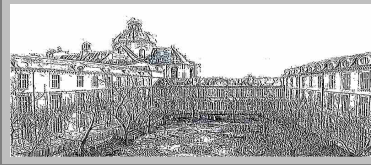


LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 23 avril
M.P.S.I.2



2023

2024

IS25

♥ 0 ♥

En admettant le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$, démontrez le dans $\mathbb{C}$. 2 pt.

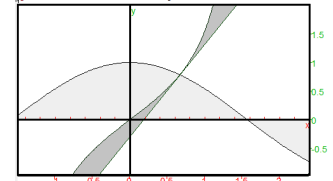
♥ 1 ♥

Montrez que la somme de deux applications lipschitziennes de I dans $\mathbb{R}$ (I est un intervalle) est encore lipschitzienne. 1 pt.

Montrez que la somme de deux applications contractantes de I dans $\mathbb{R}$ n'est plus forcément contractante. 1 pt.

Montrez que l'équation $\tan(x) = \cos(x)$ d'inconnue x dans $[0, \pi/2[$ admet une unique racine qu'on notera α . 1 pt.

Montrez que la tangente au graphe de la tangente en α a pour coefficient directeur le nombre d'or. 2 pt.



♥ 2 ♥

Montrez que $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ (notée f) n'est pas lipschitzienne de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. 2 pt.

Montrez que $f \circ f$ est lipschitzienne $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. 1 pt.

♥ 3 ♥

(v_n) est une suite positive vérifiant $v_{n+1} = \frac{\sqrt{v_n}}{2}$. Exprimez v_n à l'aide de n et v_0 pour tout n . 2 pt.

♦ 0 ♦

Soit (a_n) une suite réelle, on note (c_n) sa moyenne de Cesàro. Montrez pour tout n : 3 pt.

$$a_n = c_n + \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \cdot (a_{i+1} - a_i)$$

Déduisez le petit théorème de Hardy (réciproque de Cesàro) : on suppose que (c_n) converge vers un réel γ et que $a_{n+1} - a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)_{n \rightarrow +\infty}$ (pour un demi point, rappelez la définition de cette dernière propriété) montrez alors que (a_n) converge aussi. 2 pt.

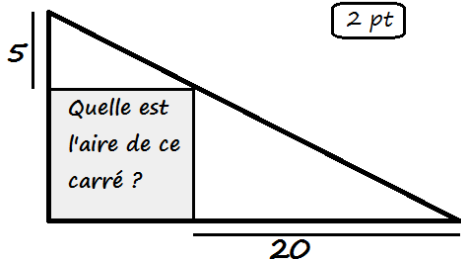
♦ 1 ♦

Montrez que pour tout entier naturel n , l'équation $\cos(x) = x^n$ d'inconnue réelle positive x admet une unique solution que l'on va noter x_n . 2 pt.

On pose $\varphi_n = x \mapsto \cos(x) - x^n$. Montrez pour tout n que $\varphi_{n+1}(x_n)$ est positif, et déduisez que (x_n) est une suite croissante. 2 pt. Déduisez qu'elle converge et montrez que sa limite ne peut pas être strictement inférieure à 1.

Calculez sa limite. 3 pt. Montrez : $x_n - 1 \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\cos(1))}{n}$. 2 pt.

Soit f une application de continue $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) < f(1)$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \geq 2|x - y|$. Montrez que f est injective. 1 pt. Montrez que f est strictement croissante. 1 pt.



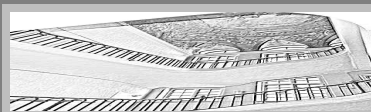
2 pt

Déduisez $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. 1 pt. Déduisez que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. 1 pt. Montrez que f admet au moins un point fixe. 1 pt.

♣ Sachant $x + y + z = 1$ et $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) + \text{Arctan}(z) = \frac{\pi}{4}$, calculez $x^{69} + y^{69} + z^{69}$. 4 pt.

‡ Grand Python, je veux la somme de tous les entiers à dix chiffres dont le carré ne contient pas le chiffre 7. Tu peux faire ça ? 3 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2023

2024

IS25
25- points



On prend (z_n) une suite complexe bornée ($\exists A \in \mathbb{R}, \forall n, |z_n| \leq A$), il faut en extraire une sous-suite $(z_{\psi(n)})$ qui converge.

On écrit $z_n = x_n + i.y_n$ pour tout n (avec deux suites réelles (a_n) et (y_n)).

Par majoration du type $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, la suite (x_n) est bornée.

Bolzano nous donne une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ (pour une certaine extraction φ) qui converge vers un réel α (et toutes ses sous-suites le feront aussi).

Mais alors $(y_{\varphi(n)})$ est aussi bornée par A . Elle admet à son tour une sous-(sous)-suite $(y_{\varphi(\phi(n))})$ qui converge vers un réel β .

La suite recomposée $(x_{\varphi(\phi(n))} + i.y_{\varphi(\phi(n))})$ converge alors vers $\alpha + i\beta$. Et $\varphi \circ \phi$ est bien une extraction, comme composée d'extractions.

On prend f et g lipschitziennes sur I dans $\mathbb{R}$ de rapports de Lipschitz respectifs K et K' .

Pour tout couple (x, y) de I^2 on a alors en appliquant l'inégalité triangulaire

$$|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq K|x - y| + K'|x - y| \leq (K + K')|x - y|$$

On reconnaît que $f + g$ est à son tour lipschitzienne (et son rapport est la somme des rapports).

Ce qui ne passe pas pour les applications contractantes : l'hypothèse $K < 1$ et $K' < 1$ ne permet pas de déduire $K + K' < 1$.

On va donc construire un contre-exemple direct avec $f = g = \left(x \mapsto \frac{4}{5}.x\right)$ (ou des applications affines de coefficient directeur bien choisi).

f et g est lipschitzienne de rapport $\frac{4}{5}$, donc contractante (je mets le singulier sur « f et g », ai-je raison ?).

Mais la somme a pour coefficient directeur $\frac{|(f+g)(x) - f(+g)(y)|}{|x - y|}$ qui vaut toujours $\frac{8}{5}$ et ne sera jamais plus petit que 1.

L'argument « $f+g$ est lipschitzienne de rapport $\frac{8}{5}$ » n'est pas satisfaisant pour dire « non contractante », car on peut être les deux à la fois. D'ailleurs, f est contractante mais aussi lipschitzienne de rapport 57, par exemple.

L'application $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ est définie de $[0, 1]$ dans lui-même (il faut quand même vérifier qu'on va bien de $[0, 1]$ dans lui-même en encadrant : $(0 \leq x \leq 1) \Rightarrow (0 \leq x^2 \leq 1) \Rightarrow (1 \geq 1 - x^2 \geq 0) \Rightarrow (1 \geq f(x) \geq 0)$)

En revanche, elle n'est pas lipschitzienne. Si elle l'était (rapport), sa dérivée serait bornée par K partout où elle existe. Or, sa dérivée $x \mapsto \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$ a une limite infinie en 1 et n'est donc pas bornée.

On peut aussi calculer

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}}{x - y} = \frac{(1 - x^2) - (1 - y^2)}{(x - y)(\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2})} = \frac{x + y}{\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}}$$

et voir que ce quotient peut être rendu aussi grand qu'on veut en prenant $y = 1$ et en faisant tendre x vers 1.

On détermine ensuite $f \circ f$ (1 et on trouve pour tout x de $[0, 1]$

$$f(f(x)) = \sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^2})^2} = \sqrt{1 - (1 - x^2)} = \sqrt{x^2} = x$$

vu le domaine. Et évidemment, l'identité est lipschitzienne de rapport 1.

1. oui, on écrit $f \circ f$ comme fonction, et $f(f(x))$ quand on descend à l'étage des nombres

On crée l'application $x \mapsto \tan(x) - \cos(x)$ sur $[0, \pi/2[$. Elle a une dérivée strictement positive ($x \mapsto \tan^2(x) + (1 + \sin(x))$). En 0 elle est négative, en $\pi/4$ elle est positive. Elle s'annule au moins une fois, et de fait, une seule par stricte monotonie. L'équation a une solution, mais on ne sait que la caractériser et pas la calculer : $\cos^2(\alpha) = \sin(\alpha)$ par produit en croix.

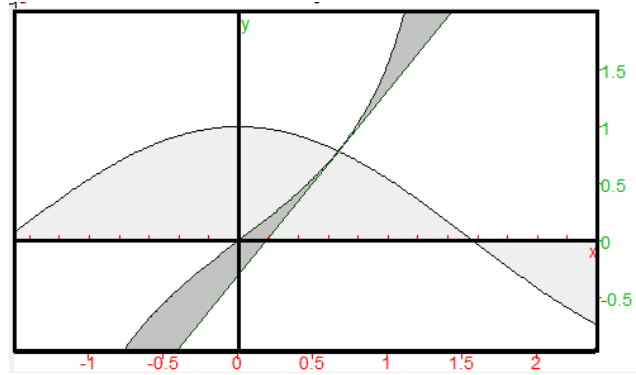
Le coefficient directeur de la tangente au graphe de la tangente est $\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$ c'est à dire $\frac{1}{\sin(\alpha)}$.

D'accord, mais ce n'est pas le nombre d'or ça. On n'y trouve pas de $\sqrt{5}$.

Sauf que si on pose $\phi = \frac{1}{\sin(\alpha)}$ (ce coefficient directeur) alors on a $\frac{1}{\phi} = \sin(\alpha)$ puis

$$\left(\frac{1}{\phi}\right)^2 = \sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = 1 - \sin(\alpha) = 1 - \frac{1}{\phi}$$

On a donc (par exemple après multiplication par ϕ^2 : $1 = \phi^2 - \phi$. C'est l'équation dont les deux racines sont $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Et comme celle qui nous intéresse est positive, on a bien le nombre d'or.



On peut calculer de proche en proche $v_1 = \frac{(v_0)^{1/2}}{2}$, $v_1 = \frac{\left(\frac{(v_0)^{1/2}}{2}\right)^{1/2}}{2} = \frac{(v_0)^{1/4}}{2^{1+1/2}}$

$$v_2 = \frac{\left(\frac{(v_0)^{1/2}}{2^{1+1/2}}\right)^{1/2}}{2} = \frac{(v_0)^{1/8}}{2^{1+1/2 \cdot (1+1/2)}} = \frac{(v_0)^{1/8}}{2^{1+1/2+1/4}}$$

On émet une conjecture : $v_n = \frac{(v_0)^{1/2^n}}{2^{1+1/2+\dots+1/2^{n-1}}} = \frac{(v_0)^{2^{-n}}}{2^{2-2^{-n+1}}}$ qu'on peut prouver par récurrence.

Mais soyons efficace. On pose $a_n = \ln(v_n)$. On a alors

$$a_{n+1} = \ln\left(\frac{\sqrt{v_n}}{2}\right) = \frac{\ln(v_n)}{2} - \ln(2) = \frac{a_n}{2} - \ln(2)$$

Et toc, programme de Terminale. Une suite de la forme $a_{n+1} = \alpha \cdot a_n + \beta$.

On cherche le point fixe, puis la suite géométrique associée.

On résout $\alpha = \frac{\alpha}{2} - \ln(2)$: $\alpha = -2 \cdot \ln(2)$.

On pose $b_n = a_n - \alpha = a_n + 2 \cdot \ln(2)$. On vérifie : $b_{n+1} = a_{n+1} - \alpha = \frac{a_n}{2} - \ln(2) - \alpha = \frac{b_n + \alpha}{2} - \alpha + 2 \cdot \ln(2) = \frac{b_n}{2}$

La suite (b_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$a_n = b_n + \alpha = \frac{b_0}{2^n} + \alpha = \frac{a_0 - \alpha}{2^n} + \alpha = \frac{a_0}{2^n} + \alpha \cdot (1 - 2^{-n}) = \frac{a_0}{2^n} + (2 - 2^{1-n}) \cdot \ln(2)$$

On reporte et remonte aux exponentielles et on a la même formule.



Moyenne de Cesàro.

IS25

La formule $a_n = c_n + \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \cdot (a_{i+1} - a_i)$ peut se démontrer de plusieurs façons, et même se trouver comme un grand.

Allons y pour la récurrence.

Pour n égal à 0, la somme aberrante est vide, et on a $a_0 = c_0$.

Par prudence, regardons pour n égal à 1. On calcule le membre de droite²

$$c_1 + \frac{1}{1+1} \cdot \sum_{i=0}^{1-1} (i+1) \cdot (a_{i+1} - a_i) = c_1 + (0+1) \cdot (c_1 - c_0) = 2 \cdot c_1 - c_0 = 2 \cdot \frac{a_0 + a_1}{2} - \frac{a_0}{1} = a_1$$

2. ah non, en tant que prof syndiqué, les membres de droite, je les calcule pas !

Fixons nous n quelconque et supposons la formule correcte au rang n . Calculons alors le membre de droite au rang $n + 1$, en glissant au bon moment l'hypothèse de rang n (et avec l'espoir d'y retrouver a_{n+1})

$$\begin{aligned}
 c_{n+1} + \frac{1}{n+2} \cdot \sum_{i=0}^{n+1-1} (i+1) \cdot (a_{i+1} - a_i) &= c_{n+1} + \frac{1}{n+2} \cdot \left((n+1) \cdot (a_{n+1} - a_n) + \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \cdot (a_{i+1} - a_i) \right) \\
 &= c_{n+1} + \frac{(n+1) \cdot (a_{n+1} - a_n)}{n+2} + \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \cdot (a_{i+1} - a_i) \right) \\
 &= c_{n+1} + \frac{(n+1) \cdot (a_{n+1} - a_n)}{n+2} + \frac{n+1}{n+2} \cdot (a_n - c_n) \\
 &= c_{n+1} + \frac{(n+1) \cdot a_{n+1}}{n+2} - \frac{n+1}{n+2} \cdot c_n \\
 &= \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+2} + \frac{(n+1) \cdot a_{n+1}}{n+2} - \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n+2}
 \end{aligned}$$

et au final tout se « simplifie » en a_{n+1} tout seul !

On se dit que la preuve directe doit être plus efficace. On va partir évidemment du terme le plus compliqué et on va décaler les sommes

$$\begin{aligned}
 c_n + \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \cdot (a_{i+1} - a_i) &= c_n + \frac{1}{n+1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \cdot a_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \cdot a_i \right) \\
 &= c_n + \frac{1}{n+1} \cdot \left(\sum_{i=1}^n i \cdot a_i - \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \cdot a_i \right) \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^n a_i + \frac{1}{n+1} \cdot \left(n \cdot a_n + \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot a_i - a_0 - \sum_{i=1}^{n-1} (i+1) \cdot a_i \right) \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^n a_i + \frac{1}{n+1} \cdot \left(n \cdot a_n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \right) \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a_i + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \right) \cdot a_n - \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a_i
 \end{aligned}$$

et tous calculs faits, il reste bien a_n tout seul.

Passons au théorème de Hardy (Polytechnique, Maths C 2024, question 9).

On a donc $a_n = c_n + \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \cdot (a_{i+1} - a_i)$. Et l'énoncé nous dit que la suite $n \cdot (a_{n+1} - a_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Quitte à multiplier par $\frac{n+1}{n}$ (de limite 1), on déduit que la suite $(n+1) \cdot (a_{n+1} - a_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On l'appelle (b_n) juste pour que les choses soient claires, et on sait alors que sa moyenne de Cesàro converge aussi vers 0 (théorème du cours). Le terme $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \cdot (a_{i+1} - a_i)$ converge vers 0 et ce n'est pas le $n+1$ à la place de n qui va y changer quelque chose. par addition, a_n a la même limite que c_n .

On dispose donc de résultats (par ordre décroissant d'importance)

si la suite converge, sa moyenne de Cesàro converge aussi, vers la même limite

si la moyenne de Cesàro (c_n) converge, la suite ne converge pas forcément

si la moyenne de Cesàro (c_n) converge vers γ et que la suite (a_n) est croissante, alors (a_n) converge aussi vers γ

si la moyenne de Cesàro (c_n) converge vers γ et $(a_{n+1} - a_n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors (a_n) converge aussi vers γ



Equation $\cos(x) = x^n$.

IS25

Il ne faut pas espérer trouver une formule explicite pour l'équation $\cos(x) = x^n$ (hormis pour $n = 0$ mais justement, on refuse).

En revanche, on peut prouver existence et unicité d'une solution.

*Comme à chaque fois : existence 90% du travail,
unicité : 10% du travail. Pareil pour les points.*

On introduit la fonction justement appelée φ_n plus loin : $x \mapsto \cos(x) - x^n$.

On va étudier son sens de variation et ses valeurs aux bornes de $[0, +\infty[$ afin de prouver unicité et existence d'une solution.

Existence d'une solution : $\varphi_n(0) = 1$ et $\varphi_n(1) = \cos(1) - 1 < 0$.

On passe du positif au négatif avec une application continue sur un intervalle.

Elle s'annule donc au moins une fois (mots clefs continuité, intervalle).

Pour l'unicité, on dérive : $\varphi'_n = (x \mapsto -\sin(x) - n.x^n)$. φ'_n est négative sur $[0, \pi]$. φ_n est donc décroissante.

On ne peut pas avoir plus d'une solution sur $[0, \pi]$. Et au delà, il n'y a plus de place pour une solution puisque x^n est plus grand que 1 tandis que le cosinus reste entre -1 et 1 .

On se donne n . On connaît $\varphi_n = (x \mapsto \cos(x) - x^n)$ puis $\varphi_{n+1} = (x \mapsto \cos(x) - x^{n+1})$, on connaît x_n qui vérifie $\varphi_n(x_n) = 0$. On calcule

$$\varphi_{n+1}(x_n) = \cos(x_n) - (x_n)^{n+1} = (x_n)^n - (x_n)^{n+1} = (x_n)^n \cdot (1 - x_n)$$

Dans ce produit, $(x_n)^n$ est positif, de même que $1 - x_n$ (racine entre 0 et 1). On a bien $\varphi_{n+1}(x_n) > 0$.

Mais on a aussi $\varphi_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ par définition même.

Or, φ_n est décroissante. On passe donc de $\varphi_{n+1}(x_n) > \varphi_{n+1}(x_{n+1})$ à $x_n > x_{n+1}$.

La décroissance de f c'est $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$ mais aussi par contraposée $f(a) < f(b) \Rightarrow (a > b)$.

La suite (x_n) est croissante, majorée par 1, elle converge donc vers son plus petit majorant.

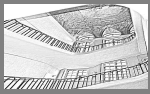
Si on suppose sa limite λ strictement plus petit que 1, alors on a pour tout n $0 < x_n \leq \lambda$ puis $0 < (x_n)^n \leq \lambda^n$. Par encadrement, $(x_n)^n$ converge vers 0. Par définition, $\cos(x_n)$ converge vers 0 aussi.

Ceci dit que x_n doit converger vers $\frac{\pi}{2}$. Mais x_n converge vers λ strictement plus petit que 1. C'est incohérent.

Les autres arguments du type « par passage à la limite dans $\cos(x_n) = (x_n)^n$ on trouve $\lambda = 1$ » ne pourront être que des arnaques.

On pose alors $\varepsilon_n = x_n - 1$ (quantité qui va tendre vers 0). On a alors $\cos(x_n) = (1 + \varepsilon_n)^n$. On passe au logarithme puisqu'il y en a un dans la formule attendue : $\ln(\cos(x_n)) = n \cdot \ln(1 + \varepsilon_n)$. Mais comme ε tend vers 0 (c'est $x_n - 1$), on peut remplacer par un équivalent : $\cos(x_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \varepsilon_n$.

On divise : $\varepsilon_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\cos(x_n))}{n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\cos(1))}{n}$ car $\cos(x_n)$ tend vers $\cos(1)$ (différent de 1, équivalent non ambigu).



Application pas du tout lipschitzienne.

IS25

La propriété $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \geq 2 \cdot |x - y|$ montre que $f(x) = f(y)$ conduit à $x = y$. Elle est donc injective.

Toute application continue et injective sur un intervalle est forcément strictement monotone (théorème du cours et du programme).

Mais comme on a $f(0) < f(1)$, c'est que f est strictement croissante.

On reprend la propriété $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \geq 2 \cdot |x - y|$ et on efface les valeurs absolues dans le cas particulier $y = 0$ et $x > 0$: $f(x) - f(0) \geq 2 \cdot (x - 0)$.

La minoration $f(x) \geq 2 \cdot x + f(0)$ permet de dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Par théorème des valeurs intermédiaires étendu, toute valeur de $f(0)$ à $+\infty$ est atteinte au moins une fois par f quand x décrit $[0, +\infty[$.

On fait de même pour y négatif, encore avec $x = 0$ mais avec des valeurs absolues dans l'autre sens cette fois $\forall (0, y) \in \mathbb{R}^2, f(0) - f(y) \geq 2 \cdot 0 - y|$.

Cette fois, c'est $f(y)$ qui tend vers $-\infty$ quand y tend vers $-\infty$.

L'intervalle image est donc $] -\infty, +\infty[$.

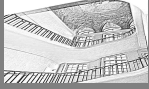
f est surjective sur $] -\infty, +\infty[$. Comme elle est déjà injective, la voilà bijective.

L'application f^{-1} existe donc.

En prenant deux réels a et b et en appliquant la relation $|f(x) - f(y)| \geq 2|x - y|$ à $x = f^{-1}(a)$ et $y = f^{-1}(b)$, on obtient $|a - b| \geq 2|f^{-1}(a) - f^{-1}(b)|$.

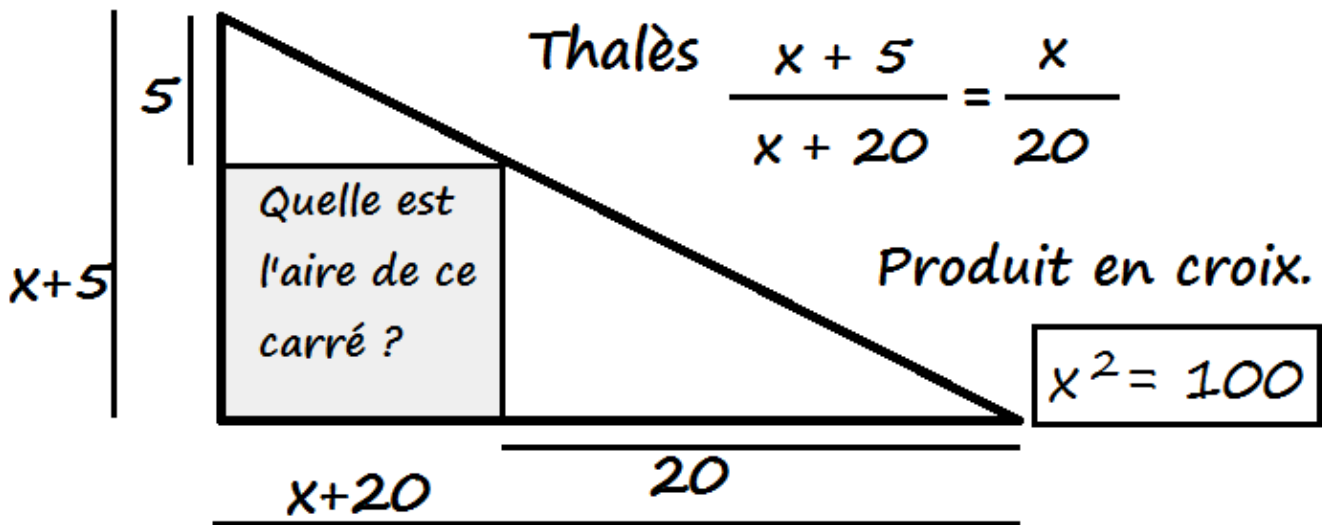
On reconnaît que f^{-1} est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{2}$.

Par théorème du cours, elle admet un unique point fixe. Ce point fixe α vérifie $f^{-1}(\alpha) = \alpha$ et ceci donne, en composant par $f : \alpha = f(\alpha)$. Et f admet bien un point fixe.



Un carré.

IS25



Des arctangentes.

IS25

On ne semble pas avoir assez d'éléments pour conclure avec juste $x + y + z = 1$ et $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) + \text{Arctan}(z) = \frac{\pi}{4}$.

Mais on peut peut-être conclure.

D'ailleurs, on peut deviner une solution : $x = 1$ et $y = z = 0$ (et les autres solutions par symétries des rôles).

Toutefois, on a bien envie de passer à la tangente la seconde formule (en $\pi/4$, la tangente vaut 1). Et puis, on montre

$$\tan(a+b+c) = \frac{\frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)} + \tan(c)}{1 - \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)} \cdot \tan(c)} = \frac{\tan(a) + \tan(b) + \tan(c) - \tan(a) \cdot \tan(b) \cdot \tan(c)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b) - \tan(a) \cdot \tan(c) - \tan(b) \cdot \tan(c)}$$

On a donc $\frac{x+y+z-x.y.z}{1-x.y-x.z-y.z} = 1$ et avec l'hypothèse $x+y+z = 1$ on obtient après produit en croix : $x.y.z = x.y + x.z + y.z$.

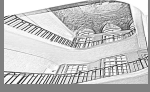
On pose alors $a = x.y.z = x.y + x.z + y.z$ et les formules de Viète nous disent que x, y et z sont les trois racines du polynôme $X^3 - 1.X^2 + a.X - a$.

Il se factorise en $(X-1).(X^2 - a)$.

C'est donc que l'un des trois vaut 1 et que les deux autres sont solutions de $X^2 = a$.

Par symétrie des rôles : $x = 1, y = \sqrt{a}$ et $z = -\sqrt{a}$. On élève à la puissance 69 (impaire, Gauss soit loué)

$$x^{69} + y^{69} + z^{69} = 1$$



Python n'importe quoi !.

IS25

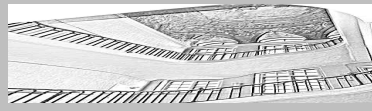
On va créer un accumulateur S . On va prendre les entiers de 10^9 à 10^{10} (dix chiffres).
Pour chacun d'entre eux, on va calculer son carré, le convertir en string et regarder si il y a un caractère '7' dans le string.

S'il n'y en a pas, on ajoute à l'accumulateur.

```
S = 0
for n in range(10**9, 10**10):
    ....if not('7' in str(n*n)):
    .....S += n
```

C'est long et inutile.

LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2023

IS25
25- points

2024