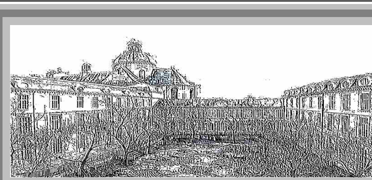
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 6 mai
M.P.S.I.2

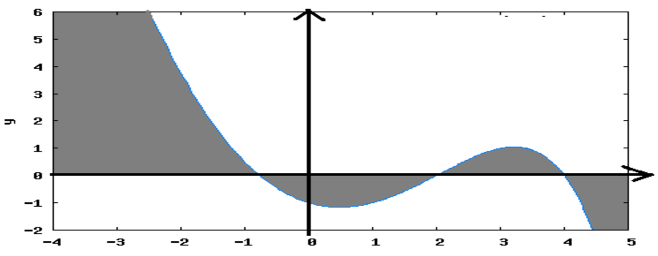


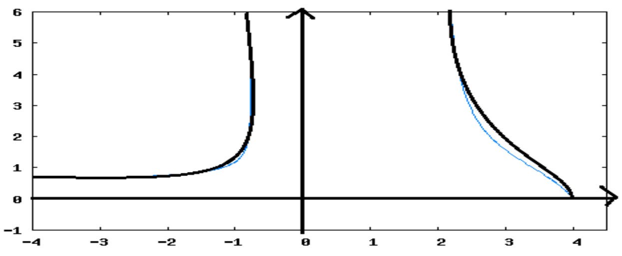
2023 2024

TD27

∘0∘ Montrez que $x \longmapsto \cos(e^x)$ n'est pas lipschitzienne (sans dériver, étudiez le taux d'accroissement entre $\ln(k.\pi)$ et $\ln((k+1).\pi)$ pour k entier).

∘1∘ On définit $\varphi = x \longmapsto x^2 - 2^x$. Montrez (sans forcément calculer φ') que φ' s'annule au moins une fois sur $]2,\ 4[$.
Quitte à étudier φ'' et même $\varphi^{(3)}$, montrez que φ admet trois racines.
Écrivez un script **`Python`** qui détermine la racine négative de φ à 10^{-3} près *(on la notera α)*.
Montrez que $x \longmapsto (x^2 - 2^x)^{\frac{1}{x-3}}$ est définie sur $]-\infty,\ \alpha[\cup]2,\ 3[\cup]3,\ 4[$ *(on la notera f)*.





Déterminez la limite de f en α, en 2 et en 4.
Montrez que f se prolonge par continuité en 3 *(la valeur sera un truc moche ou au contraire très esthétique selon vos gouts)*.
Montrez que f est dérivable en 4.

∘2∘

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

Généralités

Une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou même de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$) est dite convexe si pour tout triplet ordonné $(a,\ b,\ c)$ avec $a \leqslant b \leqslant c$, on a $\begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$.

I∼0) Montrez l'équivalence entre la positivité de ce déterminant et le jeu d'inégalités :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

I∼1) Montrez que les applications affines sont convexes, de même que $x \longmapsto x^2$.

I∼2) Montrez que l'ensemble des applications convexes est stable par addition.

I∼3) Montrez que $x \longmapsto |x|$ est convexe (distinguer suivant la position de a, b et c par rapport à 0).

II∼0) Montrez que f est convexe si et seulement si $x \longmapsto f(-x)$ est convexe.

II∼1) Montrez que f est convexe de $]0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $x \longmapsto x.f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe $]0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

Dérivabilité

III∼0) Soit f une application convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que pour tout x, et pour tout triplet $(h,\ k,\ t)$ avec $h < k < 0 < t$: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \dfrac{f(x+k)-f(x)}{k} \leqslant \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$
(on pourra prendre $(a,\ b,\ c) = (x+h,\ x+k,\ x)$ puis un autre triplet).

III∼1) Déduisez que $h \longmapsto \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est croissante majorée sur $]-\infty,\ 0[$.

III∼2) Déduisez que f est dérivable à gauche en tout point. f est elle dérivable à droite en tout point ?

III∼3) f est elle continue en tout point ? f est elle dérivable en tout point ?

III∼4) Montrez $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$ (ceci répond partiellement à la question précédente ?) pour tout x.

III∼5) En prenant $(x,\ \dfrac{x+y}{2},\ y)$ dans le rôle de a, b et c, montrez $f'_d(x) \leqslant f'_g(y)$ pour tout couple $(x,\ y)$ avec $x \leqslant y$.

III∼6) Déduisez que f'_g et f'_d sont croissantes.

III∼7) Montrez que si f est convexe et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors f' est croissante.

IV∼0) Montrez que si f est dérivable avec f' croissante, alors f est convexe.

IV∼1) Justifiez que exp est convexe.

Inégalités de convexité

V∼0) On se donne a et c avec $a \leqslant c$. Montrez que $t \longmapsto (1-t).a + t.c$ est bijective de $[0,\ 1]$ dans $[a,\ c]$ (explicitez sa réciproque).

V∼1) Montrez que f est convexe si et seulement si
pour tout triplet $(a,\ c,\ t)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,\ 1]$ on a $f((1-t).a + t.c) \leqslant (1-t).f(a) + t.f(c)$.

V∼2) Montrez que si f est convexe, et h convexe et croissante alors $h \circ f$ est convexe.

VI∼0) Montrez que f est convexe si et seulement si pour tout n uplet $(x_1, \dots x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et tout n-uplet $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ de $(\mathbb{R}^{+*})^n$ on a $f\Big(\dfrac{\lambda_1.x_1 + \ldots + \lambda_n.x_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}\Big) \leqslant \dfrac{\lambda_1.f(x_1) + \ldots + \lambda_n.f(x_n)}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}$.
pour un sens, vous pourrez considérer le cas particulier $n = 2$
pour l'autre sens, vous pourrez faire une récurrence sur n en étudiant $(1-t).\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n} + t.x_{n+1}$ pour $t = \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+1}}$.

VI∼1) Déduisez pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout n uplet $(x_1, \dots x_n)$: $\exp\left(\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \dfrac{e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}}{n}$.

VI∼2) Déduisez pour tout n et tout n uplet de réels strictement positifs $(a_1, \dots a_n)$: $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$.

VI∼3) Montrez pour f convexe et g continue : $f\Big(\dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b g(t).dt\Big) \leqslant \dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b f(g(t)).dt$ *(inégalité de Jensen)*.

Factorielle

L'objectif est de montrer que la fonction factorielle de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est logarithmiquement convexe (c'est à dire que son logarithme est convexe), *puis de montrer qu'il existe une unique application qui généralise la factorielle à $\mathbb{R}^+$ et reste logarithmiquement convexe. On l'appelle fonction* Γ (gamma).

VII∼0) Montrez, pour trois entiers naturels a, b et c vérifiant $a \leqslant b \leqslant c$: $\left(\dfrac{b!}{a!}\right)^{c-b} \leqslant b^{(c-b).(b-a)} \leqslant \left(\dfrac{c!}{b!}\right)^{b-a}$, déduisez que $n \longmapsto \ln(n!)$ est convexe de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

VIII∼0) Pour x réels strictement positif donné et n entier naturel, on pose $I_n(x) = \dfrac{n^x.n!}{x.(x+1)\dots(x+n)}$.

Montrez : $I_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.t^{x-1}.dt = n^x.\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.du$.

Calculez $I_n(3)$ et donnez sa limite quand n tend vers l'infini.

Simplifiez $I_n(p)$ si p est un entier naturel et donnez sa limite quand n tend vers $+\infty$.

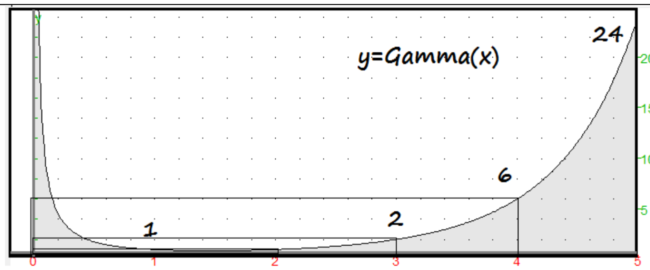
Montrez que chaque application $x \longmapsto \ln(I_n(x))$ est convexe sur $]0,\ +\infty[$.

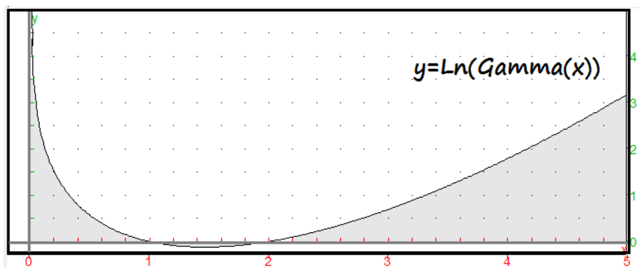
IX$\sim$0) x est un réel strictement positif donné ; montrez : $(t+1)^{x+1} - t^{x+1} \geqslant (x+1).t^x$ pour tout t positif.

IX$\sim$1) Déduisez : $(n+1)^{x+1} \geqslant n^x.(n+1+x)$ pour tout entier naturel n. Déduisez que $(I_n(x))_n$ est une suite croissante.

IX$\sim$2) Montrez pour tout x que la suite $(I_n(x))$ converge. *On pose alors* $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} I_n(x)$.

X$\sim$0) Exprimez $I_n(x+1)$ à l'aide de $I_{n+1}(x)$. Déduisez : $\Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$.





Montrez que $x \longmapsto \ln(\Gamma(x))$ est convexe sur $]0,\ +\infty[$.

Déduisez que Γ est convexe.

On a donc montré que Γ est une fonction logarithmiquement convexe, qui généralise la factorielle à $]0,\ +\infty[$ (en fait, historiquement, à cause de ce sale Gauss, il perdure un décalage depuis toujours : $\Gamma(p) = (p-1)!$).

Lycee Charlemagne | MPSI2 | Annee 2023/24

Unicité

Passons à : « c'est la seule généralisation de la factorielle ».

XI$\sim$0) *Soit f une application de $]0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(1) = 1$, $f(x+1) = x.f(x)$ pour tout x et f est logarithmiquement convexe.* Calculez $f(n)$ pour tout entier naturel n.

XI$\sim$1) *On pose* $g = \ln(f)$. Montrez pour tout x et tout n : $g(x+n) - g(x) - g(n) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\dfrac{x+k}{k}\right)$.

XI$\sim$2) Montrez pour k entier, plus grand que x : $\dfrac{g(n)-g(n-1)}{1} \leqslant \dfrac{g(x+n)-g(n)}{x} \leqslant \dfrac{g(n+k)-g(n)}{k}$.

XI$\sim$3) Déduisez : $\dfrac{g(x+n)-g(x)}{x} - \ln(n) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.

XI$\sim$4) Déduisez $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(x.\ln(n) - \ln(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\dfrac{x+k}{k}\right)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(I_n(x))$.

$\circ 3 \circ$ Il parait que l'application $x \longmapsto |2.x - 2.[x] - 1|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$, prouvez le. Prouvez aussi qu'elle est périodique. Calculez son intégrale de 0 à 3.

$\circ 4 \circ$ Pour tout n, on définit $f_n = x \longmapsto x^n/n!$ de $[0,\ 2]$ dans $\mathbb{R}$.
Déterminez $||f_n||_\infty$ pour tout n.
Montrez que pour tout x de $[0,\ 2]$, $(f_n(x))$ converge vers un réel que l'on notera $f(x)$.
Représentez graphiquement f et calculez $||f||$.
Déterminez $||f_n - f||_\infty$ pour tout n.
Déterminez $||f_n||_p$ pour tout naturel strictement positif p. Déterminez la limité de $||f_n||_p$ quand p tend vers l'infini.

Rappel : $||f||_\infty = Sup(|f(t)| \mid t \in D_f)$ et $||f||_p = \sqrt[p]{\int_{D_f} |f(t)|^p.dt}$.

∘5∘ ♡ Montrez que si f est càdlàg et paire, alors elle est continue en tout point.
La composée de deux applications càdlàg est elle càdlàg ?
La composée de deux applications càdlàg croissantes est elle càdlàg ?
Si f est càdlàg et g continue, qui est càdlàg ? $f\circ g$ ou $g\circ f$.

Rappel càdlàg = continue à droite en tout point et avec des limites à gauche.
Pour tout a, $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ existe (pas forcément égal à $f(a)$) et $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=f(a)$.

∘6∘ Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt[\ln(n)]{\dfrac{\ln(n)}{n}}$.
Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n^{1/\sqrt{n}}$.
Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt{n}^{1/n}$.

∘7∘ ♡ Montrez qu'on a $n\sim_{n\to+\infty} n+1$ mais pas $\sin(n)\sim_{n\to+\infty}\sin(n+1)$.
♡ Montrez qu'on a $n\sim_{n\to+\infty} n+k$ pour tout k, mais qu'on n'a pas $n\sim_{n\to+\infty} n+n$.

∘8∘ Résolvez $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$ d'inconnue réelle x *(peut on considérer que 0 est solution ?)*

∘9∘ Montrez que si f est paire et dérivable, alors f' est impaire.
Donnez un contre-exemple à "f impaire implique f' paire".

∘10∘ Prolongez par continuité en 0 $t\longmapsto \dfrac{\sin\left(\frac{2.q+1}{2}.t\right).\sin\left(\frac{2.p+1}{2}.t\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$ (notée $f_{p,q}$), et montrez $\int_{-\pi}^{\pi} f_{p,q(t)}.dt = 2.\pi.(Min(p,q)+1)$.

∘11∘ A l'École Nationale de Robotique / Université de Technologie, cent cinquante élèves suivent les cours d'anglais, cent suivent les cours de chinois, trente sont bilingues (anglais/chinois) et quatre vingt dix ne suivent aucune de ces deux langues. Combien y a-t-il d'élèves ?

∘12∘ Montrez que l'ensemble des matrices de spectre rationnel (les valeurs propres sont dans $\mathbb{Q}$) n'est stable ni par addition, ni par multiplication.

∘13∘ On veut étudier les variations de $x\longmapsto \dfrac{\ln(x^2+1)}{x+1}$ sur $]-\infty,\ +\infty[$ (notée f). Montrez que f' est du signe de $x\longmapsto \dfrac{2.x^2+2.x}{x^2+1}-\ln(1+x^2)$ (notée g).
Montrez que g' est négative sur $]-1,\ 1[$ et positive sur $]1,\ +\infty[$.
Déduisez que f est décroissante, croissante puis décroissante.

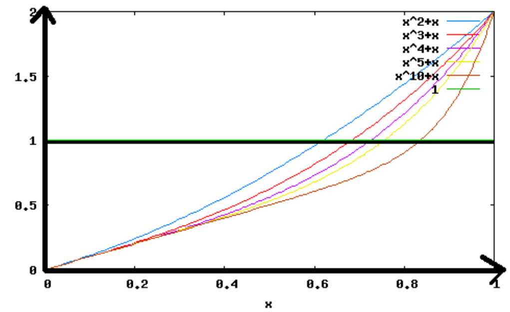
∘14∘ On définit :

$F(x)=\left(\int_0^x e^{-t^2}.dt\right)^2$	$\phi(x)=\left(\int_0^1 e^{-t^2}.dt+\int_1^x e^{-t}.dt\right)^2$

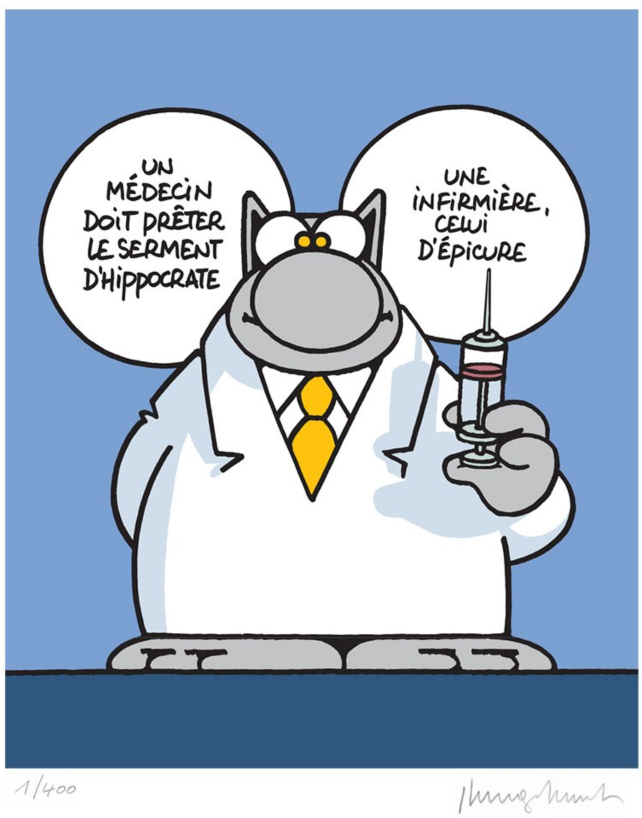
Montrez que F est croissante sur $\mathbb{R}^+$, majorée par ϕ sur $[1,\ +\infty[$. et admet une limite en $+\infty$ qu'on ne calculera pas (c'est le but de l'exercice).
Calculez F'.
On définit aussi

$G(x)=\int_0^1 \dfrac{e^{-x.(1+t^2)}}{1+t^2}.dt$	$H(x)=-\int_0^1 e^{-x.(1+t^2)}.dt$

Montrez pour x et $x+h$ positifs : $\left|G(x+h)-G(x)-h.H(x)\right|\leqslant \dfrac{h^2}{2}.\int_0^1(1+t^2).e^0.e^{2.|h|}dt$. Déduisez que G est dérivable de dérivée H.
Montrez que $x\longmapsto F(x)+G(x^2)$ est constante (valeur) ?
Montrez : $0\leqslant G(x)\leqslant \int_0^1 \dfrac{e^{-x}}{(1+t^2)}.dt$. Calculez alors $\lim_{x\to+\infty} G(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
Maintenant qu'on a $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}.dt=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrez moi $\int_0^{+\infty} e^{-u^2-\frac{1}{u^2}}.du=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2.e^2}$.



∘15∘ ♡ Montrez que pour tout n l'équation $x^n + x = 1$ admet une unique racine sur $[0,\ 1]$ (on introduira l'application $x \longmapsto x^n + x$ que l'on pourra noter φ_n). La racine en question sera notée x_n. Montrez $\varphi_{n+1}(x_n) < 0$. Déduisez que la suite (x_n) est croissante. Montrez qu'elle converge.
On note α sa limite et on suppose $\alpha < 1$. Montrez alors par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0$. Déduisez $\alpha = 1$. Concluez.



Les dures luttes sont pénibles quand on n'a que vingt ans.
Le prof de français trouve les jeux de Queneau un peu ridicules.
La latiniste n'apprécie pas les bottes antiques.
On a besoin de l'été pour se dépasser.
Il est arrivé officier en peinant.
Agités dans le Vexin, ils séduisent dans le Perche.
Elle n'apprécie pas les cakes de mimolette (translation).
Des tombones gênent votre Pise.

Règle du jeu : sur chaque ligne, les lettres de A à D et une case transparente. Et au bout, l'indication de « qui on voit depuis ce bord ».

	A	C		A		
	A	C	D		B	
D	D	B	C	A		A
A		A	B	D	C	
C	C		A	B	D	D
	B	D		C	A	

∘16∘ Montrez : $\sum\limits_{p=2}^{+\infty} (-1)^p.(\zeta(p)-1) = \frac{1}{2}$ après en avoir prouvé l'existence.

∘17∘ On définit $S(p) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$. Prouvez l'existence de $S(p)$ pour tout p de $\mathbb{N}^*$.

Sachant $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, calculez $S(2)$ et $S(4)$.
Montrez que S est décroissante.

Pouvez vous calculer $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} S(p)$.

Pourvez vous calculer $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1}.S_p$?

∘18∘ Montrez que si la série à termes positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (avec une limite non nulle), alors la série à termes positifs $\frac{a_0 + \ldots + a_n}{n+1}$ ne converge pas.

∘19∘ On note L_2 l'espace des suites réelles de carré sommable (les (a_n) telles que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (a_n)^2$ existe).

Montrez que pour (a_n) et (b_n) dans L_2 alors la série de terme général $a_n.b_n$ est absolument convergente (pensez à

une majoration avec des $a(_n)^2$ et des $(b_n)^2$).
déduisez que L_2 est stable par addition et multiplication par un réel (oh, oui, un espace vectoriel).

∘20∘ Montrez l'existence de chaque $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ (noté a_n) et montrez que la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et calculez sa somme.

∘21∘ d_n est le nombre de diviseurs positifs de n. Montrez que la série de terme général $\frac{d_n}{2^n}$ converge.
Montrez que la série de terme général $\frac{1}{2^n - 1}$ ($n > 0$ évidemment) converge.
Comparez les deux sommes obtenues.

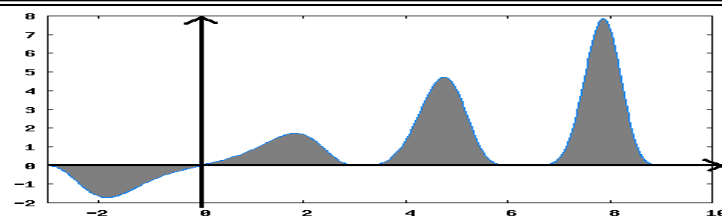
∘22∘ Prolongez par continuité en 0 l'application $x \longmapsto (x+1)^{\ln(x)}$. Montrez qu'elle est décroissante puis croissante sur $]0, +\infty[$.

∘23∘ ♡ Étudiez $u_{n+1} = \frac{(u_n)^3 + 1}{3}$ *(discutez en fonction de u_0, en nommant les racines de l'équation $x^3 + 1 = 3.x$, sans chercher à les calculer).*

∘24∘ ♡ u_0 donné. $u_{n+1} = 3.Arcsin(u_n)/\pi$. Discuter.

∘25∘ $u_{n+1} = u_n + \frac{1 + u_n}{1 + 2.u_n}$. Vous savez ce qu'il vous reste à faire.

∘26∘ Prolongez par continuité en 0
$x \longmapsto |\sin(x)|^{|x|}.x$.
Est elle alors dérivable en 0 ?
Est elle dérivable en π ?



∘27∘ Prolongez par continuité en 0 $t \longmapsto \frac{t}{e^t - 1}$ et donnez alors sa dérivée en 0 (notée b) puis la position du graphe par rapport à sa tangente. Vérifiez que $f - b.Id$ est paire. Donnez le coefficient de t^9 dans le développement limité de f en 0.

∘28∘ Montrez de plusieurs façons : $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1).x^n$ pour $|x| < 1$ (Taylor, série géométrique qu'on dérive ou qu'on multiplie par elle même).

∘29∘

I∼0) On définit la suite (B_n) par $\boxed{B_0 = 1 \text{ et } \forall n,\ B_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.B_p}$ Calculez B_n pour n de 0 à 5.

I∼1) Écrivez un script **Python** qui pour n donné calcule B_n.[1]
I∼2) Montrez que (B_n) est une suite d'entiers naturels qui diverge vers $+\infty$.
I∼3) Montrez pour tout n : $B_n \geqslant 1$, $B_n \geqslant 2^{n-1}$, $B_n \geqslant \frac{3^{n-1}}{2}$.

II∼0) On pose $\boxed{E = x \longmapsto e^{(e^x)}}$ Montrez pour tout n : $E^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}. \exp .E^{(k)}$.
Déduisez $\forall n,\ e.B_n = E^{(n)}(0)$.

III∼0) p est un entier naturel fixé, montrez que $\left(\frac{2^k.k^p}{k!}\right)_k$ tend vers 0 à l'infini et est majorée.

1. niveau physique : `from math import binomial`, niveau PC : je reconstruis `binomial` mais en recréant déjà `factorielle`, niveau MP ou PSI : je reconstruis `binomial` mais sans factorielle, car je suis intelligent (pléonasme)

III$\sim$1) Déduisez que $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{k^p}{k!}\right)_N$ est une suite croissante majorée qui converge vers une limite qu'on va noter $\boxed{A_p}$ sans la calculer.
III$\sim$2) Calculez quand même A_0.
III$\sim$3) Montrez pour tout n : $A_{n+1}=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.A_p$.
III$\sim$4) Donnez la relation entre (A_n) et (B_n) .

IV$\sim$0) Pour tout λ strictement positif, on pose $\boxed{\phi_\lambda = x \longmapsto x - x.\ln(x) + \lambda.\ln(x)}$ définie sur $]0,\ +\infty[$.
Donnez les limites de ϕ_λ aux bornes de son domaine de définition[2]. Montrez que ϕ_λ admet un maximum, atteint en un unique réel qu'on notera α_λ (dont on prouvera l'existence mais qu'on ne déterminera pas explicitement).
IV$\sim$1) Montrez pour tout x supérieur ou égal à -1 :

$$\phi_\lambda(\alpha_\lambda.(1+x)) = \phi_\lambda(\alpha_\lambda) + (\alpha_\lambda - \lambda).(x - \ln(1+x)) - \alpha_\lambda.x.\ln(1+x)$$

V$\sim$0) n est fixé dans $\mathbb{N}^*$. On définit $\boxed{f_n = x \longmapsto \begin{cases} 0 & si \quad x \leqslant 0 \\ e^x.x^{n-x-\frac{1}{2}} & si \quad x > 0 \end{cases}}$
Montrez que f_n admet sur $\mathbb{R}^+$ un maximum, atteint en un unique point $\boxed{\mu_n}$
V$\sim$1) f_n est elle continue sur $\mathbb{R}$?
V$\sim$2) $f_n$est elle dérivable sur $\mathbb{R}$ (même en 0 , à droite et à gauche ?).
V$\sim$3) Montrez : $1 < \mu_1 < 2 < \mu_2$ (pour info : $\ln(2^4) < 3$).
V$\sim$4) Montrez pour n supérieur ou égal à 3 : $\sqrt{n} < \mu_n < n$.
V$\sim$5) Justifiez : $\mu_n = o(n)_{n\to+\infty}$ et $\mu_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\ln(n)}$.
V$\sim$6) Soit α un réel de $]0,\ 1[$, montrez : $n^\alpha = o(\mu_n)_{n\to+\infty}$.

VI$\sim$0) On définit ensuite $\boxed{g_n = x \longmapsto \dfrac{1}{f_n(\mu_n)}.f_n\Big(\mu_n.\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)}$ Justifiez pour tout x :

$$f_n(x) = f_n(\mu_n).g_n\Big(\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}.x - \sqrt{n}\Big)$$

VI$\sim$1) Donnez l'allure du graphe de g_n.
VI$\sim$2) Montrez que pour tout x, la suite $(g_n(x))$ converge vers un réel qu'on notera tout naturellement $g(x)$ et que vous expliciterez.
VI$\sim$3) Montrez qu'il existe un rang n_0 à partir duquel on a pour tout x de $]-\sqrt{n},\ +\infty[$:

$$g_n(x) \leqslant \exp\Big(-\frac{n}{2}.\Big(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)\Big)$$

VII$\sim$0) On définit $\boxed{u = x \longmapsto \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}}$
Prolongez u par continuité en 0 pour qu'elle soit définie continue sur $]-1,\ +\infty[$. L'est elle sur $[-1,\ +\infty[$.
VII$\sim$1) Démontrez que u est décroissante, et donnez son signe.
VII$\sim$2) Déduisez pour tout n supérieure ou égal à n_0 défini plus haut : $g_n(x) \leqslant \exp\Big(-\dfrac{x^2}{4}\Big)$ pour tout x négatif et $g_n(x) \leqslant \exp\Big(-\dfrac{x-\ln(1+x)}{2}\Big)$ pour tout x positif.

Au final, après encore une partie, le sujet Mines-Ponts arrive à $\boxed{B_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\mu_n}}{\mu_n.\sqrt{n}}.\Big(\dfrac{\mu_n}{e}\Big)^{n+\frac{1}{2}}}$
Mais j'ai ajouté la partie Python, et étiré quelques questions pour vous, faute de matériel et de théorèmes.

---

2. en 0, vous pourrez poser $x=\dfrac{1}{X}$ si la forme indéterminée vous embête