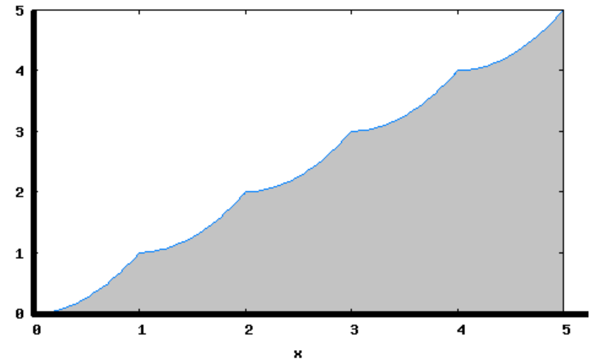
∘55∘ Ajustez un polynôme P pour que $x \longmapsto \left\{\begin{array}{ccc} \sin(x) & si & x < 0 \\ \ln(x) & si & x > 1 \\ P(x) & sinon & \end{array}\right|$ soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.



∘56∘ Soit f continue. Montrez que $x \longmapsto \int_0^{\pi} \sin(x.t).f(t).dt$ est lipschitzienne.

∘57∘ ♡ Montrez que l'application $x \longmapsto x^2$ est lipschitzienne sur tout segment *(en revenant à la définition, et non pas en majorant la dérivée)*.

∘58∘ ♡ Une application est dite lilipschitzienne si il existe K vérifiant $\forall (x, y),\ |f(x) - f(y)| \leqslant k.|x-y|^2$. Montrez que les applications lilipschitziennes ont une dérivée nulle. Déduisez que l'ensemble des applications lilipschiztiennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 1.



♣ On définit : $f = x \longmapsto (x - [x])^2 + [x]$. Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$. Est elle dérivable ?
Calculez son intégrale de 0 à 5. Montrez qu'elle est
◦59◦ lipschitzienne.

Find Wrong Steps

$$\begin{aligned}
-1 &= -1\\
-1/1 &= -1/1\\
-1/1 &= 1/-1\\
\sqrt{-1/1} &= \sqrt{1/-1}\\
i/1 &= 1/i\\
i &= 1/i\\
i^2 &= 1\\
-1 &= 1
\end{aligned}$$
◦60◦

Ceci est la racine cubique d'un arbre.